



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES



THESE

Présentée à

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
Faculté des Sciences et Techniques
FES
UFR : Calcul Scientifique et Informatique Sciences de
l'Ingénieur

Pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT

En Mathématiques Appliquées & Informatique
Spécialité : E.D.P & Analyse Numérique

par

M^{lle} Saoud Sahar

**Etude et Analyse Mathématique des
Problèmes Non Linéaires Modélisant les Etats
Thermiques et Energétiques d'un
Supraconducteur : Généralisation au Cas
Tridimensionnel**

Date de soutenance le 14 Décembre 2009. Devant le Jury :

Pr.H. Loukili	FST	Fes	Président
Pr.H. Allouche	FS	Meknes	Rapporteur
Pr.E. Azroul	FP	Taza	Examineur/Rapporteur
Pr. A. El Hilali Alaoui	FST	Fes	Directeur de Thèse
Pr.M. El Khomssi	FST	Fes	Directeur de Thèse
Pr. A. HAKIM	FST.G	Marrakech	Rapporteur
Pr.D.Seghir	FS	Meknes	Examineur

Résumé de la thèse

Après un bref historique sur les grands traits du phénomène de la supraconductivité, ses applications et ses limites, l'introduction générale de cette thèse met le point sur la notion de la modélisation dans le cadre des systèmes continus. Elle présente les intérêts et les gains retenus d'une étude sur la supraconductivité en trois dimensions de l'espace.

Le but principal du premier chapitre est de proposer une nouvelle modélisation et formulation mathématique de l'équation gouvernant l'état thermique d'un supraconducteur de dimension $N = 3$. C'est une modélisation plus générale, qui intègre dans son écriture un ensemble de cas classiques particuliers (Cas isotrope, homogène, radial et unidimensionnel). Le second objectif dans ce chapitre est de dégager l'équivalent du Paramètre de Steckly et le Nombre de Biot, connus uniquement jusqu'à maintenant, pour le cas unidimensionnel. Le Paramètre de Steckly et le Nombre de Biot sont deux clefs pour la réalisation des projets liés à la supraconductivité, car ils décrivent les caractéristiques de l'installation. Plus précisément, le Paramètre de Steckly (noté α dans la physique) représente la qualité de refroidissement, puisque suivant sa valeur nous pouvons affirmer si l'effet Joule est bien contrôlé ou s'il existe un risque d'une dégradation de l'installation. En revanche, le Nombre de Biot reflète le rapport entre le flux convectif et conductif. Par conséquent, ces deux paramètres aident à faire une analyse sur la qualité de l'alliage et les données géométriques du milieu.

Le deuxième chapitre est conçu pour la précision du cadre fonctionnel de l'étude que nous souhaitons établir. Il s'agit de chercher le contexte mathématique le plus favorable, et qui couvre toutes les natures physiques des fonctions et des paramètres intervenants. Le problème mathématique issu de la modélisation faite dans le premier chapitre, possède une explicite triple non linéarité, répartie entre l'intervenant temporel, l'intervenant spatial et la puissance énergétique. Cette difficulté impose le choix de l'espace des solutions, puisqu'il doit répondre à toutes les exigences réelles. Du moment que les fonctions thermophysiques associées au modèle reflètent une réalité précise, deux volets de conditions ont été imposées. Dans un premier lieu, nous donnons les hypothèses nécessaires

Table des matières

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Notations	vii
Résumé	ix
Introduction	1
0.1 Généralités	1
0.1.1 Un peu d'histoire	1
0.1.2 Quelques champs d'application pour le futur!	2
0.2 Modélisation : Nouvel âge pour la conception	3
0.3 Motivation de l'étude	5
0.3.1 Le contexte dimensionnel du domaine	5
0.3.2 Quelques questions soulevées liées à notre sujet	6
0.3.3 Intérêts physique et mathématique de la problématique posée	7
1 Modélisation Mathématique et Généralisation du Paramètre de Steckly et du Nombre de Biot pour un Supraconducteur Quelconque	9
1.1 Equation gouvernant l'état thermique	11
1.1.1 Délimitation du domaine supraconducteur / Valeurs critiques	11
1.1.2 Aperçu sur l'aspect microscopique de la supraconductivité	12
1.1.3 Aspect macroscopique modélisant le bilan énergétique	13
1.2 Adimensionnement	15
1.2.1 Grandeurs adimensionnelles	15
1.2.2 Valeurs moyennes des coefficients thermophysiques	17
1.2.3 Bilan énergétique avec termes adimensionnels	18
1.2.4 Normalisation et paramètre de bifurcation / Compacité thermique du domaine	19

1.2.5	Analyse des données géométriques et thermophysiques	20
1.3	Problèmes dynamique et d'équilibre	21
1.3.1	Problème dynamique avec données générales	21
1.3.2	Problème d'équilibre.	22
1.4	Cas isotrope homogène	22
1.4.1	Problèmes équivalents	22
1.4.2	Apport des composantes tangentielles	24
1.5	Paramètre de Steckly et Nombre de Biot	25
1.5.1	Rappel pour le cas de dimension 1	25
1.5.2	Paramètre de Steckly et nombre de Biot pour le cas tri- dimensionnel	26
1.5.3	Tableau technique	28
1.6	Conclusion du Chapitre	29
2	Repères du Cadre Fonctionnel & Résultats Liés au Terme d'Énergie	31
2.1	Rappel de quelques résultats utiles	32
2.1.1	Inégalités utiles	32
2.1.2	Théorème de Rellich-Kondrachov	32
2.1.3	Théorème de Ky Fan Von Neuman	33
2.1.4	Condition de Palais -Smale	35
2.1.5	Théorèmes dûs à Cazenave et Haraux	35
2.2	Choix de l'espace des solutions	36
2.3	Hypothèses sur les fonctions thermophysiques	37
2.3.1	Dépendance en temps et en espace	37
2.3.2	Dépendance en champ thermique	38
2.3.3	Transformations canoniques	40
2.4	Classes du terme source d'énergie	41
2.4.1	Classe d'énergie modélisant les systèmes de refroidisse- ment basés sur la cryogénie	41
2.4.2	Quelques remarques relatives au terme source	43
2.4.3	Propriétés mathématiques du terme source	43
2.4.4	Propriétés de l'opérateur de Nemitsky correspondant au terme d'énergie	45
2.4.5	Conditions de croissance et différentiabilité du potentiel d'énergie	47
2.5	Conclusion du chapitre	49
3	Existence Globale et Unicité du Champ Thermique solution de l'équation d'évolution pour tridimensionnel	50
3.1	Résultats pour le cas simplement non linéaire	52

3.1.1	Existence globale	52
3.1.2	Contrôle à partir de la condition initiale	53
3.2	Cas quasiment triplement non linéaire	54
3.2.1	Construction et étude d'un opérateur linéaire simplifiant ($Pe_{(x,t)}$)	54
3.2.2	Existence et unicité avec terme source nul	57
3.2.3	Existence et unicité avec terme source	60
3.3	Etude du cas général	64
3.3.1	Motivation et méthodologie	64
3.3.2	Suite de problèmes semblables (Pe, n)	65
3.3.3	Convergence de la suite $(U^n)_{(n \in \mathbb{N})}$	66
3.3.4	Convergence de la suite des problèmes semblables	72
3.4	Conclusion du chapitre	76
4	Etude du Problème Modélisant les Etats d'Equilibre	77
4.1	Rappel : Cas unidimensionnel	78
4.2	Cadre Général : Cas tridimensionnel	81
4.2.1	Motivation et intérêt	81
4.2.2	Problème équivalent	82
4.3	Conditions d'existence d'un état normal	82
4.3.1	Fonctionnelle d'énergie	83
4.3.2	Fonction de Rabinowitz	83
4.3.3	Théorème d'existence d'états normaux	85
4.4	Estimations liées aux états normaux	88
4.4.1	Valeurs extremas de la solution modélisant un état normal	88
4.5	Etude de la stabilité de l'état fondamental	90
4.5.1	Construction d'une fonctionnelle d'un problème classique	90
4.5.2	Conditions suffisantes d'unicité	92
4.6	Conclusion du chapitre	94
5	Energie Critique d' un Supraconducteur Tridimensionnel	95
5.1	Généralisation	96
5.1.1	Rappel & introduction	96
5.1.2	Energie critique en dimension quelconque	96
5.2	Energie critique & transformations canoniques	98
5.2.1	Condition de croissance de la fonctionnelle liée à l'énergie critique	98
5.2.2	Contrôle de l'énergie critique à partir de la condition de croissance	99
5.3	Estimation via la chaleur volumique	100
5.3.1	Préalable	100

5.3.2	Estimation de l'énergie critique	102
5.4	Conclusion	103
6	Cas Unidimensionnel : Etude Théorique et Résultats Numériques	105
6.1	Reformulation de l'énergie critique	106
6.2	Etude de la fonctionnelle de l'énergie critique	107
6.3	Approximation numérique	110
6.3.1	Reformulation de l'expression de l'énergie critique	111
6.3.2	Formule d'approximation	112
6.3.3	Résultats numériques	114
6.4	Conclusion du chapitre	116
	Conclusion Générale	117