UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Présenté par :

♦ BAHAMMOU Hayat

Encadré par :

♦ Pr. EZZAKI Fatima (FSTFes)

Soutenu Le 10 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr. EZZAKI Fatima
- Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSI Rachid
- Pr. AMMOR Ouafae

Stage effectué à FSTFes

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Pr. FATIMA EZZAKI pour son encadrement, et son aide. Elle m'a donné beaucoup de conseils et critiques constructives pour améliorer la qualité de mon travail.

Je voudrais aussi adresser mes sincères remerciements à tous les professeurs de la FST de Fès pour leurs enseignements et les cours intéressants qu'ils nous ont donné pendant nos études à la FST.

Mes remerciements vont aussi à tous les jeunes mathématiciens et mathématiciennes avec mes sentiments les plus respectueuses.

Enfin, un grand merci à mes parents, et à tous les membres de ma famille de leur immense encouragement au cours de mon cursus universitaire.

INTRODUCTION

Ce document comporte le rapport de mon recherche que j'ai effectué sous la direction de Pr. FATIMA EZZAKI.

Dans ce rapport je présente une introduction sur l'étude des espaces vectoriels topologiques localement convexes.

La topologie de ces espaces est définie par une famille de semi-normes. L'importance de ces espaces et leur utilité sont prouvées dans plusieurs domaines comme l'analyse fonctionnelle, analyse convexe et autres…

Le premier chapitre est consacré aux espaces vectoriels normés

Le second chapitre étudie quelques propriétés des espaces de Banach.

Le dernier chapitre traite les premiers notions et propriétés des espaces localement convexes : Espace vectoriel topologique, filtre, topologie définie par une famille de semi-norme, espaces localement convexes métrisables, topologie faible.

TABLE DE MATIERES

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS NORMES

1.1Généralités

1.1.1 Définitions :

Définition 1.1.1 :
Soit E un K-espace vectoriel. Une norme est une application $\|.\|$ définie de E dans R^+ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall\, x \in E$
2. $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \| \quad \forall\, x \in E \,; \forall\, \lambda \in R$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \quad \forall\, x; y \in E$ (Inégalité triangulaire)

Définition 1.1.2 :
Un K-espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$, est un espace vectoriel normé (en abrégé : e.n.v). On note (E, $\|.\|$).

Proposition 1.1.3 :
Une norme sur un e.v.n est une application continue.

Proposition 1.1.4 :
Soit E un espace vectoriel normé, l'application :

$d: (x, y) \in E \times E \longmapsto \|x - y\| \in R^+$ est une distance sur E.

Un espace vectoriel normé sera toujours muni, sauf mention expresse du contraire, de la topologie associée à la distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Un e .v.n est donc muni d'une structure d'un espace métrique : toutes les propriétés des espaces métriques lui sont donc applicables.

1.2 Exemples des espaces vectoriels normées :

- $E = R$ est un espace vectoriel normé avec la norme usuelle $|x|$;
- R^n muni des normes suivantes :
  - $\|x\|_\infty = sup_{1\leq i\leq n}\|x_i\|$
  - $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$
  - $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2}$

Sont des espaces normés ;

- $\mathrm{M}_n(R)$ muni des normes suivantes est un espace vectoriel normé
  - $\|A\|_\infty = sup_{1\leq i,j\leq n}\|a_{ij}\|$;
  - $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|$;
  - $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}\|^2}$; avec $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

1.3 Norme d'Algèbre

Définition 1.3.1 :

Soit $(\mathcal{A}, +,\times,.)$ un K-algèbre. On appelle norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$ toute norme N sur le K –espace vectoriel $\mathcal{A}$ qui vérifie de plus :

$$\forall(x; y) \in \mathcal{A}^2, N(x \times y) \leq N(x) \times N(y)$$

On dit alors que $(\mathcal{A}, N)$ est une algèbre normée.

Rappel :

On appelle K-algèbre tout K-ev $(A,+,\times,\cdot)$ muni de plus d'une loi de composition interne $\times$ vérifiant :

— $\times$ est distributive sur +

— $\times$ est associative

$-\forall\, x, y \in A^2, \forall \lambda \in K, \qquad \lambda.(x \times y) = (\lambda . x) \times y = x \times (\lambda . y)$

On dit que A est unitaire lorsqu'il existe une unité e, élément neutre pour $\times$:

$\forall x \in A, x \times e = e \times x = x.$

Exemples :

- $\mathrm{M}_n(R)$ est une K-algèbre unitaire (d'unité I_n)

- Si E est un K-ev $(L(E), +, \circ)$ est une K-algèbre unitaire d'unité Id_E).

Remarque 1.3.2:

Si A est une algèbre unitaire non nulle, alors $N(e) \geq 1$

En effet, on a alors $e \neq 0$, et $N(e) \leq N(e) \times N(e)$donc $1 \leq N(e)$

On appelle norme d'algèbre unitaire sur A toute norme d'algèbre N qui vérifie de plus $N(e) = 1$.

Exemple :

Soit X un ensemble, et $B(X, K)$ l'algèbre des fonctions bornées de X dans K (pour la multiplication usuelle). Alors N_∞ est une norme d'algèbre :

Soit $(f, g) \in B(X, K)^2$

Alors $\forall x \in X \; |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq N_\infty(f)N_\infty(g)$,

d'où $N_\infty(fg) \leq N_\infty(f)N_\infty(g)$.

Théorème 1.3.3:

Soient (A, N) une K-algèbre normée, $n \in N$, (u_n) et (v_n) deux suites de A.

Si (u_n) admet une limite $a \in A$, et (v_n) une limite $b \in A$ alors $(u_n v_n)_{n \in N}$ converge, de limite ab.

Démonstration :

$u_n \longrightarrow_{n\to\infty} a$ et $v_n \longrightarrow_{n\to\infty} b$, donc (u_n) et (v_n) sont bornées, disons par. $M > 0$

Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in N$ tel que

$\forall n \geq n_0$; $\begin{cases} N(u_n - a) \leq \frac{\varepsilon}{2M} \\ N(v_n - b) \leq \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases}$. De plus, $N(a) \leq M$ et $N(b) \leq M$.

Donc, pour $n \geq n_0$:

$N(u_n v_n - ab) = N(u_n v_n + u_n b - u_n b - ab)$

$\leq N(u_n v_n - u_n b) + N(u_n b - ab)$

$\leq N(u_n)N(v_n - b) + N(b)N(u_n - a)$

$\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} \leq \varepsilon \quad ((u_n)\ est\ bornée)$.

D'où la convergence et la limite.

1.4 Notions topologiques

1.4.1 Voisinage d'un point :

Définition 1.4.1:

Voisinage : $(E, \|.\|_E)$ est un R-espace vectoriel normé, a un élément de E. On appelle voisinage de a dans E toute partie de E contenant une boule ouverte de centre a.

Notation : $V(a)$ désignera l'ensemble des voisinages de a dans E.

Propriété 1.4.2

1. Toute partie de E contenant un voisinage de a est un voisinage de a.
2. Toute réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.
3. Une intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a.

1.4.2 Ouverts, et fermés :

Ouverts

Définition 1.4 .3:

$(E_{,} \|.\|_E)$ est un R-espace vectoriel normé. Une partie $\mathcal{O}$ de E est un ouvert de E si $\mathcal{O}$ est voisinage de chacun de ses points, c'est-à- dire si :

$$\forall x \in \mathcal{O}\ \exists r_x > 0\ B(x; r_x) \subset \mathcal{O}$$

Propriétés 1.4.4 :

Soit $(E_{,} \|.\|_E)$ un R-espace vectoriel normé.

1. Toute boule ouverte est un ouvert de E.
2. La réunion quelconque d'une famille d'ouverts de E est un ouvert de E.
3. L'intersection finie d'une famille d'ouverts de E est un ouvert de E.

Fermés :

Définition 1.4.5 :

$(E_{,} \|.\|_E)$ est un R-espace vectoriel normé, F est une partie de E, F est un fermé de E si son complémentaire $E \setminus F$ dans E est un ouvert de E c'est –à-dire :

$(\forall x \notin \mathrm{F})\ (\exists r_x > 0)\ \ B(x, r_x) \cap \mathrm{F} = \emptyset.$

Propriétés 1.4.6 :

Soit $(E_{,} \|.\|_E)$ un R-espace vectoriel normé.

1. Toute boule fermée est un fermé de E. (un singleton est un fermé de E).

2. Toute sphère est un fermé de E.

3. La réunion finie d'une famille de fermés de E est un fermé de E.

4. L'intersection quelconque d'une famille de fermés de E est un fermé de E.

Remarque 1.4.7 :

E et $\emptyset$ sont des ouverts et des fermés de E.

1.4.3 Intérieure, adhérence :

Définitions 1.4.8:

Intérieur :

Soit A une partie de E, la réunion des ouverts de E inclus dans A est un ouvert de E inclus dans A, c'est le plus « gros » ouvert de E inclus dans A, on l'appelle intérieur de A.

On note $\mathring{A}$ intérieur de A. On a $\mathring{A} \subset A$.

Proposition 1.4.9 :

Un point a est dit intérieur à A si $a \in \mathring{A}$ c'est –à- dire si :

$$\exists r > 0 \; B(a, r) \subset \mathring{A}$$

Proposition 1.4.10:

A est un ouvert de E si, et seulement si $A = \mathring{A}$.

Adhérence :

Soit A une partie de E, l'intersection des fermés de E qui contiennent A est un fermé de E qui contient A, c'est le plus « petit » fermé qui contient A, on l'appelle adhérence de A.

On note : $\bar{A}$ l'adhérence de A, on a $A \subset \bar{A}$.

Proposition 1.4.11 :

Un point a est dit adhérent à A si $a \in \bar{A}$, c'est –à- dire si toute boule ouverte de centre a rencontre A.

Proposition 1.4.12 :

A est un fermé de E si, et seulement si $A = \bar{A}$.

1.5 CONTINUITE

1.5.1 La continuité en un point a :

Définition 1.5.1 :

Soient $(E, \|.\|_E); (F, \|.\|_F)$ deux K −espaces vectoriels normés, A est une partie de E, f est définit de A dans F .on dit que f est continue au point a si, et seulement si, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, si

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha(\varepsilon) > 0\ \forall x \in A\ \| x - a \|_E \ \leq \alpha \Longrightarrow \| f(x) - f(a) \|_F \leq \varepsilon$

1.5.2 La composition

Proposition 1.5.2 :

Soient $(\mathrm{E}, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F), et\ (G, \|.\|_G)$ trois k −espaces vectoriels normés.

A une partie non vide de E, $a \in A$, B une partie non vide de F, $b \in B$, f de A dans F et g de B dans G avec $f(A) \subset\ B$ et $f(a) = b$.

Si f est continue en a et g est continue en b, alors $g \circ f$ est continue au point a.

Proposition 1.5.3:

Soit f de A dans F, $a \in A$, f est continue au point a si, et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments à A converge vers a, la suite $(f(\ u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Définition 1.5.4:

Soient $((E_, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ désignent deux R-espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E.

Une application f de A dans F est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Proposition 1.5.5 :

Soit f de A dans F. Il y a l équivalence entre :

1. f est continue sur A.

2. L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de A.

3. L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de A.

Exemples :

Soit f de $(E_, \|.\|_E)$ dans R continue sur E.

1. $A = \{x \in E : f(x) = 0\}$ est un fermé de E.

2. $A = \{x \in E : f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.

1.5 .3 Uniforme continuité

Soient $(E_, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ désignent deux R-espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E.

Une application f de A dans F est uniformément continue sur A si.

$$\forall \varepsilon \geq 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall (x, y) \in A^2 \ \| x - y \|_E \ \leq \alpha \ \Rightarrow \ \| f(x) - f(y) \|_F \leq \varepsilon$$

Proposition 1.5.6 :

Une application f est uniformément continue sur $A \ \Rightarrow \ f$ est continue sur A. la réciproque est fausse.

1.5.4 Applications lipchitzienne

Soient $(E_, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ désignent deux K-espaces vectoriels normés et A une partie non vide de E. Une application f de A dans F, k un réel positif. On dit que f est $k - lipchitzienne$ sur A si

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad \| f(x) - f(y) \|_F \leq k \| x - y \|_E$$

Remarque 1.5 .6 :

Si $k \ < \ 1$, on dit que f est contractante.

Proposition 1.5.7 :

Si f est lipchitzienne continue sur A, f est uniformément continue sur A, donc continue sur A.

1.5 .5 Caractérisation des applications linéaires :

Soient $(E_, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$ les espaces des applications linéaires continues. On appelle dual topologique de E et on note $E' = \mathcal{L}(E; K)$ l'espace des formes linéaires continues sur E.

Proposition 1.5.8 :

Soient $(E_, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f: E \ \longmapsto F$ est continue si, et seulement, s'il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in E \ \ \| f(x) \|_F \ \leq c \| x \|_{\mathrm{E}}$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Si f est une application linéaire continue de E dans F, il existe $\rho > 0$ tel que la boule fermée de E, $B'_E(0; \rho)$, soit incluse dans

f^{-1} $(B'_F(0; 1))$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$ le vecteur (ρ / ($\| x \|_E$) x appartient à $B'_E(0; \rho)$, d'où

$\| f((\rho/\| x \|) x) \| = (\rho/\| x \|) \ \| f(x) \| \leq 1$. Il suffit de prendre $c = 1 / \rho$.

Et on obtient $\quad \| f(x) \| \leq c \| x \|$.

$\Leftarrow$ Si on a la constante c alors on a

$$\forall x; y \in E \ \ \| f(y) - f(x) \| = \| f(y - x) \| \leq c \| y - x \|$$

et l'application linéaire f est Lipchitzienne (la proposition 1.5.7)

Théorème 1. 5.9:

Soient $(E, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit f une application linéaire de E vers F. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en 0_E.
2. f est continue sur E.
3. f est bornée sur toute partie bornée de E.
4. il existe une constante $c > 0$, telle que pour tout $x \in E$

$$\| f(x) \| \leq c \| x \| \ .$$

Démonstration :

1. $\Rightarrow$ 2. Si $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} x, x_n - x \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, et donc d'après 1.

$f(x_n - x) \longrightarrow_{n\to\infty} f(0) = 0$. D'où $f(x_n) - f(x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ ie. $f(x_n) \longrightarrow_{n\to\infty} f(x)$.

2. $\Rightarrow$ 3. f étant continue en 0 et $f(0) = 0$ on a :

$$\exists \rho \geq 0, \ f(B_E(0; \ \rho)) \subset B_F(0; \ 1)$$

où $B_E(0;\ \rho) = \{x \in E;\ \|x\| < \rho\}$ et $B_F(0;1) = \{x \in F;\ \|x\| < 1\}$. D'où, pour tout $\lambda \in K,\ \lambda. f(B_E(0;\rho)) \subset \lambda. B_F(0;1)$, d'où

$$f(B_E(0;|\lambda|\rho)) \subset B_F(0;|\lambda|)$$

Soit M un borné de E. Soit $R > 0$ tel que $M \subset B_E(0;R)$. Choisissant λ tel que $|\lambda|\rho = R$, on obtient

$$f(B_E(0;\ R)) \subset B_F(0;\ R/\rho)$$

Et finalement

$$f(M) \subset f(B_E(0;\ R)) \subset B_F(0;\ R/\rho)$$

C'est-à-dire $f(M)$ est borné dans F.

3. $\Rightarrow$ 4. Si $x = 0$ c'est évident. Soit $x \neq 0$ fixé. La sphère

$S = \{y \in E;\ \|y\| = 1\}$ est bornée donc par hypothèse $f(S)$ est bornée. Soit $k > 0$ tel que $f(S) \subset B_F(0;\ k)$. On déduit que pour tout

$y \in E, \|y\| = 1$ verifie $\|f(y)\| \leq k$.

Maintenant on utilise un argument d'homogénéité : soit $y = \frac{x}{\|x\|} \in E$.

$\|f(y)\| \leq k$, on a $\left\|f(\frac{x}{\|x\|})\right\| \leq k$ et la linéarité de f, et la propriété (2.) de la norme entraine $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.

4. $\Rightarrow$ 1. Soit $x_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. On a $\|f(x_n)\| \leq k\|x_n\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ donc $f(x_n) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

De plus, pour tous $x, y \in E$, $\|f(x - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq k\|x-y\|$, donc f est k-lipchitzienne sur E.

Proposition 1 .5.10 :

La quantité suivante : $\| f \| = sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = sup_{\|x\|_E=1} \| f(x) \|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}(E;\ F)$.

Démonstration :

L'égalité $\| f \| = 0$ entraîne que $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$ (et de plus $f(0) = 0$ car f est linéaire). L'homogénéité et l'inégalité triangulaire s'obtiennent facilement :

$$\| \lambda f \| = sup_{\|x\|=1} \| \lambda f(x) \|_F = |\lambda| \, sup_{\|x\|=1} \| f(x) \|_F = |\lambda| \| f \| .$$

Et $\| f + g \| \leq sup_{\|x\|=1} \| f(x) + g(x) \|$

$$\leq sup_{\|x\|=1} \| f(x) \| + sup_{\|x\|=1} \| f(x) \|$$

$$\leq \| f \| + \| g \| .$$

On a des propriétés similaires des applications bilinéaires et même multilinéaires.

Proposition 1 .5.11 :

Soient $(E_1, \|.\|_1)$; $(E_2, \|.\|_2)$ et $(F, \|.\|_F)$ trois K−espaces vectoriels normés, soit T une application bilinéaire $T: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ est continue si, et seulement, s'il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall (x, y) \in E_1 \times E_2$ $\| T(x, y) \|_F \leq c \| x \|_{E_1} \| y \|_{E_2}$.

Démonstration:

La démonstration est la même pour le cas linéaire.

Proposition 1 .5.12 :

Soient $(E, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ et $(G \|.\|_G)$ trois K −espaces vectoriels normés, alors pour $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ la composée $g \circ f \in \mathcal{L}(E; G)$ et on a $\| g \circ f \|_{\mathcal{L}(E;G)} \leq \| g \| \| f \|$.

Démonstration :

Elle est claire que la composée $g \circ f$ linéaire et continue, de plus on a pour $x \in E$ on a $\| g \circ f(x) \|_G = \| g[f(x)] \|_G \leq \| g \| \| f(x) \|_F$

$$\leq \| g \| \| f \| \| x \|_E$$

D'où $\| g \circ f \| \leq \| f \| \| g \|$.

1.6 Topologie d'un R-espace vectoriel normé :

Définition 1.6. 1:

Soit $(E, \|.\|_E)$ un R-espace vectoriel normé, on appelle topologie de E l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}$ de E vérifie :

i. $\emptyset \in \mathcal{O}, et\ E \in \mathcal{O}$
ii. $\forall U, V \subset E, U \cap V \in \mathcal{O}$
iii. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$

1.7 Compacité dans un espace vectoriel normé

1.7.1 Recouvrement :

Définition 1.7.1 :

Soit E un ensemble et A une partie de E, on appelle recouvrement de A toute famille $(A_i)_{i\in I}$ des parties de E telles que $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ recouvre A, si $(A_i)_{i\in I}$ est une recouvrement de A, on appelle un sous -recouvrement de $(A_i)_{i\in I}$ toute famille $(A_i)_{i\in J}$ avec $J \subset I$ qui recouvre A.

1.7.2 Partie compacte :

Définition 1.7.2 :

Une partie A de E est dite compacte si toute suite de A admet une suite extraite converge vers un point de A.

Définition 1.7.3 :

Soit E un espace topologique, on dit que E est un compact si tout recouvrement de E admet un sous-recouvrement fini.

Exemple :

Considérons l'espace vectoriel R muni de la norme usuelle $|.|$, soit $[a\ , b]$ un intervalle de R avec $a < b$, alors $[a\ , b]$ est un compacte de R. En effet, soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $[a, b]$. Alors en vertus du théorème de Bolzano-Weierstrass, $(u_n)_{n\in N}$ étant bornée, on peut extraire de $(u_n)_{n\in N}$ une sous-suite convergente dans $[a, b]$.

La propriété qui suit est fondamentale. Elle donne des propriétés générales des compacts. Elle sera précisée dans le cas où l'on considère un espace vectoriel normé de dimension finie, ce qui simplifiera grandement notre étude.

Proposition 1.7.4 :

Soit $\left(E_{,} \|.\|_{E}\right)$ un espace vectoriel normé, et X, un compact de E.

Alors, X est une partie fermée et bornée de E.

Remarque 1.7.5 :

La réciproque de cette propriété n'est pas toujours vraie. A savoir, un compact de E est toujours fermé et borné, mais un fermé borné n'est pas nécessairement compact. En dimension finie, on a l'équivalence entre ces deux notions.

Remarque 1.7.6 :

Un espace vectoriel normé $\left(E_{,} \|.\|_{E}\right)$ n'est jamais compact. En effet, E n'est pas borné...

Propriété 1.7.7 :

Soit $\left(E_{,} \|.\|_{E}\right)$ un espace vectoriel normé, et X un compact de E, et Y est une partie fermée de X, alors Y est compacte.

Démonstration

C'est immédiat. En effet, soit $(y_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de Y. Alors, puisque $Y \subset X$ et que X est compact, on peut extraire de Y une sous-suite convergente dans X. Mais, puisque Y est fermé, toute suite convergente d'éléments de Y converge dans Y. On a donc démontré que, de toute suite d'éléments de Y, on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème 1.7.8 :

Soit X une partie compacte de $\left(E_{,} \|.\|_{E}\right)$, et Y une partie compacte de

$(F, \|.\|_F)$, alors $X \times Y$ est compact.

Remarque 1 .7.9 :

Dans les conditions rappelées dans le théorème ci-dessus, on dit que X × Y est compact dans l'espace vectoriel E ×F, muni de la norme induite définie pour $x \in X,\ y \in Y$ par : $N(x,y) = \| x \|_E + \| y \|_F$.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite de X × Y. Alors,$\forall n \in N, u_n = (x_n, y_n)$, où $(x_n \in X)$ et $(y_n \in Y)$. Puisque X est compact, il existe une application φ: N ⟶ N strictement croissante, telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est convergente, de limite dans X est x. De même, Y étant compact, on en déduit l'existence d'une application strictement croissante ψ: N ⟶ N telle que $y_{\psi(n)}$converge vers $y \in Y$. Toute suite extraite d'une suite convergente étant convergente, on en déduit que :

$\lim_{n\to\infty}(\ u_n = (x_n, y_n)) = (x,y) \in X \times Y$. Autrement dit, $X \times Y$ est compact.

Théorème 1.7.10 :(de Tychonoff):

Le produit des compacts est un compact.

1.8 La compacité et la continuité :

Dans cette partie, je commence par donner quelques résultats sur les images de compacts par des applications continues et sur le lien entre des applications continues sur un compact et des applications uniformément continues sur un compact (théorème de Heine).

Théorème 1.8.1 :

Soient $(E, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ deux K−espaces vectoriels normés, f est une application continue définit de E dans F, X est une partie compacte de E, alors $f(X)$ est compacte.

Corollaire 1.8.2 :

Soit X un compact non vide de E, et f est continue sur X à valeurs réelles, alors f est bornée, et atteint ses bornes.

Démonstration :

On sait que $f(X)$ est compact d'après le théorème 1.8.1 précédent. Il est donc borné, ce qui justifie que f est bornée.

De plus f atteint ses bornes car $f(X)$ est fermé. En effet, cela a pour conséquence que

$$inf_{x\in X}\, f(x) \in f(X) \text{ et } sup_{x\in X}\, f(x) \in f(X).$$

Théorème 1.8.3 : Théorème de Heine

Soient $(E, \|.\|_E)$; $(F, \|.\|_F)$ deux K −espaces vectoriels normés, et f: E ⟶ F est une application continue sur X, $X \subset E$, supposons que X est compact, alors f est uniformément continue sur X.

Démonstration :

Par absurde, supposons que f n'est pas uniformément continue,

alors on a : $\exists\varepsilon > 0\ \ \forall\eta > 0\ \exists(x, y) \in X^2,\ \| x - y \|_E \leq\ \eta\ \ et$

$\| f(x) - f(y) \|_F > \varepsilon$, en donnant à η *les valeurs* $1, 1/(2\,); \ldots\ldots; 1/n$, on construire une suite $(x_n, y_n)_{n\in N}$ d'élément de X^2, telle que

$$\| x_n - y_n \|_E \leq \frac{1}{n}\ \ et\ \| f(x_n) - f(y_n) \|_F > \varepsilon$$

Or, un produit de compacts étant compact, on en déduit que X^2 est encore compact, ainsi la suite $(x_n, y_n)_{n\in \mathrm{N}}$ possède une valeur d'adhérence, il existe une application φ: N ⟶ N strictement croissante, $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ admet une valeur d'adhérence $a \in X$, de même $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ admet une valeur d'adhérence $b \in X$, or, on a $\| x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \|_E \leq \frac{1}{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, alors $a = b$. Donc $\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow_{n\to\infty} (a, b) \in X^2$, et puisque f est continue alors : $f\left(\ x_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow_{n\to\infty}\ f(a)$,
et $f\left(\ y_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow_{n\to\infty} f(b) = f(a)$. Par passage de la limite dans l'inégalité vérifiée pour tout $n \in$ N :

$\| f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \|_F > \varepsilon$, en fait $n \longrightarrow \infty$ *alors* $\| f(a) - f(b) \|_F > \varepsilon$, donc $f(b) \neq f(a)$ contradiction de ce qui précède.

D'où f est uniformément continue sur X.

1.9 Connexité dans un espace vectoriel normé

Définition 1.9.1 :

Un espace topologique X est dit connexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes qui suivent :

1. X n'est pas la réunion de deux ensembles ouverts non vides et disjoints.
2. X n'est pas la réunion de deux ensembles fermés non vides et disjoints.
3. L'ensemble X et la partie vide sont les seuls ensembles à la fois fermés et ouverts.

1.9.1 Partie connexe :

Définition 1 .9.2 :

Une partie X de E est dite connexe s'il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides disjoints.

Propriété 1.9.3:

On dit qu'une partie $X \subset E$ est connexe si, et seulement si, l'une ou l'autre des propositions suivantes est vérifiée :

1. Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides.
2. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés de X sont X lui même et l'ensemble vide.

1.9.2 Parties connexes de R :

Proposition 1.9.4:

Les parties connexes de R sont les intervalles de R, en particulier R est un espace connexe.

Démonstration :

Soit $X \subset R$, si X n'est pas un intervalle, il existe un point $a \in R \setminus X$ telle que les ensembles $X \cap]-\infty, a[$ et $X \cap]a, +\infty[$ sont non vide. On obtient ainsi une partition de X en deux ouverts, donc X n'est pas connexe.

Réciproquement, soit I un intervalle de borne $a < b$. Soit U_0 un ouvert non vide dans I, qui est aussi fermé. Fixons un de ses points x_0 et

considérons le supremum y des réels $x \in$ I telle que $[x, y[\in U_0$,

supposons que $y < b$, comme U_0 est fermé, il contient le point y, et donc l'intervalle $[x, y]$ mais, alors comme U_0 est ouvert il contient

aussi l'intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$, et donc l'intervalle $[x_0 , y + \varepsilon[$, ce qui

contredit la définition de y, on a donc $y = b$ et $[x_0, b[\in U_0$.

On montre de la même façon que $]a, x_0] \in U_0$, et donc $]a, b[\subset U_0$. Comme U_0 est fermé, alors $U_0 =$ I.

1.10 La connexité et la continuité

Théorème 1.10.1 :

Soit X, Y deux espaces topologiques, $f: X \longrightarrow Y$ une application continue. Alors l'image d'un connexe par f est connexe.

Démonstration :

Soit X, Y deux espaces topologiques, X connexe et $f: X \longrightarrow Y$ une application continue, supposons que $f(X)$ ne soit pas connexe, alors, il existe deux ouverts O_1 et O_2 disjoints de Y tels que :

$f(X) \subset O_1 \cup O_2, f(X) \cap O_1 \neq \emptyset, f(X) \cap O_2 \neq \emptyset$ et $f(X) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Les ensembles $f^{-1}(O_1)$, et $f^{-1}(O_2)$ sont deux ouverts de X tels que $X \subset f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$, $X \cap f^{-1}(O_1) \neq \emptyset$ $X \cap f^{-1}(O_2) \neq \emptyset$, et

$X \cap f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$. Ce qui prouve que X n'est pas connexe, contradiction car X est connexe.

Proposition 1.10.2:

Un espace topologique X est dit connexe si toute fonction continue

$f: X \longrightarrow \{0; 1\}$ est constante.

Démonstration :

L'ensemble $\{0; 1\}$ pris comme partie de R a pour topologie la topologie

discrète.

(⇒) Si X est connexe et si $f: X \longrightarrow \{0; 1\}$ est continue alors le couple $(f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}))$ est une partition d'ouverts de X. Donc ou bien $f^{-1}(\{0\}) = X$ et $f \equiv 0$ ou bien $f^{-1}(\{1\}) = X$ et $f \equiv 1$.

(⇐)Supposons que toute application continue $f: X \longrightarrow \{0; 1\}$ est constante. Si $(A; \complement_X^A)$ est une partition d'ouverts de X, alors la fonction Caractéristique 1_A est continue sur X. Par hypothèse, elle est donc constante et A = X ou $A = \emptyset$; donc X est connexe.

Remarque 1 .10.3 :

Un espace est connexe si et seulement s'il n'est pas possible de le décomposer de manière non-triviale en réunion disjointe de deux fermées (ou de deux ouverts). C'est aussi équivalent à demander que toute partie ouverte et fermée est soit vide soit égale à X. (les seules ensembles sont à la foi fermés et ouverts sont X et l'ensemble vide).

Corollaire 1.10.4 :

L'adhérence de toute partie connexe est connexe.

Corollaire 1.10.5 :

Soit A une partie connexe d'un espace topologique, alors, toute partie B telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.

1.11 Connexité par arcs :

1.11.1 Chemin :

Définition 1 .11.1 :

Soit $(E, \|.\|_E)$ espace vectoriel normé, on appelle chemin (ou arc) dans E toute application continue $f: [0,1] \longrightarrow E$ on dit que c'est un chemin ou un arc qui joint l'origine $f(0)$ à l'extrémité $f(1)$.

1.11.2 Connexe par arcs :

Définition 1.11.2:

Soit E un espace vectoriel normé, $X \subset E$ est dit connexe par arcs si toute couple de points de X est relié par un chemin qui reste dans X, c'est-à-dire que $t \in [0, 1] \Rightarrow f(t) \in X$.

Proposition 1 .11.3 :

Un espace est connexe par arcs est connexe.

Démonstration :

En effet, soit a un point de X; alors pour tous x de X, il existe un chemin (ou un arc) $f_x: [0,1] \to X$ tel que $f_x(0) = a \in X \; et \; f_x(1) = x \in X$ et on a alors $X = \cup_{x \in X} f_x([0,1])$ qui est donc connexe. Un espace connexe n'est pas nécessairement connexe par arcs.

Exemple :

Il y a des ensembles connexes qui ne sont pas connexes par arcs. Par exemple, dans R^2, l'ensemble $\left\{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)), x > 0\right\}$ est connexe par arcs donc connexe. Son adhérence qui est :

$\left\{(x, sin\,(\frac{1}{x}));\; x \;>\; 0\right\} \cup (\{0\} \times \;[-1, 1])$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Proposition 1.11.4:

Tout produit d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs.

Démonstration :

Notons $X = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ un tel espace produit, soient $x = (x_i)_{i \in \mathrm{I}}$,

$y = (y_i)_{i \in \mathrm{I}}$ deux points de X. Pour tout $i \in I$, il existe une application continue $\gamma_i: [0,1] \longrightarrow X_i$ telle que $\gamma_i(0) = x_i \; et \gamma_i(1) = y_i$. L'application $\gamma: t \longmapsto (\gamma_i(t))_{i \in I}$ est continue et $\gamma(0) = x \; et \; \gamma(1) = y$. Ce qui permet de conclure.

Chapitre 2

ESPACES DE BANACH

2.1 Définitions, propriétés

Définition 2.1.1:

On dit que E est un espace complet si, et seulement si, toute suite de Cauchy est converge dans E.

Définition 2.1.2:

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Cette définition prend tout son sens en dimension infinie. En effet, on a en dimension finie le résultat suivant.

Proposition 2.1.3:

Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.

Démonstration :

Il n'est pas nécessaire de préciser pour quelle norme puisqu'elles sont équivalentes. Pour montrer qu'un espace de dimension finie est complet, il suffit de constater qu'une suite de Cauchy est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence donc converge.

2.2 Exemples des espaces de Banach

Exemple 1 :

L'application $x \longmapsto |x|$ est une norme sur R, la distance associée à cette norme étant la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$: l'espace vectoriel R est donc muni d'une structure d'espace de Banach. De même sur C,

$|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ où $z = x + iy$, est une norme et la distance associée est la distance euclidienne sur R^2

Exemple 2 :

$(R^n, \|.\|_1)$; $(R^n, \|.\|_2)$; $(R^n, \|.\|_\infty)$ sont tous des espaces de Banach.

2 .3 Les espaces de Banach et les espaces des applications linéaires continues

On a la caractérisation suivante sur les espaces des applications linéaires continues.

Théorème 2.3.1 :

Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires.

Démonstration :

Il n'y a que l'espace d'arrivée qui a besoin d'être complet. Soit donc $(u_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$ on a

$\left\|u_n(x) - u_p(x)\right\|_F \leq \left\|u_n - u_p\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|$ par conséquent est une suite de Cauchy dans F. Donc converge vers une limite que l'on note $u(x)$.

$\forall x, y \in E, \lambda \in K$ on a $u_n(\lambda x + y) = \lambda u_n(x) + u_n(y)$, de plus on a

$\lim_{n\to\infty} u_n(\lambda x + y)$=$\lambda \lim_{n\to\infty} u_n(x) + \lim_{n\to\infty} u_n(y)$, on a ainsi

$u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ alors u est bien une application linéaire.

Soit $\varepsilon > 0$,$\exists N \geq 0$, $\forall n, p \geq N$, $\left\|u_n - u_p\right\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$, alors on a

$\left\|u_n(x) - u_p(x)\right\|_F \leq \varepsilon\|x\|$, On fixe n et on fait $p \longrightarrow +\infty$ pour obtenir

$\|u_n(x) - u(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|$, cela montre que u est continue avec

$\|u(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon + \|u_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, et aussi $\|u_n - u\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$ on a bien $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{L}(E, F)$

Chapitre 3

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

3.1 Espaces vectoriels topologique

Les espaces vectoriels topologiques utilisés dans la pratique sont très souvent munis d'une structure algébrique naturelle. L'existence sur un même ensemble de deux structures, à savoir une structure algébrique est une structure topologique, ne présente un réel intérêt que si certaines relations de compatibilité entre ces structures sont vérifiées: il est naturel d'exiger la continuité des opérations définissant la structure algébrique. Ceci conduit à définir des notions de groupe topologique, de corps topologique, etc.

Définition 3.1.1:

Un groupe G, la loi de composition étant notée multiplicativement, muni d'une topologie τ est appelé un groupe topologique si :

1. L'application $(x, y) \longmapsto xy \; de \; G \times G$ muni de la topologie produit dans G est continue.
2. L'application $x \longmapsto x^{-1}$ de G dans G est continue.

Un corps K muni de la topologie τ est appelé un corps topologique si K en tant que groupe additif et K^* en tant que groupe multiplicatif sont tous deux des groupes topologiques.

Dans la suite, nous allons essentiellement nous intéresser à des espaces vectoriels sur un corps K qui sera soit le corps R, soit le corps C. Tous les espaces vectoriels apparaissant dans une même question seront toujours supposés des espaces vectoriels sur le même corps.

Définition 3.1.2:

Un espace vectoriel E sur le corps $K(R \; ou \; C)$ muni d'une topologie τ est appelé un espace vectoriel topologique (e.v.t) si :

1. l'application $(x, y) \longmapsto x + y \; de \; E \times E$ (muni de la topologie produit) dans E est continue.
2. L'application $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x \; de \; K \times E$ (muni de la topologie produit) dans E est continue. On dit alors que les structures vectorielles et topologiques sont compatibles.

Pour que l'axiome (2) ait un sens, il est évidemment essentiel que le corps K soit muni d'une topologie.

Remarque 3.1.3 :

Pour tout entier $n \geq 1$, l'application

$$(\lambda, x) \in K^n \times E^n \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i \in E,$$

ou $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, est continue.

On raisonne cette remarque par récurrence.

Théorème 3.1.4 :

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue dans X.
2. Pour tout $A \subset X, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X.
4. L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.

3.2 Filtre :

Définition 3.2.1 :

E désignant un ensemble non vide, on appelle filtre sur E un ensemble non vide $\mathcal{F}$ de parties de E telles que :

1. Tout élément A de $\mathcal{F}$ est non vide : $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \neq \emptyset$

2. Si A est un élément de $\mathcal{F}$, toute partie contenant A est élément de $\mathcal{F}$: $A \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

3. Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{F}$, il en est de même de leur intersection: $A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

3.2.1 Base d'un filtre :

Définition 3.2.2:

Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E, on appelle base de $\mathcal{F}$, toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ telle que tout élément A de $\mathcal{F}$ contienne un élément de $\mathcal{B}$, ce que l'on peut écrire : $\forall A \in \mathcal{F},\ \exists B \in \mathcal{B}\ telle\ que\ B \subset A$.

3.2.2 Le filtre des voisinages :

Définition 3.2.3 :

Une structure topologique τ sur un ensemble X est définie par la donnée, pour tout $x \in X, d'un\ \ filtre\ \ \mathcal{V}(x)$, appelé filtre des voisinages de x, vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $x \in V$.

2. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$, tel que pour tout $y \in W$ on ait $V \in \mathcal{V}(y)$.

3.3 Topologie définie par une famille de semi-normes

Nous allons étudier une catégorie particulière d'espace vectoriel topologique, les espaces localement convexes. Les espaces fonctionnels utilisés dans la pratique, en particulier ceux qu'on rencontre dans la théorie des distributions, ne sont pas toujours des espaces normés ; par contre, ce sont toujours des espaces localement convexes. Il s'agit donc d'une classe particulièrement importante d'espace vectoriel topologique et les considérations qui suivent constituent une introduction à l'analyse fonctionnelle moderne.

Voici une première définition.

Définition 3.3 .1:

Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application

$\|\cdot\|: x \longmapsto \| x \|\ de\ E\ dans\ R^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

N_1: Pour tout $x, y \in E, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ $(inegalité\ triangulaire)$

N_2 : Pour tout $\lambda \in K, x \in E, \| \lambda x \| = |\lambda| \|x\|$.

Exemples:

On vérifie directement que :

1. $\|x\|_m = \sup \{|x_k|, k = 1, \dots \dots, m\}$ est une semi-norme sur ω (l'ensemble des suites non nulles de K), pour tout $m \in N_0$;

2. $\|x\|_r$=$\sum_m^\infty r_m\, |x_m|$ est une semi-norme sur ϕ pour toute suite finie r de $[0; +\infty[$;

3. Pour tout fermé F de R^n et compact non vide $K \subset F$,

   $\|f\|_K = sup_{x \in K} |f(x)|$ est une semi-norme sur $C_0(F)$;

Proposition 3.3.2 :

Soit E un espace vectoriel, si p, q sont des semi-normes (resp. des normes) sur E et si $r > 0$ alors : $rp, p + q, \sqrt{p^2 + q^2}$ sont des semi-normes (resp. des normes) sur E.

Voici quelques propriétés fondamentales des semi-normes

Proposition 3.3.3 :

Si p est une semi-norme sur E un espace vectoriel alors : $e \in E$

a) $p(0) = 0;$

b) $p(e) > 0$;

c) $p\left(\sum_{j=1}^J C_j\, e_j\right) \leq \sum_{j=1}^J |C_j|\, p(e_j);$

d) $|p(e_1) - p(e_2)| \leq p(e_1 - e_2).$

Définition 3.3.4 :

On dit qu'une famille de semi-normes $(\|.\|_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante si :

$\forall i, j \in I, \exists k \in I \text{ tel que } \|x\|_i \leq \|x\|_k \text{ et } \|x\|_j \leq \|x\|_k \ \forall x \in E.$

Examinons le cas d'un espace vectoriel muni d'une seule semi-norme $\|.\|$. Lorsque la première propriété de la norme (définition 1.1.1) n'est pas vérifiée, l'application $d(x,y) = \|x-y\|$ n'est plus une distance sur cet espace, (par contre pour les espaces vectoriels normés (proposition 1.1.4)).

Proposition 3.3.5 :

Soit E un espace vectoriel muni d'une seule semi-norme $\|\cdot\|$, alors l'ensemble des boules fermées $B'(x,r)$ *de centre* x, *et de rayon* r *décrivant* R_+^*, est une base d'un filtre $\nu(x)$ définissant sur E une structure d'espace vectoriel topologique.

En particulier, la topologie d'un espace normé est une topologie d'espace vectoriel topologique.

Considérons maintenant un espace E muni d'une famille de semi-normes $(\|.\|_i)_{i\in I}$; chaque semi-norme $\|.\|_i$ permet de définir une topologie τ_i sur E et on peut donc munir E de la topologie borne supérieure de toutes ces topologies. Pour vérifier que cette topologie est une topologie d'e.v.t nous utiliserons la propriété suivante

Proposition 3.3.6 :

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'e.v.t, E un espace vectoriel et $f_i : E \longrightarrow E_i$ une famille d'applications linéaires. Alors, la topologie initiale sur E associée à ces données est une topologie d'e.v.t.

Théorème 3.3.7:

Soit E un espace vectoriel muni d'une famille de semi-normes

$(\|.\|_i)_{i\in I}$. L'ensemble des boules fermées est la base d'un filtre $\mathcal{V}(x)$ définissant sur E une topologie τ d'e.v.t. Si τ_i est la topologie définie par la seule semi-norme $\|\cdot\|_i$, τ est la borne supérieure des topologies τ_i.

L'espace muni de cette topologie τ est appelé un espace localement convexe (en abrégé e.l.c).

Proposition 3.3.8 :

Soit $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$ est un e. l .c, alors les semi-normes $\|.\|_i$ sont continues.

Corollaire 3.3.9 :

Un e.l.c dont la topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes est un espace à base dénombrable de voisinages.

Etant donné deux point x et y d'un espace vectoriel E, on définit le segment fermé d'extrémités x et y par la formule

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y; \mathrm{t} \in [0, 1]\}$$

Un tel segment est donc l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par l'application

$t \longmapsto tx + (1 - t)y$; si E est un e.v.t séparé, un tel segment est compact donc fermé.

Une partie C de E est dite convexe si, pour tout $x, y \in C$, le segment $[x, y]$ est contenu dans C. Si $\|.\|$ est une semi-norme sur E, toute boule ouverte ou fermée est convexe: si $x, y \in B(a; r)$, on a

$\|x - a\| < r$ et $\|y - r\| < r$, d'où

$$\|tx + (1 - t)y - a\| = \|t(x - a) + (1 - t)(y - a)\|$$

$$\leq t\|x - a\| + (1 - t)\|y - a\|$$

$$< tr + (1 - t)r = r$$

Et ceci prouve que la boule $B(a; r)$ est convexe; on vérifie de même que toute boule fermée est convexe. Ceci montre que, dans un e.l.c, tout point admet un système fondamental de voisinages convexes. On a réciproquement que si, l'origine, donc tout point par translation, d'un e.v.t E admet un système fondamental de voisinages convexes, alors la topologie de E peut être définie par une famille de semi-normes ; autrement dit E est un espace localement convexe.

Définition 3.3.10 :
Soit E un e .v.t , on dit que E est localement convexe si, et seulement si, la topologie de E possède une base de voisinages convexes.

Proposition 3.3.11 :
Soit (E, P) espace à semi-norme, alors E est :

a) normé si P est équivalent à une norme sur E,

b) à semi-normes dénombrables si P est équivalent à un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur E.

Si on désire insister sur le fait qu'un espace à semi-normes n'est pas à semi-normes dénombrables, on dit qu'il est à semi-normes non dénombrables.

3.4 Exemples :
Voici quelques exemples des espaces localement convexes

Exemple 1 :
Soit F un fermé non compact de R^n, il existe alors un entier $m_0 \in N_0$,

$F \cap \{x: |x| \leq m_0\} \neq \emptyset$. Pour tout $m \in N_0, K_m = \{x \in F: |x| \leq m + m_0\}$.
Cela étant, $p_m: C_0(F) \longrightarrow R;\ f \longmapsto sup\{|f(x)|: x \in F: |x| \leq m + m_0\}$ est une semi-norme sur $C_0(F)$, $P = \{p_m; m \in N_0\}$ est un système de semi-normes sur $C_0(F)$, (Il convient de remarquer que, chacun des K_m est une partie compacte de F et que, pour tout compact K inclus dans F, il existe $m \in N_0$ tel que $K \subset K_m$).

L'espace $C_0(F)$ est l'espace localement convexe $(C_0(F), P)$

On dit qu'on a muni l'espace $C_0(F)$ de la convergence compacte.

Exemple 2 :

Si $\Omega \subset R^n$ est ouvert on considère $C_0(\Omega)$ et pour tout K compact inclus dans Ω, on pose $p_K(x) = sup_{x \in K}|f(x)|$ et on munit $C_0(\Omega)$ de la topologie définie par les p_K.

La convergence pour cette topologie est équivalente à la convergence sur tout compact…

3.5 L'application linéaire et continue :

Théorème 3.5.1 :

Soient $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$, $(F, (\|.\|_j)_{j\in J})$ deux e.l.c. et $T: E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. T est continue.
2. T est continue à l'origine de E.
3. Pour tout $j \in J$, il existe une partie finie $K \in \mathcal{F}(I)$ et une constante

$C \geq 0$ telles que $\| Tx \|_j \leq C \| x \|_K$ pour tout $x \in E$.

Démonstration :

Voici d'abord un lemme qui sera utile dans les diverses reprises.

Lemme 3.5.2 :

Soit p, q :$E \longrightarrow R_+$ deux applications définies sur un espace vectoriel E et vérifiant

$p(tx) = tp(x) et\ q(tx) = tq(x)$ pour tout $x \in E$ et $t > 0$. On suppose que $p(x) \leq r \Longrightarrow q(x) \leq s$ ou r et s sont deux nombres strictement positifs, alors $q(x) \leq r^{-1}sp(x)\ pour\ tout\ x \in E$.

Démonstration :

$\forall t > 0, p(x) \leq tr \implies q(x) \leq ts$ et ceci est encore vrai pour $t = 0$: si $p(x) = 0,\ p(x) \leq tr\ \forall t > 0$, donc $q(x) \leq ts\ \ \forall t > 0$, donc $q(x) = 0$. En prenant $t = r^{-1}p(x)$, on en déduit $q(x) \leq r^{-1}sp(x)$, ce qui prouve le lemme.

$1. \implies 2.$: Evident ;

$2. \implies 3.$: D'après la continuité de T à l'origine,$\forall j \in J\ \exists K \in \mathcal{F}(I) et\ r > 0\ tel\ que\ \ T(\ B'_K(0; r)) \subset B'_j(0; 1)$; autrement dit, $\|x\|_K \leq r \implies \|Tx\|_j \leq 1$

Vu le lemme précédent, on en déduit $\|Tx\|_j \leq r^{-1}\|x\|_K$, ce qui prouve 3.

$3. \implies 1.$: Soit $\varepsilon > 0$, on a $T\big(\ B'_K(0; \delta)\big) \subset B'_j(0; \varepsilon)\ dés\ que\ c\delta \leq \varepsilon$, d'où $T(\ B'_K(a; \delta)) \subset B'_j(Ta; \varepsilon)$ d'après la linéarité de T, donc T continue au point $a \in E$.

La propriété 3 est constamment utilisée dans la pratique pour démontrer la continuité des applications linéaires : on majore Tx au sens des semi-normes de l'espace F.

Notations :

Si $E\ et\ F$ sont des espaces localement convexes, la notation $L(E, F)$ désigne l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $E\ dans\ F$.

Il est clair qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ et que $L(E, E)$, abrégé en $L(E)$.

Corollaire 3.5.3 :

Soients $(\|.\|_i)_{i\in I}$, $(\|.\|_j)_{j\in J}$ deux familles de semi-normes sur un espace vectoriel E, alors :

1. La topologie définie par les semi-normes $(\|.\|_i)_{i\in I}$ est moins fine que la topologie définie par les semi-normes $(\|.\|_j)_{j\in J}$ si, et seulement si,

$$\{\ \forall i \in I, \exists K \in \mathcal{F}(J), \exists c \geq 0 \ telles\ que\ \ \|x\|_i \leq c\|x\|_K \quad (\forall x \in E).(*)$$

2. Les deux familles de semi-normes définissent la même topologie (on dit aussi qu'elles sont équivalentes) si, et seulement si, on a (*) et :

$$\{\ \forall j \in J, \exists K \in \mathcal{F}(I), \exists c \geq 0 \ telles\ que\ \ \|x\|_j \leq c\|x\|_K \quad (\forall x \in E).(**)$$

Dans le cas des espaces normés, ce corollaire s'écrit

Proposition 3.5.4 :

Soient $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E et soient τ_1 *et* τ_2 les topologies définies par chacune de ces normes.

1. La topologie τ_1 est moins fine que la topologie τ_2 si, et seulement si, il existe une constante $c > 0$. Telle que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ pour tout $x \in E$.

2. Les topologies τ_1 *et* τ_2 sont égales (on dit que les deux normes sont équivalentes) si, et seulement s'il existe des constantes

$c_1, c_2 > 0$ telles que $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$ pour tout $x \in E$.

Proposition 3.5.5 :

Soit E un e.l.c dont la topologie est définie par une famille filtrante de semi-normes $(\|.\|_i)_{i\in I}$. Alors, l'ensemble des boules fermées de rayon $r > 0$ et de centre a. Constitue une base du filtre des voisinages de a et il en est de même de l'ensemble des boules ouvertes.

Pour définir la topologie d'un e. l. c, on peut aussi utiliser la famille de toutes les semi-normes continues qui constitue bien une famille filtrante.

Pour démontrer ce résultat, vérifiant d'abord le lemme suivant qui est, en quelque sorte, une extension du théorème.

Lemme 3.5.6 :

Soient $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$ un e.l.c, et p: $E \longrightarrow R_+$ une application vérifiant :

$\forall(x,y) \in E^2$, $\forall\lambda \geq 0, p(x+y) \leq p(x) + p(y), et\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. p est continue.
2. p est continue à l'origine de E.
3. Il existe $J \in \mathcal{F}(I)$ et une constante c$\geq$ 0 telles que

   $p(x) \leq c \parallel x \parallel_J$ pour tout $x \in E$.

Corollaire 3.5.7:

Soient $E, et\ F$ deux e.l.c, $(\|.\|_j)_{j\in J}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de F, alors une application linéaire $T: E \longrightarrow F$ est continue si, et seulement si, pour tout $j \in J$, l'application $p: x \longmapsto \|Tx\|_j$ est une semi-norme continue sur E.

Démonstration :

Il est clair que p est une semi-norme sur E, et d'après le lemme (3.5.6) précédent, la continuité de cette semi-norme signifie que T est continue (théorème 3.5.1).

Définition 3.5.8 :

Soit E un e.v.t, $A \subset E$. A est dit bornée si, et seulement si, pour tout $V \in \upsilon(0)$, il existe $\lambda \in R\ tel\ que\ A \subset \lambda V$.

Proposition 3.5.9 :

Soit E e. l .c, L une forme linéaire.

L est continue si, et seulement s'il existe un voisinage V de 0 tel que $L(V)$ est borné.

Démonstration :

$Si\ L$ est continue, $V = L^{-1}(]-1,\ 1[)$ est un voisinage de 0

$et\ L(V)$ est borné.

Réciproquement, s'il existe $V \in V(0)$ tel que $L(V)$ est borné, il existe

$M > 0$ tel que $L(V) \subset]-M, M[$. Par homogénéité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que $L(\delta V) \subset]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Par définition de la topologie d'e. l .c, $\delta V \in V(0)$, donc L est continue en 0.

Remarque 3.5.10

Dans le cas où E est un e.v.n, la conséquence de la proposition (3.5.9)

est L est continue si, et seulement s'elle est lipchitzienne en 0.

Définition 3.5.11 :

Soit E, F des espaces localement convexes

- Un homomorphisme entre E et F est un opérateur linéaire continu et relativement ouvert de E dans F.
- Un isomorphisme entre E et F est une bijection linéaire continue et ouverte; c'est donc une bijection linéaire continue et admettant un inverse continu.

On dit alors que les espaces E et F sont isomorphes.

Si $(E_{1,}\ \|.\|_1)$; $(E_{2,}\ \|.\|_2)$ sont des espaces normés, une isométrie entre E_1 et E_2 est une bijection linéaire de E_1 dans E_2 qui conserve la norme (c'est-`a-dire que $\| T.\|_2 = \|.\|_1$).

On dit alors que ces espaces sont isométriques.

3.6 Espace localement convexe métrisable :

La topologie d'un espace normé étant définie par une distance, on peut parler de filtre de Cauchy, et de suite de Cauchy.

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy; la notion de suite de Cauchy, et plus généralement de filtre de Cauchy, ne dépend que de la topologie de l'espace et non du choix particulier de la norme définissant cette topologie, ceci n'est pas le cas dans des espaces métriques. La structure algébrique joue ici un rôle essentiel. Nous allons montrer que, dans un e. l .c, il est possible de définir des notions de suite de Cauchy et de filtre de Cauchy, ces notions ne dépend que de la topologie de l'espace.

Soit $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$ un e. l .c, pour chaque semi-norme on peut d'abord définir une notion de diamètre : si A est une partie non vide de E, on pose : $diam_i A = sup_{(x,y)\in A^2} \|x-y\|_i$ ce diamètre est éventuellement infini.

Définition 3.6 .1:

Soit $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$ un e. l .c, un filtre sur E est dit de Cauchy si

$(\forall i \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathcal{F})(diam_i M \leq \varepsilon)$, une suite (x_n) est de Cauchy si le filtre élémentaire associé est de Cauchy, soit $(\forall i \in I)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n \in \mathrm{N})$ $(\forall p, q \in \mathrm{N})$ $(p \geq n\ et\ q \geq n \Longrightarrow \|x_p - x_q\|_i \leq \varepsilon)$.

On a la caractérisation suivante.

Corollaire 3.6.2 :

Soit $(E, (\|.\|_i)_{i\in I})$ est un e .l .c, un filtre $\mathcal{F}$ est de Cauchy si, et seulement si, $\big(\forall V \in \upsilon(0)\big)(\exists M \in \mathcal{F})(\mathrm{M}-\mathrm{M} \subset \mathrm{V})$, où $M - M = \{x - y;\ x, y \in M\}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy, il existe une partie finie J de I et un $\varepsilon > 0$ tels que $B'_J(0;\varepsilon) \subset V$et, pour $i \in J$, il existe $M_i \in \mathcal{F}$ tel que $diam_i M_i \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que $M_i - M_i \subset B'_i(0;\varepsilon)$; en posant $M = \bigcap_{i \in J} M_i$ on a alors

$\mathrm{M} - \mathrm{M} \subset B'_J(0;\varepsilon) \subset \mathrm{V}$. Réciproquement si

$\big(\forall V \in \upsilon(0)\big)(\exists M \in \mathcal{F})(\mathrm{M} - \mathrm{M} \subset \mathrm{V})$

où $M - M = \{x - y; x, y \in M\}$ est vérifié, prenons $V = B'_i(0;\varepsilon)$, alors il existe $M \in \mathcal{F}$ tel que $x - y \in B'_i(0;\varepsilon)$, pour tout $x, y \in M$, d'où $diam_i M_i \leq \varepsilon$.

Alors $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy.

Notons la propriété importante suivante.

Proposition 3.6.3 :

Soient E, F sont deux e.l.c, et $T: E \longrightarrow F$ est une application linéaire continue, si $\mathcal{B}$ est une base d'un filtre de Cauchy $\mathcal{F}$ sur E, $T(\mathcal{B})$ est une base d'un filtre de Cauchy sur F.

Démonstration :

Soit V un voisinage de 0 dans F, il existe un voisinage W de 0 dans E tel que $T(W) \subset V$. Si $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy sur E, il existe $M \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{M} - \mathrm{M} \subset W$, d'où $T(\mathrm{M}) - \mathrm{T}(\mathrm{M}) = \mathrm{T}(\mathrm{M} - \mathrm{M}) \subset \mathrm{T}(W) \subset \mathrm{V}$, et on conclut d'après la proposition (3.6.2) précédente.

Proposition 3 .6.4 :

Dans un e .l .c $(E, (\|.\|_i)_{i \in I})$ tout filtre convergent est de Cauchy et toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration :

Soit $\mathcal{F}$ un filtre converge vers x, et soit $\varepsilon > 0$, pour tout $i \in I$,

M=$B_i'(x;\varepsilon) \in \mathcal{F}$, d'où on a l'inégalité triangulaire $diam_i M \leq \varepsilon$; ce qui démontre que $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy.

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 3.6.5 :
Un e. l .c est dit complet (resp. séquentiellement complet), si tout filtre (resp. suite) de Cauchy converge.

Remarque 3.6.6 :
Un espace complet est séquentiellement complet, mais la réciproque est fausse, alors qu'elle est vraie pour des espaces métriques.

Remarque 3.6.7 :
Lorsque la topologie d'un e. l .c définit par une norme, on dit que l'espace est normable. On ce gardera bien de croire qu'un e. l .c métrisable est toujours normable.

Théorème3.6.8 : (prolongement)
Soient E un e. l .c, F un e. l .c séparé et complet, E_1 est un sous-espace vectoriel de E partout dense et $T: E_1 \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Alors, il existe une unique application continue $\tilde{T} : E \longrightarrow F$ qui prolonge T ; de plus, cette application $\tilde{T}$ est linéaire.

Remarque 3.6.9 :
Si E, et F sont des espaces vectoriels normés, on a de plus :

$$\|\tilde{T}\|_{L(E,F)} = \|T\|_{L(E_1,F)}.$$

3.7 Topologies faibles.

Soient E un espace vectoriel topologique, et E' son dual topologique, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E.

On appelle

- **topologie forte sur E** : la topologie initiale de E ;

- **topologie faible sur E** : la topologie la moins fine rendant continus tous les éléments de E'; on note $\sigma(E, E')$.

Soient E, F deux espaces vectoriels (réels ou complexes). On dit qu'une forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto < x, y >$ sur $E \times F$ met ces espaces en dualité si :

(1) : $< x, y >= 0 \;\; \forall x \in E \;\; \Rightarrow y = 0$

Et (2) : $< x, y >= 0 \;\; \forall y \in F \;\; \Rightarrow x = 0.$

On dit que alors $<\cdot\,, \;\cdot>$ est le crochet de dualité; le cas échéant, ce crochet peut être noté $<\cdot\,, \;\cdot>_{(E,F)}$.

Proposition 3.7.1 :
Soient E un espace vectoriel topologique, et E' son dual topologique, $(x, x') \longmapsto < x, x' > = x'(x)$ met les espaces E, E' en dualité.

Lorsque les deux espaces vectoriels sont en dualité, on peut définir des topologies sur ces espaces, dites topologies faibles, de la façon suivante sur E, les applications $f_y: x \longmapsto < x, y >$, où $y \in F$, sont des formes linéaires et on peut donc définir sur E la topologie initiale rendant continues toutes ces formes linéaires lorsque y décrit F. Cette topologie est donc la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications f_y , $y \in F$; cette topologie, notée $\sigma(E, F)$, s'appelle topologie faible sur E associé à la dualité entre les espaces E et F. Bien entendu, on définit de la même façon une topologie faible sur F notée $\sigma(F, E)$: c'est la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $y \longmapsto < x, y >$, où $x \in E$. Les espaces E et F jouant un rôle parfaitement symétrique. La topologie $\sigma(E, F)$ est une topologie d'e.l.c qui peut être définie par la famille de semi-normes

$x \longmapsto |< x, y >|$, où $y \in F$.

Reprenons la proposition 3.7.1, les espaces E et E' étant en dualité, on peut définir des topologies faibles $\sigma(E, E')$, $\sigma(E', E)$ sur E et E'. Sur l'espace E, on dispose donc de deux topologies, d'une part de la topologie donnée initialement qu'on appelle donc la topologie initiale ou la topologie forte sur E, d'autre par la topologie faible $\sigma(E, E')$: cette topologie faible est effectivement plus faible, c'est-à-dire moins fine que la topologie initiale, vu que la semi-norme $x \longmapsto |x'(x)|$ est continue sur E pour la topologie initiale. C'est pour cette raison que la topologie $\sigma(E, E')$ est appelée la topologie affaiblie sur E; muni de cette topologie l'espace E sera noté E_σ. Dire qu'une suite (x_n) de E converge faiblement vers x signifie que, pour tout $x' \in E'$, la suite $x'(x_n)$ converge vers $x'(x)$. Par contre, l'espace E' n'est pas naturellement muni d'une topologie et la dualité entre E et E' permet de définir la topologie faible $\sigma(E', E)$ sur E'; il est important de noter que cette topologie est en fait la topologie de la convergence simple et plus précisément la topologie induite par celle de l'espace $\mathcal{F}_s(E; K)$ (l'ensemble des applications de E dans K muni de la topologie de la convergence simple), muni de cette topologie, l'espace E' sera noté E'_σ et sera appelée le dual faible de E.

Proposition 3.7.2 :

Cette topologie $\sigma(E, E')$ est définie par la famille de semi-normes

$x \longmapsto |x'(x)|$, où x' désigne un élément quelconque de E'. Elle munit donc E d'une structure d'espace localement convexe.

Théorème 3.7.3 :

Un espace localement convexe (E, P), est à semi-norme dénombrable si, et seulement s'il est métrisable.

3.8 Espaces de Fréchet et espaces de Banach :

La notion d'espace de Banach se généralise de la façon suivante.

Définition 3.8.1:

Un espace localement convexe métrisable et complet est appelé un espace de Fréchet.

Dire qu'un e. l .c E est un espace de Fréchet signifie que E est un espace séparé dont la topologie est peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes et dont toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple :
L'espace $C_0(F)$ est un espace de Fréchet.

Proposition 3.8.2 :
a) Tout produit direct fini d'espaces de Banach est un espace de Banach.

b) Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.

c) Tout espace quotient d'un espace de Banach est de Banach.

d) Tout espace quotient d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.

Remarque 3.8.3 :
Cette structure d'espace sert de substitut aux espaces de Banach dans diverses situations

CONCLUSION

Ce mémoire de fin d'études avait pour objectif l'étude des espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Au début de ce mémoire nous avons présenté plusieurs résultats fondamentaux dans les espaces normés. Le reste de ce travail à été consacré à l'étude des espaces localement convexes.

Notre objectif est de comparer les propriétés topologiques des deux espaces. Nous avons exposé les résultats communs aux deux espaces et les résultats qui sont vrais dans un espace normé mais ils ne le sont plus dans un espace localement convexe.

Je garde du mémoire un excellent souvenir, il constitue désormais une expérience valorisante et encourageante pour mon avenir.

REFERENCES

[1] Claude Wagschal. Topologie et Analyse fonctionnelle. 1995, Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 293 rue Lecourbe, 75015 Paris

[2] F.Poupaud. Analyse fonctionnelle pour la Licence, Université de Nice

[3] H. Brezis. – Analyse fonctionnelle : Théories et applications. – Paris : Masson, 1983. – (Mathématiques Appliquées pour la Maitrise.)

[4] Laure Saint-Raymond. Analyse fonctionnelle, Université Paris VI and DMA Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, FRANCE.

[5] Claude Portenier, Analyse fonctionnelle, Version du 27 juin 2004

[6] Yannick Privat, Espaces Vectoriels Normés et Topologie, Polycopié de cours, Institut Élie Cartan Nancy (Mathématiques) – Université Henri Poincaré Nancy 1. B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex.

[7] Ayman Moussa, Université Pierre et Marie Curie, Espaces localement convexes. Topologies faibles. 2014-2015.

[8] Emmanuel AMIOT. Espaces vectoriels normés – Classe de Spéciales MP, 2014.

[9] Cédric Milliet, Topologie des espaces vectoriels normés, Cours de troisième année de licence, Université Galatasaray, Année 2011-2012.

[10] Renaud Leplaideur. Cours de Topologie L3-math, année 2014-2015.

[11] Francis Nier, Dragos Iftimie, Introduction à la Topologie, Licence de Mathématiques, Université de Rennes 1.

[12] Jean SCHMETS, Analyse fonctionnelle, UNIVERSITE DE LIEGE, Faculté des Sciences, Institut de Mathématique.

[13] Cédric Villani, Analyse II, Cours de deuxième année, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, Ecole normale supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, 2003-2004.

[14] Pierron Théo, Analyse fonctionnelle, ENS Ker Lann.

[15] Guillaume CARLIER, analyse fonctionnelle, ENS, 2009-2010.

[16] Pr. Azzedine El Baraka, calcul différentiel abstrait, polycopié de cours de licence, 2015-2016.

[17] Pr. Seddik Gmira, topologie, cours de topologie de licence, 2015-2016.