UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Titre

Application des formes quadratiques à l'étude des coniques

Présenté par :

♦ **Noureddine dahbi**

Encadré par :

♦ **Pr. Aziza RAHMOUNI HASSANI**

Soutenu Le 07 Juin 2017 devant le jury composé de:

- **Pr. Ouafae . AMMOR**
- **Pr. Fatima. EZZAKI**
- **Pr. Aziza RAHMOUNI HASSANI**

Stage effectué à

FST de Fès, Département mathématique

Année Universitaire 2016 / 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Remerciement

Je tiens par le présent travail à témoigner ,ma reconnaissance envers mon encadrant

Pr Mme. A.RAHMOUNI HASSANI

pour toute son aide et sa responsabilité ainsi que pour ses conseils.

Je ne peux oublier d'exprimer ma reconnaissance à mes formateurs à l'FST de Fès notamment ceux de département mathématique Pr Mme. F. EZZAKI et Pr Mme. O . AMMOR pour les efforts qu'ils ont consentis pour que ma formation se déroule dans les meilleures conditions.

Puis, je voulais transmettre mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont assistée durant l'accomplissement de ce travail

Enfin mes remerciements s'adressent également à toutes personnes ayant contribués directement ou indirectement à la mise en forme de ce travail, qu'elles trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents ma mère et mon père

Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs

encouragements.

A mes frères.

A mes amies et mes camarades.

A toute personnes qui m'ont encouragé ou aidé au long

de mes études.

Je dédie aussi ce travail à tous nos professeurs

qui nous ont enseigné et à tous ceux qui nous sont

chers.

Table des matières

Introduction

* Dans cette ressource il va être question de formes linéaires, de formes bilinéaires, de formes bilinéaires symétriques, de formes quadratiques. Leurs définitions et propriétés générales vont être développées, ainsi que les liens qui existent entre elles.

*Dans le troisième chapitre nous avons introduit une étude algébrique et géométrique des coniques .

*L' objectif de ce rapport est la précision du lien entre les formes quadratiques et les coniques pour déterminer une équation réduite de conique à partir d'une équation algébrique du second degré .

CHAPITRE 1 :Formes linéaires et bilinéaire et sesquilinéaires

1. Formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$−espace-vectoriel, où $\mathbb{K}$ est soit le corps des nombres réels soit le corps des nombres complexes.

Définition-1 : Une forme linéaire sur E est une application linéaire : $f : E \to \mathbb{K}$.

Exemple :

Si $E = \mathbb{K}[X]$ est l'espace des polynômes, alors :

$P \to P(0)$ et $P \to \int_{-1}^{1} P(t)\, dt$ sont des exemples de formes linéaires.

Soient f, f' deux formes linéaires sur E et $t \in \mathbb{K}$.

Alors $f + tf'$ est aussi une forme linéaire. L'espace des formes linéaires sur E est donc un espace vectoriel. On le note : E^*.

Notation : Soient $f \in E^*$, $x \in E$, on note parfois $\langle f,x\rangle := f(x) \in \mathbb{K}$.

Exemple important : les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$:

Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$. L'application :

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \to a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont de cette forme. En effet, notons $e_1,\dots,e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, alors pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

a) Base duale

Proposition et définition-2 : Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit $(e^*_1,\dots,e^*_n)$ la famille d'éléments de E^* définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}, \qquad e^*_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker)}$$

Alors cette famille est une base de E^*. Elle est appelée base duale de la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Démonstration :

Soit $f \in E^*$, soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{K}$. On a :

$$\left(f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*\right) \Longleftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j)$$

$$\Longleftrightarrow \forall j \in \{1,\dots,n\} \quad f(e_j) = \lambda_j .$$

On a donc, pour tout $f \in E^*$, une famille unique $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{K}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$

Attention ! chaque e^*_i dépend de toute la famille $(e_1,\dots,e_n)$ et non seulement de e_i.

Remarque-3 : Supposons que E est de dimension finie.

Soit $e_1,\dots,e_n$ une base de E. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on définit la forme linéaire coordonnée d'indice i par :

$$e_i^*(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_i .$$

Théorème-4 : Soit $B = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors la famille $B^* := (e_1^*,\dots,e_n^*)$ est une base du dual E^* ; c'est la base duale de B . En particulier, $\dim E^* = \dim E$. De plus, pour tout $f \in E^*$, on a :

$$f = \langle f, e_1\rangle e_1^* + \dots + \langle f, e_n\rangle e_n^*$$

et pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_1^n \langle e_i^*, x\rangle e_i$$

b) Bidual

Définition-5 : On appelle bidual de E et on notera E^{**} , l'espace $(E^*)^*$ dual de E^*

Lemme : Soit $0 \neq x \in E$, alors, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq 0$.

Théorème-6 : Si $x \in E$, on note $\hat{x} : E^* \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(x)$. On a $\hat{x} \in E^{**}$.

De plus, si E est de dimension finie, alors :

$$E \to E^{**}$$

$$x \to \hat{x}$$

est un isomorphisme.

Démonstration :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et considérons l'application

$$\Phi : E \to E^{**}$$

$$x \to \hat{x} : E^* \to \mathbb{K}$$

$$f \to f(x)$$

Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, la linéarité est facile à démontrer. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors $f(x) = 0$ pour tout $f \in E^*$. On en déduit d'après la Lemme que $x = 0$. Donc Φ est injectif et comme E, E^* et E^{**} ont la même dimension, Φ est un isomorphisme de E sur E^{**} .

Cet isomorphisme permet d'identifier le bidual E^{**} à E.

c) Base antéduale

Proposition-7 : Soit $(f_1,\ldots,f_n)$ une base de E^* . Alors il existe une seule base $(v_1,\ldots,v_n)$ de E telle que pour tout i, $f_i = v_i^*$. On dit que $(v_1,\ldots,v_n)$ est la base antéduale de $(f_1,\ldots,f_n)$.

Démonstration :

Comme $E \to E^{**}, x \to \hat{x}$

est injective, E est forcément de dimension finie.

Soit $(f_1{}^*,\ldots,f_n{}^*)$ la base duale de $(f_1,\ldots,f_n)$ dans E^{**}. D'après le théorème, il existe, pour tout i, $v_i \in E$ tel que $\widehat{v_i} = f_i{}^*$. Il est facile de vérifier que $(v_1,\ldots,v_n)$ est la base antéduale de $(f_1,\ldots,f_n)$.

Proposition-8 : Soit F un sous-espace de E. La restriction :

$$E^* \to F^*,\ f \to f|_F$$

est surjective. Son noyau est l'orthogonal de F.

d) Orthogonalité

On dit que $f \in E^*$ et $x \in E$ sont orthogonaux si $\langle f, x\rangle = f(x) = 0$.

Si V est un sous-espace de E, on note

$$V^{\perp} := \{f \in E^* : \forall\, x \in V,\ \langle f, x\rangle = 0\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de E^* appelé l'orthogonal de V . Si W est un sous-espace de E^*, on note :

$$W^{\circ} := \{x \in E : \forall\, f \in W,\ \langle f, x\rangle = 0\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de E , appelé l'orthogonal de W.

Remarque importante-9 : Si V est engendré par les vecteurs $v_1,\ldots,v_n$, alors :

$$V^{\perp} = \{f \in E^* : \langle f, v_1\rangle = \ldots = \langle f, v_n\rangle = 0\}$$

de même si W est engendré par les formes linéaires $f_1,\ldots,f_n$, alors :

$$W^{\circ} = \{x \in E : \langle f_1, x\rangle = \langle f_n, x\rangle = 0\}\ .$$

« L'orthogonale renverse les inclusions » :

Proposition-10 :

i) Si $V_1 \subseteq V_2 \subseteq E$ sont des sous-espaces de E, alors $V^{\perp}{}_2 \subseteq V^{\perp}{}_1$.

ii) Si $W_1 \subseteq W_2 \subseteq E$ sont des sous-espaces de E^*, alors $W^{\circ}{}_2 \subseteq W^{\circ}{}_1$.

iii) $\{0_E\}^{\perp} = E^*$, $E^{\perp} = \{0_{E^*}\}$.

iv) $\{0_{E^*}\}^{\circ} = E$, $E^{*\circ} = \{0_E\}$.

Théorème-11 : Si E est de dimension finie, alors :

i) Pour tout V sous-espace de E, $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim E$ et $V^{\perp\circ} = V$.
ii) Pour tout W sous-espace de E * , $\dim W + \dim W^{\circ} = \dim E$ et $W^{\circ\perp} = W$.

2. Formes bilinéaires

$\mathrm{Bil}(U \times V, \mathbb{K}) \approx L(U,V^*) \approx L(V,U^*)$.

Soient E,F deux $\mathbb{K}$ −espaces vectoriels. On dit qu'une application

$$B : E \times F \to \mathbb{K}$$

est une forme bilinéaire si :

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \forall t, t' \in \mathbb{K}, B(tx + t'x', y) = tB(x, y) + t' B(x', y)$$

$$B(x, ty + t'y') = tB(x, y) + t' B(x, y').$$

Définition-1 : Si U = V , on dit que B est symétrique si

$$\forall x, y, B(x, y) = B(y, x),$$

alternée si

$$\forall x, B(x, x) = 0.$$

a) Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose E de dimension finie n. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E × E.

Définition-2 : La matrice $M_e(B)$ de B dans la base E est la matrice symétrique n×n qui a pour coefficients $B(e_i,e_j)$ (i numéro de ligne entre 1 et n, j numéro de colonne entre 1 et n). Si x et y sont des éléments de E dont les vecteurs colonnes de coordonnées dans la base E sont X et Y respectivement, on a

$$b(x,y) = {}^t X \, M_e(B) Y .$$

Dans l'autre sens, si M est une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{K})$, alors $(x,y) \to {}^t X M Y$ (où X et Y sont les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base E) est bien une forme bilinéaire symétrique.

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice (dans la base canonique) de la forme

bilinéaire symétrique $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow 3x_1 y_1 - 2x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$

b) Noyau, rang, orthogonal

Supposons U = V , et $B \in Bil(U,U)$ symétrique ou alternée.

$$\text{Noyau : } \ker B = \{x \in U : \forall y \in U, B(x,y) = 0\}.$$

$$\text{Rang : } \operatorname{rang} B = \text{rang de } U \to U^*, x \to B(x,.).$$

(C'est le rang de la matrice associée dans une base quelconque).

$$\dim U = \operatorname{rang} B + \dim\ker B.$$

Définition-3 Si $U \to U^*$, $x \to B(x,.)$ est un isomorphisme, on dit que B est non dégénérée. En dimension finie, cela veut dire $\operatorname{rang} B = \dim U$ i.e. $\ker B = 0$.

Orthogonal

Soit $V \subseteq U$ un sous-espace, on note $V^{\perp} := \{x \in U : \forall v \in V, B(x,v) = 0\}$.

c) Dual

Soient E,F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

On pose $f_B : E \to F^*$, $x \to B(x,\cdot)$ et $\delta_B : F \to E^*$, $y \to B(\cdot,y)$.

Ce sont des applications linéaires, l'application linéaire à gauche associée à B et l'application linéaire à droite associée à B. On a :

$$\ker f_B = {}^{\perp}F = \text{le noyau à gauche}$$

$$\ker \delta_B = E^{\perp} = \text{le noyau à droite}$$

En particulier, B est non dégénérée si et seulement si $\ker f_B = 0$ et $\ker \delta_B = 0$.

Proposition-4 : Si E et F sont de dimension finie, si $B : E \times F \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire non dégénérée, alors tout élément de F^* est de la forme $B(x,\cdot)$ pour un certain $x \in E$.

d) Formes bilinéaires symétriques et formes bilinéaires alternées

Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire.

- On dit que B est symétrique si $B(x,y) = B(y,x)$ pour tous $x,y \in E$.
- On dit que B est antisymétrique si $B(x,y) = -B(y,x)$, pour tous $x,y \in E$.
- On dit que B est alternée si $B(x,x) = 0$ pour tous $x \in E$.

Proposition-5 : Alternée ⇒ antisymétrique. Si on peut diviser par 2,

antisymétrique ⇒ alternée.

Proposition-6 : Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire telle que

pour tous $x,y \in E, B(x,y) = 0 \Leftrightarrow B(y,x) = 0$. Alors B est symétrique ou alternée.

3. Formes sesquilinéaires hermitiennes

a) Définitions :

Définition-1 : Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est semi-linéaire si on a :

$$1)\ \forall(x,y) \in E \times E\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

$$2)\ \forall x \in E\ \forall\lambda \in \mathbb{C}\ f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x).$$

Exemple

- $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

  $z \longrightarrow \bar{z}$ est semi-linéaire

Définition-2 : Soient E,F,G des sous espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

Soit $\phi : E \times F \longrightarrow G$ une application. On dit que ϕ est sesquilinéaire (sesqui = 1 fois et demi) si on a :

1) $\forall x \in E$ fixe, l'application partielle

$\phi_1(x) : F \longrightarrow G$ est semi-linéaire.

$y \longrightarrow \phi(x,y)$

2) $\forall y \in E$ fixe, l'application partielle

$\phi_2(y) : E \longrightarrow G$ est linéaire.

$x \longrightarrow \phi(x,y)$

Si de plus on a $G = \mathbb{C}$, alors ϕ est une forme sesquilineaire.

Remarque :

si ϕ est une forme sesquilineaire :

$$\forall (x,y) \in E \times E \, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} \phi(x,\lambda y) = \lambda \phi(x,y) \\ \phi(\lambda x, y) = \bar{\lambda} \phi(x,y) \end{cases}$$

Définition-3 :

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$.

Soit $(f_1,\ldots,f_m)$ une base d'un espace vectoriel F sur $\mathbb{C}$.

Soit $\phi : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire alors la matrice de ϕ pour ces 2 bases est la matrice A donnée par :

$$A = [\phi(e_i, f_j)]_{i\in\{1\ldots n\} \text{ indice de ligne } j\in\{1\ldots m\} \text{ indice de colonne}}$$

Proposition-4 : Avec les notations de la définition, on a :

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j f_j\right) = {}^{t}XA\bar{Y} \quad \text{pour} \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_i \end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_i \end{bmatrix}$$

Proposition-5 : Avec les notations précédentes, on a :

Si $(e'_1 \ldots e'_n)$ est une autre base de E avec $P = \text{Pass}((e_i),(e'_i))$.

Si $(f'_1 \ldots f'_n)$ est une autre base de F avec $Q = \text{Pass}((f_i),(f'_i))$.

Si A' est la matrice de ϕ pour les bases (e'_i) et (f'_j) on a :$A' = {}^{t}PAQ$.

Remarque-6 :

1) On peut donc comme pour les formes linéaires définir la notion de rang de ϕ (=rangA=rang A').

2) On peut définir les notions d'orthogonalité relativement à ϕ. On obtient des propriétés Analogues au cas bilinéaire, que l'on peut démontrer :

– directement, ou

– en remarquant que ϕ est bilinéaire $E \times F' \rightarrow \mathbb{C}$.

b) Formes hermitiennes - antihermitiennes

Définition-7 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et soit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. On dit que :

• ϕ est hermitienne si on a :

$\forall (x, y) \in E \times E \ \phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$ (propriété de symétrie hermitienne).

• ϕ est antihermitienne si on a :

$\forall (x, y) \in E \times E \ \phi(y, x) = -\overline{\phi(x, y)}$

Proposition-8 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de base $e_1, \ldots, e_n$. Soit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilineaire, de matrice A pour la base $(e_i)_i$ de E. Alors on a :

1) ϕ hermitienne $\Longleftrightarrow {}^t\overline{A} = A$ (matrice hermitienne)

2) ϕ antihermitienne $\Longleftrightarrow {}^t\overline{A} = -A$ (matrice antihermitienne).

Théorème-9 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Soit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilineaire hermitienne non dégénérée (rang ϕ = dimE). Soit F un sous espace vectoriel de E,

alors on a : $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$

CHAPITRE 2 : Formes quadratiques

On se place sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Formes bilinéaires symétriques

Définition-1 : Une forme bilinéaire sur E est une application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ linéaire par rapport a chacune de ses variables.

Elle est dite symétrique si elle vérifie de plus : $\forall (x, y) \in E \times E, b(x, y) = b(y, x)$.

Remarque-2 : Si b est une forme bilinéaire sur E, alors :

pour tout $x \in E, b(0, x) = b(x, 0) = 0$.

Exemple : Soient f et g deux formes linéaires sur E. L'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $b(x, y) = f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire définie sur E.

Proposition-3 : L'ensemble des formes bilinéaires (respectivement bilinéaires symétriques) sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Formes quadratiques

a) Définitions et Propositions

Définition-4 : Une forme quadratique q sur E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

2) L'application $(x, y) \to \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ est bilinéaire symétrique.

Proposition-5 : L'ensemble des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Théorème-6 : Il existe un isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des formes quadratiques et l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques.

Démonstration :

notons Q(E) l'ensemble des formes quadratiques définies sur E et B(E) l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.

Soit $q \in Q(E)$. Posons $\sigma(q) = b$ avec $b(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$. $\sigma(q) \in B(E)$, ainsi définie, est bien une forme bilinéaire symétrique.

Soit $b \in B(E)$. Définissons $\sigma'(b)$ par $\sigma'(b)(x) = b(x,x)$ pour tout $x \in E$. Un calcul montre que $\sigma'(b) \in Q(E)$.

Montrons que σ est inversible et que son inverse est σ'. Soit $b \in B(E)$. On a $\sigma\circ\sigma'(b) = \sigma(q)$ avec $q(x) = b(x,x)$. Or $\sigma(q) = b'$ avec

$$\begin{aligned} b'(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= \frac{1}{2}[b(x+y, x+y) - b(x,x) - b(y,y)] \\ &= b(x,y) \end{aligned}$$

par bilinéarité de b. On a donc $\sigma\circ\sigma' = Id_{B(E)}$. On montre de même que $\sigma'\circ\sigma = Id_{Q(E)}$.

L'application σ est donc bijective et $\sigma^{-1} = \sigma'$. Elle est linéaire par construction, d'où le résultat.

b) Ecriture matricielle

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{1\leq j\leq n}$ dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$.

Soit b une forme bilinéaire symétrique définie sur E. On a alors par bilinéarité de b :

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,,\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} x_i y_j \, b(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de réels telle que $a_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \leq i,j \leq n$; alors l'application $(x,y) \to \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} x_i y_j$ est bilinéaire symétrique.

Définition-7 : Soit b une forme bilinéaire symétrique définie sur E et soit (e_1 ,...,e_n) une base de E. La matrice M de M_n ($\mathbb{R}$) définie par $M_{ij} = b(e_i, e_j)$ s'appelle la matrice de b dans la base (e_1 ,...,e_n).

Si X et Y désignent respectivement les matrices-colonnes des coordonnées de x et de y dans la base (e_1 ,...,e_n), alors on a

$$b(x,y) = {}^tXMY = {}^tYMX$$

Proposition-8 : Soit b une forme bilinéaire symétrique définie sur E. Si M est la matrice de b dans la base (e_1 ,...,e_n), alors la matrice M' de b dans la base (e'_1 ,...,e'_n) est $M' = {}^tPMP$, où P est la matrice de passage de la base (e_1 ,...,e_n) ` a la base (e'_1 ,...,e'_n).

Démonstration :

soient x et y des vecteurs de E. Notons X et Y (respectivement X'et Y') les matrices-colonnes de leurs coordonnées respectives dans la base (e_1 ,...,e_n) (respectivement (e'_1 ,...,e'_n)). On a $X = PX'$ et $Y = PY'$. On en déduit que

$\phi(x,y) = {}^tXMY = {}^t(PX')M(PY') = {}^tX'({}^tPMP)Y'$.

D'où $M' = {}^tPMP$.

Définition-9 : Soit q une forme quadratique. La matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à q dans une base B s'appelle la matrice de q dans la base B.

Définition-10 : Deux matrices M et M' de M_n ($\mathbb{K}$) sont dites congruentes s'il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ telle que $M' = {}^tPMP$.

Deux matrices sont donc congruentes si elles représentent la même forme bilinéaire dans deux bases différentes de E.

Proposition-11 : La congruence est une relation d' équivalence.

Démonstration : c'est une relation réflexive car, pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = {}^tI_n M I_n$. Elle est symétrique car, si $M' = {}^tPMP$, alors $M = {}^tP^{-1} M' P^{-1}$. Enfin c'est une relation transitive car si $M'' = {}^tP'M'P'$ et $M' = {}^tPMP$, alors $M'' = {}^tP'({}^tPMP)P' = {}^t(PP')M(PP')$ et PP'est bien une matrice inversible.

c) Recherche de la forme bilinéaire associée à une forme quadratique

Soit (e_1,...,e_n) une base de E. Une forme bilinéaire symétrique b est une application de

E×E dans ℝ définie par $b(x,y) = {}^tXMY = \sum_{i,j} m_{ij} x_i y_j$

où M est la matrice symétrique réelle définie par $m_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Une forme quadratique s'´ecrit donc sous la forme :

$$q(x) = \sum_{i,j} m_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} m_{ij} x_i x_j$$

Réciproquement, si on se donne une forme quadratique q, on a alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} m_{ij} x_i x_j$$

Pour retrouver la forme bilinéaire associée b à q, on utilise la règle du dédoublement des termes :

− on remplace les termes x_i^2par $x_i y_i$

− on remplace le terme $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$

On vérifie que, pour b ainsi construite, on a bien $b(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

d) Rang et noyau d'une forme quadratique

Définition-12 : Soit q une forme quadratique de E et B une base de E, M = Mat(q, B). On appelle rang de q, noté rgq, le rang de la matrice M.

Définition-13 : On dit que b est non dégénérée si son rang est égal à la dimension de E. Elle est dite dégénérée sinon.

Proposition-14 : Une forme bilinéaire est non dégénérée si et seulement si la matrice qui la représente dans une base donnée de E est inversible.

Elle est dégénérée si et seulement s'il existe $x \neq 0$ tel que, pour tout $y \in E$, $b(x,y) = 0$.

Définition-15 : On appelle noyau de la forme quadratique q, et on note Kerq, l'ensemble $\{y \in E ; b(x,y) = 0\}$.

Proposition-16 : Kerq est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire-17 : Une forme bilinéaire b est non dégénérée si et seulement si Kerq = {0}, où q est la forme quadratique associée à b.

Définition-18 : On dit qu'une forme quadratique q est définie si on a, pour tout $x \in E$,

$(x \neq 0 \Rightarrow q(x) \neq 0)$.

Proposition-19 : Si q est une forme quadratique définie, alors sa forme bilinéaire associée est non dégénérée.

Démonstration :

montrons la contraposée. Soit b une forme bilinéaire dégénérée, alors il

existe $x \neq 0$ tel que, pour tout $y \in E$, $b(x,y) = 0$. En particulier $q(x) = b(x,x) = 0$.

Donc q est non définie.

Remarque-20 : La réciproque est fausse. Il existe des formes bilinéaires non dégénérées ayant une forme quadratique non définie. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, $b(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ est non dégénérée et $q(x) = x_1^2 - x_2^2$

est non définie car $q(1,1) = 0$.

3. Formes quadratiques positives

Définition-21 : Une forme quadratique q de E est dite positive si,

pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$.

Theoreme-22 : (Cauchy-Schwarz)

Soit q une forme quadratique positive et b sa forme bilinéaire symétrique

associée. On a alors, pour tout $(x,y) \in E \times E$

$[b(x,y)]^2 \leq q(x)q(y)$

De plus, si q est définie, l'égalité n'est réalisée que si x et y sont

proportionnels.

Démonstration :

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $q(x + ty) \geq 0$.

En développant, on obtient $t^2q(y) + 2tb(x,y) + q(x) \geq 0$.

Si $q(y) = 0$, alors nécessairement $b(x,y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Si $q(y) \neq 0$, alors nécessairement le discrimant du trinôme est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité.

Supposons de plus q définie avec $b(x,y)^2 = q(x)q(y)$.

Si $q(y) = 0$, alors $y = 0$ et x et y sont proportionnels.

Si $q(y) \neq 0$, alors le discriminant du trinôme s'annule et donc le trinôme s'annule aussi. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(x + ty) = 0$. Or q est définie donc $x + ty = 0$.

Remarque-23 : L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer qu'une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique positive est continue.

Théorème-24 : (Minkowski)

Soit q une forme quadratique positive sur E. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$\sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

De plus, si q est définie, l'égalité n'est vérifiée que s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$ ou si $x = 0$

Démonstration :

$q(x + y) = q(x) + 2b(x,y) + q(y) \leq q(x) + 2\sqrt{q(x)q(y)} + q(y)$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz donc $q(x + y) \leq (\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)})^2$.

Supposons q définie et l'égalité vérifiée. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors également Vérifiée. Donc on a soit $x = 0$ soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$.

Or $b(x,\lambda x) = \sqrt{q(x)}\ \sqrt{q(\lambda x)} \geq 0$ donc $\lambda q(x) \geq 0$, i.e. $\lambda \geq 0$. La réciproque est évidente.

4. Décomposition en carres d'une forme quadratique : méthode de Gauss

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, on note $(x_1,\ldots,x_n)$ ses coordonnées dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$.

Soit q une forme quadratique non nulle définie sur E. Pour tout $x \in E$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} m_{ij}\, x_i x_j$$

Proposition-25 : Il existe n formes linéaires $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ définies sur E linéairement indépendantes et n réels $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tels que, pour tout $x \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ (\ell_i(x))^2$$

Démonstration :

par récurrence sur n. Si n = 1, le résultat est évident.

Supposons que toute forme quadratique de n−1 variables s'écrit comme la somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

− 1er cas : il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $m_{ii} \neq 0$.

Supposons (quitte a renuméroter les variables) que i = 1; on écrit

$q(x) = m_{11}\, x_1^2 + 2x_1(\sum_{j=2}^{n} m_{1j}x_1x_j) + R(x_2,\ldots,x_n)$

où R est une forme quadratique de n−1 variables. Posons $f(x_2,\ldots,x_n) = \sum_{j=2}^{n} m_{1j}\, x_j$

f est une forme linéaire sur E. On écrit alors

$q(x) = m_{11}\,[x_1 + \frac{f(x_2,\ldots,x_n)}{m_{11}}]^2 - \frac{f^2(x_2,\ldots,x_n)}{m_{11}} + R(x_2,\ldots,x_n)$

$q(x) = m_{11}\,[x_1 + \frac{f(x_2,\ldots,x_n)}{m_{11}}]^2 + S(x_2,\ldots,x_n)$

où S est une forme quadratique de n−1 variables. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut alors écrire q comme la somme des carres de n formes linéaires; elles sont bien linéairement indépendantes d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que l'application $(x_1,\ldots,x_n) \to x_1 + \frac{f(x_2,\ldots,x_n)}{m_{11}}$ est indépendante des n−1 autres qui ne contiennent pas x_1

− 2 éme cas : pour tout $i \in \{1,...,n\}$, $m_{ii} = 0$.

Alors il existe $m_{ij} \neq 0$ avec $i \neq j$ (car la forme quadratique est non nulle). Supposons (quitte a renuméroter les variables) que $m_{12} \neq 0$; on écrit

$q(x) = m_{12} x_1 x_2 + x_1 f(x_2,...,x_n) + x_2 g(x_3,...,x_n) + T(x_3,...,x_n)$

où f et g sont des formes linéaires et T une forme quadratique. On a alors

$$q(x) = m_{12}\left[(x_1 + \frac{g}{m_{12}})(x_2 + \frac{f}{m_{12}}) - \frac{fg}{{m_{12}}^2}\right] + T$$

$$= \frac{m_{12}}{4}\left[(x_1 + x_2 + \frac{f+g}{m_{12}})^2 - (x_1 - x_2 + \frac{g-f}{m_{12}})^2\right] - \frac{fg}{m_{12}} + T$$

$-\frac{fg}{m_{12}} + T$ est une forme quadratique de n−1 variables; on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et on conclut comme précédemment.

On a alors prouve le résultat par récurrence

Remarque-26 : La méthode de Gauss est une méthode algorithmique. On verra plus loin qu'elle permet de trouver explicitement une base de E orthogonale pour q et de déterminer la signature de q.

5. Bases orthogonales

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique b. On note q la forme quadratique associée.

Définition-27 : Deux éléments x et y de E sont dits orthogonaux s'ils vérifient $b(x,y) = 0$.

Définition-28 : On dit que la base $(e_1,...,e_n)$ de E est orthogonale si $b(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

Proposition-29 : Une base de E est orthogonale pour la forme quadratique q si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.

Démonstration :

la matrice Q de q dans la base $(e_1,...,e_n)$ est définie par $Q_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Elle est donc diagonale si et seulement si $b(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Proposition-30 : Soit q une forme quadratique. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E orthogonale pour q, alors les vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$ forment une base du noyau de q.

Remarque-31 : Si q est non dégénérée, alors son noyau est réduit au vecteur nul.

Corollaire-32 : Pour toute forme quadratique q sur E, il existe des bases orthogonales de E pour q.

6. Classification des formes quadratiques complexes

On suppose que E est un $\mathbb{C}$−espace vectoriel de dimension finie n.

Théorème-33 : Soit $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique sur E. Alors il existe une base $e_1,\dots,e_n$ de E telle que :

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$$

pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$. L'entier r est le rang de q.

Remarque-34 : $0 \le r \le n$.

« Le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ les classifient complètement » .

En revanche sur $\mathbb{R}$, le rang ne suffit pas ...

7. Classification des formes quadratiques réelles

On suppose que E est un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel.

Une forme quadratique f sur E est positive si pour tout $x \in E$, $f(x) \ge 0$.

On dit que f est définie positive si pour tout $0 \ne x \in E$, $f(x) > 0$. On définit de même les formes quadratiques (définies) négatives.

Théorème-35 : Supposons que E est de dimension finie n. Alors, il existe une base $e_1,\dots,e_n$ de E telle que pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$,

$f(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$

où $p,q \ge 0$, $p + q \le n$. De plus les entiers p,q sont indépendants de la base

$(e_1, \ldots, e_n)$ et $p + q = r$ le rang de f.

On appelle (p,q) la signature de f.

La signature classifie les formes quadratiques réelles.

8. Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

a) Espace euclidien

Définition-36 : On appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.

On appelle espace euclidien un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Proposition-37 : b est un produit scalaire sur E si et seulement si il existe une base de E orthogonale pour q, forme quadratique associée à b, dans laquelle la matrice de q est la matrice identité.

Démonstration :

c'est une conséquence immédiate de la proposition 29.

Corollaire-38 : Si E est de dimension n, la forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique q est un produit scalaire si et seulement si la signature de q est égale à (n,0) .

Théorème-39 : Soit (E,b) un espace euclidien de dimension finie. L'application $x \rightarrow b_x$ de E dans E* est un isomorphisme canonique où on a note b_x la forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par $b_x(y) = b(x,y)$

b) Orthogonalité

Soit A une partie d'un espace euclidien (E,b).

Proposition-40 : L'ensemble $A^{\perp} = \{y \in E \,;\, \forall x \in A, b(x,y) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé orthogonal de E.

Démonstration :

c'est une conséquence de la linéarité à droite du produit scalaire b

Remarque-41 : On peut également définir l'orthogonal d'un sous-espace F d'un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire, mais dans ce cas F et $F^{\perp}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires (ils peuvent avoir un vecteur non nul en commun).

Théorème-42 : (Pythagore)

Soit $(x,y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration :

il suffit de développer $\|x+y\|^2 = b(x+y,x+y)$ en utilisant la bilinéarité

de b pour prouver l' équivalence.

Proposition-43 : Il existe dans E des bases formées de vecteurs 2 à 2 orthogonaux. Plus généralement, tout système de vecteurs non nuls forme de vecteurs 2 à 2 orthogonaux est libre.

CHAPITRE 3 : Coniques

On se place dans un plan affine euclidien X.

1. Conique définie par foyer, directrice et équation polaire

Définition-1 : Soit F un point, D une droite ne passant pas par F et e > 0 un réel.

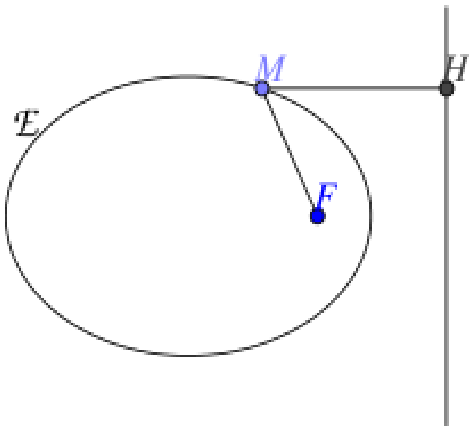
On appelle conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e > 0,

l'ensemble C des points M du plan vérifiant

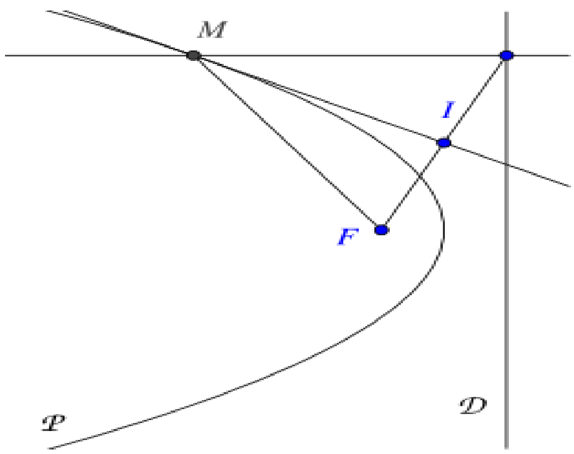
$$MF = ed(M, D).$$

On distingue alors trois cas :

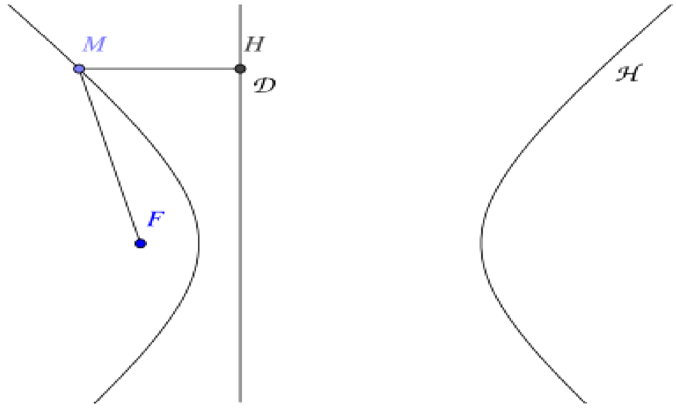
– C est une ellipse si et seulement si 0 < e < 1,



– C est une parabole si et seulement si e = 1,



– C est une hyperbole si et seulement si e > 1.



Théorème-2 : Soit C une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

Notons d = d(F, D).

Dans un repère orthonormal $(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, choisi tel que la droite D ait pour équation x = d,

la conique C est une courbe ayant deux équations polaires

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{e\cos\theta-1}$$

Le réel p est appelé paramètre de la conique, p = de.

Démonstration :

Considérons C_1 et C_2 les courbes dont les équations polaires sont

$$\rho_2(\theta) = \frac{de}{1+e\cos\theta} \text{ et } \rho_1(\theta) = \frac{de}{e\cos\theta-1}$$

Cela signifie que la courbe C_1 et C_2 sont les ensembles de points

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_1(\theta)\cos(\theta) \\ \rho_1(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et $$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_2(\theta)\cos(\theta) \\ \rho_2(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

On constate que

$$(\rho_1(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi), \rho_1(\theta+\pi)\sin(\theta+\pi)) = (\rho_2(\theta)\cos(\theta), \rho_2(\theta)\sin(\theta))$$

et de même

$$(\rho_2(\theta+\pi)\cos(\theta+\pi), \rho_2(\theta+\pi)\sin(\theta+\pi)) = (\rho_1(\theta)\cos(\theta), \rho_1(\theta)\sin(\theta)).$$

Ce qui montre que les courbes C_1 et C_2 sont les mêmes.

Soit θ un réel et M(θ) le point de coordonnées $(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$.

La distance de $M(\theta)$ à la directrice D est $|\rho(\theta)\cos\theta - d|$. Par conséquent

$M(\theta) \in C \Leftrightarrow d(M(\theta),F) = ed(M(\theta), D) \Leftrightarrow |\rho(\theta)| = e|\rho(\theta)\cos\theta - d| \Leftrightarrow M(\theta) \in C_1 = C_2$.

En effet, si $\rho(\theta)$ et $\rho(\theta)\cos\theta - d$ sont de même signe alors

$$\rho(\theta) = \frac{de}{e\cos\theta - 1} = \rho_1(\theta)$$

Si $\rho(\theta)$ et $\rho(\theta)\cos\theta - d$ sont de signe contraire alors

$$\rho(\theta) = \frac{de}{1 + e\cos\theta} = \rho_2(\theta)$$

Ceci montre l'inclusion de la courbe C dans la courbe $C_1 = C_2$. On observe immédiatement l'inclusion inverse. Ceci montre que les courbes C_1, C_2 et C sont les mêmes.

2. Equation cartésienne d'une conique

Théorème-3 : Soit C une conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

On note $d = d(F,D)$.

Dans un repère orthonormal $(F, \vec{i}, \vec{j})$, choisi tel que la droite D ait pour équation $x = d$,

C a pour équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = e^2 (x - d)^2 .$$

Démonstration :

Cela découle directement de l'égalité $MF^2 = e^2 d(M, D)^2$

a) Parabole

Théorème-4 : Soit P la parabole de paramètre $p > 0$. Il existe un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel P a pour équation :

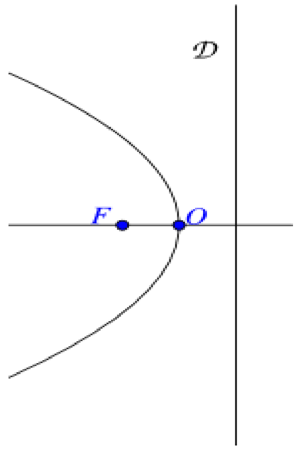
$$P : y^2 - 2px = 0.$$

En ce cas $\overrightarrow{OF} = \frac{p}{2}\vec{u}$ et $D: x = -\frac{p}{2}$

Démonstration : Notons que dans le cas d'une parabole $p = d$. Dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole est l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) tels que $x^2 + y^2 = (x - p)^2$ c'est-à-dire $y^2 = 2p(\frac{p}{2} - x)$.

On considère alors le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $O = (\frac{p}{2}, 0)$, $\vec{u} = -\vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{j}$. Les coordonnées du point M(x,y) dans ce nouveau repère sont (X,Y) avec (X,Y) = ($\frac{p}{2}$ −x,y). L'équation de la parabole dans ce nouveau

repère est donc $Y^2 = 2pX$.



b) Ellipse

Théorème-5 : Soit E une ellipse, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel E a pour équation

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Réciproquement, la courbe d'équation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ est l'ellipse de foyer $F = O + c\,\vec{i}$, de directrice $D : x = \frac{a^2}{c}$

cet d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Démonstration : L'équation de E dans le repère $(F, \vec{i}, \vec{j})$ s'écrit :

$$x^2 + y^2 = e^2 (x-d)^2$$

Par conséquent en développant on obtient :

$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2dx - e^2d^2 = 0$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$(1-e^2)\left(x + \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 - \frac{e^2 d^2}{1-e^2} = 0,$$

à partir de là on déduit le théorème

Corollaire-6 : Soit E l'ellipse d'équation

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $0 < b < a$.

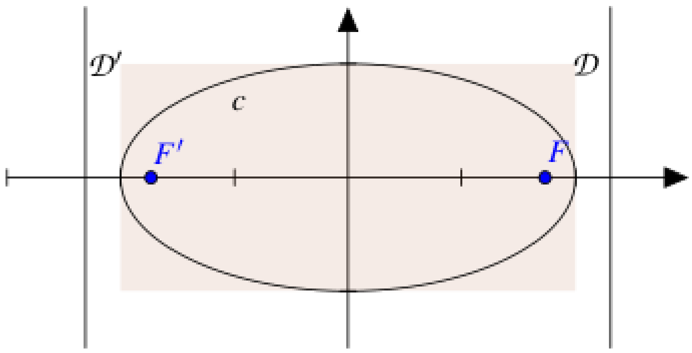
1. Le point O est le centre de symétrie, O est appelé centre de l'ellipse.

2. L'ellipse E admet deux foyers $F = O+c\,\vec{\imath}$ et $F' = O-c\vec{\imath}$ avec $c =\sqrt{a^2-b^2}$ et deux directrices

$$D : x = \frac{a^2}{c} \quad \text{et } D' : x = -\frac{a^2}{c} \quad .$$

3. Les axes $O+\mathbb{R}\,\vec{\imath}$ et $O+\mathbb{R}\,\vec{\jmath}$ sont des axes de symétrie de E . L'axe $O+\mathbb{R}\,\vec{\imath}$ est appelé axe focal de l'ellipse.

4. Les intersections de E avec les axes s'appellent les sommets de E



Démonstration :

Soit E l'ellipse d'équation

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans le repère orthonormal $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $0 < b < a$.

1. La symétrie centrale par rapport à O résulte de l'invariance de l'équation de E dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ par l'application $(x,y) \to (-x,-y)$.

2. Le fait que le point $F = O+c\,\vec{\imath}$ soit un foyer de E et $D : x = \frac{a^2}{c}$ soit une directrice résulte du théorème précédent. Le fait que le point $F'= O-c\,\vec{\imath}$ soit un foyer de E et $D' : x = -\frac{a^2}{c}$ soit une directrice résulte de l'invariance de E par la symétrie centrale de centre O.

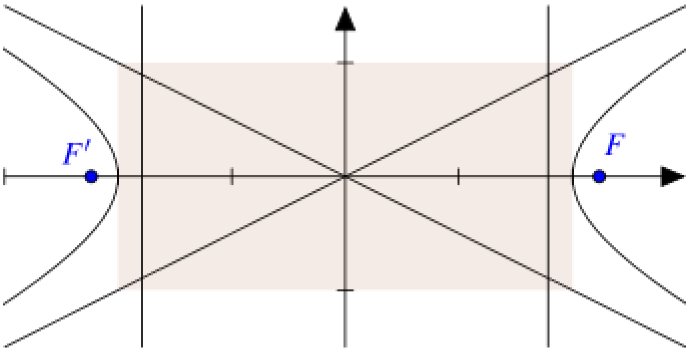
c) Hyperbole

Théorème-7 : Soit H une hyperbole, il existe un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$dans lequel E a pour équation $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Réciproquement la courbe d équation

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de foyer $F = O - c\,\vec{\imath}$ de directrice $D : x = -\frac{a^2}{c}$

Et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Démonstration :

Même preuve que pour l'ellipse.

Corollaire-8 : Soit H l'hyperbole d'équation

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

1. Le point O est le centre de symétrie, O est appelé centre de l'hyperbole.

2. L'hyperbole H admet deux foyers $F = O + c\,\vec{\imath}$ et $F' = O - c\,\vec{\imath}$avec c =

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et deux directrices $D : x = \frac{a^2}{c}$ et $D' : x = -\frac{a^2}{c}$.

3. Les axes $O + \mathbb{R}\,\vec{\imath}$ et $O + \mathbb{R}\,\vec{\jmath}$sont des axes de symétrie de H . L'axe $O + \mathbb{R}\,\vec{\imath}$ est appelé axe focal de l'hyperbole. Il coupe H en deux points A et A' appelés sommets de l'hyperbole.

4. L'hyperbole admet deux asymptotes $\Delta : y = \frac{b}{a}x$ et $\Delta' : y = -\frac{b}{a}x$.

Démonstration :

Même preuve que pour l'ellipse

3. Conique définie de manière bifocale

Théorème-9 : Soit F et F' deux points distincts et fixons $a > \frac{FF'}{2}$ un réel. L'ensemble E des points M tel que

$$MF + MF' = 2a$$

est une ellipse de foyers F et F' .

Démonstration :

On note $E = \{M \in X \mid MF + MF' = 2a\}$. Nous allons montrer que E a un paramétrage elliptique, cela prouvera que E est une ellipse. On considère un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, , \vec{\jmath})$ où O est le milieu du segment FF' et $\vec{\imath}$ est le vecteur $\frac{1}{c}\overrightarrow{OF}$ où $c = \frac{1}{2}d(F,F')$.

Soit M un point de X distinct de F et F' , on considère les angles $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{FM})$ et $\theta' = (\vec{\imath}, \overrightarrow{F'M})$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MF}$ sont $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ et celles de $\overrightarrow{MF'}$ sont $(r'\cos(\theta'), r'\sin(\theta'))$ avec r et r' positifs. Nous avons donc

$$\overrightarrow{MF'} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FF'} = (-r\cos(\theta)-2c)\,\vec{\imath} - r\sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

Nous obtenons donc

$$MF'^2 = (r\cos(\theta)+2c)^{2} + r^{2}\sin(\theta)\ 2 = r^{2} + 2rc\cos(\theta) + 4c^{2}$$

Par conséquent le point M appartient à l'ensemble E si et seulement si le couple (r,θ) vérifie l'équation $\quad r^{2} + 2rc\cos(\theta) + 4c^{2} = (2a-r)^{2}$

c'est à dire

$$r = \frac{a^2-c^2}{a+c\cos(\theta)} = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$$

avec $e = \frac{c}{a}$ et $p = r = \frac{a^2-c^2}{a}$. Notons que par hypothèse $a > c$ ce qui montre que $e \in [0,1[$.

Le paramètrage obtenu est celui d'une ellipse.

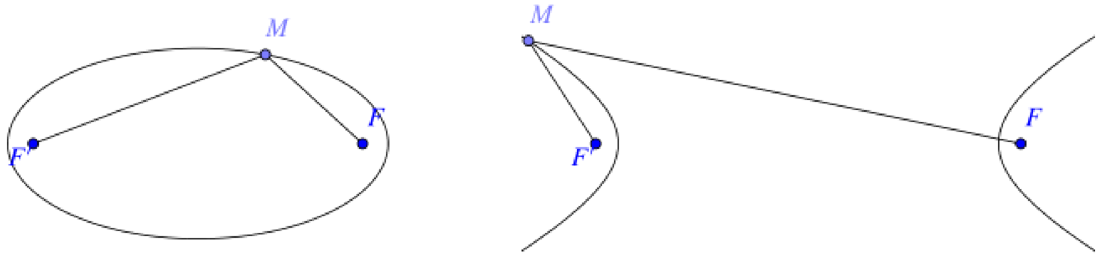
Théorème-9 : Soit F et F' deux points distincts et fixons $0 < a < \frac{FF'}{2}$ un réel. L'ensemble H des points M tel que

$$|MF - MF'| = 2a$$

est une hyperbole de foyers F et F' .

Démonstration :

Même preuve que dans le cas de l'ellipse.



4. Paramétrage d'une conique

♦ Un paramétrage d'un cercle C de centre O et de rayon R est $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [-\pi, \pi[$

Cela signifie qu'un point M(x,y) appartient à C si et seulement si il existe un réel θ de [-π, π[tel que

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

♦ Un paramétrage d'un cercle C de centre I(x_0 ;y_0) et de rayon R est

$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [-\pi, \pi[$

♦ Un paramétrage d'une ellipse de centre O d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est

$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [-\pi, \pi[$

♦ Un paramétrage d'une ellipse d'équation $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centre I(x_0 ;y_0)

est $\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [-\pi, \pi[$

♦ Un paramétrage d'une parabole d'équation y^2=2px est $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

♦ Un paramétrage d'une parabole d'équation x^2=2py est $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

♦ Un paramétrage d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est $\begin{cases} x = \mathrm{ch}t \\ y = \mathrm{sh}t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

CHAPITRE 4 : Détermination d'une conique à partir d'une équation cartésienne

On se place dans un plan affine euclidien X.

Définition-10 :

Soit R = $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de X. On considère un polynôme de degré 2 :

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + k.$$

On note C la courbe d équation f(x,y) = 0 :

$$C = \{M \in X \mid f(x_M, y_M) = 0\}$$

où (x_M, y_M) sont les coordonnées de M dans le repère R .

Mise sous forme canonique.

On appelle

1. $ax^2 + 2bxy + cy^2$, la partie quadratique de l'équation notée q et de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

2. dx+ey, la partie linéaire de l'équation notée l et de matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$L = (d,e).$$

Par conséquent

$$M \in C \Leftrightarrow {}^t[M]_R Q[M]_R + L[M]_R + k = 0.$$

Remarque-11 : (Effet d'un changement du centre du repère : translation des axes). Soit Ω un point de X de coordonnées(x_Ω, y_Ω) dans le repère R . Considérons le repère R'= $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Ecrivons les formules de changement de repère

$$\overrightarrow{\Omega M} = -\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM}$$

donc

$$[M]_{R'} = -[\Omega]_R + [M]_R$$

$$\begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$$

L'équation de C dans le repère R' est donc en développant et en identifiant

$f(x_\Omega + x', y_\Omega + y') = f(x_\Omega, y_\Omega) + x'\frac{\partial f}{\partial x}(x_\Omega, y_\Omega) + y'\frac{\partial f}{\partial y}(x_\Omega, y_\Omega) + ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$.

On remarque que la partie quadratique est invariante par changement de centre du repère.

(→) L'idée est donc de choisir si possible une origine Ω dont les coordonnées annulent les dérivées partielles, cela simplifiera l'équation.

Définition-12 : (Centre de symétrie de C). Un point Ω est un centre de symétrie de C si et seulement si

$$\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ f(x_\Omega + x', y_\Omega + y') = f(x_\Omega - x', y_\Omega - y')$$

si et seulement si, en utilisant la remarque précédente, la partie linéaire de l'équation de C dans R' est nulle c'est-à-dire

$$\text{(le gradient)}\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\Omega, y_\Omega) = 2ax_\Omega + 2by_\Omega + d = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\Omega, y_\Omega) = 2bx_\Omega + 2cy_\Omega + e = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$2Q\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = -{}^tL.$$

(→) En particulier on observe que la conique est alors stable par la symétrie centrale de centre Ω :

$$\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ f(x_\Omega + x', y_\Omega + y') = f(x_\Omega - x', y_\Omega - y')$$

(→) Si le rang de la partie quadratique de l'équation vaut 2, rg(Q) = 2, alors la courbe admet un et un seul centre de symétrie, car le système admet une unique solution.

(→) Si le rang de la partie quadratique vaut 1 alors

1. la courbe n'admet aucun centre, si $-{}^tL \notin \operatorname{im} Q$
2. la courbe admet une infinité de centres si $-{}^tL \in \operatorname{im} Q$.

Remarque-13 : (Réduction de la partie quadratique : rotation des axes). Supposons la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormée. Il existe une matrice de rotation P telle que

$$^{t}PQP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D.$$

La matrice P est la matrice de passage de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ formées de vecteurs propres de l'endomorphisme associé à Q. Les formules de changement de repère de

$R_{O,\vec{\imath},\vec{\jmath}}$ à $R_{O,\vec{u},\vec{v}}$

s'écrivent

$$[M]_{R_{O,\vec{\imath},\vec{\jmath}}} = P[M]_{R_{O,\vec{u},\vec{v}}}$$

ainsi :

$$M \in C \Leftrightarrow {}^{t}[M]_{R_{O,\vec{u},\vec{v}}} D[M]_{R_{O,\vec{u},\vec{v}}} + L[M]_{R_{O,\vec{u},\vec{v}}} + k = 0.$$

En notant (x''_M, y''_M) les coordonnées de M dans le repère $R_{O,\vec{u},\vec{v}}$ nous obtenons

$$M \in C \Leftrightarrow \lambda x''^2 + \mu y''^2 + d_1 x'' + e_1 y'' + k = 0.$$

De ces remarques on déduit une méthode de détermination des coniques.

1. Calculer le rang de Q.
2. Si le rang de Q vaut 2 alors on procède comme suit.
   (a) Nous savons qu'il existe un unique centre Ω on commence par le déterminer.
   (b) Trouver une base orthonormée de vecteurs propres $(\vec{u},\vec{v})$ de Q.
   → L'équation de C dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est
   $$M \in C \Leftrightarrow \lambda x''^2_M + \mu y''^2_M + f(x_\Omega, y_\Omega) = 0.$$
   où (x''_M, y''_M) sont les coordonnées de M dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$
3. Si le rang de Q vaut 1 alors on procède comme suit.
   (a) Trouver une base orthonormée de vecteurs propres $(\vec{u},\vec{v})$ de Q.
   → L'équation de C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ est
   $$M \in C \Leftrightarrow \lambda x''^2_M + d_1 x''_M + e_1 y''_M + k = 0.$$
   où (x''_M, y''_M) sont les coordonnées de M dans $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   (b) Par mise sous forme canonique du trinôme $\lambda x''^2_M + d_1 x''_M + k$ on se ramène à une équation plus simple du type
   $$\lambda x'^2_M + e_1 y'_M + k' = 0$$

où (x'_M ,y'_M) sont les coordonnées de M dans le nouveau repère associé (Ω' ,$\vec{u}$,$\vec{v}$).

Remarque-14 :

Si on a une équation du type $ax^2+cy^2+dx+ey+k=0$ (*) avec $(a,c)\neq(0,0)$

On se place ici dans le cas où b=0 dans l'équation (*)

- Si $a = 0$ et $d \neq 0$ ou $c=0$ et $e \neq 0$ c'est une parabole

(l'équation contient au moins un terme en x^2 , pas de terme en y^2 et un terme en y , ou l'équation contient au moins un terme en y^2, pas de terme en x^2 et un terme en x)

- si $a \neq 0$ et $c \neq 0$
- si a=c (coefficient de x^2 = coefficient de y^2) C est un cercle, un point ou l'ensemble vide
- si a et c sont de même signe alors C est une ellipse, un point ou l'ensemble vide
- si a et c sont de signe contraire alors C est une hyperbole, ou deux droites

exemple $3x^2-3y^2-6x-9y+1$ (coefficient de x^2 = coefficient de y^2)

C est un cercle, un point ou l'ensemble vide

$M(x,y) \in C \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3y+\frac{1}{3}=0$

Donc $M(x,y) \in C \Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+\frac{1}{3}=0$

Donc $M(x,y) \in C \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{35}{12}$

La conique est donc le cercle de centre $I(-1\,;\frac{3}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{35}{12}}$

On obtient donc des équations du type :

(a) $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$, c'est une ellipse, $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=0$, c'est un point, $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=-1$, c'est le vide,

(b) $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$, c'est une hyperbole, $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}=0$, c'est deux droites concourantes,

(c) $\frac{x^2}{A^2}-\frac{y}{B^2}=0$, c'est une parabole

(d) $\frac{x^2}{A^2}=1$, c'est deux droites parallèle

(e) $\frac{x^2}{A^2}=0$, c'est une droite,

(f) $\frac{x^2}{A^2} = -1$, c'est le vide.

Exemple de l' ellipse :

Déterminons la nature de la courbe définie par l'équation

$f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$.

La matrice de la forme quadratique dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2. La conique a donc un centre Ω que l'on détermine

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_\Omega, y_\Omega) = 6x_\Omega + 2y_\Omega + 10 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_\Omega, y_\Omega) = 2x_\Omega + 6y_\Omega - 2 = 0 \end{cases}$$

Le centre est $(-2,1)$.

L'équation de la conique dans le repère $((-2,1), \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 + f(-2,1) = 3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - 10 = 0$.

La trace de la matrice est 6, le déterminant est 8, les valeurs propres de la matrice sont donc positives. Les valeurs propres de la matrice sont 2 et 4. Les espaces propres sont

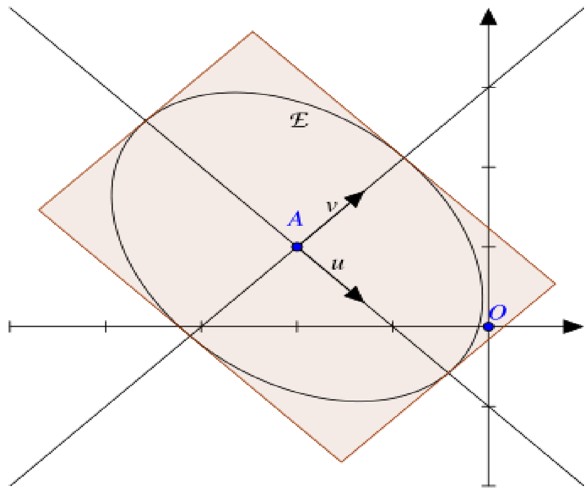
$E_2 = \mathbb{R}(1,-1)$ et $E_4 = \mathbb{R}(1,1)$.

On note $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ vecteurs propres unitaires associées à ces valeurs propres.

L'équation de la conique dans le repère $((-2,1), \vec{u}, \vec{v})$ est

$$\frac{x''^2}{5} + \frac{2y''^2}{5} = 1$$

C'est une ellipse.



Exemple de la parabole :

soit l'équation :

$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y = 0$

La matrice $\begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 25.

Posons $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$ vecteurs propres unitaires associées à ces valeurs propres.

Dans le repère orthonormé $R = (O; \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de Γ est

$25y^2 - 50y - 25x = 0$

soit encore $(y - 1)^2 = x + 1$

C est la parabole

Exemple de l' hyperbole :

soit l'équation :

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$$

C'est une conique non dégénérée et les valeurs propres de la matrices représentant la forme quadratique sont 3 et -7.

Par annulation du gradient, on obtient que le centre de cette conique est le point de coordonnées (2,3).

Dans un repère adapté, on obtient alors l'équation réduite

$$3x^2 - 7y^2 = 4$$

La conique est donc une hyperbole avec $a = 2/\sqrt{3}$ et $b = 2/\sqrt{7}$.

On en déduit

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{21}}$$

puis

$$e = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$$

Conclusion

On peut voir les coniques de plusieurs façons soit comme des sections planes d'un cône de révolution soit sous forme analytique comme des courbes du second degré soit encore sous un aspect projectif et dans ce rapport on déduit une méthode de détermination des coniques à partir de la partie quadratique de l'équation cartésienne

Bibliographie

Les documents employés :

[1] Math-IV-algèbre ,Formes (bi)linéaires ,Alexis Tchoudjem ,Université Lyon I 31 mai 2011.

[2] Dualité dans les espaces vectoriels, chapitre 1

[3] Algèbre bilinéaire, préparation à l'agrégation, Alexis Tchoudjem Université Lyon I

[4] Applications Bilinéaires et Formes Quadratiques par Alain Prouté Université Denis Diderot — Paris 7.

[5] MP2 Alg sesquilineaire Ch 7 F.SESQUILINEAIRES ET F. QUADRATIQUES HERMITIENNES

[6] Espaces préhilbertiens, complexes.Espaces hermitiens. Paul Valéry

[7] Formes quadratiques , Imen BHOURI

[8] Formes quadratiques, Agrégation interne UFR MATHEMATIQUES, Université de Rennes I

[9] Coniques, quadriques et formes quadratiques ISA-BTP deuxième année

[10] livre de Coniques et quadriques chapitre 4