



**UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH**  
**FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES**



# THESE

Présentée à

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH  
Faculté des Sciences et Techniques

FES

UFR : Calcul Scientifique et Informatique Sciences de  
l'Ingénieur

Pour l'obtention du diplôme

**DOCTORAT**

En Mathématiques Appliquées & Informatique  
Spécialité : E.D.P & Analyse Numérique

par

**M<sup>lle</sup> Saoud Sahar**

---

---

**Etude et Analyse Mathématique des  
Problèmes Non Linéaires Modélisant les Etats  
Thermiques et Energétiques d'un  
Supraconducteur : Généralisation au Cas  
Tridimensionnel**

---

---

*Date de soutenance le 14 Décembre 2009. Devant le Jury :*

<b>Pr.H. Loukili</b>	<b>FST</b>	<b>Fes</b>	<b>Président</b>
<b>Pr.H. Allouche</b>	<b>FS</b>	<b>Meknes</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Pr.E. Azroul</b>	<b>FP</b>	<b>Taza</b>	<b>Examineur/Rapporteur</b>
<b>Pr. A. El Hilali Alaoui</b>	<b>FST</b>	<b>Fes</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>Pr.M. El Khomssi</b>	<b>FST</b>	<b>Fes</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>Pr. A. HAKIM</b>	<b>FST.G</b>	<b>Marrakech</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Pr.D.Seghir</b>	<b>FS</b>	<b>Meknes</b>	<b>Examineur</b>

---

## Résumé de la thèse

---

Après un bref historique sur les grands traits du phénomène de la supraconductivité, ses applications et ses limites, l'introduction générale de cette thèse met le point sur la notion de la modélisation dans le cadre des systèmes continus. Elle présente les intérêts et les gains retenus d'une étude sur la supraconductivité en trois dimensions de l'espace.

Le but principal du premier chapitre est de proposer une nouvelle modélisation et formulation mathématique de l'équation gouvernant l'état thermique d'un supraconducteur de dimension  $N = 3$ . C'est une modélisation plus générale, qui intègre dans son écriture un ensemble de cas classiques particuliers (Cas isotrope, homogène, radial et unidimensionnel). Le second objectif dans ce chapitre est de dégager l'équivalent du Paramètre de Steckly et le Nombre de Biot, connus uniquement jusqu'à maintenant, pour le cas unidimensionnel. Le Paramètre de Steckly et le Nombre de Biot sont deux clefs pour la réalisation des projets liés à la supraconductivité, car ils décrivent les caractéristiques de l'installation. Plus précisément, le Paramètre de Steckly (noté  $\alpha$  dans la physique) représente la qualité de refroidissement, puisque suivant sa valeur nous pouvons affirmer si l'effet Joule est bien contrôlé ou s'il existe un risque d'une dégradation de l'installation. En revanche, le Nombre de Biot reflète le rapport entre le flux convectif et conductif. Par conséquent, ces deux paramètres aident à faire une analyse sur la qualité de l'alliage et les données géométriques du milieu.

Le deuxième chapitre est conçu pour la précision du cadre fonctionnel de l'étude que nous souhaitons établir. Il s'agit de chercher le contexte mathématique le plus favorable, et qui couvre toutes les natures physiques des fonctions et des paramètres intervenants. Le problème mathématique issu de la modélisation faite dans le premier chapitre, possède une explicite triple non linéarité, répartie entre l'intervenant temporel, l'intervenant spatial et la puissance énergétique. Cette difficulté impose le choix de l'espace des solutions, puisqu'il doit répondre à toutes les exigences réelles. Du moment que les fonctions thermophysiques associées au modèle reflètent une réalité précise, deux volets de conditions ont été imposées. Dans un premier lieu, nous donnons les hypothèses nécessaires

---

# Table des matières

---

Dédicaces . . . . .	i
Remerciements . . . . .	ii
<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>Résumé</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Généralités . . . . .	1
0.1.1 Un peu d'histoire . . . . .	1
0.1.2 Quelques champs d'application pour le futur! . . . . .	2
0.2 Modélisation : Nouvel âge pour la conception . . . . .	3
0.3 Motivation de l'étude . . . . .	5
0.3.1 Le contexte dimensionnel du domaine . . . . .	5
0.3.2 Quelques questions soulevées liées à notre sujet . . . . .	6
0.3.3 Intérêts physique et mathématique de la problématique posée . . . . .	7
<b>1 Modélisation Mathématique et Généralisation du Paramètre de Steckly et du Nombre de Biot pour un Supraconducteur Quelconque</b>	<b>9</b>
1.1 Equation gouvernant l'état thermique . . . . .	11
1.1.1 Délimitation du domaine supraconducteur / Valeurs critiques . . . . .	11
1.1.2 Aperçu sur l'aspect microscopique de la supraconductivité . . . . .	12
1.1.3 Aspect macroscopique modélisant le bilan énergétique . . . . .	13
1.2 Adimensionnement . . . . .	15
1.2.1 Grandeurs adimensionnelles . . . . .	15
1.2.2 Valeurs moyennes des coefficients thermophysiques . . . . .	17
1.2.3 Bilan énergétique avec termes adimensionnels . . . . .	18
1.2.4 Normalisation et paramètre de bifurcation / Compacité thermique du domaine . . . . .	19

1.2.5	Analyse des données géométriques et thermophysiques . . . . .	20
1.3	Problèmes dynamique et d'équilibre . . . . .	21
1.3.1	Problème dynamique avec données générales . . . . .	21
1.3.2	Problème d'équilibre. . . . .	22
1.4	Cas isotrope homogène . . . . .	22
1.4.1	Problèmes équivalents . . . . .	22
1.4.2	Apport des composantes tangentielles . . . . .	24
1.5	Paramètre de Steckly et Nombre de Biot . . . . .	25
1.5.1	Rappel pour le cas de dimension 1 . . . . .	25
1.5.2	Paramètre de Steckly et nombre de Biot pour le cas tri- dimensionnel . . . . .	26
1.5.3	Tableau technique . . . . .	28
1.6	Conclusion du Chapitre . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Repères du Cadre Fonctionnel &amp; Résultats Liés au Terme d'Énergie</b> . . . . .	<b>31</b>
2.1	Rappel de quelques résultats utiles . . . . .	32
2.1.1	Inégalités utiles . . . . .	32
2.1.2	Théorème de Rellich-Kondrachov . . . . .	32
2.1.3	Théorème de Ky Fan Von Neuman . . . . .	33
2.1.4	Condition de Palais -Smale . . . . .	35
2.1.5	Théorèmes dûs à Cazenave et Haraux . . . . .	35
2.2	Choix de l'espace des solutions . . . . .	36
2.3	Hypothèses sur les fonctions thermophysiques . . . . .	37
2.3.1	Dépendance en temps et en espace . . . . .	37
2.3.2	Dépendance en champ thermique . . . . .	38
2.3.3	Transformations canoniques . . . . .	40
2.4	Classes du terme source d'énergie . . . . .	41
2.4.1	Classe d'énergie modélisant les systèmes de refroidisse- ment basés sur la cryogénie . . . . .	41
2.4.2	Quelques remarques relatives au terme source . . . . .	43
2.4.3	Propriétés mathématiques du terme source . . . . .	43
2.4.4	Propriétés de l'opérateur de Nemitsky correspondant au terme d'énergie . . . . .	45
2.4.5	Conditions de croissance et différentiabilité du potentiel d'énergie . . . . .	47
2.5	Conclusion du chapitre . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Existence Globale et Unicité du Champ Thermique solution de l'équation d'évolution pour tridimensionnel</b> . . . . .	<b>50</b>
3.1	Résultats pour le cas simplement non linéaire . . . . .	52

3.1.1	Existence globale . . . . .	52
3.1.2	Contrôle à partir de la condition initiale . . . . .	53
3.2	Cas quasiment triplement non linéaire . . . . .	54
3.2.1	Construction et étude d'un opérateur linéaire simplifiant ( $Pe_{(x,t)}$ ) . . . . .	54
3.2.2	Existence et unicité avec terme source nul . . . . .	57
3.2.3	Existence et unicité avec terme source . . . . .	60
3.3	Etude du cas général . . . . .	64
3.3.1	Motivation et méthodologie . . . . .	64
3.3.2	Suite de problèmes semblables ( $Pe, n$ ) . . . . .	65
3.3.3	Convergence de la suite $(U^n)_{(n \in \mathbb{N})}$ . . . . .	66
3.3.4	Convergence de la suite des problèmes semblables . . . . .	72
3.4	Conclusion du chapitre . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Etude du Problème Modélisant les Etats d'Equilibre</b>	<b>77</b>
4.1	Rappel : Cas unidimensionnel . . . . .	78
4.2	Cadre Général : Cas tridimensionnel . . . . .	81
4.2.1	Motivation et intérêt . . . . .	81
4.2.2	Problème équivalent . . . . .	82
4.3	Conditions d'existence d'un état normal . . . . .	82
4.3.1	Fonctionnelle d'énergie . . . . .	83
4.3.2	Fonction de Rabinowitz . . . . .	83
4.3.3	Théorème d'existence d'états normaux . . . . .	85
4.4	Estimations liées aux états normaux . . . . .	88
4.4.1	Valeurs extremas de la solution modélisant un état normal	88
4.5	Etude de la stabilité de l'état fondamental . . . . .	90
4.5.1	Construction d'une fonctionnelle d'un problème classique	90
4.5.2	Conditions suffisantes d'unicité . . . . .	92
4.6	Conclusion du chapitre . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Energie Critique d' un Supraconducteur Tridimensionnel</b>	<b>95</b>
5.1	Généralisation . . . . .	96
5.1.1	Rappel & introduction . . . . .	96
5.1.2	Energie critique en dimension quelconque . . . . .	96
5.2	Energie critique & transformations canoniques . . . . .	98
5.2.1	Condition de croissance de la fonctionnelle liée à l'énergie critique . . . . .	98
5.2.2	Contrôle de l'énergie critique à partir de la condition de croissance . . . . .	99
5.3	Estimation via la chaleur volumique . . . . .	100
5.3.1	Préalable . . . . .	100

5.3.2	Estimation de l'énergie critique . . . . .	102
5.4	Conclusion . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Cas Unidimensionnel : Etude Théorique et Résultats Numériques</b>	<b>105</b>
6.1	Reformulation de l'énergie critique . . . . .	106
6.2	Etude de la fonctionnelle de l'énergie critique . . . . .	107
6.3	Approximation numérique . . . . .	110
6.3.1	Reformulation de l'expression de l'énergie critique . . . . .	111
6.3.2	Formule d'approximation . . . . .	112
6.3.3	Résultats numériques . . . . .	114
6.4	Conclusion du chapitre . . . . .	116
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>117</b>