UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Titre

Filtres et ultrafiltres sur un ensemble

Présenté par :

- EL-MRABTE FAOUZI

Encadré par :

- Pr SEDDIK GMIRA (FSTF)

Soutenu Le 8 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr Mohammed Bekkali
- Pr Omar Sedki
- Pr Mustapha Alami

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah

Faculté des sciences et Techniques de Fès

Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2015-2016

Licence Sciences et Techniques en Mathématiques et Applications

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'Obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Filtres et ultrafiltres sur un ensemble

Préparé par :

- EL-MRABTE FAOUZI

Sous la direction de :

PR.SEDDIK GMIRA (FSTF)

Soutenu le 8 Juin 2016 devant le jury composé de :

- Pr. Mohammed Bekkali (examinateur)
- Pr. Omar Sedki (examinateur)
- Pr. Mustapha Alami (examinateur)

Remerciement

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon encadrant M.SEDDIK GMIRA, de m'avoir accordé ce projet de mémoire, dont j'espère que mon travail soit à la hauteur de ses attentes. Je le remercie pour son excellent suivi, ses remarques pertinentes et ses recommandations fort enrichissantes, et je le remercie également pour la grande patience dont il a fait preuve tout au long des discussions que nous avons eues et dont j'ai bénéficié énormément.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des professeurs qui ont assuré avec succès l'enseignement de la filière Mathématiques et Applications, et à tous ceux qui ont participé de loin ou proche à l'élaboration de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail nous allons nous intéresser à l'une des plus important structure en topologie générale. Il s'agit de la théorie de filtre qui a été inventé, en 1937 par Henri Cartan et utilisé par Bourbaki.

La caractérisation des limites au moyen de suite devient impossible lorsque les points d'un espace topologique n'admettent pas un système fondamental dénombrable de voisinages, on peut alors remplacer les suites par les filtres ; le concept de filtre permet d'étendre la notion de limite aux situations les plus générale. Ce travail se divise en quatre chapitres :

Le premier chapitre est un ensemble de rappels sur les ensembles, la famille indexée et quelques notations nécessaires sur les applications.

Le deuxième chapitre contient un axiome très important, les mathématique ne sauraient exister sans cette axiome, c'est l'axiome de choix, depuis son apparition en 1904 par Zermelo il n'acessé d'engendrer les polémiques et les problèmes.

Dans le troisième chapitre nous abordons le lemme de Zorn qui est utilisable surtout dans les cas où la topologie n'est pas métrisable ou à base dénombrable, le cas particulier important dans notre travail est que ce lemme affirme l'existence des ultrafiltres qui jouent un rôle fondamental dans la construction de prolongement d'objets classiques tels que réels.

Le dernier chapitre est exclusivement consacré au filtre et l'ultrafiltre.

Chapitre 1 : Rappels et préliminaires

1.1 Ensembles :

Nous appelons ensemble toute liste, collection ou rassemblement d'objets bien définis, sur lesquelles on admet la possibilité de faire certaines opérations (réunion, intersection, ensemble des parties …) de manière que le résultat donne encore des ensembles. Dans les applications, on sera conduit souvent à faire l'hypothèse que les collections sur lesquelles on opère sont des parties d'un grand ensemble U, choisi de manière que les collections étudiées soient des parties de U ou se déduisent de U par des opérations dont le résultat soit encore un ensemble ; les axiomes que nous aborderons plus tard assurent alors que les collections obtenues sont des ensembles et qu'on ne sort pas de la classe des ensembles. Plus précisément cette classe constitue une catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes les applications d'ensembles.

Notations :

On note $\left[x \in X; P(x)\right]$ la partie de X formée des éléments de X pour lesquels la propriété P est vraie, on écrit {x} la collection formée du seul élément x. On note de même $\left\{a_1, ...a_n\right\}$ une collection finie formée des n éléments écrits entre parenthèses.

On rappelle les propriétés suivantes qui ont le caractère d'axiomes :

- Un élément x constitue un ensemble noté {x}.
- Si X est un ensemble, toute partie A de X est un ensemble.
- Les entiers naturels positifs constituent un ensemble noté $\mathbb{N}$.
- Soit X un ensemble : les parties de X sont les éléments d'un ensemble noté $\mathscr{P}(X)$ dit ensemble des parties de X.
- Si X et Y sont deux ensembles, les couples(x, y), $x \in X, y \in Y$ constituent les éléments d'un nouvel ensemble dit produit $X \times Y$ des ensemble X et Y.

Dans la suite X, Y désignant des ensembles : une application f de X dans Y sera notée $f: X \to Y$, ou encore $x \to f(x)$, l'image $f(x) \subset Y$ est la collection des $y \in Y$ pour lesquels il existe au moins $x \in X$ tel qu'on ait $y = f(x)$: c'est un ensemble, partie de Y. On écrit aussi $f(X) = \mathrm{Im} f$ .On note $f^{-1}(y)$, pour $y \in Y$, l'ensemble $[x \in X; f(x) = y]$, il est vide si $y \notin \mathrm{Im} f^{-1}$, l'application $f: X \to Y$,induit une application de $\mathscr{P}(X)$ dans $\mathscr{P}(Y)$ et f^{-1} induit une application de $\mathscr{P}(Y)$ dans $\mathscr{P}(X)$: si $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = [x \in X; f(x) \in B]$; l'image de $f^{-1}(B)$ est l'ensemble vide si B et $\mathrm{Im} f$ n'ont pas d'élément commun.

Soient $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$, on note gof l'application composée $X \to Z$: $x \to f(x) \to g[f(x)]$.

Une application $f: X \to Y$ est injective si $\forall x, x' \in X, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
Elle est surjective si $\mathrm{Im} f = f(X) = Y$ c-à-d $\forall y \in Y. \exists x \in X$ tel que $y = f(x)$.

Si elle est injective et surjective elle est dite bijective c-à-d : tout $y \in Y$ est l'image d'un seul $x \in X$.

Soient $X \subset Y$ et f une application $Y \to Z$, alors $f_X(x)$ restriction de f à X est l'application définie par $f_X(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.
Réciproquement, si $g(x)$ est une application de X dans Z, une application f de Y dans Z est dite une extension (ou un prolongement) de g si $f_X(x) = g(x)$.

Soit $f: X \to Y$ dans l'espace produit $X \times Y$ des couples(x, y), $x \in X, y \in Y$ ceux pour lesquels on a $y = f(x)$ forment un ensemble, est appelé le graphe de l'application f.

Si G est un graphe, la relation $(x, y) \in G$ s'exprime encore en disant que « y correspond à x par G ».

1.2 Familles indexées :

Etant donné un ensemble X quelconque, nous voulons indicer certains éléments de X avec les éléments d'un ensemble A d'indices, nous allons donc définir une famille d'éléments de X comme une application de A dans X, ce qui va permettre d'attribuer à des éléments de X plusieurs indices.

Définition 1.2.1 :

Soient X et A deux ensembles et $X \neq A$, nous appelons famille d'éléments de X indexée par A, toute application de A dans X
$a \in A \to x_a \in X$

En théorie des ensembles, une application est le plus souvent identifiée à son graphe ; c'est un ensemble de couples.

Une application définie sur A est un ensemble de couples tels que chaque élément de A apparait une et une fois en premier composante d'un couple de cet ensemble, c'est donc aussi la définition de famille d'ensemble indexée par A.

Exemples :

Si A est une partie de $\mathbb{N}$; une famille indexée par $n \in \mathbb{N}$ est une suite d'éléments $x_n \in X$.

Soit $\mathbb{N}^p = \underbrace{\mathbb{N}x\mathbb{N}x\mathbb{N}......x\mathbb{N}}_{p}$; une application de $\mathbb{N}^p$ dans X définit une suite $X_{n1,.....np}$ indexée par le multi-indice $(n) = (n_1,.......,n_p)$; on posera $|n| = n_1 + ... + n_p$.

Si A est un ensemble fini, alors la famille est dite finie.

Remarque :

- Une famille n'est pas nécessairement injective, et donc deux indices différents peuvent être attribués à un même élément de X.
- Soit X un ensemble quelconque, et A un ensemble d'indices, soit X' une partie de X, l'injection $\begin{array}{l} i : X' \to X \\ x \to x \end{array}$ est une famille indexée par X', elle est appelée famille <u>canoniquement</u> associée à la partie X'

Chapitre 2 : Axiome du choix

2.1 Produit IIXa:

Définition 2.1.1 :

Le produit $\prod X_a$, $a \in A$ est un ensemble d'éléments dont chacun $\{x_a\}$ $a \in A$, est un ensemble d'éléments sup, obtenu en choisissant un élément x_a dans chaque X_a

Si A = $\mathbb{N}$, on peut faire ces choix successivement pour a=1, 2, 3, …., dans le cas général, la possibilité de tels choix, c'est-à-dire l'existence du produit $\prod X_a$ résulte d'un énoncé dit :axiome du choix ou de Zermelo.

Si $X_a = X$ pour tout a, on notera X^A le produit $\prod X_a$.

2.2 Axiome du choix :

L'axiome du choix affirme qu'il est légitime de construire des objets mathématiques, en répétant un nombre infini de fois l'opération de choisir un élément dans un ensemble non vide

Autrement dit étant donné une famille quelconque de sous ensemble de E, on sait choisir simultanément un élément dans chaque sous-ensemble. Cet axiome semble tout à fait naturel à première vue, en effet il ne pose pas de problème quand l'ensemble d'indices I est fini, dans ces cas-là en pratique, on sait construire la suite des éléments $f(i) \in A_i, i \in I$. En fait c'est dans le cas infini qu'il pose problème, plus précisément cet axiome pose l'existence d'une fonction choix sans préciser de façon de la construire.

2.3 Fonction de choix :

Définition 2.3.1 :

Une fonction de choix sur un ensemble d'ensembles est une fonction qui sélectionne un élément distingué dans chacun de ses éléments non vides, c'est-à-dire un élément pour lequel un tel choix soit possible

L'axiome de choix affirme que tout ensemble d'ensembles possède une fonction de choix.

Exemples :

Supposons A= {{0}, {1, 2}, {1, 2, 3}}; alors la fonction F définie par F ({0})=0, F ({1, 2})=1 et F ({1, 2, 3})=2 est une fonction de choix sur A.

On utilisera les deux énoncés équivalents pour exprimer cet axiome de choix.

(Z_1) Soit $X_a \subset X$ une famille d'ensembles non vides contenus dans un ensemble X, les X_a étant indexés par un ensemble A d'indices a. Alors le produit $\prod X_a$ est un ensemble non vide.

(Z_2) Soient A et X deux ensemble non vides. Soit F une application de A dans P(X) qui ne prend pas la valeur $\varnothing$. Alors il existe une application $f : a \in A \to x = f(a) \in X$, où f associé à tout élément $a \in A$ un élément de X noté $f(a)$ qui vérifie $f(a) \in F(a)$ pour tout $a \in A$

Proposition 2.3.1 :

Les énoncés (Z_1) et (Z_2) sont équivalents.

Démonstration :

$$(Z_2) \Rightarrow (Z_1)$$

Car la famille $X_a \subset X$ est une application F de A dans $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$; d'après (Z_2), il existe une application de A dans X, soit $a \to f(a) = x_a$ qui vérifie $f(a) \in F(a) = X_a$ .Cette application est autre que le choix d'un $x = x_a$ dans chaque X_a .On a alors $\prod X_a \neq \varnothing$ puisqu'il est possible d'en définir au moins un élément $\{x_a, a \in A\}$.

De plus, le produit $\prod X_a$ est un ensemble car un élément du produit d'identifie au graphe de f, donc à un élément de $\mathscr{P}(A \times X)$.

$$(Z_1) \Rightarrow (Z_2)$$

Car l'application F de A dans $\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$ détermine une famille, soit $a \in A \to x_a \neq \varnothing$, et l'existence d'un élément dans $\prod X_a$ équivaut au choix pour chaque $a \in A$ d'un $x_a = f(a) \subset X_a = F(a)$, ce qui est l'énoncé Z_2 .

Remarque :

Soient X, Y deux ensembles. Les applications $X \to Y$ constituent un ensemble noté Y^X : chaque application f étant identifiée à son graphe G_f Y^X s'identifie à un élément de $\mathscr{P}(X \times Y)$.

Chapitre 3 : lemme de ZORN

3.1 Relation d'équivalence, quotient :

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur un ensemble X, c'est-à-dire une relation binaire $\Re(x,y)$ réflexive, symétrique et transitive. L'ensemble $e(x)=[x' \in X, \Re(x,x')]$ des x'équivalents à x constitue une classe d'équivalence.

Soient $x \in X, x' \in X$; on a $e(x) \cap e(x') = \varnothing$ ou bien $e(x)=e(x')$ et dans ce cas on a $\Re(x,x')$.

Un élément quelconque $y \in e(x)$ est dit un représentant de la classe $e(x)$. Les classes d'équivalence $e(x)$ sont une partie de $\mathscr{P}(X)$ et forment donc un ensemble qu'on appelle ensemble quotient de X par $\Re$ et qu'on note $X/\Re$.

L'application $p : x \to e(x) = \xi \in X/\Re$ est dite canonique.

Une partie A de X est dite saturée pour $\Re$ si $x \in A$ entraine $x' \in A$ dès qu'on a $\Re(x,x')$.

Exemples :

Soit $f : X \to Y$ une application : on définit $\Re(x_1,x_2) \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$; $\Re$ est une relation d'équivalence et f se décompose (se factorise) de la manière classique suivante :

$$\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \\ \downarrow \\ X/\Re \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Im}(f) \end{array}$$

On a $f = i \circ \tilde{f} \circ p$

Cette application $\tilde{f}$ est unique (dite application quotient de f), cette relation montre que nécessairement $\tilde{f}(\bar{x}) = f(x)$, $\tilde{f}$ est bijective, i est l'injection canonique de f(X) dans Y, enfin p est surjective.

<u>3.2 Ordre et ordre total :</u>

Un ordre sur un ensemble X est une relation binaire (qu'on notera $\leq$) définie sur certains couples $(x, y), x \in X, y \in X$ (donc une partie du produit $X \times X$), avec les propriétés suivant : elle est réflexive ($x \leq x$), transitive ($x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$), antisymétrique ($x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$).

Si X est muni d'un ordre, on dit que X est ordonné, si la relation est définie pour tous les couples du produit $X \times X$, l'ensemble X est dit <u>totalement ordonné</u> pour la relation d'ordre.

Un sous ensemble $A \subset X$ est dit <u>majoré</u> dans X s'il existe $a_0 \in X$ tel qu'on ait $a < a_0$ pour tout $a \in A$; a_0 est dit un <u>majorant</u> de A dans X. Si de plus, on a $a_0 \leq b$ pour tout autre majorant de A dans X, a_0 est dite une <u>borne supérieure</u> de A dans X et on note $a_0 = \sup A$ (pour la relation d'ordre étudiée).

Un élément $x \in X$ est dit maximal s'il n'y a pas d'éléments strictement plus grands que x c'est-à-dire $\forall y \in X, x \leq y \Rightarrow x = y$.

On définit de même la borne inférieure, $\inf A$, de A dans X et un élément de X (s'il en existe) pour la relation d'ordre.

Remarque :

Il nous arrivera de dire partiellement ordonné au lieu d'ordonné, quand il peut y avoir ambiguïté.

3.3 Ensembles inductifs :

Soit $(X,\leq)$ un ensemble ordonné, un sous ensemble C de X est dit <u>chaîne</u> si la restriction de l'ordre $\leq$ sur C est un ordre total. En d'autres termes, pour tous $x, y \in C$ on a $x \leq y$, ou bien $y \leq x$

Soit S une relation d'ordre (partiel), étant donnée sur un ensemble E, nous considérons les parties de E qui sont totalement ordonnée pour S.

Définition 3.3.1 :

Un ensemble E muni d'un ordre S est dit inductif pour S si toute chaîne admet une borne supérieure dans E.

Exemples :

1) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est (partiellement) ordonné par la relation $A \subset B$, $A \in \mathcal{P}(E), B \in \mathcal{P}(E)$
Dans $\mathcal{P}(E)$, E est l'élément maximal et c'est le seul. Si $\{A_i\}, i \in \wp$ est une famille totalement ordonnée dans $\mathcal{P}(E)$, la réunion $A = \bigcup_i A_i$, $i \in \wp$ est encore un élément de $\mathcal{P}(E)$ et est évidement une borne supérieur de la famille ; $\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble inductif pour cet ordre.

2) Soient E et F deux ensembles, soit f une application d'une partie $A(f)$ de E dans F ; on désigne par Φ la famille de telles applications ; c'est un ensemble car une telle application est caractérisée par son graphe G_f qui s'identifie à un sous-ensemble de $E \times F$; c'est-à-dire à un élément de $\mathcal{P}(E \times F)$; Φ est

(partiellement) ordonné par la relation d'ordre qui s'énonce : « f est un prolongement de g » ; nous la noterons $g \ll f$; elle signifie $A(g) \subset A(f)$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A(g)$.

Soit $\Phi_1 \subset \Phi$ une famille totalement ordonnée de Φ ; posons $\Phi_1 = \{f_i, A(f_i) = A_i, i \in \wp\}$ en supposant la famille indexée par $i \in \wp$, il existe une borne supérieure de Φ_1 dans Φ , c'est l'élément $[f, A]$ avec $A = \bigcup_i A_i$ et $f(x) = f_i(x)$ pour $x \in A_i$, quel que soit $i \in \wp$. Ainsi Φ est un ensemble ordonné inductif pour la relation « f prolonge g ».

Soit f_m un élément maximal de Φ : on a $A(f_m) = E$ c'est-à-dire : un élément maximal est une application dans F définie sur tout l'ensemble E. En effet, si l'on a $A(f_m) \neq E$, il existe $x_0 \in E, x_0 \notin A(f_m)$. On définit alors une application $f(x)$ de la manière suivante. On pose $\tilde{f}(x) = f_m(x)$ pour $x \in A(f_m)$, et on définit $f(x_0) = \alpha \in F$, où α est un élément quelconque de F.
Il est clair qu'on a $f_m \ll f$ et $f_m \neq f$; f_m n'est pas un élément maximal dans Φ , d'où la contradiction.

3.4 Lemme de zorn :

(Z) _ Tout ensemble ordonné inductif possède au moins un élément maximal.

Voici une façon d'interpréter intuitivement le lemme de Zorn :

Appelons X l'ensemble incriminé. Une chaîne peut être vue comme une progression vers des éléments de plus en plus grands de X. Imaginons donc que nous décidions de poursuivre une telle progression jusqu'à ne plus pouvoir continuer. La chaîne ultime que nous obtenons peut a priori se terminer de deux façons : soit il y a en fin de chaîne une infinité d'éléments tous plus grands les uns que les autres (comme par exemple à la fin d'un intervalle ouvert), soit il y a un élément de la chaîne qui est le dernier (comme par exemple à la fin d'un intervalle fermé). Le premier cas est en fait impossible : en effet s'il se produisait, la chaîne ayant un majorant par l'hypothèse, on pourrait ajouter celui-ci à la fin de la chaîne, ce qui contredirait l'ultimité de celle-ci. Ainsi la chaîne a un plus grand élément m. Mais à nouveau l'ultimité de la chaîne interdit qu'aucun $x \in X$ soit strictement supérieur à m, attendu que sinon on pourrait ajouter x en fin de chaîne : c'est donc que m est un élément maximal de X .

Dit en une phrase peut- être plus élégante : « Si au-delà du chemin il y a toujours un lieu, c'est qu'il y a un lieu au bout du chemin ».

Proposition 3.4.1 :

$\boxed{(Z) \text{ entraîne } (Z_1) \text{ et } (Z_2)}$

Démonstration :

Il suffit de montrer $Z \Rightarrow Z_2$

Soient A et B deux ensembles, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, et une application $F : A \to \mathscr{P}(B)$ qui ne prend pas la valeur $\emptyset$.

Elle associé à tout $x \in A$ un ensemble $F(x)$, sous ensemble non vide de B. La famille Φ des applications f : $f : A(f) \subset A \to B$, soit encore : $x \in A(f) \to f(x) \in B$, qui vérifient $f(x) \in F(x)$ pour $x \in A(f)$ est un ensemble, le graphe G_f d'une telle application étant un élément de $\mathscr{P}(A \times B)$. D'autre part, on peut définir une application pour laquelle $A(f)$ est réduit à un seul point $x_0 \in A$, en lui donnant une valeur $f(x_0) \subset F(x_0)$, ce qui est possible puisque, par hypothèse, on a $F(x_0) \neq \emptyset$, ainsi Φ n'est pas vide. L'ensemble Φ est d'autre part inductif pour la relation $g \ll f$ (exemple 2), alors Φ admet au moins un élément maximal f_0 d'après (Z) : cet élément maximal est une application définie sur tout A, il existe donc une application f_0 , avec $A(f_0) = A$ et $f_0(x) \subset F(x)$ pour $x \in A$, ce qui est l'énoncé (Z_2) .

Chapitre 4 : Filtres

Histoire des filtres : une promenade

C'était au cours d'un congrès Bourbaki qui se tenait à Chan çay, en Touraine et en 1937. Ce congrès est celui qui fixa par exemple, la définition d'une topologie, celle que nous utilisons aujourd'hui et dans laquelle une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Après une matinée de discussion et de travail, Bourbaki était allé se promener, et lui Henri Cartan, était resté travailler. La discussion du matin avait porté sur l'expulsion du dénombrable, sans aboutir, Henri Cartan eut une idée de solution. Il exposa cette idée à ses amis lorsque ceux-ci rentèrent de leur promenade. La chose était inventée mais pas son nom.

La discussion fut ponctuée de cris « Boum ! » palliant l'absence du nom. Boum était pas très adapté à la publication et se transforma en filtre.

4.1 Qu'est-ce qu'un filtre ?

Un filtre, c'est ce qui permet de faire des démonstrations de topologie aussi limpides que celles que l'on fait avec des suites, sans restreindre la généralité en utilisant la dénombrabilité.

En général, une topologie n'est pas nécessairement métrisable ou à base dénombrable de voisinage, dans ce cas les suites ne suffisent pas pour caractériser la topologie, c'est pour cela que Henri Cartan à introduit les filtres.

Définition 4.1.1 :

Soit X un ensemble, une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(X)$ est dite un filtre sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :

1) $\mathscr{F} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathscr{F}$
2) $A \in \mathscr{F}$ et $A \subset B \subset X$ entraînent $B \in \mathscr{F}$
3) $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}$ entraînent $A \cap B \in \mathscr{F}$

Exemples :

1) Sur un ensemble X, la famille $\mathscr{F}$ de toutes les parties de X qui contiennent un élément donné $x \in X$ constitue un filtre ;
$\mathscr{F} = \{A \in \mathscr{P}(X) / x \in A\}$, $\mathscr{F}$ est dite filtre principal.
2) L'ensemble $V(x)$ des voisinages d'un point $x \in X$ est un filtre sur X.
3) Soit X un ensemble infini, alors $\mathscr{F} = \{A \in \mathscr{P}(X) / (X \setminus A)$ est fini $\}$ est un filtre sur X.

Lorsque $X = \mathbb{N}$, on appelle ce filtre le filtre de Fréchet

4.2 Base de filtre :

Définition 4.2.1 :

Une partie $\mathscr{B}$ de $\mathscr{P}(X)$ est dite une base de filtre si elle vérifie :

1') $\mathscr{B} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathscr{B}$

2') Soient $B_1 \in \mathscr{B}$ et $B_2 \in \mathscr{B}$, il existe $B_3 \in \mathscr{B}$ qui vérifie

$B_3 \subset (B_1 \cap B_2)$

Exemples :

1) Si $A \neq \emptyset$, $\mathscr{B} = \{X \in \mathscr{P}(E) / A \subseteq X\}$ est une base de filtre.
2) Si E est un espace topologique et $x \in E, V(X)$ est une base de filtre.

Proposition 4.2.1 :

Toute base de filtre $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ engendre un filtre et un seul $\mathcal{F}$ sur X de la manière suivante : $\mathcal{F}$ est la famille des parties de X qui contiennent $B \in \mathcal{B}$.

Démonstration :

Il est immédiat que la famille $\mathcal{F}$ ainsi constituée vérifie les axiomes 1, 2, 3. On a d'autre part : $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ et tout $A \in \mathcal{F}$ contient un $B \in \mathcal{B}$.

Réciproquement, étant donné une partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un filtre, pour qu'elle engendre $\mathcal{F}$ par la construction précédente, il est nécessaire que $\mathcal{B}$ soit une base au sens de la définition précédente, c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ vérifie $1'$ et $2'$; $1'$ résulte de 1 et 2 et $2'$ est une conséquence immédiate de 3.

Remarque :

On peut donner une autre définition d'une base de filtre :

Soit X un ensemble et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$, on dit que $\mathcal{B}$ est une base de filtre si l'ensemble $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) / \exists B \in \mathcal{B}, B \subset A\}$ est un filtre, on dit que $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par $\mathcal{B}$.

Proposition 4.2.2 :

Pour que deux bases de filtre sur X soient équivalentes, (engendrent le même filtre), il faut et il suffit que tout ensemble $B \in \mathcal{B}$ contienne un $B' \in \mathcal{B}'$ et vice versa.

Démonstration :

On a $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{B}' \subset \mathscr{F}$, d'autre part, tout $A \in \mathscr{F}$ contient un $B \in \mathscr{B}$ (et un $B' \in \mathscr{B}'$) ; en prenant $A = B \in \mathscr{B}$,puis $A = B' \in \mathscr{B}'$, on établit la condition nécessaire ; la condition suffisante est évidente.

4.3 Image d'un filtre et d'une base de filtre par une application :

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application de X dans Y.

a) Soient $\mathscr{B}$ une base de filtre sur X : la famille $\mathscr{B}'$ des $f(A)$ pour $A \in \mathscr{B}$ vérifie 1' et 2' car $\mathscr{B}' = \{f(A)\}_{A\in\mathscr{B}}$ n'est pas vide ; on a en effet $A \neq \varnothing$ et $\mathscr{B} \neq \varnothing$ (axiome 1'). De plus si l'on a $A_1 \in \mathscr{B}$ et $A_2 \in \mathscr{B}$ il existe $A_3 \in \mathscr{B}$, vérifiant $A_3 \subset (A_1 \cap A_2)$ et l'on a $f(A_3) \subset \mathscr{B}'$, $f(A_3) \subset (f(A_1) \cap f(A_2))$ ce qui établit 2' pour $\mathscr{B}'$ et achève de montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de filtre.

b) Si $\mathscr{F}$ est un filtre sur X, $f(\mathscr{F})$ n'est pas un filtre en général (par exemple si f n'est pas surjective), mais $\mathscr{F}$ est une base de filtre et $f(\mathscr{F})$ est donc une base de filtre sur Y d'après a).

c) Soit $\mathscr{B}'$ une base de filtre sur Y, et f une application $X \to Y$ qu'on supposera surjective. Alors $\{f^{-1}(A')\}$ pour $A' \in \mathscr{B}' \subset \mathscr{P}(Y)$ engendre une famille $\mathscr{B}$ de parties de X : $\mathscr{B}$ est une base de filtre ; en effet $f^{-1}(A')$ n'est jamais vide car f est surjective. Soient $A'_1 \in \mathscr{B}', A'_2 \in \mathscr{B}'$, il existe $A'_3 \in \mathscr{B}'$ tel qu'on ait $A'_3 \subset (A'_1 \cap A'_2)$, on a alors $f^{-1}(A'_3) \subset (f^{-1}(A'_1) \cap f^{-1}(A'_2))$ ce qui établit 2' pour $\mathscr{B}$.

d) Si $\mathscr{F}'$ est un filtre sur Y, et f surjective, $f^{-1}(\mathscr{F}')$ n'est pas un filtre en général (noter que $f^{-1}(\mathscr{F}')$ ne comprend que des parties de X saturées par la relation d'équivalence

$\Re(x,y):[x \in X, y \in Y, f(x) = f(y)]$) ; mais $f^{-1}(\mathscr{F}')$est une base de filtres.

On a alors démontré les parties a) et b) de l'énoncé suivant :

Proposition 4.3.1 :

a) Soit $f : X \to Y$ une application de l'ensemble X dans Y. l'image par f d'un filtre $\mathscr{F}$ ou d'une base de filtre $\mathscr{B}$ sur X est une base de filtre sur Y.
b) Si f est surjective, f^{-1} transforme une base de filtre $\mathscr{B}'$ sur Y en une base de filtre sur X.
c) Si f n'est pas supposé surjective, pour que $f^{-1}(\mathscr{B}')$ soit une base de filtre, sur X, il faut et il suffit que tout ensemble de $\mathscr{B}'$rencontre $\operatorname{Im} f = f(x)$.

Remarque :

La partie c) sera établie plus loin. Indiquons un corollaire de c).

Corollaire 4.3.1 :

Soit $X \subset Y$ et $i : X \to Y$ l'injection canonique : l'image $i(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$ d'une base de filtre sur X est une base de filtre sur Y.

4.4 Image par restriction :

Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X ; on dira que la famille $\mathscr{F}_X$=$\{A_X\}$ pour A parcourant $\mathscr{F}$ est la trace de $\mathscr{F}$ sur X. on a alors :

Proposition 4.4.1 :

Pour que $\mathscr{F}_X$ soit un filtre sur X, il faut et il suffit que tout ensemble $A \in \mathscr{F}$ rencontre X.

Démonstration :

C'est évidement nécessaire d'après l'axiome 1. C'est suffisant car 1 est alors vérifié, de plus, soit $A_X = A \cap X, A \in \mathscr{F}$, et soit B vérifiant $A_X \subset B \subset X; B = (B \cup A) \cap X$ appartient à $\mathscr{F}_X$ et 2 vérifié ; enfin, si $A'_X \in \mathscr{F}_X$ et $A''_X \in \mathscr{F}_X$, on a $A' \in \mathscr{F}, A'' \in \mathscr{F}$ et $(A'_X \cap A''_X) = (A' \cap A'') \cap X$ appartient à $\mathscr{F}_X$. Ce qui établit la proposition 4.4.1. On a également établi la c) de la proposition 4.3.1 qui découle de la proposition 4.4.1 et de la proposition 4.3.1,b) où l'on considère l'application surjective $X \to f(X) \subset Y$.

<u>4.5 Ultrafiltres :</u>

Soit X un ensemble non vide, et soit Φ_X l'ensemble des filtres sur X, on peut définir une relation d'ordre sur les filtres : soit $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux filtres sur X. On dit que $\mathscr{F}_2$ est plus fin que $\mathscr{F}_1$ si $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$.

Définition 4.5.1 :

On dit que $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre sur X si c'est un filtre maximal pour l'inclusion, (il n'existe pas sur X de filtre $\mathscr{F}'$ vérifiant $\mathscr{F}' \neq \mathscr{F}, \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$).

En outre, l'ensemble Φ_X des filtres sur X est inductif, car si $\Phi_1 \subset \Phi_X$ est une chaîne de filtre sur X, la famille $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{P}(X)$ composé de toutes les parties de A de X qui appartiennent à un filtre $\mathscr{F}$ de Φ_1 , est un filtre sur X (la vérification des axiomes 1 et 2 est immédiate, l'axiome 3 est vérifié car si $A_1 \in \mathscr{F}_0$ et $A_2 \in \mathscr{F}_0$, on a $A_1 \in \mathscr{F}_1$ et $A_2 \in \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_1 \in \Phi_1, \mathscr{F}_2 \in \Phi_1$ et si l'on a $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$, A_1 et A_2 appartiennent à $\mathscr{F}_2$ et 3 vérifié par $\mathscr{F}_2$).

$\mathscr{F}_0$ est plus fin que tous les $\mathscr{F}_i$.

Appliquant le lemme de Zorn on obtient donc :

Proposition 4.5.1 :

Pour tout filtre $\mathscr{F}$ sur X, il existe un ultrafiltre plus fin que $\mathscr{F}$.

Démonstration :

En effet, dans Φ_X l'ensemble des filtres plus fins que $\mathscr{F}$ est inductif et possède, d'après Zorn, un élément maximal au moins : c'est un filtre sur X plus fin (c'est-à-dire au moins aussi fin) que $\mathscr{F}$.

On notera les énoncés suivants utiles pour la suite :

Proposition 4.5.2 :

Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur un ensemble X et A une partie de X. Alors, soit A, soit la complémentaire $\mathscr{C}_X A$ de A relativement à X, appartient à $\mathscr{F}$.

Démonstration :

En effet, $A \notin \mathscr{F}$ entraîne qu'aucun $B \in \mathscr{F}$ n'est contenu dans A, c'est-à-dire :$\left(\mathscr{C}_X A\right) \cap B \neq \varnothing$ pour tout $B \in \mathscr{F}$. Alors les $\left(\mathscr{C}_X A\right) \cap B$ forment une base d'un filtre $\mathscr{F}'$ plus fin que $\mathscr{F}$; on a donc $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$ puisque $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre, c'est-à-dire $\mathscr{C}_X A \in \mathscr{F}$.

Corollaire 4.5.1 :

Si $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre et si $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{F}$, alors un A_i au moins appartient à $\mathscr{F}$.

Démonstration :

En effet, dans le cas contraire $A_i^{'} = \mathscr{C}_X A_i$ appartiendrait à $\mathscr{F}$ pour tout i, ce qui entrainerait

$$\varnothing = A \cap \mathscr{C}_X A = A \cap \left[\cap \mathscr{C}_X A_i\right] = A \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} A'_i\right] \in \mathscr{F} .$$

4.6 Relation entre filtre et ultrafiltre :

Proposition 4.6.1 :

Soit S une famille de parties d'un ensemble X tel que ; pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on ait soit $A \in S$, soit $\mathscr{C}_X A \in S$. Supposons qu'il existe un filtre $\mathscr{F}$ qui contient S, alors $\mathscr{F}$ est le seul filtre sur X contenant S ; on a $\mathscr{F} = S$ et $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre.

Démonstration :

Il suffit évidement de montrer que l'hypothèse $S \subset \mathscr{F}$ entraîne $\mathscr{F} = S$; en effet, si $\mathscr{F}'$ est un filtre sur X plus fin que $\mathscr{F}$, on a $S' \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'; S \subset \mathscr{F}'$ entraîne alors $\mathscr{F}' = S = \mathscr{F}$, donc $\mathscr{F}' = \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre et est l'unique filtre sur X contenant S.

Soit $A \in \mathscr{F}$; on a $\mathscr{C}_X A \notin \mathscr{F}$, sinon on aurait $A \cap \mathscr{C}_X A = \varnothing \in \mathscr{F}$. Donc $\mathscr{C}_X A$ n'appartient pas à S et alors A appartient à S d'après l'hypothèse faite sur S. Il en résulte $\mathscr{F} \subset S$ d'où $\mathscr{F} = S$, ce qui établit l'énoncé.

Proposition 4.6.2 :

Soit φ une application d'un ensemble Y dans un ensemble X. Alors si $\mathscr{B}$ une base d'un ultrafiltre $\mathscr{F}$ sur Y, $\varphi(\mathscr{B})$ est une base d'ultrafiltre sur X.

Démonstration :

C'est une conséquence des propositions précédentes.

Tous d'abord $\varphi(\mathscr{B})$ est une base d'un filtre Φ sur X d'après proposition 4.3.1 a). Alors, pour montrer que Φ est un ultrafiltre, il suffit d'après la proposition 4.5.2, de montrer que si A est une partie quelconque de X, soit A, soit son complémentaire $\mathscr{C}_X A$ appartient à Φ. Si $\varphi^{-1}(A)$ contient un ensemble $B \in \mathscr{B}$, A contient $\varphi(B)$ et l'on a $A \in \Phi$.

Si $\varphi^{-1}(A)$ ne contient aucun ensemble de $\mathscr{B}, \varphi^{-1}(A)$ n'appartient pas à $\mathscr{F}$ et comme $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre, d'après la proposition 4.5.2, le complémentaire $\mathscr{C}_Y\left[\varphi^{-1}(A)\right]$ appartient à $\mathscr{F}$, où encore :

$\mathscr{C}_Y\left[\varphi^{-1}(A)\right]=\varphi^{-1}\left[\mathscr{C}_X(A)\right]\in\mathscr{F}$ et $\varphi^{-1}\left[\mathscr{C}_X A\right]$ contient donc une partie $B'\in\mathscr{B}$. On a donc $\mathscr{C}_X A\in\varphi(B')$ et, d'après la définition du filtre Φ , on a $\mathscr{C}_X A\in\Phi$. Ainsi, l'hypothèse de la proposition 4.6.2 est vérifiée et Φ est un ultrafiltre.

4.7 Famille filtrées :

Soit $\{x_i\}$ une famille indexée par un ensemble $\wp$, ψ une application de $\wp$ dans X. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur $\wp$: l'image $\psi(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ est une base d'un filtre Φ dans X d'après proposition 2. Ce filtre Φ jouera un rôle particulier dans la suite.

Définition 4.7.1 :

Une famille filtrée sur X, $x_i\in X, i\in\wp$, est la donnée $(x_i,\mathscr{F})$ d'une famille d'éléments de X, indexée par un ensemble $\wp$, et celle d'un filtre $\mathscr{F}$ sur l'ensemble $\wp$ des indices. On appelle filtre associé à la famille filtrée $(x_i,\mathscr{F})$ le filtre engendré sur X par la base de filtre $\psi(\mathscr{F})$, où ψ est l'application $\wp\to X$ qui indexe la famille x_i .

Remarque :

Une partie A de X appartient donc au filtre Φ associé à la famille filtrée $(x_i,\mathscr{F})$ si et seulement s'il existe $L\in\mathscr{F}$, tel qu'on ait $\psi(L)\subset A$ pour l'application ψ ; d'autre part, on peut écrire : $\psi(L)=\left[x_i\in X,\forall i\in L\right]$.

Il est clair que tout filtre Φ sur un ensemble X peut être considéré comme le filtre associé à une famille filtrée $(x_i,\mathscr{F})$, $i\in\wp$. On a d'abord $X\neq\varnothing$ car Φ ne contient pas $\varnothing$.

On pose alors $\wp=X$ et on définit $\psi:\wp\to X$ comme l'application identique $i\in\wp=X\to x_i=i\in X$.

On prend pour filtre $\mathscr{F}$ sur $\wp$ l'image du filtre donné Φ par l'identité $X \to \wp$. Alors, la filtre associé à la famille filtrée $\left(x_i = i, \Phi\right)$ est évidement le filtre donné $\mathscr{F}$.

4.8 Filtre des sections :

Soit $\wp$ un ensemble d'indices qu'on suppose maintenant muni d'un préordre, c'est-à-dire d'une relation linéaire x<y définie sur une partie de $\wp \times \wp$, relation qui est réflexive et transitive mais non nécessairement antisymétrique. Ce préordre est dit filtrant croissant si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\wp$, il existe $k \in \wp$ vérifiant i<k, j<k.

On définit de même un ensemble filtrant décroissant. Dans les deux cas, on dit que $\wp$ muni de cet ordre est un ordonné filtrant.

En topologie, cette notion est utilisée pour définir les suites généralisées où au lieu d'être indicé par $\mathbb{N}$, elles sont indicées par un ensemble ordonné filtrant. L'idée étant que pour exprimer que quelque chose ce tend vers l'infini, il n'est pas nécessaire d'avoir un ordre total comme sur $\mathbb{N}$, mais simplement que pour tout sous-ensemble fini, on puisse dire qu'il y a un élément plus grand que tous.

Proposition 4.8.1 :

Soit $\wp$ un ensemble non vide muni d'un préordre filtrant croissant et $\mathscr{B}$ l'ensemble des parties de $\wp$ de la forme $S_i = \left[j \in \wp; i \prec j\right]$. Alors, les S_i forment, quand i décrit $\wp$, une base $\mathscr{B}$ d'un filtre $\mathscr{F}$ sur $\wp$; $\mathscr{F}$ est appelé le filtre des sections de $\wp$ (pour le préordre considéré).

Démonstration :

En effet, S_i n'est pas vide car S_i contient i, la relation de préordre étant réflexive ; d'autre part, si k majore i et j dans $\wp$, S_k est contenu dans $S_i \cap S_j$, la relation de préordre étant transitive. Ainsi les S_i ont les propriétés d'une base de filtre sur $\wp$.

Exemple :

Soit A un ensemble ; à partir de A construisons un nouvel ensemble $F \subset \Phi(A)$, muni d'une relation d'ordre (partiel) en prenant pour les éléments de F les parties finies H de A ; on définira $H \leq H'$ si H est contenu dans H'.

L'ordre ainsi défini sur F est filtrant croissant, car si H_1, H_2 sont deux éléments de F, il existe H_3 vérifiant $H_1 \leq H_3, H_2 \leq H_3$: dans ces conditions, l'ensemble $\mathscr{B}_i$ des parties de F définies par $H_i \subset H$ forme une base de filtre S_i .

L'énoncé suivant (qu'on pourra admettre) donne une condition sur un ensemble $\wp$ muni d'un préordre filtrant pour que le filtre des sections soit un ultrafiltre.

Proposition 4.8.2 :

Pour que le filtre S des sections de $\wp$ soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que $\wp$ ait un plus grand élément unique a. Alors S est l'ultrafiltre forme des parties de $\wp$ qui contiennent a (ultrafiltre de base $\{a\}$).

Démonstration :

En effet, si $\wp$ a un plus grand élément a, S_a se réduit à l'ensemble $\{a\}$. Toutes les sections S_i contiennent a car on a i<a pour tout i. Donc le filtre des sections de $\wp$ est plus fin que le filtre de base $\{a\}$. Mais ce dernier est un ultrafiltre c'est le filtre $\mathscr{F}_a$ des parties de $\wp$ qui contiennent l'ensemble $\{a\}$ formé d'un seul point : si A est un sous-ensemble quelconque de $\wp$, soit $\mathscr{C}_X A$ appartient à $\mathscr{F}_a$ et $\mathscr{F}_a$ est donc un ultrafiltre. Ainsi, le filtre S des sections de $\wp$ coïncide avec l'ultrafiltre $\mathscr{F}_a$.

La réciproque utilise le lemme de Zorn. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties A de $\wp$ qui possèdent la propriété suivante : pour tout couple (i, j) d'éléments de A distincts et pour lesquels la relation de préordre est définie, il existe $k \in \wp, k \notin A, i \prec k \prec j$. La famille $\mathcal{A}$ n'est pas vide car toute partie de $\mathcal{A}$ réduite à un élément appartient à $\mathcal{A}$. Soient $A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}$, on écrira $A_1 \prec A_2$ si l'on a $A_1 \subset A_2$ et si tout élément de $\mathscr{C}_{A_2} A_1$ majore A_1, c'est-à-dire si les conditions $x \in A_2, x \notin A_1, y \in A_1$ entraînent y<x. On définit ainsi une relation d'ordre (partiel) sur la famille $\mathcal{A}$. Cet ordre est inductif car si A_α est une partie totalement ordonné de $\mathcal{A}$, la réunion des A_α appartient à $\mathcal{A}$ et est une borne supérieure (pour la relation d'ordre définie plus haut) des A_α. D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal au moins, soit A_m dans $\mathcal{A}$. On va en déduire l'existence d'un plus grand élément unique sur $\wp$, S étant un ultrafiltre. La propriété des ultrafiltres entraîne d'abord que, soit A_m, soit $\mathscr{C}_X A_m$ appartienne à S, c'est-à-dire :

1) Ou bien il existe $a \in \wp$, tel que $S_a \subset \mathscr{C}_\wp A_m$
2) Ou bien il existe $b \in \wp$, tel que $S_b \subset A_m$

Dans le cas (1), si S_a n'est pas réduit au seul élément a, il existe $i \in S_a, a \neq i, a \leq i$, soit $A'_m = A_m \cup i$. Alors, on a $A'_m \in \mathcal{A}$ et A'_m majore strictement A pour l'ordre défini sur $\mathcal{A}$, ce qui contredit le caractère maximal de A_m. On a donc $S_a = \{a\}$.

Dans le cas (2), si S_b n'est pas réduit à l'élément b, on prend $j \in S_b, b \neq j, b \prec j$. Alors, il n'existe pas d'élément $k \in \wp$, tel qu'on ait $b \prec k \prec j$, et $k \notin A_m$, car la premier condition entraine $k \in S_b \subset A_m$, on obtient ainsi une contradiction avec le fait que A_m appartient à la famille $\mathcal{A}$.

Finalement, on a trouvé $c \in \wp$, tel que S_c se réduit à $\{c\}$, ce qui montre l'existence dans $\wp$ d'un plus grand élément unique.

Bibliographie

Pièrre Lelong Ferraud, Introduction à l'analyse fonctionnelle I Espace vectoriels topologiques. Centre de documentation universitaire. Paris-V.

Rémi Peyre, Le lemme de Zorn, 17 avril 2008.

Michèle Audin, Henri Cartan & André weil du vingtième siècle et de la topologie.