UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques
CALCUL SCIENTIFIQUE ET APPLICATIONS

PROJET DE FIN D'ETUDES

Modélisation numérique des emplois du temps des classes d'un établissement scolaire

Présenté par :

- Douali Ikram

Encadré par :

- Pr .EL KHAOULANI EL IDRISSI RACHID (FST de Fès)

Membre de Jury :

- Pr. EL KHAOULANI EL IDRISSI RACHID (FST de Fès)
- Pr. ETTAOUIL Mohammed (FST de Fès)
- Pr. CHAKIR Loqman (EST de Meknès)

Stage effectué au collège sidi Boumediene
Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES _ SAISS
B.P.2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 5(0) 35 61 16 86 – Fax: 212 (0)5 35 60 82 14
Site Web: http://www.fst-usmba.ac.ma

Dédicaces

A mon père

Je vous suis reconnaissant pour les conseils prodigieux et les directives insistantes dont vous m'avez généreusement entouré.

Je vous sais gré de votre bienveillance, de vos attentions, de vos scrupules et des principes que vous m'avez insinués.

A vous je dédie cet humble travail, preuve de mon éternelle gratitude.

A ma mère

Millions de douceurs qui ne vieillissent pas d'une ride, millions de prières, de bénédictions et d'espoirs que ne fait taire aucune déconvenue.

Vous m'avez nourri de patience, de persévérance et d'ambitions, vous avez été capables de lourds sacrifices, vous méritez tant d'amour.

A mon frère et ma sœur qui m'ont toujours encouragé par leur amour et leur soutien.

A tous mes amis pour leur aide respective et la motivation que chacun m'a apportée à sa manière.

Un grand merci à tous ceux qui m'ont soutenu, aidé et que je risque d'oublier.

Remerciement

Ce mémoire n'aurait jamais été mené à terme sans le soutien d'ALLAH qui m'a donné la force pour le réaliser et l'achever.

J'exprime mes profonds remerciement à mon encadrant Pr. **EL KHAOULANI EL IDRISSI RACHID** pour le soutien qui m'a apporté à fin de réaliser ce travail ; et pour son orientation, sa disponibilité, sa confiance, sa compréhension et sa gentillesse tout au long de mes travaux, ainsi son intérêt grandissant pour mes résultats n'ont fait qu'accroitre ma volonté de s'investir davantage dans ce travail.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements les plus sincères aux membres de jury, pour avoir accepté de me faire profiter de leurs compétences pour l'évaluation de ce travail.

Un grand merci également au doctorant **Nourddine Joudar** pour ses remarques, ses explications qui ont été d'une grande précision et surtout d'un très grand intérêt pour l'amélioration de mon travail.

J'adresse également mes vifs remerciement à tous le cadre professoral et administratif de la faculté des sciences et techniques.

Table des matières

Introduction générale

Chaque année, les responsables pédagogiques des établissements scolaires et universitaires ont pour mission d'organiser les emplois du temps des différentes formations ou filières en essayant, au mieux, de satisfaire les contraintes « humaines » des enseignants et des étudiants, les contraintes pédagogiques imposées par la progression des enseignements et en tenant compte des contraintes «physiques » liées aux ressources matérielles (les salles, les équipements, etc.).

Les emplois du temps des établissements scolaires doivent aussi être adaptés de manière à favoriser une meilleure acquisition des connaissances par les élèves, ils doivent être exempts d'heures creuses, et les cours de certaines matières doivent être étalés le plus possible sur les jours de la semaine.

Le problème des emplois du temps est bien connu comme un problème NP-complet. Ce problème est omniprésent dans tous les aspects pratiques de la société moderne. Il joue un rôle très important dans plusieurs types d'organisation tels que les hôpitaux, les sociétés de transports, les services de protection et d'urgence et les universités.

La création des emplois du temps, répondant à un certain nombre de critères et de contraintes, nécessite une modélisation mathématique. Cette dernière conduit généralement à un problème d'optimisation combinatoire dont les contraintes et la fonction objectif sont non-linéaires. La résolution numérique de tel problème exige l'utilisation d'algorithmes capables de prendre en compte ces non-linéarités.

Plusieurs algorithmes ont été développés dans la littérature pour traiter ce type de problème, on trouve notamment les métaheuristiques évolutionnaires comme l'algorithme génétique ou l'algorithme de colonie de fourmis. Ces algorithmes s'inspirent d'autres sciences, telles que la biologie ou la génétique, pour trouver une solution à un problème d'optimisation combinatoire. Ils sont des algorithmes itératifs qui permettent généralement de traiter des problèmes combinatoires difficiles de grandes tailles avec un coût de calcul raisonnable. Cela qui pourrait expliquer leur utilisation dans beaucoup d'applications pratiques dans plusieurs domaines.

Ce projet de fin d'étude porte sur la création des emplois du temps des classes du collège Boumediene. Cette création est traitée dans ce rapport en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons ce collège et ses données. Nous vérifions ensuite la disponibilité des salles et des enseignants.

Le deuxième chapitre concerne la modélisation du problème d’emploi du temps du collège, qui se définit comme un ensemble de cours qui se déroulent tout au long des périodes spécifiques pendant six jours par semaine, dirigés par un nombre limité d’enseignants et de salles. Nous formulons la fonction objective et les contraintes qu'on doit respecter sous forme des équations mathématiques puis nous donnons le modèle mathématique.

On s'intéresse, dans le dernier chapitre, à la résolution numérique de ce modèle mathématique. On présente l'algorithme génétique de base, ensuite on expose les étapes que nous avons suivies lors du développement d'une interface afin d'utiliser l'algorithme génétique de Matlab.

Chapitre I

Présentation du problème des emplois du temps

Introduction :

L’objectif de ce chapitre est de donner une présentation du collège sidi boumediene, décrire les données du collège comme le nombre des enseignants, des groupes, des matières … etc. ainsi la vérification de la suffisance des enseignants et des salles.

1) Présentation du collège sidi Boumediene :

Mon stage s'est déroulé au collège « sidi Boumediene » qui est un établissement d’enseignement secondaire public fondé en 1950, il est fréquenté par des élèves de différentes couches sociales.

Le collège compte actuellement 28 enseignants pour un nombre total de 765 élèves. Ce nombre total d’élèves est réparti entre 25 salles, Le collège sidi Boumediene est réputé pour ses bons résultats de fin d’année, en particulier ceux obtenus aux troisième année, cet établissement se distingue aussi par l'organisation chaque année d'un important programme d'activités parascolaires.

2) Vocabulaires :

Par la suite nous allons utiliser plusieurs vocabulaires connus au domaine pédagogique :

- ✓ **Créneau horaire :** intervalle de temps dans une journée, caractérisé par : l'heure de début du créneau et sa durée.

- ✓ **Un calendrier :** est un ensemble de dates auxquelles on associe un état ou une valeur parmi :
  - disponible
  - non disponible.

- ✓ **Une séance :** correspond à une instance temporelle d'un enseignement à une date donnée, pendant un créneau précis, caractérisé par :
  - Son enseignement
  - Son créneau
  - Sa salle.

- ✓ **Une durée :** est un nombre compris entre D_{min} et D_{max}, représente la plus petite unité temporelle disponible. Nous avons choisi dons notre cas la valeur $D_{min} = 1$ heure et $D_{max} = 2$ heures.

- ✓ **Une heure creuse :** par exemple certains cours sont dispensés en groupes, ce qui oblige les élèves du premier groupe d'avoir un trou dans leur emploi du temps (de 1h à 2h) pendant que le deuxième groupe a un cours, et inversement.

3) Les données du collège :

Table d'abréviations :

<table>
<tr><td rowspan="2">Niveaux</td><td colspan="3">G1 : Première année</td><td colspan="3">G2 : Deuxième année</td></tr>
<tr><td colspan="6">G3 : troisième année</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Matières</td><td colspan="2">math : mathéma-tique</td><td colspan="2">PHY : physique</td><td colspan="2">AR : arabe</td></tr>
<tr><td colspan="3">SVT : science de la vie et de la terre</td><td colspan="3">FR : langue française</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tech : technologie</td><td colspan="2">hg: L'histoire et géogra-phie</td><td colspan="2">E.phy : éducation physique</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ang : la langue anglaise</td><td colspan="3">E.is: éducation islamique</td></tr>
</table>

- Le collège comporte 3 niveaux chaque niveau a un nombre pré-cis de groupes, les tableaux suivants définisse les trois niveaux, le nombre de groupes pour chacun, et le nombre d'enseignants disponibles selon leurs matières de spécialité.

niveau	N1	N2	N3	totale
nb de groupes	6	6	10	22
nb d'étudiants	201	208	356	765

Tableau 1 : Nombre de groupes pour chaque niveau

Matière	math	PHY	SVT	AR	FR	ang	techno	E.is	hg	E.phy
Nb d'enseignants	5	2	2	4	4	2	2	2	3	3

Tableau 2 : Le nombre d'enseignants disponibles

- D'après le calendrier qui organise l'étude et la distribution des matières et des séances pour chaque classe au Maroc, nous obtenons le tableau suivant :

matière / niveau	math	PHY	SVT	AR	FR	ang	Tech	E.is	hg	E.phy	totale
N1	5	2	2	4	4	2	0	2	3	2	26
N2	5	2	2	4	4	2	2	2	3	2	28
N3	5	2	2	4	4	2	2	2	3	2	28

Tableau 3 : Distribution des matières et des séances pour chaque niveau.

- Quelques matières peuvent se dérouler dans des salles générales puisqu'elles n'exigent pas des matériels spéciaux, mais d'autres oui, donc les salles sont classées en deux catégories (salles générales et salles spéciales), parmi les matières qui ont des salles spéciales, nous trouvons la matière de la science de la vie et de la terre (SVT) et l'éducation physique, aussi le nombre de salles disponible au collège est :

  - 19 salles générales.
  - 3 salles de SVT.
  - La cour du sport support au maximum 3 séances en parallèle.

4) La vérification de la suffisance des enseignants et des salles :

Dans cette partie on calcule le nombre nécessaire des enseignants, le nombre d'heures pour chaque enseignant pendant la semaine, aussi le nombre de salles nécessaire pour tous les groupes pendant un créneau précis.

4.1- La vérification du nombre nécessaire d'enseignants :

Pour avoir le nombre nécessaire d'enseignants nous multiplions le nombre total des groupes et le nombre d'heures de chaque matière pendant une semaine, nous le divisons par 24 (nombre d'heures de travail exigées par le ministère d'éducation).

Par exemple :

- Pour la matière mathématique, l'étudiant doit avoir 5 heures de cour par semaine, alors :

$$\frac{22 * 5}{24} = 4{,}58$$

Alors le collège est besoin de 5 enseignants au moins.

- Pour la matière science de la vie et de la terre, le nombre d'heure exigée est 2 heures de cour par semaine, Donc :

$$\frac{22 * 2}{24} = 1{,}83$$

4.2- La vérification du nombre d'heures de travail de chaque enseignant :

Nous faisons la somme d'heures de chaque matière pendant une semaine, nous la divisons par le nombre d'enseignants disponibles pour cette matière, le résultat doit être inférieur ou égal à 24.

Le tableau suivant présente tous les calculs nécessaires pour la vérification :

Matière / niveau	nb de groupes	math	PHY	SVT	AR	FR	ang	techno	E.is	hg	E.phy
N1	6	30	12	12	24	24	12	0	12	18	12
N2	6	30	12	12	24	24	12	12	12	18	12
N3	10	50	20	20	40	40	20	20	20	30	20
totale d'heure pour chaque matière		110	44	44	88	88	44	32	44	66	44
nb d'enseignants disponible		5	2	2	4	4	2	2	2	3	3
nb d'heures de travail		22	22	22	22	22	22	16	22	22	14,66

Tableau 4 : La vérification de nombre d'heures de travail pour chaque enseignant

- On remarque que le nombre d'heures de travail pour chaque enseignant ne dépasse pas 24 heures.

4.3- La vérification du nombre des salles :

Pour chaque type de salles, nous comparons le nombre de séances qui peuvent se dérouler pendant un créneau k avec le nombre de salles disponibles pour le même type de salles, il est nécessaire que le résultat soit inférieur ou égal au nombre de salles disponibles, car sinon on peut trouver des problèmes.

On résume les résultats dans tableau suivant :

niveau	N1	N2	N3
nombre de classes	6	6	10
nombre d'heures	132	144	240
totale d'heures	516		
nombre de salles générales nécessaire	12		

Tableau 5 : Nombre de salles générales nécessaires

Le nombre d'heures signifie le nombre d'heures d'étude pour chaque niveau (pour les matières qui se déroule dans les salles générales).

- On a : $\mathbf{516 \,/ 44 \approx 12 \ \leq\ 19}$

Donc le nombre des salles générales est suffisant.

- Même chose pour les salles de SVT on a:

$$\mathbf{44 \ / 44 = 1 \ \leq\ 3}$$

Donc le nombre de salles est suffisant.

- Pour la cour du sport :

$$\mathbf{44 \ / 44 = 1 \ \leq\ 3}$$

Alors les salles disponibles sont suffisantes.

5) <u>Description des contraintes</u> :

La création des emplois du temps doit vérifier un certain nombre de contraintes qui sont souvent classées en deux catégories :

<u>Les contraintes dures :</u> Ce type de contraintes doit être obligatoirement satisfait dans toutes les situations car la violation de l'une de ces contraintes rend l’emploi du temps infaisable ou inacceptable. On distingue dans notre cas cinq contraintes dures:

1. Un élève ne peut pas être affecté à deux séances différentes à la même période.
2. Une salle ne peut pas accueillir deux séances différentes à la même période.
3. Une matière doit respecter le nombre de séances hebdomadaires.
4. Dans un emploi du temps une matière ne peut pas dépasser 2 heures par jour.
5. On doit respecter le nombre d’enseignant disponible.

Les contraintes de préférences: Contrairement au type de contraintes précédent, les contraintes de préférences n’exigent pas la vérification stricte, mais d’approcher au maximum de l’objectif voulu. Ces contraintes sont plus difficiles à formaliser que les contraintes dures et leur traitement est plus délicat, dans notre cas, on distingue:

1. Eviter que certains jours se trouvent surcharger alors que d’autres le sont moins.
2. Minimiser les déplacements des étudiants dans l’établissement.
3. Libérer quelques après-midi pour les enseignants.

Conclusion :

Les données du collège sidi Boumediene ont été présentées, et des vérifications de compatibilités de ces données ont été réalisées.

Les emplois du temps d'un établissement scolaire doivent vérifier un certain nombre de contraintes liées aux données de cet établissement.

Mais aussi ils doivent être adaptés de façon à favoriser une meilleure acquisition des connaissances par les élèves, ils doivent être libres d'heures creuses, et les cours de certaines matières doivent être étalés le plus possible sur les jours de la semaine.

Chapitre II

Modélisation mathématique pour la création des emplois du temps

Introduction :

La création des emplois du temps, répondant à un certain nombre de critères et de contraintes, exige une modélisation mathématique. Cette modélisation nécessite la définition d'un certain nombre de variables, la traduction des contraintes, et les critères des emplois du temps, par exemple le fait qu'ils doivent être libres d'heures creuses, seront exprimés dans la fonction objectif.

Au début de ce chapitre, nous expliquons le choix des variables et la fonction objectif, puis nous traduisons les contraintes à des équations mathématiques, afin de donner un modèle mathématique.

1- Modélisation :

Modéliser un problème consiste à le rendre sous forme d'un ensemble d'équations mathématiques. Et déterminer :

- Les variables (inconnues)
- Les contraintes
- L'objectif à atteindre (optimisation)

1.1- Les paramètres :

NM: Le nombre de matières allant de 1 jusqu'à NM

NG: le nombre de groupes allant de 1 jusqu'à NG

NC: le nombre de créneaux allant de 1 jusqu'à NC

NS: le nombre de salles générales

NSi : le nombre de salles spéciales pour la matière i

Nhj : le nombre d'heure hebdomadaire pour la classe j

$\forall$ j=1,………NG

Nhij: le nombre d'heure hebdomadaire de la matière i pour la classe j

$$\forall\ j = 1, \ldots, \mathrm{NG},\ \forall\ i = 1, \ldots, NM$$

NEi : le nombre d'enseignants de la matière i

$$\forall\ i = 1, \ldots, NM$$

1.2-Les variables :

On définit des variables qui dépendent à la fois de la matière, du groupe et du créneau :

$$X_{ij}^{k} = \begin{cases} \text{Si un groupe j a une séance d'une matière i pendant un créneau k} \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Il s'agit de variables binaires n'ayant que deux valeurs possibles 0 ou 1.

1.3-Les contraintes :

Dans ce problème nous disposons de plusieurs contraintes : contraintes de disponibilité, contraintes de respect de nombre d'heures exigées, contrainte des matières.

On commence par :

a-La disponibilité des salles :

Pour les matières qui peuvent se dérouler dans les salles générales le total des salles générales réservées pendant un créneau k, ne doit pas dépasser le nombre de salles générales disponibles dans le collège.

$$\sum_{j=1}^{NG} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k} \leq NS \qquad \forall\ k = \{1,\ldots\ NC\}$$

Explication :

Pour chaque créneau, on vérifie que la somme de toutes les séances qui auront lieu dans des salles générales est inférieure ou égale au nombre de salles disponibles. Alors, la somme sur tous les groupes égale le nombre de séances qui se déroulent pendant un créneau k.

- Et pour les matières qui ont des salles spéciales, Nous écrivons:

$$\sum_{j=1}^{NG} x_{ij}^{k} \leq NS_i$$

∀ k = {1,……… NC}

∀ i une matière à des salles spéciales.

b-Le nombre d’heures hebdomadaires :

Il faut que le nombre d'heures de chaque matière pour un groupe ***j*** dans les emplois du temps soit égal au nombre d'heures exigé dans les données :

$$\sum_{k=1}^{NC} x_{ij}^{k} = NH_{ij}$$

∀ i = {1,……… NM}

∀ j = {1,……… NG}

c- La charge d’une matière :

Un élève ne doit pas étudier plus de deux heures d’une matière par jour. Pour cela, nous avons testé tous les jours, il faut que la somme sur les créneaux de chaque jour soit inférieure ou égale à 2, pour chaque matière i et chaque groupe j.

Les créneaux de l'enseignement dans l'établissement scolaire sont répartis sur les jours de la manière suivante :

lundi								mardi							
matin				après-midi				matin				après-midi			
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16

mercredi								jeudi							
matin				après-midi				matin				après-midi			
C17	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24	C25	C26	C27	C28	C29	C30	C31	C32

vendredi								Samedi			
matin				après-midi				matin			
C33	C34	C35	C36	C37	C38	C39	C40	C41	C42	C43	C44

Alors la contrainte est la suivante :

$$\sum_{l=k}^{k+7} x_{ij}^{l} \leq 2$$

$\forall$ i = {1,……… NM}

$\forall$ j = {1,……… NG}

$\forall$ k = {1, 9, 17, 25,33}

Et pour le samedi matin, on a :

$$\sum_{k=41}^{44} x_{ij}^{k} \leq 2$$

∀ i = {1 …… NM}

∀ j = {1 …… NG}

Exemple:

Prenons les horaires du lundi pour la matière i et le groupe j

lundi							
matin				après-midi			
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
0	0	0	0	1	1	0	0

Dans ce cas la somme ne dépasse pas 2

$$\sum_{K=1}^{8} x_{ij}^{k} \leq 2$$

d-Indépendance des matières :

Un élève ne peut pas assister à plus d'un cours à la fois, c.à.d. étudier plus d'une matière pendant un créneau k.

$$\sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k} \leq 1$$

∀ j = {1 ………….. NG}

∀ k = {1 …………. NC}

1.4-La fonction objectif :

Notre but est de réduire le nombre d'heures creuses c'est-à-dire rendre la somme de la différence entre deux créneaux successifs petit autant que possible pour tous les groupes, alors nous écrivons :

$$Min \sum_{k=1}^{43} \sum_{j=1}^{NG} \sum_{i=1}^{NM} \left| \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^{k} \right|$$

Pour k ‡ {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,40}

Puisque,

$$\sum_{i=1}^{NM} \mathbf{X}_{ij}^{k} = \begin{cases} 1 \textit{ si un groupe j a une séance pendant le créneau k} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^{NM} \left| \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^{k} \right|$$

- Cette formule représente la différence entre deux créneaux successifs.

Donc la somme sur tous les créneaux donne la somme des différences pour le groupe j pendant toute la semaine :

$$\sum_{k=1}^{43} \sum_{i=1}^{NM} \left| \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^{k} \right|$$

Et pour éviter les différences soit entre les créneaux de 12h et 14h, ou entre les créneaux de 18h et 8h du lendemain nous supposons que :

$$k \ddagger \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$$

1.5-<u>Le modèle mathématique</u>

Nous proposons un modèle mathématique dont la fonction objectif est de minimiser le nombre d'heures creuses en prenant en considération l'ensemble des contraintes, de disponibilité de salles, de disponibilité d'enseignants,…etc.

$$Min \sum_{k=1}^{43} \sum_{j=1}^{NG} \sum_{i=1}^{NM} \left| \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^{k} \right|$$

$pour \quad k$ ‡ {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36,40}

$$\sum_{j=1}^{NG} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k} \leq NS$$ ∀ k = {1,……… NC}

$$\sum_{j=1}^{NG} x_{ij}^{k} \leq NS_i$$ ∀ k = {1,……… NC}

∀ i une matière à des salles spéciales.

$$\sum_{k=1}^{NC} x_{ij}^{k} = NH_{ij}$$ ∀ i = {1,……… NM}

∀ j = {1,……… NG}

$$\sum_{l=k}^{k+7} x_{ij}^{l} \leq 2$$ ∀ i = {1,……… NM}

∀ j = {1,……… NG}

∀ k = {1, 9, 17, 25,33}

$$\sum_{K=41}^{44} x_{ij}^{k} \leq 2$$ ∀ i = {1 …… NM}

∀ j = {1 …… NG}

$$\sum_{j=1}^{NG} x_{ij}^{k} \leq 1$$ ∀ i = {1 ………….. NM}

∀ k = {1 ………… NC}

<u>Remarque</u> : La fonction objectif du modèle mathématique est une fonction non-linéaire.

Conclusion:

Un modèle mathématique de la création des emplois du temps vérifiant un certain nombre de critères et de contraintes a été établi. Ce modèle est un problème d'optimisation combinatoire fortement contraint et ayant une fonction objectif non-linéaire. La fonction objectif a été exprimée de manière à avoir des emplois du temps libres d'heures creuses.

Chapitre III

La résolution du problème par l'algorithme génétique

Introduction :

Le modèle mathématique de la confection des emplois du temps d'un établissement scolaire est un problème d'optimisation combinatoire fortement contraint et ayant une fonction objectif non-linéaire. Des algorithmes relativement simples tels que les simplexes ne sont pas adaptés à la résolution de ce type de problème à cause notamment de la non-linéarité de la fonction objectif.

L'algorithme génétique est une méta-heuristique très utilisé dans beaucoup d'applications concrètes dans tous les domaines. Cet algorithme itératif permet la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire malgré que la fonction objectif soit non-linéaire. De plus, d'après la littérature, cet algorithme a une complexité raisonnable dans la pratique, de ce fait, il est bien adapté aux problèmes d'optimisation de grandes tailles.

Grâce à ces nombreux avantages de l'algorithme génétique, nous avons choisi d'effectuer la résolution de notre problème d'optimisation par cet algorithme. Plus précisément, nous avons travaillé sur le développement d'une interface afin d'utiliser l'algorithme génétique de Matlab.

Dans la section suivante, on présente l'algorithme génétique de base, ensuite on expose les étapes suivies lors du développement d'une interface de l'algorithme génétique de matlab tels que la Préparation des arguments (fonction objectif, les contraintes), présentation des variables, etc.

1- L'algorithme génétique :

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation s'appuyant sur des techniques dérivées de la génétique et des mécanismes d'évolution de la nature : sélections, croisements, mutations. Ils appartiennent á la classe des algorithmes évolutionnaires.

On peut dire que l'algorithme génétique est une méthode de programmation qui repose sur le principe de l'évolution pour effectuer la recherche d'une solution adéquate à un problème.

1.1- Pourquoi l'algorithme génétique ?

L'algorithme génétique devient populaire dans de nombreux domaines, et d'après les recherches ils donnent de bonnes performances à un faible coût pour un large éventail de problèmes, il est connu par sa supériorité par rapport à d'autres techniques pour des problèmes complexes ou NP-complet (avec beaucoup de données de grande taille, Relations entre les paramètres, Variations dans le temps).

1.2- Vocabulaires :

- **Une heuristique:** une méthode qui cherche une approximation de la meilleure solution, puisqu'on ne peut garantir le résultat.
- **Individu** : Les individus correspondent aux « solutions » du problème à optimiser. Ces solutions doivent être « codées » pour que le traitement puisse être effectué par l'algorithme génétique. Cette représentation codée d'une solution est appelée chromosome, et est composée de gènes. Chaque gène peut représenter une variable, un élément de la solution, ou encore une partie plus abstraite. La manière la plus utilisée de codage par algorithme génétique est le codage en vecteurs. Chaque solution est représentée par un vecteur. Ce vecteur peut être binaire ou encore de n'importe quel type.
- **Population :** C'est l'ensemble des individus, ou encore l'ensemble des chromosomes d'une même génération. Habituellement, la taille de la population reste constante tout au long de l'algorithme génétique.
- **Fitness d'un individu :** Le calcul de la qualité d'un individu est essentiel aux algorithmes génétiques. Cette fonction donne, en valeur numérique (habituellement réelle), la qualité d'un in-

dividu. Les algorithmes génétiques étant une technique d'optimisation, ils cherchent la qualité maximale, donc l'optimisation de la fonction de qualité. Si on cherche plutôt à minimiser une fonction, il faudra la modifier de sorte que la fonction de qualité se maximise.

- **Critère de terminaison :** Généralement, un algorithme génétique se termine après un certain nombre de générations, mais on peut également terminer l'exécution de l'algorithme lorsqu'une certaine condition soit atteinte, par exemple lorsque la qualité d'un individu dépasse un certain seuil.

2- Fonctionnement des algorithmes génétiques :

La première étape à faire c'est l'étape d'initialisation son objectif est de choisir un ensemble de solutions potentielles au problème d'optimisation posé. En effet, chaque solution potentielle va représenter un individu (dit aussi chromosome dans la terminologie de Holland) tous ces individus vont être rassemblés dans ce que l'on nommera la population initiale.

2.1- Codage :

La procédure normale pour coder un algorithme génétique ayant plusieurs paramètres est de coder chaque paramètre comme une séquence de bits. Les séquences sont ensuite tronquées l'une après l'autre pour former une grande séquence, le chromosome représente le vecteur des paramètres et chaque séquence du vecteur total représente un gène.

Parmi les types de codage les plus utilisé Le codage binaire qui est un codage élémentaire dont le principe consiste à coder la solution selon une chaîne de bits. Une chaîne de bits est une suite de chiffres, chacun d'entre eux pouvant prendre la valeur 0 ou 1. La structure de données traditionnellement utilisée est un tableau, appelé aussi vecteur, de variables booléennes. Chaque composante x_j, j = 0, ..., N de ce vecteur est une valeur booléenne prise par la variable.

2.2- La Sélection :

L'évaluation d'un individu ne dépendant pas de celle des autres individus, le résultat fourni par la fonction d'évaluation va permettre de sélectionner ou de refuser un individu pour ne garder que les individus ayant le meilleur coût en fonction de la population courante : c'est le rôle de la fonction de fitness. La Sélection permet de s'assurer que les individus performants seront conservés, alors que les individus peu adaptés seront progressivement éliminés de la population. En d'autres termes, elle permet, à partir d'un chromosome, de calculer le coût d'un point de l'espace de recherche, de quantifier numériquement la validité de la solution qu'il représente et de mesurer la santé et le degré d'adaptation d'un individu à son environnement.

Il existe plusieurs méthodes de sélection, mais la plus connue est celle du tournoi : on tire deux individus aléatoirement dans la population et on reproduit le meilleur des deux dans la nouvelle population. On refait cette procédure jusqu'à ce que la nouvelle population soit complète. Cette méthode donne de bons résultats. D'autre part la phase de sélection ne crée pas de nouveaux individus dans la population. Ceci est le rôle des opérateurs de croisement et de mutation.

2. 3- Le Croisement :

Le croisement permet la création de nouveaux individus selon un processus fort simple. Il prend en entrée un couple d'individus parents P1 et P2 et renvoie un couple d'individus enfants E1 et E2 obtenus en choisissant aléatoirement un point de croisement (ou plusieurs points de croisement) dans les chromosomes et en recopiant dans le fils E1 les gènes de P1 jusqu'au point de croisement puis en complétant avec les gènes de P2. On effectue l'opération symétrique pour E2.

Voici deux méthodes de croisement classiques : le croisement en un point et le croisement en deux points. Notons qu'il existe une multitude de croisements en fonction de la nature du problème à traiter ; on pourrait aussi considérer le croisement en k points ou croisement uniforme.

a- Croisement en un point : Considérons des chromosomes constitués de M bits. Initialement on tire aléatoirement une position de croisement. On échange ensuite les deux sous chaines terminales de chacun des deux chromosomes parents P1 et P2, ce qui produit deux nouveau chromosomes enfants E1 et E2.

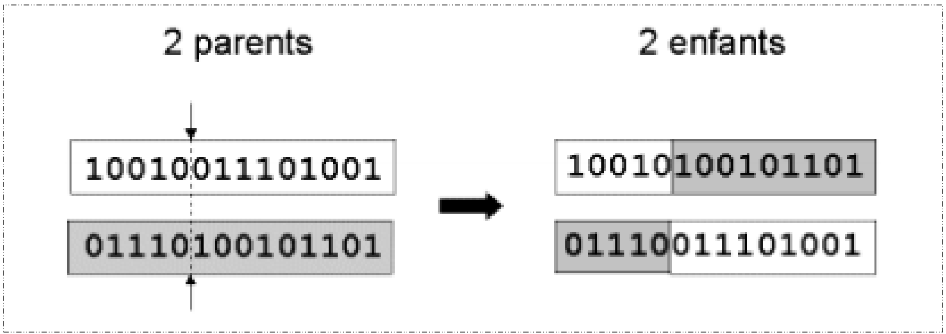


Figure 2 : Croisement en un point.

b- Croisement en deux points : On choisit aléatoirement deux points de croisement. On échange ensuite les deux sous-chaînes situées entre les deux points de croisement de chacun des deux chromosomes parents P1 et P2, ce qui produit deux nouveaux chromosomes enfants E1 et E2.

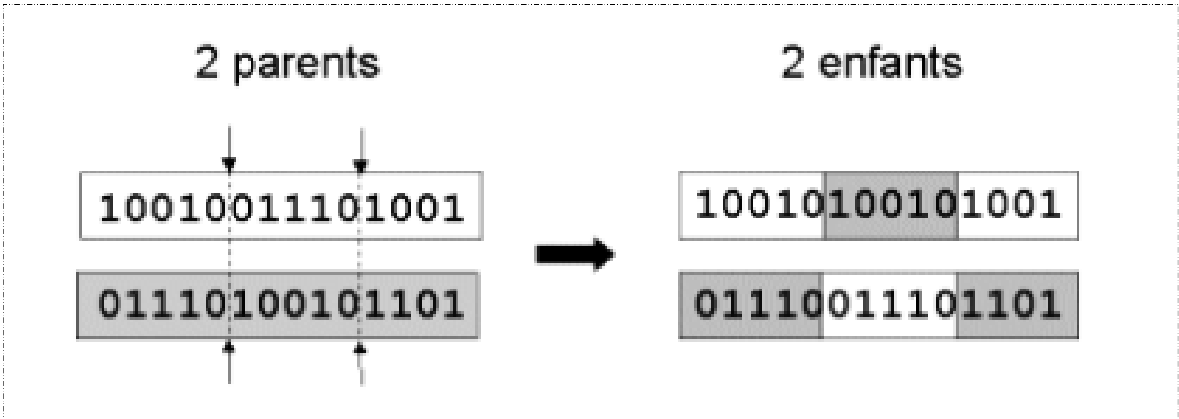
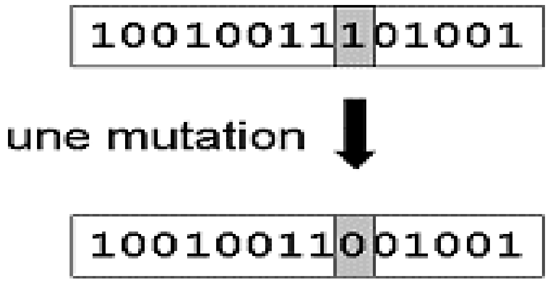


Figure 3 : Croisement en deux points.

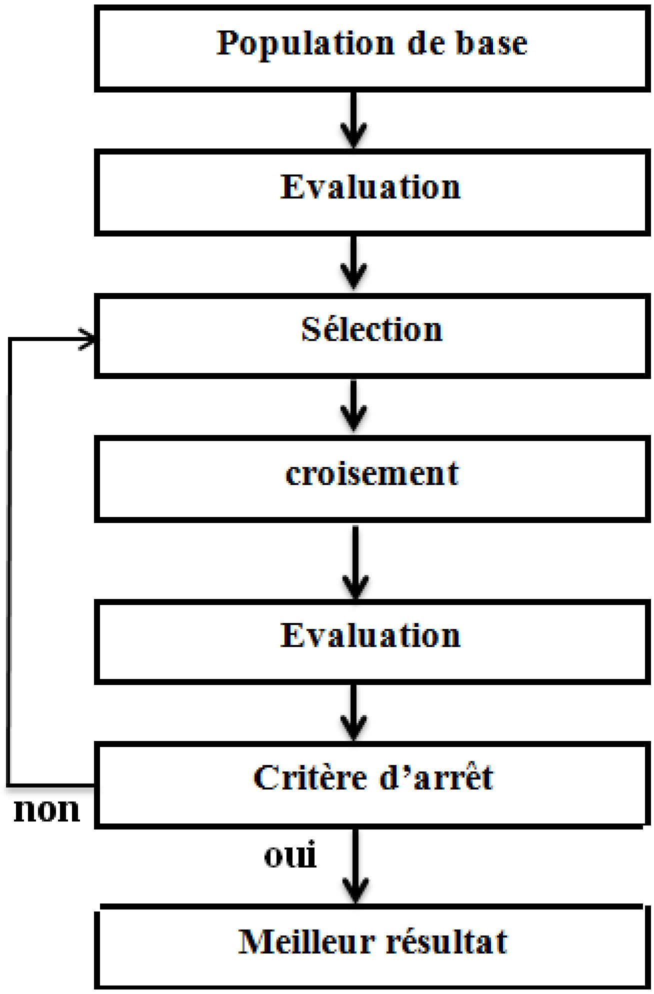
2.4- La Mutation :

Dans un codage binaire, lorsqu'il y a une mutation, les bits sont changés de 0 à 1 ou de 1 à 0. Lorsqu'un bit subit une mutation, on peut le percevoir comme une perturbation du paramètre réel. La mutation permet, tout au long de l'algorithme de maintenir une certaine homogénéité dans la population et ainsi d'éviter une convergence trop rapide vers un optimum local. Les mutations ne s'appliquent pas à tous les individus de la population à chaque génération.



L'opérateur de mutation modifie donc de manière complètement aléatoire les caractéristiques d'une solution, ce qui permet d'introduire et de maintenir la diversité au sein de notre population de solutions. Cet opérateur joue le rôle d'un "élément perturbateur", il introduit du "bruit" au sein de la population.

Le schéma suivant résume les étapes de l'algorithme génétique :



3- Processus de résolution par l'algorithme génétique de Matlab :

Pour résoudre le modèle mathématique détaillé précédemment, on a développé une interface pour utiliser l'algorithme génétique du logiciel Matlab. Ce travail se décompose en plusieurs phases :

- programmation dans Matlab de la fonction objectif qui joue le rôle de la Fitness dans l'AG

- transformation de chaque contrainte à une matrice selon un programme dans Matlab

- la présentation et le codage des variables.

3.1- Préparation des arguments :

a- La fonction objective :

La fonction objective que nous cherchons à optimiser est la suivante :

$$f(x) = Min \sum_{k=1}^{43} \sum_{j=1}^{NG} \sum_{i=1}^{NM} \left| \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^{k} \right|$$

Sous Matlab, nous créons un code source de la fonction objective qu'on va l'utiliser pour définir la fitness dans l'interface de l'algorithme génétique.

b- Les contraintes :

On construit à partir de chaque contrainte i un système sous la forme $A_i\, X = b_i$ ou bien $A_i\, X \leq b_i$ à l'aide un programme dans matlab.

- Par exemple pour la contrainte de la disponibilité des salles :

$$\sum_{j=1}^{NG} \sum_{i=1}^{NM} x_{ij}^{k} \leq NS \qquad \forall\ \mathbf{k=\{1,..............NC\}}$$

Nous trouvons une matrice de la forme suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 111111111\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots 0\ \ 111111111\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0\ 1111111111 \end{bmatrix}}_{\text{La matrice A}} x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 19 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 19 \\ 19 \end{bmatrix}}_{\text{Second membre b}}$$

- De même pour la contrainte du nombre d'heures hebdomadaires :

$$\sum_{k=1}^{NC} x_{ij}^{k} = NH_{ij} \qquad \begin{array}{l} \forall\ i = \{1, \ldots\ldots\ NM\} \\ \forall\ j = \{1, \ldots\ldots\ NG\} \end{array}$$

Sa matrice est la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 \ldots\ldots 0 & 1 \ldots\ldots 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \ldots\ldots 0 & \ldots\ldots 0 \\ \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 \ldots\ldots 1 & 0 \ldots\ldots 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \ldots\ldots 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 \ldots\ldots 1 \ldots\ldots 0 & 1 \ldots\ldots & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \ldots\ldots 0 & \\ \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 1 & 0 \ldots\ldots 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \ldots\ldots 1 & \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 5 \\ \vdots \\ 5 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Ces contraintes vont être utilisées pour définir les égalités linéaires dans l'interface de l'algorithme génétique de matlab.

- Finalement le système à résoudre devient :

$$\begin{cases} \text{Min} \quad f(x) \\ \text{Pour chaque contrainte i :} \\ A_i\, X \leq b_i \ \text{ ou } \ A_i\, X = b_i \end{cases}$$

Tel que :

- ✓ f(x) présente la fonction objectif (fitness)
- ✓ A_i signifie la matrice obtenu à partir de chaque contrainte i
- ✓ b_i c'est le second membre de la contrainte i

3.2- présentation des variables :

Dans notre problème, on a n = 7920 variables présentées sous la forme suivante :

$$(x_{11}^{1},\ldots,x_{1018}^{1},x_{11}^{2},\ldots\ldots,x_{1018}^{2},\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots,x_{11}^{44},\ldots\ldots,x_{1018}^{44})$$

Où

$$x_{ij}^{k} = \begin{cases} \textbf{Si un groupe j a une séance d'une matière i pendant un créneau k} \\ \textbf{0 sinon} \end{cases}$$

- Pour coder ces variables, on a choisi un codage classique qui utilise l'alphabet binaire : 0 et 1, dans ce cas le chromosome représente simplement une suite de 0 et de 1.

3.3- paramètres de GA Solver :

Pour les algorithmes génétiques, il faut faire un choix des valeurs des paramètres introduits dans le code de calcul. On a pris le choix suivant dans notre cas :

- Le nombre des générations = 150.
- Le nombre d’individus dans la population : 100.
- Les bornes : Lower = 0 et upper = 1

Conclusion :

Nous avons choisi d'effectuer la résolution de notre problème d'optimisation par l’algorithme génétique. Plus précisément, nous avons travaillé sur le développement d'une interface de l'algorithme génétique dans Matlab. Cette adaptation a était faite à partir d’un ensemble d'étapes à savoir la Présentation et le codage des variables, la construction de la fitness, la transformation des matrices.

Conclusion générale :

Cette étude a porté sur la confection des emplois du temps pour l'ensemble des classes d'un établissement scolaire. La création de ces emplois du temps doit prendre en considération plusieurs éléments tels que la disponibilité des salles, des enseignants, etc. Mais aussi les emplois du temps doivent être adaptés de manière à favoriser une meilleure acquisition des connaissances par les élèves, ils doivent également être libre d'heures creuses, parce que ces derniers présentent généralement de multiples inconvénients pour les élèves.

Après avoir récolté les données nécessaires pour établir les emplois du temps du collège. Nous nous sommes intéressés à la modélisation mathématique des conditions que doivent satisfaire les emplois du temps et des éléments permettant d'avoir des emplois du temps les plus adaptés possibles. Le modèle mathématique ainsi élaboré est un problème d'optimisation combinatoire dont les contraintes et la fonction objectif sont non-linéaires.

Nous avons ensuite abordé la résolution numérique de ce problème d'optimisation discrète par l'algorithme génétique. Nous avons exposé, et implémenté dans une interface, les étapes nécessaires à l'utilisation de l'algorithme génétique de matlab. Le temps imparti à cette étude ne nous a pas permis de faire des validations de l'interface développé. La réalisation de ces validations serait la suite naturelle à ce travail.

Référence :

[1] Conn, A. R., N. I. M. Gould, and Ph. L. Toint. "A Globally Convergent Augmented Lagrangian Algorithm for Optimization with General Constraints and Simple Bounds," SIAM Journal on Numerical Analysis,

[2] Thèse de doctorat de la Faculté des études supérieures de l'Université Laval

[3] Zhang, X. and C. Wu, Energy cost minimization of a compressor station by modified genetic algorithms. Engineering Letters, 2015. 23(4): p. 258-268.

[4] Al-Rabadi, A.N. and M.A. Barghash, Fuzzy-PID control via genetic algorithm-based settings for the intelligent DC-to-DC step-down buck regulation. Engineering Letters, 2012. 20(2): p. 176-195