FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

Licence Mathématiques et Applications (MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

Axiome du choix

- ***Réalisé par :*** ***Nouiga Khalid***
- ***Encadré par :*** ***Pr . Ouadghiri Anisse***

Soutenu Le 9 Juin 2018

Devant le jury composé de :

Anisse Ouadghiri	**Faculté des Sciences et Technique Fès**	**Encadrant**
El baraka Azzeddine	**Faculté des Sciences et Techniques Fès**	**Examinateur**
Akhmouch Mohammed	**Faculté des Sciences et Techniques Fès**	**Examinateur**

Année Universitaire 2017 / 2018

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

Remerciements

Je remercie particulièrement le professeur Anisse Ouadghiri pour le temps qu'il m'a consacré et pour ces précieuses directives qui m'ont été d'un apport considérable pour l'accomplissement de ce travail.
Je tiens à remercier aussi les professeurs : El baraka Azzeddine et Akhmouch Mohammed de faire partie du jury.
J'adresse également mes sincères remerciements à tous les professeurs du Département de Mathématique de la Faculté des Sciences et de Techniques de Fès pour les efforts considérables qu'ils fournissent pour notre formation.
Mes remerciements vont enfin à toute personne qui a contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail. et pour finir, merci, mille fois merci !

Table des matières

1 Introduction

En mathématiques, l'axiome du choix, abrégé en (AC) est un axiome de la théorie des ensembles qui affirme la possibilité de construire des ensembles en répétant une infinité de fois une " action de choix", même non spécifiée explicitement. Il a été formulé pour la première fois par Ernest Zermelo en 1904 pour la démonstration du théorème de Zermelo. L'axiome du choix peut être accepté ou rejeté, selon la théorie axiomatique des ensembles choisie.
L'axiome du choix (AC) est un axiome de la théorie des ensembles particulièrement intéressant. Contrairement aux axiomes plus évidents du système de Zermelo-Fraenkel (ZF), AC a été l'objet d'une controverse passionnée jusque dans les années 60, en partie résolue par les travaux de Gödel et de Cohen . Il reste aujourd'hui l'objet de recherches actives.
Je me propose de faire un petit tour parmi les divers domaines concernés par cet axiome : mathématiques, logique . (AC) est le point de départ de nombreux chemins où la curiosité m'a entraîné.

2 Historique

On peut remonter jusqu'à Zénon d'Élée (450 av. JC) pour trouver les premiers paradoxes liés à la notion d'infini (Achille ne peut pas rattrapper la tortue si on subdivise indéfiniment l'espace qui les sépare). Bolzano (1848) donne la première définition d'un ensemble infini ; Dedekind et surtout Cantor (1874) jettent les premières bases de la théorie des ensembles. Vers la fin du XIXe siècle, les contradictions inhérentes à la définition naive de Cantor, notamment le paradoxe de Russel, montrent que les bases doivent être repensées et la théorie des ensembles est alors axiomatisée par Zermelo (1908), Fraenkel, von Neuman, Gödel...
L'"axiome du choix" apparaît vers la même époque, utilisé implicitement par Cantor, mentionné explicitement pour la première fois par Peano (1890), Beppo Levi (1902), et Zermelo (1904) qui lui donne le titre d'axiome. Par la suite, de nombreux mathématiciens développent les conséquences de cet axiome, certaines désirables (formant les théorèmes de base de l'algèbre et de l'analyse fonctionnelle), d'autres contre-intuitives. Par essence non constructif, (AC) est bien sûr rejeté par les constructivistes de l'école de Brouwer. On a pu dire que d'un certain point de vue (AC) est évidemment vrai, mais d'un autre il est évidemment faux. Il faut attendre Gödel [8, 9] puis Cohen [4, 5] pour que la question soit tranchée : (AC) est en fait indépendant des axiomes de Zermelo-Fraenkel ; plus précisément, si ZF est consistant, alors ($ZFC = ZF + AC$) l'est aussi, mais il en est de même pour ($ZF + \lrcorner AC$ (négation de l'axiome du choix). L'intérêt pour (AC) ne s'est cependant pas arrêté là et constitue, encore aujourd'hui, un champ actif de recherche en logique et en théorie des ensembles. De nombreuses formes équivalentes, ap-

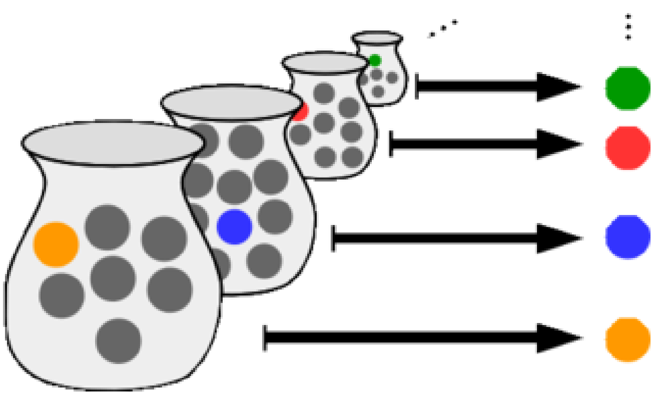
parentéees, ou indépendantes ont été proposées [16] ; le projet(Consequences of the Axiome of Choice) de Paul Howard et Jean E. Rubin [10, 11] propose (actuellement) 417 formes, ainsi qu'une table de toutes les implications connues.

3 Axiome du choix

3.1 Les différentes formes équivalentes de l'axiome du choix

Définition 3.1. *(fonction choix) Soit X un ensemble d'ensembles. Une fonction de choix sur X est une fonction $f : P(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \mapsto X$ telle que $\forall Y \in P(X) \smallsetminus \{\emptyset\}, f(Y) \in Y$*

Une fonction de choix est une fonction qui choisit un élément de chaque élément non vide de X, c'est-à-dire de chaque élément pour lequel un tel choix soit possible.



Exemple 3.1.1. *(fonction de choix)Supposons $X = \{0, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. Alors la fonction F définie par $F(\{0\}) = 0, F(\{1, 2\}) = 1$ et $F(\{1, 2, 3\}) = 1$ est une fonction de choix sur X.*

De nombreux ensembles possédent des fonctions de choix.

Définition 3.2. *Un ensemble ordonné* $(E, \leq)$ *, la relation* $\leq$ *est un bon ordre si la condition suivante est satisfaite :*
Toute partie non vide de E *possède un plus petit élément.*

Exemple 3.1.2. $(\mathbb{N}, \leq)$ *est un bon ordre, puisque dans n'importe quel ensemble d'entier, il y en a un plus petit que tous les autres. Par contre,* $(\mathbb{R}, \leq)$ *n'est pas un bon ordre, puisque le sous-ensemble* $]0, 1]$ *ne possède pas d'élément plus petit que tous les autres, pour la relation* $\leq$ *classique.*

Proposition 3.1. *(choix fini) Supposons que* X *est un ensemble fini, ou qu'il existe un bon ordre sur* $\bigcup_{Y \in X} Y$*. Alors il existe une fonction de choix sur* X*.*

Axiome du choix (version 1)

Pour une famille non vide d'ensembles non vides, il existe une "fonction choix " qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments. Cet axiome se traduit par le prédicat :

$$(\forall A)[\ A \neq \emptyset \wedge (\emptyset \notin A)] \Rightarrow [\exists\ \psi : A \mapsto \bigcup_{Y \in A} Y\ ]$$

Axiome du choix (version 2)

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence. Alors, il existe un ensemble des représentants des classes d'équivalence.

Exemple 3.1.3. *En prenant un ensemble de crayons de couleurs, on peut trier les crayons par groupe de couleurs (les bleus, les verts...) (les classes d'équivalences) puis choisir dans chaque groupe l'un des crayons qui représentera ce groupe.*

Axiome du choix (AC) (version 3)

Pour tout ensemble X , il existe une "fonction choix" sur X,i.e une application

$$f : A \setminus \{\emptyset\} \mapsto \bigcup_{Y \in A} Y$$

telle que

$$\forall \; Y \in A \setminus \{\emptyset\}, \quad f(Y) \in Y$$

Donnons maintenat une forme presque trivialement équivalente de l'axiome du choix :

Axiome du choix (AC') (version 4)

Soit I un ensemble non vide,et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexés par I.

$$\forall i \in I, \quad X_i \neq \emptyset, \;\; alors \;\; \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$$

.

$\hookrightarrow$ Essentiellement , il faut comprendre cet énoncé comme la possibilité de pouvoir faire un choix d'éléments simultanément dans tous les ensembles X_i à la fois.

Théorème 3.1.

$$(AC) \Leftrightarrow (AC')$$

Démonstration : $* \Rightarrow$) soit

$$E = \bigcup_{i\in I} X_i$$

[E existe d'aprés l'axiome de la reunion]

Soit f une fonction de choix sur E

$$f : P(E) \setminus \{\emptyset\} \mapsto E$$

On a $\forall i \in I, X_i \in P(E)$ *et* $X_i \neq \emptyset$, donc $f(X_i) \in X_i$

Posons $x_i = f(X_i)$

On a $\forall i \in I, x_i \in X_i$, et donc $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$

$* \Leftarrow)$ soit $I = P(X) \setminus \{\emptyset\}$

D'aprés(AC'), $\prod_{Y\in I} Y \neq \emptyset$

Soit $(x_Y) \in \prod_{Y\in I} Y$

On définit sur $I = P(X) \setminus \{\emptyset\}$ la fonction par f :

$\forall\ Y \in P(X) \setminus \{\emptyset\}, f(Y) = x_Y$ et on a bien $x_Y \in Y$ par définition du produit cartésien. f est bien une fonction de choix sur X

3.2 Le lemme de Zorn et le théorème de Zermelo

Soit $(E, \leq)$ partiellement ordonné, et $A \subset E$

Définition 3.3. $M \in E$, *M est un majorant de A ssi* $\forall x \in A, x \leq M$.

Définition 3.4. $M \in E$, *M est un élement maximal de E ssi* $\forall x \in E$, *on n'a pas* $M < x$
i.e $\forall x \in E$, $M \leq x \Rightarrow M = x$.

Définition 3.5. $(E, \leq)$ *est inductif ssi toute partie totalement ordonnée de E posséde un majorant.*

Dans toute la suite , nous noterons (Lemme de Zorn) l'énoncé suivant :

Lemme 3.1. *(Lemme de Zorn) Tout ensemble ordonné non vide et inductif posséde un élément maximal .*

C'est l'une des incarnations les plus utiles de l'axiome du choix. En voici quelques conséquences.

• Si X, Y sont des ensembles, il existe une injection de X dans Y ou il existe une injection de Y dans X.

• Tout ensemble peut être muni d'un bon ordre (théorème de Zermelo).

• Si A est un anneau commutatif et I un idéal propre, il existe un idéal maximal m de A tel que $I \subseteq m$.

• Tout espace vectoriel admet une base.

• Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact pour la topologie produit (Théorème de Tychonoff).

Théorème 3.2. *(Théorème de Zermelo)*
Tout ensemble peut être muni d'une structure de bon ordre, c'est-à-dire d'un ordre tel que toute partie non vide admette un plus petit élément.

Proposition 3.2. *Le théorème de Zermelo, l'axiome du choix et le lemme de Zorn sont équivalents .*

4 Formes faibles de l'axiome du choix

Il existe des formes faibles de l'axiome du choix que le mathématicien utilise couramment, la plupart du temps sans s'en apercevoir à moins d'être logicien ou constructiviste, et qui servent à construire des suites. Elles sont absolument indispensables pour l'exposé usuel des fondements de l'analyse.

Définition 4.1. *(Axiome du choix dénombrable)*
On appelle axiome du choix d'énombrable l'énoncé, noté (AC_ω)," Tout ensemble dénombrable possède une fonction de choix ".

Remarque

L'axiome du choix dénombrable ne concerne pas la question du choix d'un élément dans un ensemble dénombrable mais la possibilité de faire une infinité dénombrable de choix simultanément.

Définition 4.2. *(Axiome des choix dépendants)*
On appelle axiome des choix dépendants l'énoncé, noté (ACD), " Si R est une relation binaire sur A vérifiant : $\forall\ x\ \exists\ y\ (xRy)$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de A vérifiant x_nRx_{n+1} pour tout entier n ".

Proposition 4.1. *L'axiome du choix (AC) ,entraîne l'axiome des choix dépendants (ACD), qui lui-même entraîne l'axiome du choix dénombrable (AC_ω).*

<u>*Démonstration*</u> : Montrons que l'axiome du choix (AC) implique l'axiome du choix dépendant (AC_ω). Soit X un ensemble non vide , R une relation binaire sur X telle que pour tout $x \in X$, il existe $y \in X$ tel que xRy.
Soit Z l'ensemble des ensembles du type $X_x = \{y \in X; xRy\}$ où $x \in X$.

Tout élément de Z est non vide ,donc Z admet une fonction de choix f . On construit alors par récurence une suite $x_0, ..., x_n, ...$ d'éléments de X en posant $x_{n+1} = f(x_n)$, et cette suite convient (c'est encore une fois le même genre de démonstration que pour le lemme de Baire que nous annoçons plus tard)

Admettons maintenant l'axiome du choix dépendant (ACD) .Soit X un ensemble dénombrable dont tout les élments sont non vides. X tant dénombrable on peut numérer ses éléments $x_0, ..., x_n, ...$ Soit S l'ensemble des suites fnis $t = (t_1, ..., t_n)$ à valeurs dans $\cup_{1\leq i\leq n} x_i$ telle pour tout $i \leq n$,$t_i \in xi$. Pour tout $t \in S$ on définit $\mid t \mid$ comme tant la longueur de t.

Soit R la relation binaire dénie sur S par sRt si et seulement si t est plus longue d'un élément que s et s est formée des $\mid s \mid$ premiers éléments de t. Pour tout $s \in S$, il existe $t \in S$ tel que sRt (il suffit de ra jouter un élément de $x_{|s|+1}$ .Daprés l'axiome du choix dépendant on peut donc construire une suite de suite finie $s_1, ...s_n, ...$ telle que si $m < n$, s_m est un segment initial de s_n. En prenant l'union de toute ces suites , on obtient donc une suite $s_1, ...s_n, ...$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n \in x_n$,ce qui donne une fonction de choix sur X en posant $f(x_n) = s_n$.

$\hookrightarrow$ Ces implications sont des implications strictes :l'axiome du choix dénombrable n'implique pas l'axiome du choix dépendant et l'axiome du choix dépendant n'implique pas l'axiome du choix général.

Cela se montre par les mêmes méthodes que les résultats d'indépendance de l'axiome du choix avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel et nous ne aventurerons pas en ces eaux dangereuses.

5 Quelques applications mathématiques de l'axiome du choix

-

5.1 En Algébre Linéaire

□ On utilise le lemme de Zorn pour montrer l'existence de bases dans les espaces vectoriels et celle d'idéaux maximaux dans les anneaux. □ Le lemme de Zorn est le point de départ de la plupart des applications de l'axiome du choix en algébre. Dans tous les cas, le principe est le même : pour montrer qu'il existe un certain objet avec telle ou telle propriété, on introduit une famille dans laquelle l'objet cherché soit un élément maximal : si la famille est inductive, ce qui est souvent facile à vérifier si l'ordre est une notion convenable d'inclusion, alors le lemme de Zorn permet d'affirmer l'existence d'un élément maximal.

Proposition 5.1. *(Base) Tout espace vectoriel possède une base.*

Démostration :
Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soit S l'ensemble des systèmes libres de E. Ici, par « système libre » on entend un sous-ensemble de E (et non pas une famille d'éléments de E) dont les éléments sont linéairement indépendants. L'inclusion est une relation d'ordre sur S, et cet ensemble ordonné est inductif. En effet, pour toute partie A bien ordonnée de S, posons $m(A) = \cup_{s \in A} s$. Alors, $m(A)$ est un système libre puisque toute partie finie de $m(A)$ a un plus grand élément a, lequel doit appartenir à l'un des s tels que $s \in A$. Par le lemme de Zorn, S a un élément maximal.
□ Notons M un tel élément maximal. Si ce n'est pas un système générateur

de E, il y a un vecteur x n'appartenant pas au sous-espace engendré par M. Mais alors $M \cup x$ est un système libre, ce qui contredit la maximalité de M.

Proposition 5.2. *(ideal maximal)(AC) Tout idéal propre d'un anneau est inclus dans un idéal propre maximal.*

Preuve :

Soit R un anneau et I un idéal propre de R. Soit A_I la famille de tous les idéaux propres (c'est-à-dire ne contenant pas 1) incluant I. Alors $(A_I, \subseteq)$ est un ensemble ordonné inductif. En effet, si $(I_k)_{k\in K}$ est une chaîne dans $(A_I, \subseteq)$, posons $I' = \bigcup_{k\in K} I_k$. Alors I' est un idéal de R, car pour a, b dans I', il existe k, j tels que a est dans I_k et b dans I_j ; par hypothése, on a $I_k \subseteq I_j$, ou $I_j \subseteq I_k$; dans le premier cas, a et b sont dans I_j, et on a donc $a - b \in I_j \subseteq I'$, dans le second cas, on a de même $a - b \in I_k \subseteq I'$, et dans tous les cas,I' est un sous-groupe du groupe additif de R. L'argument est similaire (et plus facile) pour la multiplication. De plus, I' est propre car, si 1 était dans I', il serait dans un des idéaux I_k.Alors I' est un majorant pour la chaîne $(I_k)_{k\in K}$, et $(A_I, \subseteq)$ est inductif. Soit alors I' un élément maximal dans $(A_I, \subseteq)$, qui existe par le lemme de Zorn. Par construction, I' est un idéal propre de R incluant I et inclus dans aucun idéal propre de R, c'est donc un idéal propre maximal de R.D'où le résultat voulut.

□ On notera la grande similarité de toutes les démonstrations basées sur le lemme de Zorn. On peut extraire un principe commun, qui est que les diverses propriétés « être un filtre », « être une partie libre », « être un idéal » sont de caractére finitiste, ceci signifiant que la vérification de la propriété ne met en jeu que des sous-ensembles finis de l'ensemble considéré. Dans toute situation de ce type, le lemme de Zorn affirme l'existence d'objets maximaux.

5.2 En Topologie Générale

□ Les conséquences en topologie de l'axiome du choix et de ses formes faibles sont nombreuses. On montre ici comment utiliser (AC_ω) pour extraire des suites.

Proposition 5.3. *(clôture)* (AC_ω) *Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X. Alors un élément a de X appartient à la clôture de A si et seulement si il existe une suite de points de A convergeant vers a.*

Démonstration : Si on a $a = \lim a_n$ avec $a_n \in A$ pour tout n, alors a appartient à $\overline{A}$ de façonstantard. C'est pour la réciproque qu'une forme d'axiome du choix est utilisée. Supposons $a \in A$, et soit D_n le disque de centre a et de rayon $1/n$. Par hypothése $D_n \cap A$ est une partie non vide de X pour tout n. Supposons que F est une fonction de choix sur l'ensemble dénombrable $\{D_n \cap A; n \in \omega\}$. Par construction, la suite $(F(D_n \cap A))_{n\in\omega}$ est une suite de points de A convergeant vers a.

Corollaire 5.1. (AC_ω) *Une fonction f d'un espace métrique dans un espace métrique est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\omega}$ convergeant vers a, la suite des $f(a_n)$ converge vers $f(a)$.*

5.3 En Analyse

□ On établit deux applications de l'axiome du choix en analyse, à savoir le théoréme de Hahn–Banach sur le prolongement des formes linéaires, et l'existence d'ensembles non mesurables pour la mesure de Lebesgue.

Théorème 5.1. *(Théorème de Hahn–Banach, forme analytique)*
Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall x \in E$ *et* $\forall \lambda > 0$

(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in E$.

Soit d'autre part $G \subset E$ *un sous-espace vectoriel et soit* $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application linéaire telle que*

(3) $g(x) \leq p(x)\ \forall x \in G$

Alors il existe une forme linéaire f *définie sur qui prolonge* g

i.e $g(x) = f(x)\ \forall x \in G$.

et telle que

(4) $f(x) \leq p(x)\ \forall x \in E$

Démonstration :

On considère :

$P = \{h | h : D(h) \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $D(h)$ sev de E, h linéaire, $G \subset D(h)$, h prolonge g et $\forall x \in D(h)$, $h(x) \leq p(x)\}$

P munit de la relation d'ordre :

$h1 \leq h_2 \Leftrightarrow D(h_1) \subset D(h_2)$ et h_2 *prolonge* h_1 Il est clair que P n'est pas vide car $g \in P$..D'autre part P est inductif.En effet : soit $Q \subset P$ un sous-ensemble totalement ordonné ; on note $Q = (h_i)_{i \in I}$. On définit

$D(h) := \bigcup_{i \in I} D(h_i)$ et $h(x) := h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$.

On vérifie bien que cette définition a bien un sens,que $h \in P$ et que h est un majorant de Q.Il resulte du lemme de Zorn que P admet un élément maximal noté f.

Prouvons que $D(f) = E$ -ce qui achévera la démonstration du théorème Raisonnons par l'absurde et Supposons que $D(f) \neq E$. soit $x_0 \notin D(f)$;posons $D(h) := D(f) + \mathbb{R}x_0$ et pour $x \in D(f)$ $h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$ $(t \in \mathbb{R})$

où α est une constante qui sera fixée ultérieurement de manière à ce que $h \in P$.

On doit donc s'assurer que

$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$ $\forall x \in D(f)$,$\forall t \in \mathbb{R}$.

Grâce à (1), il suffit de vérifier que.

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) & \forall x \in D(f) \end{cases}$$

Autrement dit,il faut choisir α tel que : $\sup_{y\in D(f)}(f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x\in D(f)}(p(x + x_0) - f(x))$ Un tel choix est possible puisque :

$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$ $\forall x \in D(f)$, $\forall y \in D(f)$

en effet on notera que $f(x) + f(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$

Grâce à (2)

On conclut que f est majorée par h et que $f \neq h$;ceci contredit la maximalité de f

Proposition 5.4. *(non mesurable) (AC) Il existe un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non mesurable pour la mesure de Lebesgue.*

Démonstration : Notons mu la mesure de Lebesgue. Pour x, y dans $\mathbb{R}$, notons $x \equiv y$ pour $x - y \in \mathbb{Q}$. Alors $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Par le corollaire précédent, il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ qui contient un point exactement dans chaque classe d'équivalence.

Supposons A Lebesgue-mesurable. Par construction, $\mathbb{R}$ est réunion disjointe des ensembles $A+q$ pour q dans $\mathbb{Q}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, ceci entraîne $\mu(A) > 0$. Comme A est la réunion des $A \cap [k, k + 1]$ pour $k \in \mathbb{R}$, il existe n vérifiant $\mu(A\cap[n, n+1]) > 0$. Posons $B = A\cap[n, n+1]$. Alors$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(B+q)$ a une mesure infinie, alors qu'il est inclus dans $[n, n + 2]$,dont la mesure est 2. L'hypothése que A est mesurable est donc à rejeter.

5.4 En géométrie

En admettant la version 3 de l'axiome du choix .

Construction d'un ensemble non mesurable

En munissant $\mathbb{Z}$ de la relation $a \sim b$ ssi " $a - b$ appartient à l'ensemble $3\mathbb{Z}$ (l'ensemble des nombres divisibles par 3)", on obtient trois classe d'équivalence, notée $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\{0,3,6,...\},\{1,4,7,...\},\{2,5,8,...\}\}$. Un ensemble des représentants est $E = \{0,1,2\}$.
Maintenant, que se passe-t-il en prenant la relation suivante sur $\mathbb{R}$: $a \sim b$ ssi "$a - b$ appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}$" (l'ensemble des nombres que l'on peut écrire comme une fraction). Par exemple, les nombres 0 et $\sqrt{2}$ ne seront pas dans la même classe d'équivalence, car $(\sqrt{2} - 0)$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$. On écrit $(\sqrt{2} + \mathbb{Q})$ l'ensemble des nombres que l'on écrit sous la forme $(\sqrt{2} + q)$, où $q \in \mathbb{Q}$. En prenant deux nombres a et b dans cet ensemble, on vérifie facilement que l'on a $a \sim b$.
De même, les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, πou $_sqrt\pi$ ne sont pas dans les mêmes classes d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence, ressemble donc à quelque chose comme : $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{\{0+\mathbb{Q}\},\{\sqrt{2}+\mathbb{Q}\},\{\sqrt{3}+\mathbb{Q}\},\{\pi+\mathbb{Q}\},...\}$. Les points de suspensions représentent toutes les autres classes d'équivalences.
Mais que doit on mettre exactement dans ces points de suspension ? On peut les compléter aussi loin que l'on veut, en choisissant à chaque fois de nouveaux représentants, mais on ne pourra jamais trouver une formule qui les donne toutes. Heureusement, l'axiome du choix est là, et nous dit que l'on peut le faire, et choisir ainsi dans chaque classe un élément qui représentera cette classe. L'ensemble des représentant ressemble à quelque chose comme $F = \{0, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{\pi}, ...\}$, même si on ne sait pas bien ce qu'il y a dans les

points de suspensions.

Un ensemble de nombre, on peut généralement le mesurer : si on un nombre tout seul, c'est un point isolé, il est de longueur nulle. Un segment $[0,1]$ sera lui de longueur 1, l'ensemble $[0,2]$ contient deux fois la longueur unité, il est donc de longueur 2. Cela donne une règle permettant de mesurer des ensembles.

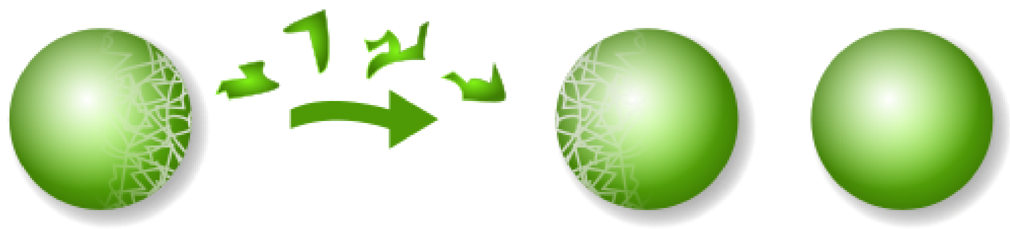
Et l'ensemble F, que l'on vient de construire, quelle est sa longueur ?... voici notre problème : il n'a pas de longueur ! Cet ensemble n'est pas de longueur nulle, mais suivant la manière dont on le mesure, on ne trouve jamais le même résultat !

Un objet non mesurable et contraire à toute l'intuition physique que l'on a des choses, voilà un aspect fort dérangeant de l'axiome du choix !

Et les problème ne s'arrêtent pas là ! Le paradoxe de Banach Tarski en est l'exemple le plus flagrant :

L'énoncé du théorème de Banach-Tarski est le suivant :

Il est possible de découper comme un puzzle une boule (de $\mathbb{R}^3$) en 5 morceaux qui, une fois réassemblés, forment deux boules de même volume que la boule initiale.



Autrement dit, en faisant fondre une boule d'or, il est mathématiquement possible de reformer deux boules ayant le même volume que le premier ! Heureusement, aucun mathématicien n'a eu le vice de mettre en oeuvre ce

théorème dans la réalité !
Le volume, c'est l'équivalent de la longueur en dimension 3. Si on a pu fabriquer un ensemble de points sans longueur grêce à l'axiome du choix, on peut faire de même avec une dimension en plus. L'astuce utilisée dans le théorème de Banach-Tarski, c'est qu'en découpant la boule en morceaux sans volume, on peut les réassembler différemment de manière à retrouver un volume double du premier !
Bien que le sujet soit assez complexe, il existe quelques vidéos qui vulgarisent assez bien le problème. voici un des vidéos [https ://youtu.be/Cm0GvResyR4]

6 Le lemme de Baire et l'axiome du choix

Je ne fais ici que rappeler le lemme de Baire et sa démonstration la plus classique.

Théorème 6.1. *(Théorème de Baire) Soit X un espace métrique complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de X denses dans X. Alors $\Omega := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans X.*

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que pour tout ouvert O de E,$O \bigcap (\cap_{i\in\mathbb{N}} O_n)$ n'est pas vide.
Soit donc O un ouvert de E. O_1 étant dense dans E, $O \cap O_1 \neq \emptyset$ et on peut choisir x_0 E et $r_0 < 1$ tels que $B(x_0, r_0) \subset O \cap O_1 (B(x_0, r_0)$désigne la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r_0).
On construit par récurence une suite $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,$B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_{n/2}) \bigcap (\cap_{1\leq i\leq n+1} O_i)$et $r_n < 1/n$. Pour cela, supposons cette suite construite jusqu'a l'ordre n. O_{n+1} étant dense dans E, $B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ n'est pas vide et on peut choisir $x_{n+1} \in E$ et $r_{n+1} < 1/(n+1)$

tels que $B(x_{n+}1, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_{n/2}) \cap O_{n+1}$.On vérifie alors facilement que la suite $(x_n)n \in \mathbb{N}$ est de cauchy, donc qu'elle converge car E est complet. Sa limite l est dans $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l \in \overline{B(x_n, r_{n/2})} \subset B(x_n, r_n)$.
$\hookrightarrow$ montrer que l'existence d'une telle suite découle de l'axiome des choix dépendants.

Remarque

On a utilisé l'axiome des choix dépendants dans notre démonstration, mais cela ne prouve pas qu'il soit nécessaire de l'utiliser.

Question

la démonstration du lemme de Baire situe plus haut utilise-t-elle l'axiome du choix ?
Pour essayer à répondre à ce point , tenons compte la réflexion de Raphael Bomboy [Quand j'ai posé la question on ma souvent répondu non et on s'est généralement justifié par une explication du type " Pour construire la suite $(x_n; r_n)$ jusqu'à l'ordre n , on a besoin de ne faire qu'un nombre fini de choix , Or l'existence d'une fonction de choix se démontre trivialement quand X est fini ". C'est faux , et voici pourquoi . Le problème viens de ce qu'une définition par récurrence est quelque chose de délicat, bien plus délicat qu'une démonstration par récurrence . Plus précisément lorsque vous faites une définition par récurrence vous utilisez probablement sans s'en rendre compte comme je l'ai fait moi même pendant des années le résultat suivant :]

Proposition 6.1. *Soit E un ensemble et$F$ une fonction définie sur l'ensemble des couples $(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\})$ est un $n-$ uplet d'éléments de E (avec la convention q'un $0-$ uplet est l'en-*

semble vide).Alors il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* nß$\mathbb{N}^*$ $x_n = F(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\})$

Démonstration : -Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinctes vérifiant la condition ci-dessus. Soit n le plus petit entier tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .On a alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout $m < n$, d'où $x_n = F(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\}) = F(n, \{y_1, ..., y_{n-1}\}) = y_n$, une contradiction.

-Pour l'existence, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut construire un $n{+}1{-}uplet$ $\{x_0, ..., x_n\}$ tel que pour tout $m \leq n$ $x_m = F(m, \{x_1, ..., x_{m-1}\})$. Supposons que cela soit faux : soit n le plus petit entier tel qu'on ne peut construire de tel $n{+}1{-}uplet$. Il existe un $n{-}uplet$ $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ tel que pour tout $m \leq n$ $x_m = F(m, \{x_1, ..., x_{m-1}\})$; $\{x_1, ..., x_{n-1}, F(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\})\}$ est un $n + 1 - uplet$ satisfaisant la même condition d'où une contradiction.

De plus de même que ci-dessus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a unicité d'un tel $n - uplet$. C'est ce qui nous permet de conclure. En effet pour tout entiers m,n tels que $m < n$ on a alors $\{x_1, ..., x_m\}, \{y_1, ..., y_n\}$ sont les $m{+}1{-}uplets$ et $n + 1 - uplets$ définis comme ci-dessus $\{x_1, ..., x_m\} = \{y_1, ..., y_n\}$ on peut donc définir x_n comme étant le $n^(eme)$ élément commun tout les débuts de suite définis comme ci-dessus d'une longueur supérieure à n , et on vérifie facilement que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_n = F(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\})$.

Dans cette démonstration ,il est essentiel que pour un n donné x_n soit défini de manière unique à partir de n et $\{x_1, ..., x_{n-1}\}$. Sans cela vous pourrez bien définir pout tout n un $n - uplet$ tel que pour tout $m \leq n - 1$ $x_n = F(n, \{x_1, ..., x_{n-1}\})$., mais vous ne serez pas sur de l'unicité de ce $n - uplet$,et vous ne pourrez donc pas prendre l'union de tout ces débuts de suite pour former une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_m = F(n, \{x_1, ..., x_{m-1}\})$.

Dans la démonstration du lemme de Baire que nous avons donne, on na pas unicité du choix possible de x_n et r_n à chaque étape. Cette démonstration est-elle fausse ?. Pas de panique l'axiome du choix nous permet de nous en tirer En effet pour tout ouvert O, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des couples (x, r) tels que $B(x, r) \subset \bigcap(\cap_{1\leq i\leq n} O_i)$ et $r < n$ est non vide. L'axiome du choix assure donc l'existence dune fonction de choix f sur l'ensemble des ensembles de ce type ,et pour tout $n \in \mathbb{N}$,si on a construit la suite (x_n, r_n) jusqu'à l'ordre n on peut poser (x_{n+1}, r_{n+1})=$f(\{(x, r); B(x, r) \subset \bigcap(\cap_{1\leq i\leq n} O_i) etr < n\})$.

Remarque

Lorsque j'eu compris pourquoi le lemme de Baire utilisait l'axiome du choix ma grande surprise à été de découvrir que ce type de raisonnement - construire une suite par récurrence en choisissant chaque tape un élément parmi un ensemble non vide se retrouvait trés fréquemment. On l'utilise en particulier :

◇ Pour démontrer le téhorème des fermés emboités dans un Banach.

◇ Pour démontrer qu'un espace métrique satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si et seulement si il satisfait celle de Bolzano-Weierstrass.

◇...etc

Proposition 6.2. *Le lemme de Baire est une conséquence de l'axiome du choix dépendant.*

<u>Démonstration</u> Soit O un ouvert de E. On définit une relation binaire sur l'ensemble des couples (B, n) où $n \in \mathbb{N}$ et B est une boule ouverte de E de rayon inférieur à $1 < n$ par$(B(x, r), m)R(B(y, s), n)$ si et seulement si $n = m + 1$ et $B(y, s) \subset B(x, r/2) \bigcap(\cap_{1\leq i\leq n} O_i) \cap O$. Cette relation vérifie les conditions qui permettent d'appliquer l'axiome du choix dépendant et

la suite de boules $B(x_n, r_n)$ quelle définie est telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)/2), r_n \leq 1/n$,et $B(x_n, r_n) \subset O \bigcap(\cap_{1\leq i\leq n} O_i)$. On conclut alors de la maniére habituelle.

Remarque

Par contre l'axiome du choix dénombrable ne suffit pas à priori à démontrer le lemme de Baire en général ; en effet, dans la démonstration du lemme de Baire la fonction de choix qu'on utilise est définie sur un ensemble X indicié non pas par $\mathbb{N}$, mais par l'ensemble des couples (O, n) , où $n \in \mathbb{N}$ et O est un ouvert de E ; X n'est donc pas dénombrable .En revanche , si E est séparable , on peut démontrer le lemme de Baire dans E en utilisant le choix dénombrable : il suffit d'adapter la démonstration en prenant une base dénombrable d'ouverts.

7 La pertinence de l'axiome du choix

• On discute briévement le statut de l'axiome du choix et l'opportunité ou non de l'inclure dans les axiomes de base de la théorie des ensembles.
• Dégagé et énoncé explicitement au début du XXe siécle, l'axiome du choix a suscité des discussions innombrables où partisans et adversaires se sont parfois violemment opposés.
Aujourd'hui, les positions sont plus nuancées : on sait que (AC) n'est ni prouvable ni réfutable à partir des axiomes de (ZF), mais ceci ne dit rien quant à l'opportunité de l'adopter ou non comme axiome additionnel. Ce dernier point dépend surtout du type d'objet, effectif ou non, auquel on s'intéresse."*124 Logique (Patrick Dehornoy), IV.L'axiome du choix[version 2006-07]*"

7.1 Une question ambiguë.

• La question brutale « l'axiome du choix est-il vrai ? » n'est pas bien posée, et elle recouvre deux questions de natures complétement différentes, l'une objet d'une possible démonstration, l'autre seulement objet d'un possible consensus.
• Avant de pouvoir — éventuellement — répondre à la question de la vérité de l'axiome du choix, il convient de s'entendre sur ce que signifie la vérité d'un enoncé mathématique. Un énoncé peut certainement être tenu pour vrai s'il en existe une démonstration convaincante. Le probléme est qu'une démonstration ne procéde pas ex nihilo, mais consiste à dériver de nouvelles propriétés à partir d'autres qui soit ont été démontrées antérieurement, soit ont fait l'objet d'un consensus pour être prises comme point de départ axiomatique. Dés lors que le systéme (ZF) constitue une base possible pour la

théorie des ensembles, deux questions distinctes se posent donc en présence d'un énoncé tel que l'axiome du choix : $*$ Question 1 : L'axiome du choix — ou sa négation — est-il conséquence des autres principes de base, donc, dans le contexte présent, des axiomes du systéme (ZF) ?
$*$ Question 2 : Est-il opportun — ou, au contraire, déconseillé — d'inclure l'axiome du choix dans les principes de base des mathématiques ?

7.2 L'axiome du choix est-il une conséquence de (ZF) ?

• Ce sera un des buts de la suite de ce texte de démontrer que la réponse à cette question est négative, dans les deux directions — ou au moins d'en esquisser une démonstration.

Théorème 7.1. *(Théoréme du Godel, 1938) S'il est cohérent, le systéme (ZF) ne réfute pas l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de la négation de (AC)à partir des axiomes du systéme (ZF).*

Théorème 7.2. *(Théoréme du Cohen, 1963) S'il est cohérent, le systéme (ZF) ne démontre pas l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de (AC) à partir des axiomes du systéme (ZF).*

8 Est-il opportun d'adopter l'axiome du choix ?

• Les objets construits avec l'aide de l'axiome du choix n'ont pas la même qualité d'existence que ceux qui ont été définis explicitement. Sans s'interdire d'utiliser (AC), il est naturel de chercher à en éviter l'usage quand on le peut, et suivant les contextes, de mentionner explicitement les usages qu'on en fait.

• Les résultats précédents ne répondent en rien à la question de l'opportunité d'adopter ou non l'axiome du choix : tout au plus garantissent-ils que l'introduction de l'axiome du choix ou de sa négation ne risquent pas d'introduire de contradiction à la façon dont le ferait par exemple postuler l'existence d'un ensemble de tous les ensembles.

Ne reste alors qu'à discuter de l'opportunité d'accepter ou de refuser l'axiome du choix, notamment en interrogeant l'intuition et la pratique des mathématiciens. Le cœur de la discussion concerne la nature des objets mathématiques qu'on souhaite étudier. Ainsi qu'on l'a vu dans ce chapitre, l'intérêt de l'axiome du choix est de permettre sans difficulté la construction d'objets qu'il serait difficile ou impossible de spécifier complétement. On sent bien qu'une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un objet trés bizarre, et d'un tout autre type que l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ ou le nombre π. Est-il légitime de considérer qu'on a défini un objet mathématique lorsqu'on a répété (par la pensée) une infinité de fois une opération de choix qui, prise individuellement, ne pose pas de probléme ? Pour qui pense que les objets mathématiques doivent être explicitement définis, à la façon des objets qu'un ordinateur peut manipuler, alors la réponse sera probablement négative. Pour celui au contraire qui est prêt à considérer globalement tout objet que la pensée peut saisir même si une description exhaustive et effective fait défaut, alors la réponse sera tout aussi probablement positive. Les points de vue les plus divers ont été développés, reflétant les positions de leurs auteurs quant à ce que sont les objets mathématiques, à leur contingence ou à leur nécessité, à leur caractére absolu ou relatif, objectif ou subjectif. Ce débat-là n'est pas tranché, et ne le sera probablement jamais. Au demeurant, il est facile d'éviter les querelles en renonçant à l'espoir d'un systéme universel et en développant pragmatiquement plusieurs systémes reposant sur des bases différentes. Dans le cas de l'axiome du choix, cette solution est trés facile : elle correspond à mentionner explicitement tous les usages de l'axiome, ainsi que nous l'avons fait dans ce chapitre. De la sorte, le lecteur a le choix des principes de base qu'il souhaite adopter : s'il accepte l'axiome du choix, tous les théorèmes sont démontrés, s'il le refuse, il ne doit tenir pour démontrés que les théorèmes où l'axiome du choix n'est pas utilisé. L'un des intérêts des controverses sur l'axiome du choix aura été de pousser les mathématiciens à limiter, autant que faire se peut, les appels à un axiome moins indiscutable que les autres axiomes de (ZF).

On notera que l'utilisation, à un moment donné, de (AC) comme outil de démonstration pour un certain résultat n'entraêne pas que cet axiome soit indispensable : il peut exister une autre démonstration du même résultat, ou d'une variante de celui-ci, qui n'utilise pas (AC). Il serait donc regrettable et imprudent, même pour un mathématicien (ou un informaticien) exclusivement intéressé aux objets effectifs, de rejeter en bloc tous les résultats établis à partir de (AC). Un exemple typique est la riche collection de résultats de théorie de la mesure issus du paradoxe de Banach–Tarski , en particulier le théorème de Dougherty–Foreman dont on a dit que certaines versions ne font absolument pas appel à l'axiome du choix, lesquelles n'auraient probablement jamais été découvertes si on avait rejeté (AC) d'emblée.

8.1 Le système (ZFC)

. • Il est usuel d'adjoindre (AC) au système (ZF), parvenant ainsi au système (ZFC) qui est le cadre standard de la théorie des ensembles.

• Le point de vue de la théorie des ensembles est d'explorer une notion d'objet mathématique aussi large que possible, et en particulier de ne pas requérir de condition d'effectivité préalable. Il est donc cohérent d'adjoindre l'axiome du choix aux principes de base. Cette position correspond à l'option de construire un cadre trés général à l'intérieur duquel des théories plus spécifiques peuvent être développées le cas échéant. Dans une telle approche, il est naturel de considérer la forme la plus libérale, la moins contraignante d'existence pour les objets mathématiques. C'est ainsi qu'on a, avec l'axiome des parties, posé pour chaque ensemble A l'existence d'un ensemble de tous les sous-ensembles de A, sans préciser comment ces sous-ensembles sont délimités, quitte à introduire ultérieurement un cadre plus restrictif où une spécification plus précise des sous-ensembles est requise.

Définition 8.1. *(système (ZFC)) On note (ZFC)le système axiomatique obtenu en ajoutant au système de Zermelo–Fraenkel (ZF) l'axiome du choix (AC).*

• Sauf mention du contraire, le système (ZFC) est le cadre formel pour toute la suite de ce texte, c'est-à-dire qu'on s'autorise à utiliser tous les axiomes de ZFC pour justifier les constructions effectuées, mais seulement ceux-là : toute construction faisant appel à d'autres hypothèses de base que des énoncés démontrables à partir de (ZFC) sera mentionnée explicitement.

Références

[1] Raphael Bomboy, *L'axiome du choix*, Mars 1997.

[2] Vandana Bhandari , *L'axiome du choix*, 1994.

[3] Haïme Brésis , *ANALYSE FONCTIONNELLE, Théorie et applications.*