كلية العلوم و التقنيات فاس

aculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله

Université Sidi Mohamed Ben Abdellal

Master Mathématiques et Applications au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Centroïde étendu d'un anneau premier et quelques applications

Réalisé par: BOUCHANNAFA Karim

Encadré par: Pr. OUKHTITE Lahcen

Soutenu le 16 Janvier 2019

Devant le jury composé de:

- Pr. A. HILALI	FST Fès	Président
- Pr. L. OUKHTITE	FST Fès	Encadrant
- Pr. A. MAMOUNI	FST Errachidia	Examinateur

Année Universitaire 2018 / 2019

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

Dédicaces

Je dédie ce mémoire
A mes chers parents ma mère et mon père
Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.
A mes frères et sœurs.
A mes amies et mes camarades.
A toute personnes qui m'a encouragé ou aidé au long de mes études.
Nous dédions aussi ce travail à tous nos professeurs qui nous ont enseigné et à tous ceux qui nous sont chers.

Remerciement

Je voudrais, en premier lieu, exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant, Professeur Lahcen OUKHTITE, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs A. MAMOUNI, A. HILALI pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

Puis, je voulais transmettre mes remerciements à toutes les personnes qui nous ont assistées durant l'accomplissement de notre travail de recherche.

Enfin j'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

Table des matières

Introduction

La théorie des dérivations date de l'époque de Newton et Leibnitz (17ème siècle). Récemment, un grand intérêt a été accordé à l'étude des dérivations en algèbre. Cela est justifié par leurs applications dans plusieurs domaines scientifiques à savoir la physique quantique et les nouvelles technologies de l'information (cryptographie, codage,...). Par ailleurs, l'introduction des dérivations en algèbre non commutative est récente. Ainsi, cette théorie figure dans l'inventaire des outils utilisées dans l'étude de la théorie des corps et des algèbres différentielles.

Dans les années cinquante, la notion de la dérivation a connu un nouveau essor considérable surtout après le travail de Posner [33] où il a prouvé que, sur un anneau premier sans 2-torsion, si la compositions de deux dérivations est une dérivation, alors l'une d'entre elles est nulle. Ce résultat, connu par le premier théorème de Posner, est développé et généralisé aux différents contextes. Dans le même article [33], Posner a prouvé que l'existence d'une dérivation centralisante non nulle sur un anneau premier R force l'anneau à être commutatif. Ce résultat, connu par le second théorème de Posner, a attiré l'attention de plusieurs chercheurs qui se sont intéressés à l'étendre de différente contextes. Par exemple, dans [2], Awtar a étendu le second théorème de Posner au cas des dérivations centralisantes sur des idéaux de Jordan non nuls ou des idéaux de Lie non nuls stable par le carré. Ainsi, dans [31], Oukhtite a étendu le second théorème de Posner au contexte des anneaux avec involution.

Ce mémoire regroupe quatre chapitres couvrant quatre articles [10, 11, 12, 39] et une partie d'un livre [14]. Il incarne la notion du centroïde étendu d'un anneau premier et certaines applications à la théorie des dérivations et des applications additives. Ainsi, ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des définitions préliminaires et des rappels concernant des propriétés essentielles à propos des dérivations et des applications additives particulières.

Dans le deuxième chapitre nous étudions en détail la notion des anneaux quotients, à savoir anneaux centraux des quotients, anneaux classiques des fractions et anneaux des quotients de Martindale. Ainsi, nous construisons pour un anneau premier R son centroïde étendu qui est un corps contenant le centre de R.

Dans le troisième chapitre nous étudions la structure des applications centralisantes dans les anneaux premiers, ce qui permet décrire la forme attendue d'une application commutante sur un anneau premier [11, Thm. A]. Ainsi, la notion de dérivation joue également un rôle important dans ce chapitre. Pour cela nous initions l'étude d'un contexte plus général. Plus exactement, la condition où l'anneau devient commutatif [11, Thm. B].

Dans la première partie du quatrième chapitre nous considérons une condition impliquant les commutateurs (comme c'est le cas avec les applications commutantes), nous pouvons l'exprimer par des dérivations (intérieures). C'est-à-dire dans un anneau non-commutatif toute bidérivation est une bidérivation intérieure. Dans la deuxième partie nous présentons la forme des traces commutantes et des dérivations de Lie satisfaisant certaines propriétés sur les anneaux premiers.

Dans le cinquième chapitre nous examinons les identités satisfaites par les applications centralisatrices dans les anneaux semi-premiers. Plus précisément, nous étudions les cas particuliers des applications centralisatrices (i.e., les applications centralisatrices à gauche) introduites par Vukman dans [39].

Chapitre 1

Notions de bases

1.1 Anneaux premiers et semi-premiers

Tout au long de ce chapitre, R représentera un anneau associatif non nécessairement commutatif et Z son centre.

Définition 1.1.1. *Un anneau R est dit sans n-torsion, où $n \in \mathbb{N}^*$, si $na = 0$, avec $a \in R$, alors $a = 0$.*

Définition 1.1.2. *Soit R un anneau. Un idéal à gauche I (resp. à droite) de R est un sous-groupe additif tel que pour tout $a \in R$ et tout $x \in I$, on ait $ax \in I$ (resp. $xa \in I$). Un idéal bilatère de R est une partie de R qui est à la fois un idéal à gauche et à droite.*

Définition 1.1.3. *Soit K un anneau commutatif.*
Une algèbre sur K (ou K-algèbre) est un anneau $(R, +, \cdot)$ muni d'une application externe $\times : K \times R \to R$ telle que :

(1) $(R, +, \times)$ est un K-module.

(2) $\forall a, b \in R$, $\forall \alpha \in K$, $\alpha \times (a \cdot b) = (\alpha \times a) \cdot b = a \cdot (\alpha \times b)$.

Exemples.

1) Soit $n \geq 1$. L'ensemble $M_n(K)$ des matrices carrées sur K est une K-algèbre. On voit que $M_n(K)$ est commutative si, et seulement si, $n = 1$. En particulier, K est une K-algèbre commutative.
2) Soit M un K-module. Alors l'ensemble $End_K(M)$ des applications K-linéaires de M dans M est une K-algèbre.

Définition 1.1.4. *Soit R une K-algèbre. Une partie B de R s'appelle sous-algèbre si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) $1_R \in B$.

(2) B est un sous anneau de $(R, +, \cdot)$.

(3) B est un sous-module de K-module $(R, +, \times)$.

Exemples.

1) L'ensemble $D_n[K]$ des matrices diagonales d'ordre n sur K est une sous-algèbre de $M_n(K)$.
2) $K1_R = \{\alpha 1_r \mid \alpha \in K\}$ est une sous-algèbre de R.

Définition 1.1.5. *Soit R un anneau. L'anneau opposé de R, noté R°, est l'anneau constitué des mêmes éléments que R, ayant la même addition que R, et la multiplication $\cdot$ donnée par*

$$x \cdot y := yx,$$

où yx est le produit dans R.

Définition 1.1.6. *Un anneau R est dit un domaine si pour tout $a, b \in R$, $ab = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$. En d'autre terme, R est un domaine s'il n'a pas de diviseur de zéro à gauche ou à droite.*

Définition 1.1.7. *Un anneau R est dit simple si les seuls idéaux bilatères de R sont $\{0\}$ et R.*

Exemples.

1) Un corps est un anneau simple.
2) Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K alors $End_K(E)$ est simple.
3) Si R est un anneau simple alors $M_n(R)$ est simple.

Définition 1.1.8. *Un idéal P de R est dit premier si $P(\neq R)$ et pour tout $x, y \in R$, on a :*

$$xRy \subseteq P \Longrightarrow x \in P \text{ ou } y \in P.$$

De plus R est dit premier si l'idéal $\{0\}$ est premier.

Proposition 1.1.1. *Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est premier.*

(ii) *Pour tout $a, b \in R$, $aRb = \{0\}$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.*

(iii) *Pour tout I et J deux idéaux de R, $IJ = \{0\}$ implique $I = \{0\}$ ou $J = \{0\}$.*

Exemple 1.1.1. Si R est un anneau simple alors $M_n(R)$ est un anneau premier.

Lemme 1.1.1. *Un anneau commutatif est premier si et seulement si c'est un domaine.*

Preuve. Il suffit de voir que $ab = 0$ implique $aRb = 0$ si R est commutatif. □

Proposition 1.1.2. *Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R est semi-premier.*

(ii) *Pour tout $a \in R$, $aRa = \{0\}$ implique $a = 0$.*

(iii) *R n'a pas d'idéal nilpotent non nul.*

Remarque 1.1.1. Nous remarquons que dans un cas particulier de (ii), nous avons que chacune des conditions $aR = 0$ et $Ra = 0$ implique $a = 0$ si R est un anneau semi-prime.

Lemme 1.1.2. *Un anneau commutatif est semi-premier si et seulement s'il n'a pas d'éléments nilpotents non nuls.*

Remarque 1.1.2. Soit I un idéal non nul d'un anneau premier R. Si $a, b \in R$ sont tels que $aIb = 0$, alors $aRuRb = 0$ pour chaque $u \in I$. En utilisant (ii) dans la Proposition 1.1.1, il en résulte que $a = 0$ ou $b = 0$. Cela montre en particulier qu'un idéal d'un anneau premier est encore un anneau premier. De même, un idéal d'un anneau semi-premier est un anneau semi-premier.

Les relations suivantes entre les classes d'anneaux introduites jusqu'à présent sont évidentes à partir des définitions :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\textbf{simple}} \arrow[dr] & & \\
\boxed{\textbf{Anneau à division}} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\textbf{premier}} \arrow[r] & \boxed{\textbf{semi-premier}} \\
 & \boxed{\textbf{domaine}} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Les applications réciproques ne sont pas en général vraies.

1.2 Dérivations et applications centralisantes

Notations. Le commutateur d'éléments a et b dans R est l'élément

$$[a, b] := ab - ba,$$

appelé aussi le crochet de Lie. Évidemment, a et b commutent si et seulement si $[a, b] = 0$. Nous remarquons également que

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c] \quad \text{et} \quad [ab, c] = [a, c]b + a[b, c].$$

L'anti-commutateur d'éléments a et b dans R est défini par

$$a \circ b := ab + ba,$$

appelé aussi le produit de Jordan de a et b.

Définition 1.2.1. *Soit R un anneau. Une application additive $d : R \to R$ est appelée une dérivation si $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ pour tout $x, y \in R$.*

Exemples.

1) Soit F un corps avec $Car(F) = 0$. Rappelons que $End_F(F[\omega])$ désigne l'algèbre de tous les opérateurs linéaires de l'espace vectoriel $F[\omega]$. Définissons $D \in End_F(F[\omega])$ par

$$D(f(\omega)) = f'(\omega), \text{ où } f'(\omega) \text{ est la dérivée de } f(\omega).$$

L'opérateur différentiel D est une dérivation.

2) Soit $a \in R$ un élément fixé. L'application

$$\begin{array}{rl} d_a & : R \rightarrow R \\ & x \mapsto d_a(x) = [a, x] \end{array}$$

est une dérivation de R, appelée la dérivation intérieure de R associée à a. En effet, il est clair que d_a est additive, et on a

$$d_a(xy) = [a, xy] = [a, x]y + x[a, y] = d_a(x)y + xd_a(y), \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

3) Soit $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in Z_2 \right\}$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} d : & R & \longrightarrow & R \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une dérivation de R.

Proposition 1.2.1. *Toute dérivation d d'un anneau R se prolonge en une dérivation $\mathscr{D}$ de l'anneau $R \times R^{\circ}$.*

Preuve. Soit $d : R \to R$ une dérivation de R.

Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{D} : & R \times R^{\circ} & \longrightarrow & R \times R^{\circ} \\ & (x, y) & \longmapsto & (d(x), d(y)). \end{array}$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathscr{D}((a, b) + (u, v)) &= \mathscr{D}(a + u, b + v) \\ &= (d(a + u), d(b + v)) \\ &= (d(a) + d(u), d(b) + d(v)) \\ &= (d(a), d(b)) + (d(u), d(v)) \\ &= \mathscr{D}(a, b) + \mathscr{D}(u, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{D}((a, b)(u, v)) &= \mathscr{D}(au, vb) \\ &= (d(au), d(vb)) \\ &= (d(a)u + ad(u), d(v)b + vd(b)) \\ &= (d(a), d(b))(u, v) + (a, b)(d(u), d(v)) \\ &= \mathscr{D}(a, b)(u, v) + (a, b)\mathscr{D}(u, v). \end{aligned}$$

D'où, $\mathscr{D}$ est une dérivation.

Remarque 1.2.1. $\mathscr{D}_1(x, y) = (d(x), 0)$ et $\mathscr{D}_2(x, y) = (0, d(y))$ sont également des dérivations de $R \times R^{\circ}$.

Définition 1.2.2. *Une application additive $F : R \to R$ est une dérivation généralisée s'il existe une dérivation $d : R \to R$ telle que $F(xy) = F(x)y + xd(y)$, pour tout $x, y \in R$. Dans ce cas, on dit que F est une dérivation généralisée associée à la dérivation d.*

Exemples.

1) Si $F = id_R$ alors F est une dérivation généralisée associée à la dérivation nulle.

2) Soit d une dérivation de R alors $F = d + id_R$ est une dérivation généralisée associée à d. En effet,

$$\begin{aligned}
F(x+y) &= (d + id_R)(x+y) \\
&= d(x+y) + id_R(x+y) \\
&= d(x) + d(y) + id_R(x) + id_R(y) \\
&= (d + id_R)(x) + (d + id_R)(y) \\
&= F(x) + F(y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(xy) &= (d + id_R)(xy) \\
&= d(xy) + id_R(xy) \\
&= d(x)y + xd(y) + xy \\
&= (d(x) + x)y + xd(y) \\
&= ((d + id_R)(x))y + xd(y) \\
&= F(x)y + xd(y).
\end{aligned}$$

3) Soit $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Alors l'application F définie par :

$$\begin{array}{rccc}
F : & R & \longrightarrow & R \\
& \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix},
\end{array}$$

est une dérivation généralisée associée à la dérivation d ainsi définie par :

$$\begin{array}{rccc}
d : & R & \longrightarrow & R \\
& \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

• Montrons d'abord que d est une dérivation de R :

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) &= d\left(\begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ b+b' & c+c' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b+b' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \\
&= d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) &= d\left(\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ba' + cb' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ba' & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cb' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \\
&= d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

D'où, d est une dérivation de R.

• Montrons maintenant que F est une dérivation généralisée associée à d :

$$
\begin{aligned}
F\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) &= F\left(\begin{pmatrix} a + a' & 0 \\ b + b' & c + c' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a + a' + b + b' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a + b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a' + b' & 0 \end{pmatrix} \\
&= F\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right) &= F\left(\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ aa' + ba' + cb' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ aa' + ba' & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cb' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a + b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} \\
&= F\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

D'où, le résultat désiré.

Remarques.

1. Si $F = -d + id_R$ alors F est aussi est une dérivation de R associée à la dérivation $-d$.
2. Il est facile de voir que si d est une dérivation d'un anneau R, alors elle est une dérivation généralisée associée à elle même. La réciproque n'est pas toujours vraie comme montre l'exemple classique suivant :

Exemple 1.2.1. Soient R un anneau et $a, b \in R$. L'application

$$\begin{array}{rcl} F_{a,b} : R & \to & R \\ x & \mapsto & F_{a,b}(x) = ax + xb \end{array}$$

est une dérivation généralisée mais n'est pas une dérivation, appelée la dérivation intérieure généralisée. En effet, soient $x, y \in R$, alors nous avons

$$\begin{aligned} F_{a,b}(x+y) &= a(x+y) + (x+y)b \\ &= (ax+xb) + (ay+yb) \\ &= F_{a,b}(x) + F_{a,b}(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{a,b}(xy) &= a(xy) + (xy)b \\ &= (ax)y + (xb)y + x(yb - by) \\ &= F_{a,b}(x)y + xd_b(y), \end{aligned}$$

où, d_b est la dérivation intérieure associée à b.

Définition 1.2.3. *Une application additive $d : R \to R$ est une :*

1) dérivation de Jordan si

$$d(ab+ba) = d(a)b + ad(b) + d(b)a + bd(a) \quad \textit{pour tout } a, b \in R.$$

2) triple dérivation de Jordan si

$$d(aba) = d(a)ba + ad(b)a + abd(a) \quad \textit{pour tout } a, b \in R.$$

Définition 1.2.4. *Une application additive $d : R \to R$ est une :*

1) dérivation de Lie si

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \quad \textit{pour tout } x, y \in R.$$

2) triple dérivation de Lie si

$$d([[x,y],z]) = [[d(x),y],z] + [[x,d(y)],z] + [[x,y],d(z)] \qquad \textit{pour tout } x, y, z \in R.$$

Remarque 1.2.2. Toute dérivation d'un anneau R est une dérivation de Lie (resp. triple dérivation de Lie). En effet, soient $x, y, z \in R$, alors nous avons

$$\begin{aligned} d([x,y]) &= d(xy) - d(yx) \\ &= d(x)y + xd(y) - d(y)x - yd(x) \\ &= [d(x), y] + [x, d(y)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d([[x,y],z]) &= d([x,y]z) - d(z[x,y]) \\ &= ([d(x),y] + [x,d(y)])\, z + [x,y]d(z) \\ &\quad - d(z)[x,y] - z\,([d(x),y] + [x,d(y)]) \\ &= [[d(x),y] + [x,d(y)]\,, z] + [[x,y]\,, d(z)] \\ &= [[d(x),y],z] + [[x,d(y)],z] + [[x,y],d(z)]\,. \end{aligned}$$

Définition 1.2.5. *Un sous-groupe additif L d'un anneau R tel que $[x, y] \in L$ pour tout $x, y \in L$ est appelé un sous-anneau de Lie de R.*
De façon analogue, un sous-groupe additif J d'un anneau R tel que $x \circ y \in J$ pour tout $x, y \in J$ est appelé un sous-anneau de Jordan de R.

Définition 1.2.6. *Une application biadditive $B : R \times R \to R$ est appelée une bidérivation de R si elle est une dérivation dans chaque argument, c'est-à-dire pour chaque $y \in R$ les applications $x \mapsto B(x, y)$ et $x \mapsto B(y, x)$ son des dérivations.*

Exemple 1.2.2. Il est clair que pour chaque $\lambda \in Z$, l'application $(x, y) \mapsto \lambda[x, y]$ est une bidérivation appelée bidérivation intérieure.

Remarque 1.2.3. Il est facile de construire une bidérivation non intérieure dans les anneaux commutatifs. A titre d'exemple, si d est une dérivation non nulle d'un domaine commutatif R, alors $B : (x, y) \mapsto d(x)d(y)$ est un tel exemple. En effet, soient $x, x' \in R$, alors on a :

$$B(x + x', y) = d(x + x')d(y) = d(x)d(y) + d(x')d(y) = B(x, y) + B(x', y).$$

$$B(xx', y) = d(xx')d(y) = d(x)d(y)x' + xd(x')d(y) = B(x, y)x' + xB(x', y).$$

Ainsi, d'une manière symétrique on trouve que B est une dérivation dans le deuxième argument. Par conséquent, B est une bidérivation de R.

Dans les anneaux non-commutatifs, cependant il arrive assez souvent que toutes les bidérivations sont intérieures.

Définition 1.2.7. *Une application $B(.,.) : R \times R \to R$ est dite symétrique si $B(x, y) = B(y, x)$ est valable pour tout $x, y \in R$.*

Définition 1.2.8. *Une application $q : R \to R$ est dite la trace d'une application biadditive s'il existe une application biadditive $B : R \times R \to R$ telle que*

$$q(x) = B(x, x) \quad \textit{pour tout } x \in R.$$

Remarque 1.2.4. Il est évident que si B est une application symétrique alors la trace q de B satisfaite la relation

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + 2B(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

Définition 1.2.9. *Une application additive $T : R \to R$ est dite centralisatrice à gauche (resp. à droite) si $T(xy) = T(x)y$ (resp. $T(xy) = xT(y)$) est satisfaite pour tout $x, y \in R$.*
De plus, si T est centralisatrice à gauche et à droite on dit que T est centralisatrice.

Exemples.

1) Pour tout a élément fixé dans R. L'application $L_a(x) = ax$ (resp. $R_b(x) = xb$) est centralisatrice à gauche (resp. à droite).
2) Si F est une dérivation généralisée associée à la dérivation nulle alors $F(xy) = F(x)y$ pour tout $x, y‘ \in R$. Donc F est une application centralisatrice à gauche.

3) On considère $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Alors l'application additive T définie par :

$$\begin{array}{rccc} T : & R & \longrightarrow & R \\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est centralisatrice à gauche sur R. En effet,

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \right) &= T\left(\begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + cb' & cc' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \\ &= T\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où, le résultat désiré.

Définition 1.2.10. *Une application additive $T : R \to R$ est Jordan centralisatrice à gauche (resp. à droite) si $T(x^2) = T(x)x$ (resp. $T(x^2) = xT(x)$) est satisfaite pour tout $x \in R$.*

En 1957 E. G. Posner a introduit une nouvelle classe d'applications appelées "applications centralisantes" comme suit.

Définition 1.2.11. *Une application $f : R \to R$ est dite centralisante (resp. anti-centralisante) sur un sous-ensemble S de R si $[f(x), x] \in Z$ (resp. $f(x) \circ x \in Z$) pour tout $x \in S$. Dans le cas où, $[f(x), x] = 0$ pour tout $x \in S$, on dit que f est commutante sur S.*

Exemple 1.2.3. Soient A un anneau premier non-commutatif et $R = M_2(A)$.

On note par $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;/\; a, b \in A \right\}$ le sous-anneau de R. L'application f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f : & R & \longrightarrow & R \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

est une dérivation de R commutante sur S.

• Montrons d'abord que f est une dérivation de R :

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -b-b' \\ c+c' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b' \\ c' & 0 \end{pmatrix} \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -ab'-bd' \\ ca'+dc' & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -bc' & -bd' \\ ca' & cb' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc' & -ab' \\ dc' & -cb' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b' \\ c' & 0 \end{pmatrix} \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

D'où, f est une dérivation de R.

• Montrons que f est commutante sur S :

Soit $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in S$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
[f(X), X] &= f(X)X - Xf(X) \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_R.
\end{aligned}$$

D'où, le résultat souhaité.

Remarque 1.2.5. Si $f : R \to R$ est une application additive commutante sur R alors l'application $\Delta : (x, y) \mapsto [f(x), y]$ est une bidérivation de R. Plus précisément, est une dérivation intérieure dans chaque argument. En effet, il est clair que Δ est une application additive. Ainsi, par hypothèse nous avons

$$[f(x), x] = 0 \quad \text{pour tout } x \in R. \tag{1.1}$$

Ainsi, la linéarisation de la relation (1.1) donne immédiatement que

$$[f(x), x] + [f(x), y] + [f(y), x] + [f(y), y] = 0 \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

En utilisant à nouveau la relation (1.1), nous voyons que

$$[f(x), y] = [x, f(y)] \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

Par suite, à partir de cette dernière relation nous voyons que Δ est une bidérivation de R.

Chapitre 2

Anneaux quotients et centroïde étendu

M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*, University of Ljubljana and Maribor Slovenia, March 2014.

2.1 Introduction

En théorie des anneaux, un domaine commutatif peut être s'injecter dans un corps, son corps des fractions. De manière habituelle on apprend généralement ce fait simple et très utile lors de ses premières rencontres avec des algèbres abstraites. Il est donc naturel de rechercher ses analogies dans les anneaux non commutatifs. Le manque de commutativité engendre des difficultés considérables. Néanmoins, diverses généralisations de la construction du corps des fractions existent en théorie des anneaux non commutatifs. Nous en discuterons quelques-uns : anneaux centraux des quotients, anneaux classiques des fractions, et anneaux des quotients de Martindale. Bien que maintenant le problème est la non-commutativité, nous ne pouvons pas échapper entièrement au contexte commutatif. Les centres des anneaux construits seront d'une importance cruciale pour nous. Le soi-disant centroïde étendu d'un anneau premier, c'est-à-dire un corps défini comme centre de l'anneau de quotients de Martindale, nous permettra d'étendre une partie de la théorie des algèbres simples centrales aux anneaux premiers généraux. Nous allons également utiliser ce centroïde comme outil principal dans les chapitres suivants, i.e., nous donnerons quelques applications en représentations des applications centralisantes et commutantes.

2.2 Anneaux centraux des quotients

Une vision sur la construction du corps des fractions $\widehat{Z}$ d'un domaine commutatif Z montre que cela dépend fortement de la commutativité. Il n'y a pas de moyen évident de l'éviter. Cependant, dans cette première section, nous empruntons un chemin facile ; nous allons utiliser essentiellement même construction pour un anneau non commutatif R, mais ne permet que les éléments dans le centre $Z = Z(R)$ en tant que «dénominateur». Plus précisément, nous supposerons que les éléments non nuls de Z satisfont à la condition (évidemment nécessaire) de la prochaine définition, et élargissez R de manière à ce que ces éléments deviennent inversibles dans le nouveau anneau plus grand.

Définition 2.2.1. *Un élément non nul dans un anneau R est dit **régulier** s'il n'est pas un diviseur de zéro à gauche ou à droite.*

Construction de l'anneau central des quotients $Q_Z(R)$. Nous supposons que R est un anneau quelconque tel que son centre Z soit non nul, et que tous les éléments de $Z \setminus \{0\}$ soient réguliers ; en particulier, Z est un domaine commutatif. On définit une relation d'équivalence de $R \times Z \setminus \{0\}$ par :

$$(r, z) \sim (r', z') \quad \Longleftrightarrow \quad rz' = r'z.$$

On veut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. Il est visible que $\sim$ est réflexive et symétrique. Pour la transitivité, si $(r, z) \sim (r', z')$ et $(r', z') \sim (r'', z'')$ alors on a : $rz' = r'z$ et $r'z'' = r''z'$. On a donc, $(rz'' - r''z)z' = rz''z' - r'zz'' + r'z''z - r''zz' = 0$, on obtient alors une relation d'équivalence puisque z' est régulier. Soit rz^{-1} la classe d'équivalence de (r, z). Ainsi, $rz^{-1} = r'z'^{-1}$ si et seulement si, $rz' = r'z$; en particulier, $rz(zw)^{-1} = rw^{-1}$. Soit $Q_Z(R)$ désigne l'ensemble de toutes les classes d'équivalence, on définit l'addition et la multiplication par :

$$\begin{aligned} rz^{-1} + sw^{-1} &:= (rw + sz)(zw)^{-1}, \\ rz^{-1}.\ sw^{-1} &:= rs(zw)^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que les lois + et . sont biens définies, nous devons montrer que $(r, z) \sim (r', z')$ et $(s, w) \sim (s', w')$ entraine $(rw + sz, zw) \sim (r'w' + s'z', z'w')$ et $(rs, zw) \sim (r's', z'w')$. Mais c'est simple. Comme on pouvait s'y attendre, $Q_Z(R)$ équipé de ces opérations est un anneau.

Définition 2.2.2. *$Q_Z(R)$ **s'appelle anneau central des quotients** de R.*

Peu importe si R est unitaire ou non, $Q_Z(R)$ l'est. Son unité est $z_0 z_0^{-1}$, où z_0 est un élément arbitraire dans $Z \setminus \{0\}$. Le centre de $Q_Z(R)$, que nous désignons par $\widehat{Z}$, est facilement vu comme composé d'éléments de la forme zw^{-1} ; $z, w \in Z$, $w \neq 0$. Si $z \neq 0$, alors wz^{-1} est l'inverse de zw^{-1}. Cependant, $\widehat{Z}$ est un corps ; bien sûr, $\widehat{Z}$ n'est rien d'autre que le corps des fractions de Z. Tout anneau dans le centre est un corps peut être considéré comme une algèbre centrale sur son centre. Par suite, $Q_Z(R)$ est une algèbre centrale sur $\widehat{Z}$.

• On vérifie immédiatement que :

$$i : R \to Q_Z(R), \quad i(r) = (rz_0)z_0^{-1},$$

est une injection de R dans $Q_Z(R)$ (on remarque que la définition de i est indépendante du choix de l'élément $z_0 \in Z \setminus \{0\}$). Par suite, il convient d'identifier R avec sa copie isomorphe $i(R)$ dans $Q_Z(R)$, et donc on peut considérer R comme un sous anneau de $Q_Z(R)$. L'expression rz^{-1} jusqu'à présent utilisé comme une notation pour la classe d'équivalence, peut alors interprété comme le produit de $r \in R$ et l'inverse de $z \in Z \setminus \{0\}$. Chaque élément dans $Z \setminus \{0\}$ est inversible dans $Q_Z(R)$. Intuitivement, $Q_Z(R)$ est le plus petit anneau contenant R qui possède cette propriété. La proposition suivante le dit en termes plus formels, à travers une propriété universelle.

Proposition 2.2.1. *Soit T un anneau unitaire et $\varphi : R \to T$ est un homomorphisme tel que $\varphi(z)$ est inversible dans T pour chaque $z \in Z \setminus \{0\}$, alors φ peut être étendu d'une manière unique à un homomorphisme $\overline{\varphi} : Q_Z(R) \to T$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Q_Z(R) \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Preuve. Soit l'homomorphisme $\overline{\varphi}$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} \overline{\varphi} : Q_Z(R) & \longrightarrow & T \\ rz^{-1} & \longmapsto & \overline{\varphi}(rz^{-1}) := \varphi(r)\varphi(z)^{-1}. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que $\overline{\varphi}(rz^{-1}) := \varphi(r)\varphi(z)^{-1}$ est bien défini, et $\overline{\varphi}$ un homomorphisme qui étend φ.

• Montrons que $\overline{\varphi}$ est bien défini :

Soit $rz^{-1} = r'z'^{-1} \in Q_Z(R)$. On doit montrer que $\overline{\varphi}(rz^{-1}) = \overline{\varphi}(r'z'^{-1})$.

Comme on a $rz^{-1} = r'z'^{-1}$, alors $rz' = r'z$ de sorte que $\varphi(r)\varphi(z') = \varphi(r')\varphi(z)$. Or, comme $\varphi(z)$ et $\varphi(z')$ sont inversibles dans T pour chaque $z, z' \in Z \setminus \{0\}$, alors $\varphi(r)\varphi(z)^{-1} = \varphi(r')\varphi(z')^{-1}$. D'où, $\overline{\varphi}(rz^{-1}) = \overline{\varphi}(r'z'^{-1})$.

• Montrons que $\overline{\varphi}$ est un homomorphisme :

Soient $rz^{-1}, r'z'^{-1} \in Q_Z(R)$.

(i)

$$\overline{\varphi}(z_0 z_0^{-1}) = \varphi(z_0)\varphi(z_0)^{-1} = 1_T.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(rz^{-1} + r'z'^{-1}) &= \overline{\varphi}((rz' + r'z)(zz')^{-1}) \\ &= \varphi(rz' + r'z)\varphi(zz')^{-1} \\ &= (\varphi(r)\varphi(z') + \varphi(r')\varphi(z))(\varphi(z)\varphi(z'))^{-1} \\ &= \varphi(r)\varphi(z)^{-1} + \varphi(r')\varphi(z')^{-1} \\ &= \overline{\varphi}(rz^{-1}) + \overline{\varphi}(r'z'^{-1}). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(rz^{-1}r'z'^{-1}) &= \overline{\varphi}(rr'(zz')^{-1})\\
&= \varphi(rr')\varphi(zz')^{-1}\\
&= \varphi(r)\varphi(r')(\varphi(z)\varphi(z'))^{-1}\\
&= \varphi(r)\varphi(z)^{-1}\varphi(r')\varphi(z')^{-1}\\
&= \overline{\varphi}(rz^{-1})\overline{\varphi}(r'z'^{-1}).
\end{aligned}$$

D'où, $\overline{\varphi}$ est un homomorphisme.

• Montrons que $\overline{\varphi}$ est unique :
Soit l'homomorphisme canonique i défini par :

$$\begin{array}{rccl} i\ : & R & \longrightarrow & Q_Z(R) \\ & r & \longmapsto & i(r) = (rz_0)z_0^{-1}. \end{array}$$

On a l'injection i est bien définie, tel que $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$.

• Pour tout $r \in R$, on a :
$\overline{\varphi} \circ i(r) = \overline{\varphi}(i(r)) = \overline{\varphi}((rz_0)z_0^{-1}) = \varphi(rz_0)\varphi(z_0^{-1}) = \varphi(r)\varphi(z_0)\varphi(z_0)^{-1} = \varphi(r) \cdot 1_T = \varphi(r)$. D'où, $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$.

Supposons maintenant qu'il existe $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ tels que $\overline{\varphi} \circ i = \overline{\psi} \circ i = \varphi$.
Alors on a :
⋆ $\forall r \in R$, $\overline{\varphi}((rz_0)z_0^{-1}) = \overline{\varphi} \circ i(r) = \overline{\psi} \circ i(r) = \overline{\psi}((rz_0)z_0^{-1})$.
⋆ $\forall z \in Z \setminus \{0\}$, $\overline{\varphi}((z_0z_0^{-1})z^{-1}) = \varphi(z_0)\varphi(z_0)^{-1}\varphi(z)^{-1} = 1_T\varphi(z)^{-1} = \varphi(z)^{-1}$.

Par suite, il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(rz^{-1}) &= \overline{\varphi}((rz_0z_0^{-1})(z_0z_0^{-1}z^{-1}))\\
&= \overline{\varphi}(rz_0z_0^{-1})\overline{\varphi}((z_0z_0^{-1})z^{-1})\\
&= \overline{\psi}(rz_0z_0^{-1})\varphi(z)^{-1}\\
&= \overline{\psi}(rz_0z_0^{-1})(\overline{\psi} \circ i(z))^{-1}\\
&= \overline{\psi}(rz_0z_0^{-1})\overline{\psi}(zz_0z_0^{-1})^{-1}\\
&= \overline{\psi}(rz_0z_0^{-1})\overline{\psi}(z_0^{-1}z_0z^{-1})\\
&= \overline{\psi}((rz_0z_0^{-1})(z_0z_0^{-1}z^{-1}))\\
&= \overline{\psi}(rz^{-1}).
\end{aligned}$$

D'où, $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$. □

De plus, si φ est injective et que chaque élément de T peut s'écrire comme $\varphi(r)\varphi(z)^{-1}$, alors $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme. Le prochain théorème résume notre discussion jusqu'à maintenant.

Théorème 2.2.1. *Soit R un anneau tel que son centre Z soit non nul et que tous les éléments de $Z \setminus \{0\}$ sont réguliers. L'anneau $Q_Z(R)$ a les propriétés suivantes :*

(a) $Q_Z(R)$ est un anneau unitaire contenant R comme un sous-anneau.

(b) Chaque élément dans $Z \setminus \{0\}$ est inversible dans $Q_Z(R)$.

(c) Chaque élément dans $Q_Z(R)$ est de la forme rz^{-1}, où $r \in R$ et $z \in Z \setminus \{0\}$.

De plus, ces propriétés caractérisent $Q_Z(R)$ comme un isomorphisme.

Il est facile de voir que si R est un anneau premier avec un centre Z non nul, alors $Q_Z(R)$ existe (i.e., les éléments non nuls dans Z sont réguliers) et est un anneau premier.

Nous continuons avec des exemples. Les deux premiers sont simples, mais méritent d'êtres mentionnées.

Exemple 2.2.1. Si le centre d'un anneau unitaire R est un corps, alors $Q_Z(R) = R$.

Exemple 2.2.2. Si R est un domaine commutatif, alors $Q_Z(R)$ est le corps des fractions de R. ($Q_Z(R) = \widehat{Z}$)

Exemple 2.2.3. Nous affirmons que $Q_Z(M_n(\mathbb{Z})) \cong M_n(\mathbb{Q})$. Manifestement, $M_n(\mathbb{Q})$ a la propriété (a). Le centre de $M_n(\mathbb{Z})$ se compose des matrices de type nI avec $n \in \mathbb{Z}$. Donc, $M_n(\mathbb{Q})$ a la propriété (b), ainsi que (c).

Exemple 2.2.4. Une petite variation de l'exemple précédent : Si $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$, i.e., le sous anneau de $M_2(\mathbb{Z})$ constituée des matrices dans l'entrée $(1, 2)$ est un entier pair, alors $Q_Z(R) = M_2(\mathbb{Q})$. Ce que nous voulons dire ici, c'est que même si l'anneau est un peu "différent" son anneau central de quotients peut être "parfait".

Exemple 2.2.5. Si R est l'anneau des quaternions à coefficients entiers, $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_i \oplus \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_k$, alors $Q_Z(R)$ est l'anneau des quaternions à coefficients rationnels, $Q_Z(R) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}_i \oplus \mathbb{Q}_j \oplus \mathbb{Q}_k$. En effet, on a $Z(R) = \mathbb{Z}$ et la vérification des propriétés $(a) - (c)$ est immédiate.

Remarque 2.2.1. Certaines modifications simples de notre construction de $Q_Z(R)$ sont également importantes et peuvent être trouvés dans des manuels classiques, généralement sous le nom de "*localisation* (*centrale*)". Nous n'en aurons pas besoin, mais laissez-nous simplement savoir quels changements peuvent être apportés. Le rôle de $Z \setminus \{0\}$ peut être remplacé par tout sous-ensemble S de Z stable par multiplication, et au lieu d'exiger que les éléments de S soient réguliers, on définit la relation d'équivalence $\sim$ dans $R \times S$ comme suit :

$$(r, z) \sim (r', z') \quad \iff \quad (rz' - r'z)z'' = 0 \quad \text{pour un certain } z'' \in S.$$

2.3 Anneaux classiques des fractions

Étant donné un anneau R, est-il possible de construire un anneau plus grand Q tel que tous les éléments réguliers dans R, non seulement ceux du centre, sont inversibles dans Q ? Plus précisément, pouvons-nous construire Q de telle sorte que le Théorème 2.2.1 avec l'ensemble des éléments réguliers jouant le rôle de $Z \setminus \{0\}$ est valable pour Q ? La réponse n'est pas aussi simple que pour l'anneau central de quotients. C'est certainement positif pour certains anneaux (pour un domaine commutatif, par exemple). Mais cela peut aussi être négatif, comme nous le verrons.

Précisons quelle anneau Q nous souhaitons avoir. Pour éviter les trivialités, nous supposons implicitement que nos anneaux contiennent au moins un élément régulier.

Définition 2.3.1. *Soit R un anneau et S l'ensemble de tous les éléments réguliers de R. Un anneau Q est appelé* ***anneau classique des fractions à droite*** *de R s'il possède les propriétés suivantes :*

(a) Q est un anneau unitaire contenant R comme un sous-anneau.

(b) Chaque élément dans S est inversible dans Q.

(c) Chaque élément dans Q est de la forme rs^{-1}, où $r \in R$ et $s \in S$.

Il est clair que les éléments de R qui ne sont pas réguliers ne peuvent pas être inversés dans un aucun anneau plus grand. L'existence d'un anneau classique des fractions à droite de R est donc la meilleure possibilité que nous espérons si nous souhaitons rendre autant d'éléments dans R inversibles que possible.

L'anneau classique des fractions à gauche de R est défini de manière analogue, on se substitue rs^{-1} par $s^{-1}r$ dans (c). Cependant, jusqu'à la fin de la section, nous ne considérerons que les anneaux classiques des fractions à droite.

Exemple 2.3.1. Soit R l'un des anneaux des Exemples 2.2.3-2.2.5, c'est-à-dire, $M_n(Z)$, $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$, ou $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_i \oplus \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_k$. Dans ce cas, on a donc, l'anneau central de quotients $Q_Z(R)$ est aussi un anneau classique des fractions à droite de R.

Exemple 2.3.2. Si chaque élément régulier de R est déjà inversible, alors R est son propre anneau classique des fractions à droite.

Supposons que R ait un anneau classique des fractions à droite Q. Prenons $r \in R$ et $s \in S$, nous aurons $s^{-1}r \in Q$ par (a) et (b), et donc par (c) il existe $r_1 \in R$ et $s_1 \in S$ tels que $s^{-1}r = r_1 s_1^{-1}$. En multipliant par s à gauche et par s_1 à droite on obtient $rs_1 = sr_1$. Ainsi, ce qui suit est valable :

$$rS \cap sR \neq \emptyset \qquad \text{pour chaque} \quad r \in R \text{ et } s \in S. \tag{2.1}$$

L'objectif principal de cette section doit prouver que (2.1) est également une condition suffisante, non seulement nécessaire, pour un anneau R possède un anneau classique des fractions à droite. Ce résultat est essentiellement dû à O. Ore ; plus précisément, il l'a prouvé, en 1931, pour le cas particulier où R est un domaine.

Ainsi, la condition (2.1) est appelée la **condition de Ore à droite**.

Construction de l'anneau classique des fractions à droite $Q_{rc}(R)$. Soit R un anneau satisfaisant la condition de Ore à droite (2.1). Notons par $\mathscr{J}$ l'ensemble de tous les idéaux à droites de R qui contient au moins un élément régulier. L'idéal à droite peut être considéré comme un $R-$module à droite. Considérons l'ensemble de toutes les paires (f, I), où $I \in \mathscr{J}$ et $f : I \to R$ est un homomorphisme de $R-$module à droite. Définissons une relation d'équivalence sur cet ensemble par : $(f, I) \sim (g, J)$ si f et g coïncide sur un certain $K \subseteq I \cap J$. En outre, pour vérifier la transitivité, il suffit de remarquer que $I_1 \cap I_2 \in \mathscr{J}$, si les deux $I_1, I_2 \in \mathscr{J}$. Prouvons donc ceci. Prenons $s_i \in I_i \cap S,\ i = 1, 2$, et utilisons (2.1) pour trouver $s \in S$ et $r \in R$ tel que $s_1 s = s_2 r$. Donc, $I_1 \cap I_2$ contient un élément régulier, à savoir $s_1 s$, donc il appartient à $\mathscr{J}$.

Nous écrivons $[f, I]$ pour la classe d'équivalence déterminée par (f, I). Soit $Q_{rc}(R)$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence muni des opérations d'addition et de multiplication définies par :

$$[f_1, I_1] + [f_2, I_2] := [f_1 + f_2, I_1 \cap I_2],$$
$$[f_1, I_1].[f_2, I_2] := [f_1 f_2, f_2^{-1}(I_1)].$$

Nous devons prouver que ces opérations sont biens définies. Tout d'abord, $f_2^{-1}(I_1) = \{x \in I_2 \mid f_2(x) \in I_1\}$ est bien dans $\mathscr{J}$. En effet, par (2.1) nous en déduisons étant donné $s_i \in I_i \cap S,\ i = 1, 2$, il existe $s \in S$ et $r \in R$ tels que $f_2(s_2)s = s_1 r$, ceci montrent que l'idéal à droite $f_2^{-1}(I_1)$ contient un élément régulier, à savoir $s_2 s$. Supposons maintenant que $(f_1, I_1) \sim (g_1, J_1)$ et $(f_2, I_2) \sim (g_2, J_2)$. Il existe K_i tels que $K_i \subseteq I_i \cap J_i$ et $f_i = g_i$ dans $K_i,\ i = 1, 2$. Par conséquent, $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ dans $K_1 \cap K_2 \in \mathscr{J}$ et donc, $(f_1 + f_2, I_1 \cap I_2) \sim (g_1 + g_2, J_1 \cap J_2)$, ce qui prouve que l'addition est bien définie. Ce qui concerne la multiplication, notons que $f_1 f_2 = g_1 g_2$ dans $f_2^{-1}(K_1) \cap K_2 \in \mathscr{J}$ et donc, $(f_1 f_2, f_2^{-1}(I_1)) \sim (g_1 g_2, g_2^{-1}(J_1))$. Ainsi, les deux opérations sont donc biens définies. Par suite, $Q_{rc}(R)$ est un anneau avec l'élément nul $[0, R]$ et l'élément unité $[id_R, R]$.

Cette construction est l'exemple de base de la soi-disant "localisation non commutative". Sa version générale considère un ensemble arbitraire stable par multiplication au lieu de l'ensemble de tous les éléments réguliers. Cela ne rend pas la construction sensiblement plus compliqué, mais nous n'entrerons pas dans cette affaire. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat énoncé ci-dessus.

Théorème 2.3.1 (Théorème de Ore). *Un anneau R a un anneau classique des fractions à droite si et seulement si, R satisfait la condition de Ore à droite.*

Preuve. On va prouver seulement le sens indirect. Supposons donc que R satisfait la condition de Ore à droite et montrons que $Q_{rc}(R)$ est un anneau classique des fractions à droite.

• Montrons que $Q_{rc}(R)$ contenant R comme un sous anneau :
Nous injectons R dans $Q_{rc}(R)$, via l'homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} i \ : R & \longrightarrow & Q_{rc}(R) \\ r & \longmapsto & i(r) = [L_r, R]; \end{array}$$

ici, L_r représente l'application de multiplication à gauche $r \mapsto rx$. Laissez nous seulement vérifier l'injectivité. Si $[L_r, R] = [0, R]$, alors $L_r = 0$ dans certain $I \in \mathscr{J}$. Puisque I contient un élément régulier, il s'ensuit que $r = 0$. D'où, l'injectivité de i.

• Montrons que chaque élément dans S est inversible dans Q_{rc} :
Soit $s \in S$. Alors l'application f_s définie par :

$$\begin{array}{rcl} f_s \ : sR & \longrightarrow & R \\ sx & \longmapsto & f_s(sx) = x, \end{array}$$

est bien définie. De plus, f_s est un homomorphisme de $R-$module à droite. Notons que $sR \in \mathscr{J}$ puisque $s^2 \in sR \cap S$. Par suite, il est facile voir que $[f_s, sR]$ est l'inverse de $i(s)$. En effet,

$$[f_s, sR].i(s) = [f_s, sR].[L_s, R] = [f_s L_s, L_s^{-1}(sR)],$$

où $L_s^{-1}(sR) = \{x \in R \mid L_s(x) \in sR\} \subseteq R$.

$* \ \forall x \in R, \quad f_s L_s(x) = f_s(L_s(x)) = f_s(sx) = x$. D'où, $f_s L_s = id_R$.
En particulier, $i(s)$ est inversible.

• Montrons que chaque élément dans $Q_{rc}(R)$ est de la forme rs^{-1}, où $r \in R$ et $s \in S$:
Maintenant, prenons un élément arbitraire $[f, I] \in Q_{rc}(R)$ et choisissons $s \in I \cap S$. On va définir $r := f(s) \in R$. Nous avons $f(sx) = f(s)x = rx = L_r f_s(sx)$ pour tout $x \in R$. Par suite, on aura :

$$[f, I] = [f, sR] = [L_r f_s, sR] = [L_r, R].[f_s, sR] = i(r).i(s)^{-1}.$$

En identifiant R avec sa copie $i(R)$ on voit donc que $Q_{rc}(R)$ a toutes les propriétés désirés. $\square$

L'anneau $Q_{rc}(R)$ a une propriété universelle, analogue à celle satisfaite par $Q_Z(R)$ (voir la Proposition 2.2.1).

Proposition 2.3.1. *Soit R un anneau satisfaisant la condition de Ore à droite. Si T un anneau unitaire et $\varphi : R \to T$ est un homomorphisme tel que $\varphi(s)$ est inversible dans T pour chaque élément régulier $s \in R$, alors φ peut être étendu d'une manière unique à un homomorphisme $\overline{\varphi} : \mathrm{Q}_{rc}(R) \to T$.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Q_{rc}(R) \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Preuve. Prenons $[f, I] \in Q_{rc}(R)$. Choisissons $s \in I \cap S$ et soit l'homomorphisme $\overline{\varphi}$ défini par :

$$\begin{array}{rccl} \overline{\varphi}: & Q_{rc}(R) & \longrightarrow & T \\ & [f, I] & \longmapsto & \overline{\varphi}([f, I]) := \varphi(f(s))\varphi(s)^{-1}. \end{array}$$

On peut immédiatement vérifier que $\overline{\varphi}(i(r)) = \varphi(r)$. En effet,

$$\overline{\varphi}(i(r)) = \overline{\varphi}([L_r, R]) = \varphi(L_r(s))\varphi(s)^{-1} = \varphi(rs)\varphi(s)^{-1} = \varphi(r)1_T = \varphi(r).$$

D'où, $\overline{\varphi}$ s'étend φ.

• Montrons que $\overline{\varphi}$ est bien défini :
Supposons donc que $(f, I) \sim (g, J)$. Notre objective est de montrer que

$$\varphi(f(s))\varphi(s)^{-1} = \varphi(g(t))\varphi(t)^{-1} \text{ pour chaque } t \in J \cap S.$$

Soit $K \in \mathscr{J}$ tel que $K \subseteq I \cap J$ et $f = g$ dans K. Il suffit de montrer que $\varphi(f(s))\varphi(s)^{-1} = \varphi(f(u))\varphi(u)^{-1}$ valable pour $u \in K \cap S$. À savoir, par analogie nous allons ensuite aussi que $\varphi(g(t))\varphi(t)^{-1} = \varphi(g(u))\varphi(u)^{-1}$, et donc la conclusion souhaitée suit de $f(u) = g(u)$. Par régularité de s et u nous avons $sR, uR \in \mathscr{J}$, et donc $sR \cap uR \mathscr{J}$. Il existe donc, $x, y \in R$ tels que $v := sx = uy \in S$. Puisque $\varphi(s)$ et $\varphi(v)$ sont inversibles dans T par hypothèse, alors $v = sx$ donne $\varphi(s)^{-1} = \varphi(x)\varphi(v)^{-1}$. Par conséquent,

$$\varphi(f(s))\varphi(s)^{-1} = \varphi(f(s))\varphi(x)\varphi(v)^{-1} = \varphi(f(s)x)\varphi(v)^{-1} = \varphi(f(v))\varphi(v)^{-1}.$$

De manière symétrique, pour $v = uy$ nous déduisons que

$$\varphi(f(u))\varphi(u)^{-1} = \varphi(f(v))\varphi(v)^{-1}.$$

Par suite, par comparaison nous arrivons à

$$\varphi(f(s))\varphi(s)^{-1} = \varphi(f(u))\varphi(u)^{-1}.$$

Ainsi, on trouve le résultat souhaité.

• Montrons que $\overline{\varphi}$ est un homomorphisme :

(i) Soit $s \in S$. Alors on a :

$$\overline{\varphi}([id_R, R]) = \varphi(id_R(s))\varphi(s)^{-1} = \varphi(s)\varphi(s)^{-1} = 1_T.$$

(ii) Soient $[f_1, I_1], [f_2, I_2] \in Q_{rc}(R)$. L'additivité de $\overline{\varphi}$ est clair. En effet,

prenons $s \in I_i \cap S,\ i = 1, 2$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}([f_1, I_1] + [f_2, I_2]) &= \overline{\varphi}([f_1 + f_2, I_1 \cap I_2]) \\ &= \varphi((f_1 + f_2)(s))\varphi(s)^{-1} \\ &= \varphi(f_1(s) + f_2(s))\varphi(s)^{-1} \\ &= (\varphi(f_1(s)) + \varphi(f_2(s)))\varphi(s)^{-1} \\ &= \varphi(f_1(s))\varphi(s)^{-1} + \varphi(f_2(s))\varphi(s)^{-1} \\ &= \overline{\varphi}([f_1, I_1]) + \overline{\varphi}([f_2, I_2]). \end{aligned}$$

(iii) Fixons $s_1 \in I_1 \cap S$. Par définition nous avons :

$$\overline{\varphi}([f_1, I_1][f_2, I_2]) = \overline{\varphi}([f_1 f_2, f_2^{-1}(I_1)]) = \varphi(f_1 f_2(s_2))\varphi(s_2)^{-1}$$

où s_2 est un élément arbitraire dans $f_2^{-1}(I_1) \cap S$; puisque $[f_1, I_1] = [f_1, s_1 R]$ nous pouvons choisir $s_2 \in f_2^{-1}(s_1 R)$. Ainsi, $f_2(s_2) = s_1 x$ pour tout $x \in R$. Par conséquent, $\varphi(x) = \varphi(s_1)^{-1}\varphi(f_2(s_2))$, ce qui donne

$$\varphi(f_1 f_2(s_2)) = \varphi(f_1(s_1)x) = \varphi(f_1(s_1))\varphi(x) = \varphi(f_1(s_1))\varphi(s_1)^{-1}\varphi(f_2(s_2)).$$

Ceci implique facilement que, $\overline{\varphi}([f_1, I_1][f_2, I_2]) = \overline{\varphi}([f_1, I_1])\overline{\varphi}([f_2, I_2])$.

Par suite, $\overline{\varphi}$ est un homomorphisme s'étendant φ.

L'unicité est clair à cause de la condition (c) de Définition 2.3.1. □

Corollaire 2.3.1. *Si un anneau satisfait la condition de Ore à droite, alors son anneau classique des fractions à droite est unique et est un isomorphisme.*

Remarque 2.3.1. Bien entendu, des résultats similaires sont valables pour l'anneau classique des fractions à gauche. On définit la condition de Ore à gauche comme $Sr \cap Rs \neq \emptyset$ pour tout $r \in R$ et $s \in S$, et pour la construction de l'anneau classique des fractions à gauche $Q_{lc}(R)$ de R en utilisant les idéaux à gauche et les applications de multiplication à droite pour définir l'injection canonique. La Proposition 2.3.1 simultanément avec son analogue à gauche implique facilement que si R ait à la fois un anneau classique des fractions à gauche et à droite, alors ils sont isomorphes. En d'autres termes, si les conditions de Ore à gauche et à droite sont réalisées, alors $Q_{rc}(R) \cong Q_{lc}(R)$.

2.4 Anneaux des quotients de Martindale

Dans cette section, nous faisons un autre pas en avant dans l'étude des anneaux de quotients ou peut-être un pas en arrière. A savoir, la construction suivante est similaire à, et en fait légèrement plus simple que la construction de $\mathrm{Q}_{rc}(R)$. D'une façons général, nous allons juste remplacer le rôle des idéaux droits contenant des éléments réguliers par les idéaux bilatéraux (plus faciles à manipuler) non nuls. Malgré les similitudes techniques, la philosophie derrière ces deux constructions est différente. Le but du suivant n'est pas de rendre les éléments réguliers inversibles, mais simplement de fournir un anneau plus grand qui peut être utilisé comme un outil pour résoudre les problèmes concernant l'anneau original. Encore, le corps des fractions d'un domaine commutatif sert ici de prototype aussi. Nous supposerons que nos anneaux sont premiers. C'est un cadre naturel ; un anneau commutatif est un domaine si et seulement s'il est premier, et le rôle des anneaux premiers parmi les anneaux généraux est souvent parallèle au rôle des domaines parmi les anneaux commutatifs. Avec un petit effort supplémentaire, nous pourrions traiter plus d'anneaux semi-premier généralement, mais nous nous en tiendrons à la situation de l'anneau premier classique, telle qu'elle est considérée dans l'œuvre séminale de W. S. Martindale depuis 1969.

Construction d'anneau des quotients de Martindale à droite $Q_r(R)$. Soit $R \neq 0$ un anneau premier. L'ensemble $\mathscr{J}$ de tous les idéaux non nuls de R, stable par multiplication et donc également sous des intersections finies. Nous donnons l'ensemble de toutes les paires (f, I), où $I \in \mathscr{J}$ et $f : I \to R$ un homomorphisme de $R-$module à droite, par la relation suivante, que l'on voit aisément comme étant une équivalence : $(f, I) \sim (g, J)$ si et seulement si, f et g coïncident sur un certain $K \in \mathscr{J}$ tel que $K \subseteq I \cap J$, on écrit $[f, I]$ pour la classe d'équivalence déterminée par (f, I), et on note par $Q_r(R)$ l'ensemble des classes d'équivalence, équipé d'addition et de multiplication :

$$[f_1, I_1] + [f_2, I_2] := [f_1 + f_2, I_1 \cap I_2],$$
$$[f_1, I_1].[f_2, I_2] := [f_1 f_2, I_2 I_1]$$

(notez que $f_1 f_2$ est bien défini sur $I_2 I_1$ puisque $f_2(I_2 I_1) = f_2(I_2) I_1 \subseteq I_1$). Il est facile de vérifier que ces opérations sont biens définies. En effet, supposons que $(f_1, I_1) \sim (g_1, J_1)$ et $(f_2, I_2) \sim (g_2, J_2)$ i.e., il existe $K_i \in \mathscr{J}$ tel que $K_i \subseteq I_i \cap J_i$ et $f_i = g_i$ sur K_i, $i = 1, 2$. Alors $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ dans $K_1 \cap K_2 \in \mathscr{J}$ et $f_1 f_2 = g_1 g_2$ dans $K_2 K_1 \in \mathscr{J}$. Par conséquent, $(f_1 + f_2, I_1 \cap I_2) \sim (g_1 + g_2, J_1 \cap J_2)$ et $(f_1 f_2, I_2 I_1) \sim (g_1 g_2, J_2 J_1)$. On vérifie immédiatement que $Q_r(R)$ est un anneau avec l'élément nul $[0, R]$ et d'unité $[id_R, R]$.

Définition 2.4.1. *$Q_r(R)$ s'appelle **l'anneau des quotients de Martindale à droite** de R.*

L'anneau des quotients de Martindale à gauche $Q_l(R)$ est construit de manière analogue par l'homomorphisme de $R-$module à gauche. En général, $Q_r(R) \ncong Q_l(R)$.

Théorème 2.4.1. *Soit $R \neq 0$ un anneau premier, et soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des idéaux non nuls de R. L'anneau $Q_r(R)$ possède les propriétés suivantes :*

(a) $Q_r(R)$ est un anneau unitaire contenant R comme un sous anneau.

(b) Pour tout $q \in Q_r(R)$ il existe $I \in \mathscr{J}$ tel que $qI \subseteq R$.

(c) Pour tout $q \in Q_r(R)$ et $I \in \mathscr{J}$, $qI = 0$ implique $q = 0$.

(d) Si $I \in \mathscr{J}$ et $f : I \to R$ un homomorphisme de $R-$module à droite, alors il existe $q \in Q_r(R)$ tel que $f(x) = qx$ pour tout $x \in I$.

De plus, ces propriétés caractérisent $Q_r(R)$ comme un isomorphisme.

Preuve. Nous savons déjà que $Q_r(R)$ est un anneau unitaire. Notons que :

$$i : R \to Q_r(R), \quad i(r) = [L_r, R],$$

où L_r est une application de multiplication à gauche, est une injection de R dans Q_r (injectivité de i découle de la primalité de R). Identifions R avec sa copie isomorphe $i(R)$ nous pouvons considérer R comme un sous anneau de $Q_r(R)$, ce qui achève la preuve de (a). Prenons $q = [f, I] \in Q_r(R)$. Pour chaque $x \in I$ nous avons

$$qx = [f, I][L_x, R] = [fL_x, RI] = [L_{f(x)}, R] = f(x) \in R.$$

Par conséquent, $qI \subseteq R$, ce qui prouve (b). De plus, dès que $qI = 0$ donne $f(I) = 0$ et donc, $q = [f, I] = 0$. Si I' est un autre membre de $\mathscr{J}$ et $qI' = 0$, alors aussi $(qI)I' \subseteq qI' = 0$. Puisque R est un anneau premier et $qI \subseteq R$, cela donne $qI = 0$, et donc $q = 0$. Ainsi, (c) est prouvé. La vérification de (d) est également facile : Si $I \in \mathscr{J}$ et $f : I \to R$ est un homomorphisme de $R-$module à droite, alors, comme noté au début de ce paragraphe, $q := [f, I] \in \mathrm{Q}_r(R)$ satisfait $f(x) = qx$ pour tout $x \in I$.

Soit Q un anneau quelconque de propriétés $(a)-(d)$. Prenons $q \in \mathrm{Q}$. D'après (b) il existe $I \in \mathscr{J}$ tel que $qI \subseteq R$. Par conséquent, on peut définir l'homomorphisme du $R-$module à droite $f : I \to R$ tel que $f(x) = qx$ pour tout $x \in I$. Si $I' \in \mathscr{J}$ vérifie aussi $qI' \subseteq R$, alors f coïncide avec $f' : I' \to R,\ f(x') = qx'$, dans $I \cap I' \in \mathscr{J}$. Nous voyons donc que l'application

$$\phi : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}_r(R), \quad \phi(q) = [f, I],$$

est bien définie. De plus, il est facile de vérifier que ϕ est un homomorphisme d'anneau. L'injectivité de ϕ devient de (c), et la surjectivité vient par (d). Donc, $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}_r(R)$. □

D'autres propriétés de $\mathrm{Q}_r(R)$ peuvent être extraites à partir des propriétés de base $(a) - (d)$. Par exemple, (c) peut être étendu comme suit.

Lemme 2.4.1. *Pour tout $q_1, q_2 \in \mathrm{Q}_r(R)$ et $I \in \mathscr{J}$, $q_1 I q_2 = 0$ implique $q_1 = 0$ ou $q_2 = 0$. En conséquence, $\mathrm{Q}_r(R)$ est un anneau premier.*

Preuve. Dans (b) on peut choisir $I_i \in \mathscr{J}$ tel que $q_i I_i \subseteq R,\ i = 1, 2$. On peut conclure à partir de $(q_1 I_1) I (q_2 I_2) \subseteq (q_1 I q_2) I_2 = 0$ que $q_1 I_1 = 0$ ou $q_2 I_2 = 0$ (voir la Remarque 1.1.2). D'après (c) on obtient donc, $q_1 = 0$ ou $q_2 = 0$. □

Pour référence ultérieure, nous affirmons une extension simple de (b).

Lemme 2.4.2. *Étant donné $q_1, q_2, ..., q_n \in \mathrm{Q}_r(R)$ il existe $I \in \mathscr{J}$ tel que $q_i I \subseteq R$, $i = 1, ..., n$.*

Preuve. D'après (b) pour chaque i il existe $I_i \in \mathscr{J}$ tel que $q_i I_i \subseteq R$. Donc, si on prend $I := I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$, on a bien que $I \in \mathscr{J}$. D'où, le résultat souhaité. □

Exemple 2.4.1. Si R est un domaine commutatif alors comme déjà indiqué, $\mathrm{Q}_r(R)$ est isomorphe au corps des quotients $\mathrm{Q}_Z(R)$ de R. Nous devons montrer que $\mathrm{Q}_Z(R)$ a les propriétés $(a)-(d)$. Seulement (d) n'est pas tout à fait évident. Par conséquent, supposons que $f : R \to R$ est un homomorphisme de $R-$module à droite. Prenons $a(\neq 0) \in I$. Nous avons alors

$$f(x)a = f(xa) = f(ax) = f(a)x \text{ pour tout } x \in I,$$

et donc, $f(x) = qx$ où $q := f(a)a^{-1} \in \mathrm{Q}_Z(R)$.

Ainsi, pour un domaine commutatif R, nous avons $\mathrm{Q}_r(R) \cong \mathrm{Q}_{rc}(R) \cong \mathrm{Q}_Z(R)$. La même chose est vraie si R est l'un des anneaux des Exemples 2.2.3-2.2.5, i.e. $M_n(\mathbb{Z})$, $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$, ou $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_i \oplus \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_k$. Cependant, on peut aussi le prouver à partir de zéro. Par contre, on peut appliquer [14, Corollaire 7.61].

Exemple 2.4.2. Si R est un anneau simple unitaire, alors $\mathrm{Q}_r(R) = R$. En effet, R a évidemment les propriétés $(a) - (c)$, et vérifions qu'il satisfait également (d) : Si $f : R \to R$ est un homomorphisme de $R-$module à droite, alors $f(x) = f(1x) = f(1)x$ pour tout $x \in R$.

Exemple 2.4.3. Soit V un espace vectoriel de dimension infinie sur un corps F. On note par K le sous anneau de $End_F(V)$ composé de tous les opérateurs de rang fini. Clairement, chaque opérateur en K est la somme des opérateurs de rang 1. $v \otimes h$, défini par $(v \otimes h)(u) = T_{v,h}(u) = h(u)v$; ici, $v \in V$ et $h \in V^*$, le dual de V.
K est un anneau simple sans unité. Soit R un anneau quelconque tel que $K \subseteq R \subseteq End_F(V)$. Notons que R est premier et K est son idéal minimal. Montrons que

$$\mathrm{Q}_r(R) \cong End_F(V).$$

Nous devons vérifier que $End_F(V)$ a les quatre propriétés $(a) - (d)$. Les trois premières sont faciles : (a) est trivial. (b) découle du fait que K est un idéal (à gauche) de $End_F(V)$, et (c) découle du fait que tout idéal non nul de R contient K. Pour vérifier (d), prenons un idéal non nul I de R et un homomorphisme de $R-$module à droite $f : I \to R$. Choisissons $v_0 \in V$ et $h_0 \in V^*$ de sorte que $h_0(v_0) = 1$. Définissons $q : V \to V$ par $q(v) := f(v \otimes h_0)(v_0)$.
Clairement, $q(v + v') = q(v) + q(v')$. Comme

$$f(\lambda k)k' = f(\lambda kk') = f(k(\lambda k')) = \lambda f(k)k'$$

valable pour tout $\lambda \in F$ et $k, k' \in K$, i.e. $(f(\lambda k) - \lambda f(k))K = 0$, il en résulte que $f(\lambda k) = \lambda f(k)$, $k \in K$. Cela donne $q(\lambda v) = \lambda q(v)$, c'est-à-dire $q \in End_F(V)$. Ensuite, pour tout $v \in V$ et $h \in V^*$ nous avons

$$\begin{aligned} f(v \otimes h) &= f(v \otimes h_0 \,.\, v_0 \otimes h) = f(v \otimes h_0) \,.\, v_0 \otimes h \\ &= f(v \otimes h_0)(v_0) \otimes h = q(v) \otimes h \\ &= q \,.\, v \otimes h. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(k) = qk$ pour tout $k \in K$, et donc $f(x)k = f(xk) = qxk$ pour tout $x \in I$ et $k \in K$. C'est-à-dire $(f(x) - qx)K = 0$, ce qui donne $f(x) = qx$. Ceci complète la preuve.

2.5 Centroïde étendu

Partout de cette section, nous supposons que R est un anneau premier non nul.

Définition 2.5.1. *Le centre de $\mathrm{Q}_r(R)$ est appelé le **centroïde étendu** de R.*

Le centroïde étendu de R sera désigné par C. Comme d'habitude, Z représentera le centre de R, et comme dans la section précédente, $\mathscr{J}$ est l'ensemble de tous les idéaux non nuls de R. Nous nous référons continuellement aux propriétés $(a) - (d)$ du Théorème 2.4.1.

Lemme 2.5.1. *Si $q \in \mathrm{Q}_r(R)$ est tel que $qr = rq$ pour tout $r \in R$, alors $q \in C$. Par conséquent Z est un sous anneau de C.*

Preuve. Prenons $q' \in \mathrm{Q}_r(R)$. Nous devons montrer que $[q, q'] = 0$. Par (b) il existe $I \in \mathscr{J}$ tel que $q'I \subseteq R$. Prenons $x \in I$. Puisque q commute avec x et $q'x$, nous avons donc $qq'x = q'xq = q'qx$. Par conséquent, $[q, q']I = 0$ et donc, il s'ensuit que $[q, q'] = 0$ d'après (c). $\square$

Si les éléments de $\mathrm{Q}_r(R)$ correspondent aux homomorphismes du $R-$module à droite, alors les éléments de C correspondent à des $R-$bimodules (ceux-ci, sont biens sûr, les applications qui sont à la fois des homomorphismes de $R-$module à gauche et à droite).

Lemme 2.5.2. *Si $f : I \to R$, où $I \in \mathscr{J}$, est un homomorphisme de $R-$bimodule, alors il existe $\lambda \in C$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in I$.*

Preuve. Dès que f est, en particulier, un homomorphisme de $R-$module à droite, d'après (d) il existe $q \in \mathrm{Q}_r(R)$ tel que $f(x) = qx,\ x \in I$. Par contre, puisque f est aussi un homomorphisme de $R-$module à gauche il en résulte que $q(rx) = r(qx)$ pour tout $r \in R$ et $x \in I$. C'est-à-dire $[q, r]I = 0$, et donc $[q, r] = 0$ d'après (c). Par suite, $\lambda := q \in C$ d'après le Lemme 2.5.1. $\square$

Inversement, si $\lambda \in C$ et $I \in \mathscr{J}$ sont tels que $\lambda I \subseteq R$, alors $x \mapsto \lambda x$ est un homomorphisme de $R-$bimodule de I vers R. Le centroïde étendu, bien que défini à travers l'anneau de quotients de Martindale à droite, est donc une notion symétrique gauche-droite.

Remarque 2.5.1. Supposons que R est une algèbre sur un corps F. Chaque $\alpha \in F$ donne lieu à l'homomorphisme de $R-$bimodule $x \mapsto \alpha x$ de R dans R. En utilisant le Lemme 2.5.2 et donc, facilement on déduit que F s'injecte canoniquement dans C. Par conséquent, F peut être considérer comme un sous corps de C.

Théorème 2.5.1. *Le centroïde étendu C d'un anneau premier non nul R est un corps.*

Preuve. Prenons $\lambda \neq 0$ dans C et choisissons $I \in \mathscr{J}$ satisfaisant (b). Clairement $\lambda I \in \mathscr{J}$ d'après (c). Nous prétendons que $f : \lambda I \to R,\ f(\lambda x) = x$ est bien définie. En effet, si $\lambda x = 0$ évidemment entraine que $\lambda I_x = 0$, où I_x est un idéal de R généré par x et donc, $x = 0$ d'après (c). Puisque f est un homomorphisme de $R-$bimodule, le Lemme 2.5.2 donne l'existence d'un $\mu \in C$ tel que $f(y) = \mu y,\ y \in \lambda I$. En écrivant $y = \lambda x,\ x \in I$, on obtient donc $\mu\lambda x = x$. C'est-à-dire $(\mu\lambda - 1)I = 0$ et donc, $\mu\lambda = 1$ d'après (c). Par suite, il s'ensuit que λ est inversible dans C. $\square$

On peut donc, considérer $\mathrm{Q}_r(R)$ comme une algèbre sur C.

Définition 2.5.2. *La $C-$sous-algèbre de $\mathrm{Q}_r(R)$ générée par R s'appelle la **fermeture centrale** de R.*

La fermeture centrale de R, qui sera désignée par R_C, se compose évidemment des éléments de la forme $\sum_i \lambda_i r_i,\ \lambda_i \in C, r_i \in R$. Ainsi, R_C est comme C, un objet symétrique gauche-droite. La version symétrique du Lemme 2.4.2 est donc, valable pour les éléments dans R_C.

Lemme 2.5.3. *Etant donné* $q_1, q_2, ..., q_n \in R_C$*, il existe* $I \in \mathscr{J}$ *tel que* $q_i I \subseteq R$ *et* $I q_i \subseteq R$*,* $i = 1, ..., n$*.*

Preuve. Il suffit de prouver le lemme pour $n = 1$. A savoir, juste comme dans la preuve du Lemme 2.4.2, nous pouvons prendre l'intersection des idéaux correspondant à des éléments particuliers. Ainsi, choisissons $q = \sum_i \lambda_i r_i \in R_C$. Par le Lemme 2.4.2 il existe $I \in \mathscr{J}$ tel que $\lambda_i I \subseteq R$ pour chaque i. Cela clairement implique que $qI \subseteq R$ et, dès que λ_i commutent avec les éléments de I, alors aussi $Iq \subseteq R$. □

Supposons que R de centre non nul Z. Alors le corps des fractions $\widehat{Z}$ de Z peut être vu comme un sous corps de C. Pour plus de clarté nous affirmons le lemme simple suivant.

Lemme 2.5.4. *Si* $Z \neq 0$*, alors* $Q_Z(R)$ *peut s'injecter dans* R_C*. De plus, si* $\widehat{Z} = C$*, alors* $Q_Z(R) \cong R_C$*.*

Preuve. La première assertion est extraite de la proposition 2.2.1, et la seconde est immédiate. □

Les anneaux de Exemple 2.4.1 satisfaisant la condition $\widehat{Z} = C$. En général, $\widehat{Z}$ n'est pas égal à C, même pas quand Z est déjà un corps et donc égal à $\widehat{Z}$.

Exemple 2.5.1. Soit F_0 un sous corps de F. Considérons le cas particulier de Exemple 2.4.3 où $R = K + F_0\ .\ 1$ (ici, 1 est l'opérateur d'identité). Notons que $Z = F_0 \cdot 1$, et par conséquent $\widehat{Z} = Z \cong F_0$. Dans Exemple 2.4.3 nous avons montré que $Q_r(R) \cong End_F(V)$, ce qui implique que $C \cong F$. D'où, $R_C = K + F \cdot 1$.

Cet exemple indique la nature intrinsèque de la notion de centroïde étendu. A savoir, dans le cadre des opérateurs F-linéaires, il est plus naturel de traiter avec F qu'avec ses sous-corps.

Définition 2.5.3. *Si* $R = R_C$*, alors* R *est dit* ***centralement fermé****.*

Nous remarquons que $Z \neq 0$ implique $C \subseteq R_C$. En effet, $\lambda = (\lambda z^{-1})z \in R_C$ pour tout $\lambda \in C$, où $z \in Z \setminus \{0\}$. Par conséquent, dans ce cas, R est centralement fermé si et seulement si, $Z = C$. Mais R peut être centralement fermé même quand $Z = 0$.

Exemple 2.5.2. Chaque anneau simple R, que son centre soit à 0 ou non, est centralement fermé puisque $\lambda R \subseteq R$ pour tout $\lambda \in C$ d'après (b). Un exemple concret d'un anneau simple avec le centre zéro est l'anneau K des opérateurs de rangs finis de Exemple 2.4.3.

Par le terme "algèbre premier centralement fermée", nous entendrons une fermeture centralisée d'un anneau premier considéré comme une algèbre sur son centroïde étendu. Comme indiqué dans le paragraphe précédent, le centre d'une telle algèbre A est soit 0 ou coïncide avec le centroïde étendu. Dans ce dernier cas, A est une algèbre centrale. La notion d'une algèbre simple centralement fermée peut donc être considérée comme une généralisation de la notion d'une algèbre simple centrale. Un exemple d'une algèbre premier centralement fermée qui n'est pas simple est $End_F(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension infinie sur F (cf. Exemple 2.4.3).

Lemme 2.5.5. *La fermeture centrale R_C de n'importe quel anneau premier R est une algèbre premier centralement fermée sur C.*

Preuve. Puisque $R_C \supseteq R \in \mathscr{J}$, la primalité de R_C découle du Lemme 2.4.1. Notons le centroïde étendu de R_C par E. D'après la Remarque 2.5.1 nous pouvons considérer C comme un sous-corps de E. Cela montre que le lemme sera établi si en montrant que $E = C$. Prenons $\varepsilon \in E$. Par (b), il existe un idéal non nul U de R_C tel que $\varepsilon U \subseteq R_C$. Notons que $I := \{x \in U \cap R \mid \varepsilon x \in R\}$ est un idéal de R. Nous prétendons que $I \neq 0$. En effet, choisissons $u \neq 0$ dans U et utilisons le Lemme 2.4.2 pour obtenir $J \in \mathscr{J}$ tels que $uJ \subseteq R$ et $(\varepsilon u)J \subseteq R$. Alors uJ est contenu dans I et n'est pas nul d'après (c). Nous pouvons maintenant définir l'homomorphisme de $R-$bimodule $f : I \to R,\ f(x) = \varepsilon x$. Par le Lemme 2.5.2 il existe $\lambda \in C$ tel que $\varepsilon x = \lambda x,\ x \in I$. Cela implique facilement que $\varepsilon y = \lambda y$ pour chaque y dans le sous-espace $\tilde{I}$ de R_C généré par I. Observons que $\tilde{I}$ est un idéal de R_C, par suite d'après (c) nous obtenons $\varepsilon = \lambda \in C$, et cela achève la preuve du lemme. □

2.6 (In)dépendance linéaire dans les anneaux premiers

Les nombreuses applications des anneaux des quotients de Martindanle proviennent des résultats que nous sommes sur le point d'établir. Pour avoir une idée du sujet, nous examinons d'abord la condition étudié dans le prochain lemme dans le cadre simple des anneaux à division. Ainsi, soit D un anneau à division, et soient $a, b \in D$ tel que $axb = bxa$ pour chaque $x \in D$. Un naturel possibilité où se produit est existe lorsque a et b sont linéairement dépendants sur le centre de D. Actuellement, c'est la seule possibilité. En effet, en supposant que $a \neq 0$ puis en multipliant $axb = bxa$ par a^{-1} des deux cotés, nous obtenons $xba^{-1} = a^{-1}bx$, qui est facilement implique que $\lambda = ba^{-1}(= a^{-1}b)$ se situé au centre de D et vérifie $b = \lambda a$. Par suite, nous avons un lien simple entre la structure multiplicative du D ($axb = bxa$) et la structure linéaire de D ($b = \lambda a$). Cette petite observation peut être généralisée en différentes directions.

Nous utilisons la même notation que dans les sections précédentes. En particulier, R toujours un anneau premier non nul et $\mathscr{J}$ l'ensemble de tous les idéaux non nuls de R. Par (b) et (c) nous nous référons aux conditions du Théorème 2.4.1.

Lemme 2.6.1. *Soient $a, b \in \mathrm{Q}_r(R)$ et soit $I \in \mathscr{J}$. Si $axb = bxa$ pour tout $x \in I$, alors a et b sont linéairement dépendants sur C.*

Preuve. D'après le Lemme 2.4.2 il existe $J \in \mathscr{J}$ tels que $aJ \subseteq R$ et $bJ \subseteq R$. Mais en remplaçant le rôle de I par $I \cap J$ nous voyons qu'il n'y a pas de perte de généralité en supposant que $aI \subseteq R$ et $bI \subseteq R$.

Nous pouvons supposer que $a \neq 0$. Alors $aI \neq 0$ d'après (c) et donc, $K := IaI \in \mathscr{J}$. Nous prétendons que l'application $f : K \to R$,

$$f(\sum_i x_i a y_i) = \sum_i x_i b y_i, \quad x_i, y_i \in I,$$

est bien définie. Supposons que $\sum_i x_i a y_i = 0$. En multipliant à droite par zb, $z \in R$, et en utilisant le fait que $a(y_i z)b = b(y_i z)a$, il s'ensuit que $(\sum_i x_i b y_i)za = 0$. Mais alors $\sum_i x_i b y_i = 0$ puisque R est premier. Notons aussi que f correspond bien à R pour $bI \subseteq R$. Evidemment, f est un homomorphisme de $R-$bimodule, il en résulte donc du Lemme 2.5.2 qu'il existe $\lambda \in C$ tel que $f(w) = \lambda w$, pour tout $w \in K$. En particulier, $xby = \lambda xay$ pour tout $x, y \in I$. Par suite, $I(b - \lambda a)I = 0$ et donc, $b = \lambda a$ d'après le Lemme 2.4.1. $\square$

Même dans le cas basique où $a, b \in R$ et $I = R$, la participation de la centroïde étendu C du Lemme 2.6.1 est indispensable, c'est-à-dire qu'il ne peut être remplacé par le centre Z même lorsque Z est un corps. En effet, une vision à Exemple 2.5.1 nous en convaincu.

Le lemme suivant traite un état beaucoup plus général, mais comme nous le verrons, la preuve peut être facilement réduite à la situation traitée dans le Lemme 2.6.1.

Lemme 2.6.2. *Soient $a_i, b_i \in \mathrm{Q}_r(R)$ et soit $I \in \mathscr{J}$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = 0 \quad \textit{pour tout } x \in I.$$

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ sont linéairement indépendants sur C, alors chacun $b_i = 0$. De manière similaire, si $b_1, b_2, ..., b_n$ sont linéairement indépendants sur C, alors chacun $a_i = 0$.

Preuve. On va prouver que la première assertion. La deuxième peut être traitée de manière similaire. Ainsi, supposons que $a_1, a_2, ..., a_n$ sont linéairement indépendants. On va raisonner par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ suit le Lemme 2.4.1. Nous pouvons donc supposer que la conclusion souhaitée tient si le nombre de sommets est inférieur à n. Supposons que, $b_n \neq 0$. Par (b) on peut choisir $J \in \mathscr{J}$ tel que $b_n J \subseteq R$. Alors $x b_n y \in I$ chaque fois que $x \in I$ et $y \in J$, et donc nous avons $\sum_{i=1}^{n} a_i (x b_n y) b_i = 0$. Puisque le dernier terme, $a_n x b_n y b_n$, est égal à $-(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x b_i) y b_n$, nous pouvons donc réécrire cette identité comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i x (b_n y b_i - b_i y b_n) = 0 \quad \textit{pour tout } x \in I, y \in J.$$

L'hypothèse de récurrence donne $b_n y b_i - b_i y b_n = 0$ pour tout $y \in J$ et $i = 1, ..., n-1$. Comme $b_n \neq 0$ par hypothèse, le Lemme 2.6.1 nous dit qu'il existe $\lambda_i \in C$ tel que $b_i = \lambda_i b_n$, $i = 1, ..., n-1$. Mais alors on peut réécrire $\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = 0$ comme $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) x b_n = 0$, où $\lambda_n = 1$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$ d'après le Lemme 2.4.1, ce qui est en contradiction avec l'indépendance linéaire $a_i' s$. $\square$

Le Lemme 2.6.2 jouera un rôle très important dans la suite. Signalons que ce lemme sera utilisé comme l'un des principaux outils des chapitres suivants.

Le théorème suivant est juste une version raffinée du Lemme 2.6.2.

Théorème 2.6.1. *Soient* $a_i, b_i, c_j, d_j \in \mathrm{Q}_r(R)$ *et soit* $I \in \mathscr{J}$ *tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x b_i = \sum_{j=1}^{m} c_j x d_j \quad \textit{pour tout } x \in I.$$

Si $a_1, a_2, ..., a_n$ *sont linéairement indépendant sur* C*, alors chaque* b_i *est une combinaison* $C-$*linéaire de* $d_1, d_2, ..., d_m$*. De manière similaire, si* $b_1, b_2, ..., b_n$ *sont linéairement indépendants sur* C*, alors chaque* a_i *est une combinaison* $C-$*linéaire de* $c_1, c_2, ..., c_m$*.*

Preuve. On va prouver seulement la première assertion. La deuxième assertion peut être traitée de même manière, comme quand on a indiqué dans la preuve du lemme précédent. Prolonger $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ à une base $C-$linéaire portée de $\{a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_m\}$. Dénotant les éléments de base supplémentaire (s'il y a tout) par $a_{n+1}, ..., a_p$, et écrivons chaque c_j comme une combinaison C-linéaire de $a_1, ..., a_p$. Notre identité peut alors être réécrite comme $\sum_{i=1}^{p} a_i x b_i' = 0$, où b_i', $i \leq n$, est la somme de b_i et une combinaison linéaire de $d_j' s$. Le Lemme 2.6.2 montre que chaque $b_i' = 0$. D'où le résultat souhaité. $\square$

Chapitre 3

Applications centralisantes et dérivations dans un anneau premier

M. Brešar, *Centralizing mappings and derivations in prime rings*, J. Algebra 156 (1993), 385-394.

3.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de décrire la structure d'une application additive arbitraire centralisante sur un anneau premier. Ainsi, on va prouver deux fameux Théorèmes de M. Brešar. L'étude des applications centralisantes et commutantes ont été initiées par le résultat classique de Posner [33] qui dit que l'existence d'une dérivation centralisante non nulle sur un anneau premier force l'anneau d'être commutatif. Beaucoup de travail a été accompli au cours des vingt dernières années dans ce domaine. Mayne [26] a prouvé le résultat analogue, mais pour les automorphismes centralisants. Un certain nombre d'auteurs ont étendu ces théorèmes de Posner et Mayne de plusieurs manières [3, 21, 27, 29], où d'autres références peuvent être trouvées. Dans ces articles, les auteurs ont montré que certaines applications concrètes additives (comme les dérivations, les endomorphismes, etc.) ne peuvent pas être centralisantes sur certaine partie d'un anneau premier (ou d'autre) non-commutatif.

Le résultat que nous allons prouver est

Théorème A. Soit R un anneau premier. Supposons qu'une application additive F de R est centralisante sur R. Si R est de caractéristique différente de 2 ou F est commutante sur R, alors F est de la forme $F(x) = \lambda x + \xi(x)$, $x \in R$, où λ est un élément du centroïde étendu C de R et ξ est une application additive de R dans C.

Théorème A est prouvé dans la section 3. La preuve dépend d'un résultat dans la section 2, qui donne une description des dérivations d, g et h d'un anneau premier R vérifiant $d(x) = ag(x) + h(x)b$, où a et b sont des éléments (fixés) dans R.

Ce résultat généralise le Théorème dans l'article de Herstein [19].

Notre prochain objectif est d'initier l'étude d'un concept plus général sur les applications centralisantes, c'est-à-dire que nous considérons la situation où les applications F et G d'un anneau R satisfont $F(s)s - sG(s) \in Z$ pour tout s dans une certaine partie S de R. Ceci est également plus général que le concept des applications anti-centralisantes. Dans ce chapitre, en suivant la méthode la plus pratique dans l'étude des applications centralisantes, nous considérons le cas où F et G sont des dérivations.

Le but de la section 4 est de prouver

Théorème B. Soit R un anneau premier et soit U un idéal à gauche non nul de R. Supposons que les dérivations d et g de R satisfont $d(u)u - ug(u) \in Z$ pour tout $u \in U$. Si $d \neq 0$ alors R est commutatif.

Les auteurs dans les deux articles [21, 27] ont montré que si un anneau premier R admet une dérivation non nulle qui est centralisante sur un idéal bilatère non nul de R, alors R est commutatif. Bell et Martindale ont établi ce résultat avec une faible hypothèse selon lequel U est un idéal unilatéral [3, Thm. 4]. Théorème B est bien sûr encore plus général. En outre, ce théorème généralise un résultat dans l'article [21] en affirmant que l'existence d'une dérivation non nulle qui est anti-centralisante sur un idéal bilatère non nul dans un anneau premier implique que l'anneau est commutatif.

Théorème B est également inspiré de l'observation suivante. Soit f une dérivation intérieure généralisée d'un anneau R, i.e. $f(x) = ax + xb$ pour un certain a, b dans R. Notez que la condition que f est centralisante sur une partie S de R peut être écrite sous la forme $[a, s]s - s[s, b] \in Z$ pour tout $s \in S$. Ainsi, en introduisant les dérivations intérieures d et g par $d(x) = [a, x]$ et $g(x) = [x, b]$, on obtient la même condition que dans le Théorème B, i.e. $d(s)s - sg(s) \in Z$ pour tout $s \in S$. Les dérivations intérieures généralisées sont largement étudiées sur les algèbres d'opérateur. Par conséquent, il pourrait être intéressant d'étudier ces applications d'un point de vue algébrique.

Tout au long de ce chapitre, R représentera un anneau associatif de centre Z ; dans le cas où R est premier, on note par C le centroïde étendu de R.

Nous allons maintenant utiliser les résultats suivants qui sont biens connus sur les anneaux premiers et semi-premiers :

Remarques. Soit R un anneau premier.

1. Les éléments non nuls de Z ne sont pas des diviseurs de zéro.
2. Le centre Z d'un anneau semi-premier R ne contient aucun élément non nul nilpotent.
3. Si R contient un idéal à gauche non nul commutatif , alors R est commutatif.

4. Soient c et ac dans le centre de R. Si c n'est pas nul, alors a est dans le centre de R. En outre, nous avons aussi besoin de résultat plus profond suivant, il a apparemment dû à Levitzki.
5. [17, Lemme 1.1] Soit n un entier positive fixé. Si un anneau R contient un idéal à gauche non nul I tel que $x^n = 0$, pour tout $x \in I$, alors R contient un idéal non nul nilpotent. En particulier, un anneau semi-premier n'a pas d'idéal nil à gauche non nul d'indice borné.

3.2 Dérivations vérifiant $d(x) = ag(x) + h(x)b$

Le but principal de cette section est d'étudier les dérivations d, g et h sur un anneau premier vérifiant $d(x) = ag(x)+h(x)b$. Plus précisément, il s'agit de déterminer la forme de ces dérivations.

Théorème 3.2.1. *Soit R un anneau premier, et soient d, g, h des dérivations de R. On suppose qu'ils existent $a, b \in R$ tels que*

$$d(x) = ag(x) + h(x)b \qquad \textit{pour tout} \quad x \in R. \tag{3.1}$$

Si $a \notin Z$ et $b \notin Z$, alors il existe $\lambda \in C$ tels que $d(x) = [\lambda ab, x]$, $g(x) = [\lambda b, x]$ et $h(x) = [\lambda a, x]$ pour tout $x \in R$.

Pour la preuve du Théorème 3.2.1 nous avons besoin de deux lemmes qui sont d'un intérêt indépendants.

Lemme 3.2.1. *Soit R un anneau premier, et soient d, g des dérivations de R. On suppose que*

$$d(x)g(y) = g(x)d(y) \qquad \textit{pour tout} \quad x, y \in R. \tag{3.2}$$

Si $d \neq 0$ alors il existe $\lambda \in C$ tel que $g(x) = \lambda d(x)$ pour tout $x \in R$.

Preuve. On remplace y par yz dans la relation (3.2), nous voyons que

$$d(x)g(yz) = g(x)d(yz) \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R$$

ce qui implique que

$$d(x)g(y)z + d(x)yg(z) = g(x)d(y)z + g(x)yd(z) \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R.$$

En utilisant la relation (3.2), cette dernière relation se réduite à

$$d(x)yg(z) = g(x)yd(z) \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R. \tag{3.3}$$

En particulier,

$$d(x)yg(x) = g(x)yd(x) \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

Par conséquent, si $d(x) \neq 0$, en utilisant le Lemme 2.6.1 nous avons donc

$$g(x) = \lambda(x)d(x) \qquad \text{pour un certain} \quad \lambda(x) \in C.$$

Ainsi, si $d(x) \neq 0$ et $d(z) \neq 0$, on utilise aussi le fait que $g(z) = \lambda(z)d(z)$ pour un certain $\lambda(z) \in C$. Alors il s'ensuit de la relation (3.3) que

$$(\lambda(x) - \lambda(z))d(x)yd(z) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad y \in R.$$

Ainsi, dès que R est premier, donc, la dernière relation implique que $\lambda(x) = \lambda(z)$. Par suite, nous avons prouvé qu'il existe $\lambda \in C$ de tel sorte la relation $g(x) = \lambda d(x)$ est satisfaite pour tout $x \in R$, avec la propriété $d(x) \neq 0$.

D'autre part, si $d(x) = 0$ alors nous voyons de la relation (3.3) que aussi $g(x) = 0$, puisque $d \neq 0$ et R est premier. D'où, $g(x) = \lambda d(x)$ pour tout $x \in R$. □

Lemme 3.2.2. *Soit R un anneau premier, et soient d, f, g et h des dérivations de R. On suppose que*

$$d(x)g(y) = h(x)f(y) \qquad \textit{pour tout} \quad x, y \in R. \tag{3.4}$$

Si $d \neq 0$ et $f \neq 0$ alors il existe $\lambda \in C$ tels que $g(x) = \lambda f(x)$ et $h(x) = \lambda d(x)$ pour tout $x \in R$.

Preuve. Prenons $y = zy$ dans la relation (3.4), alors nous obtenons

$$d(x)g(z)y + d(x)zg(y) = h(x)f(z)y + h(x)zf(y) \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R.$$

En appliquant la relation (3.4), nous voyons que

$$d(x)zg(y) = h(x)zf(y) \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R. \tag{3.5}$$

On substitue z par $zf(w)$ dans la relation (3.5), on obtient

$$d(x)zf(w)g(y) = h(x)zf(w)f(y)$$

Ainsi, du fait que $h(x)zf(w) = d(x)zg(w)$ d'après la relation(3.5), nous avons donc

$$d(x)z(f(w)g(y) - g(w)f(y)) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z, w \in R.$$

Puisque $d \neq 0$ et R est premier, cette dernière relation implique que

$$f(w)g(y) = g(w)f(y) \qquad \text{pour tout} \quad y, w \in R.$$

Nous avons supposé que $f \neq 0$, en utilisant le Lemme 3.2.1, il en résulte que

$$g(y) = \lambda f(y) \qquad \text{pour tout } y \in R \text{ où } \lambda \text{ est un élément de } C,$$

et donc, la relation (3.5) devient

$$(\lambda d(x) - h(x))zf(y) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R.$$

Par suite, comme conséquence de ce qui précède, on a bien que $h(x) = \lambda d(x)$ pour tout $x \in R$. □

***Preuve du théorème* 3.2.1.** En remplaçant x par xy dans la relation (3.1), nous obtenons

$$d(xy) = ag(xy) + h(xy)b \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R$$

ce qui implique que

$$d(x)y + xd(y) = ag(x)y + axg(y) + h(x)yb + xh(y)b \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

Ainsi d'après la relation (3.1), on trouve

$$ag(x)y + h(x)by + xag(y) + xh(y)b = ag(x)y + axg(y) + h(x)yb + xh(y)b \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

Ce qui donne que

$$axg(y) - xag(y) = h(x)by - h(x)yb \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

En factorisant cette dernière relation, on aboutit

$$[a, x]g(y) = h(x)[b, y] \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

Ainsi, d'après le Lemme 3.2.2, il existe $\lambda \in C$ tels que

$$h(x) = [\lambda a, x] \quad \text{et} \quad g(x) = [\lambda b, x] \qquad \text{pour tout} \quad x \in R.$$

Par suite, en vertu à nouveau de la relation (3.1), on en déduit que

$$\begin{aligned} d(x) &= a[\lambda b, x] + [\lambda a, x]b \\ &= \lambda abx - \lambda axb + \lambda axb - \lambda xab \\ &= (\lambda ab)x - x(\lambda ab) \\ &= [\lambda ab, x]. \end{aligned}$$

D'où, $d(x) = [\lambda ab, x]$ pour tout $x \in R$. □

Dans l'article [19], I. N. Herstein a prouvé le résultat suivant :

Soit R un anneau premier et d une dérivation non nulle de R. Supposons que $a \notin Z$ tel que $[a, d(x)] = 0$ pour tout $x \in R$, alors R est de caractéristique 2, $a^2 \in Z$ et $d(x) = [\lambda a, x]$, où $\lambda \in C$, pour tout $x \in R$.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser le résultat de Herstein's.

Corollaire 3.2.1. *Soit R un anneau premier, et soient g, h des dérivations de R. On suppose qu'ils existent $a, b \in R$ tels que*

$$ag(x) + h(x)b = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad x \in R. \tag{3.6}$$

Si $a \notin Z$ et $b \notin Z$, alors il existe $\lambda \in C$ tels que $g(x) = [\lambda b, x]$ et $h(x) = [\lambda a, x]$ pour tout $x \in R$. De plus, si $g \neq 0$ alors $ab \in Z$.

Preuve. La première partie de l'assertion suit immédiatement du Théorème 3.2.1. Maintenant si $g \neq 0$ alors forcément $\lambda \neq 0$ et par suite, d'après la relation (3.6) il en résulte que

$$a[\lambda b, x] + [\lambda a, x]b = \lambda(abx - xab) = \lambda[ab, x] = 0$$

ce qui implique facilement que $[ab, x] = 0$ pour tout $x \in R$, et cela achève la preuve du corollaire. $\square$

3.3 Applications centralisantes

Tout d'abord, nous montrons que sous des hypothèses plutôt faibles, chaque application centralisante est en fait commutante.

Proposition 3.3.1. *Soit R un anneau semi-premier sans 2-torsion et U le sous-anneau de Jordan de R. Si une application additive $F : R \to R$ est centralisante sur U, alors F est commutante sur U.*

Preuve. On suppose que F est centralisante sur U, c'est-à-dire

$$[F(x), x] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

La linéarisation de cette relation (i.e., on remplace x par $x + y$), donne

$$[F(x), x] + [F(x), y] + [F(y), x] + [F(y), y] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U.$$

Comme $[F(x), x], [F(y), y] \in Z$, on aura donc que

$$[F(x), y] + [F(y), x] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U.$$

En particulier,

$$[F(x), x^2] + [F(x^2), x] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U. \tag{3.7}$$

Ainsi, puisque $[F(x), x] \in Z$, alors nous avons

$$[F(x), x^2] = 2[F(x), x]x \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

Par suite, la relation (3.7) peut être réécrite sous la forme

$$2[F(x), x]x + [F(x^2), x] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U. \tag{3.8}$$

Par hypothèse, on a $[F(x^2), x^2] \in Z$ pour tout $x \in U$. C'est-à-dire

$$[F(x^2), x]x + x[F(x^2), x] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U. \tag{3.9}$$

Maintenant on doit fixer $x \in U$ et soit $z = [F(x), x] \in Z$, $u = [F(x^2), x]$. Nous devons montrer que $z = 0$. Selon la relation (3.8) nous obtenons

$$0 = [F(x), 2zx+u] = [F(x), 2zx]+[F(x), u] = 2z[F(x), x]+[F(x), u] = 2z^2+[F(x), u].$$

Evidemment, il s'ensuit que
$$[F(x), u] = -2z^2. \tag{3.10}$$
En vertu de la relation (3.9), nous avons donc
$$\begin{aligned} 0 = [F(x), ux + xu] &= [F(x), ux] + [F(x), xu] \\ &= [F(x), u]x + u[F(x), x] + [F(x), x]u + x[F(x), u]. \end{aligned}$$
En appliquant la relation (3.10), ce qui permet d'écrire
$$-4z^2x + 2zu = 0.$$
Par suite, on trouve donc que $zu = 2z^2x$. En multipliant à droite par z dans la relation (3.10) et en utilisant cette dernière relation nous trouvons que
$$-2z^3 = [F(x), u]z = [F(x), zu] = [F(x), 2z^2x] = 2z^2[F(x), x] = 2z^3.$$
Et donc, $z^3 = 0$. Ainsi, d'après la Remarque 2 nous aurons forcément que $z = 0$. D'où, $[F(x), x] = 0$ pour tout $x \in R$. Cela prouve la proposition. □

Nous arrivons maintenant au résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.1. *Soit R un anneau premier. Si une application additive F de R est commutante sur R, alors il existe $\lambda \in C$ et une application additive $\xi : R \to C$, telle que :*
$$F(x) = \lambda x + \xi(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in R.$$

Preuve. On suppose que
$$[x, F(x)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in R.$$
En linéarisant cette relation, on obtient immédiatement que
$$[x, F(y)] = [F(x), y] \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R. \tag{3.11}$$
En remplaçant y par yz dans la relation (3.11), nous obtenons
$$[x, F(yz)] = [F(x), yz] = y[F(x), z] + [F(x), y]z = y[x, F(z)] + [x, F(y)]z.$$
D'où, il suit que
$$[x, F(yz)] = y[x, F(z)] + [x, F(y)]z \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R. \tag{3.12}$$
Cette identité est la clé, comme nous le verrons. Fixons $y \in R$. Supposons que $y \notin Z$. Comme cas particulier de l'identité (3.12), nous avons
$$[x, F(y^2)] = y[x, F(y)] + [x, F(y)]y \qquad \text{pour tout} \quad x \in R.$$

Ainsi, puisque les applications $x \mapsto [x, F(y^2)]$ et $x \mapsto [x, F(y)]$ sont des dérivations et donc, le Théorème 3.2.1 peut être appliqué. Par suite, il existe $\lambda(y) \in C$ tel que $[x, F(y)] = [x, \lambda(y)y]$ pour tout $x \in R$.

Maintenant, supposons que $y \in Z$, et donc d'après la linéarisation de $[F(x), x] = 0$ on voit donc que aussi $F(y) \in Z$. Il est clair maintenant que pour chaque $y \in R$ il existe $\lambda(y) \in C$ tel que $[x, F(y)] = [x, \lambda(y)y]$ est satisfaite pour n'importe $x \in R$. Ainsi, nous voulons montrer que $\lambda(y)$ est constante.

A présent, l'identité (3.12) peut s'écrire de la forme

$$[x, \lambda(yz)yz] = y[x, \lambda(z)z] + [x, \lambda(y)y]z.$$

Par conséquent, on décompose cette dernière identité, on aboutit

$$y[x, \lambda(yz)z] + [x, \lambda(yz)y]z = y[x, \lambda(z)z] + [x, \lambda(y)y]z.$$

Manifestement, il s'ensuit que

$$[x, (\lambda(yz) - \lambda(y))y]z + y[x, (\lambda(yz) - \lambda(z))z] = 0. \tag{3.13}$$

Prenons maintenant $y \notin Z$ et $z \notin Z$. D'après la relation (3.13) et le Théorème 3.2.1, il s'ensuit qu'il existe $\mu \in C$ tels que

$$[x, (\lambda(yz) - \lambda(y))y] = [x, \mu y] \quad \text{et} \quad [x, (\lambda(yz) - \lambda(z))z] = [x, \mu z] \quad \text{pour tout} \quad x \in R.$$

De plus, puisque $y \notin Z$ et $z \notin Z$, donc ces deux relations impliquent que

$$\lambda(yz) - \lambda(y) = \mu \quad \text{et} \quad \lambda(yz) - \lambda(z) = \mu.$$

Par conséquent, on a $\lambda(y) = \lambda(z)$.

Enfin, il existe $\lambda \in C$ tel que $[x, F(y)] = [x, \lambda y]$ valable pour tout $x \in R$ et $y \notin Z$. Cependant, puisque F est une application de Z dans lui même, et donc cette relation est tout à fait vraie même si $y \in Z$. Par suite, nous avons donc

$$[x, F(y) - \lambda y] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in R.$$

Finalement, notons que l'application $\xi(y) = F(y) - \lambda y$ a les propriétés désirées, et cela termine la preuve de ce théorème. □

Par suite, en combinant la Proposition 3.3.1 et le Théorème 3.3.1, nous obtenons le Théorème B.

Remarque 3.3.1. Dans l'article [29], C. R. Miers a étudié les applications centralisantes sur C^*-algèbres. Il a montré que si A est une C^*-algèbre, p est un polynôme complexe et d est une dérivation de A de tel sorte que $p(d)$ est commutante sur A, alors $p(d) = 0$ [29, Thm. 1]. Utilisons maintenant le Théorème 3.3.1, un résultat similaire peut être obtenu pour les dérivations intérieures dans les anneaux semi-premiers (nous remarquons que Miers avait d'abord considéré le cas où A est une algèbre de Von Neumann et donc d est une dérivation intérieure).

Soit R un anneau semi-premier, a un élément de R et d_a la dérivation intérieure de R associée à a, i.e. $d_a(x) = [a, x]$. On suppose que l'application $F : R \to R$, ainsi définie par :

$$F(x) = c_1 d_a(x) + c_2 d_a^2(x) + ... + c_n d_a^n(x), \quad x \in R, \tag{3.14}$$

où $c_1, c_2, ..., c_n$ sont des éléments de R, est commutante sur R. Nous avons l'intention de montrer que $F = 0$. Tout d'abord, on va supposer que R est premier. Par le Théorème 3.3.1 nous avons donc

$$F(x) = \lambda x + \xi(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in R.$$

D'autre part, il est clair que $F(a) = 0$ depuis la relation (3.14), et donc nous avons $\lambda a = -\xi a$. Ainsi, d'après cette dernière relation il s'ensuit qu'à la fois que si $\lambda \neq 0$ alors $a \in Z$. Par conséquent, on peut supposer que $\lambda = 0$.
Notons que pour chaque $x \in R$, $F(xa) = F(x)a$. En effet, du fait que $d_a(xa) = [a, xa] = [a, x]a = d_a(x)a$. Par suite, dès que F est une application de R dans C ; donc dans tous les cas on a $F = 0$.

Maintenant soit R un anneau semi-premier. On va choisir un idéal premier arbitraire P de R. Ainsi, l'application F peut être "réduite" à l'application F_P définie sur R/P. Alors, F_P est commutante sur R/P et par l'argument ci-dessus $F_P = 0$. Par suite, à partir de la semi-primalité de R, nous pouvons conclure que aussi $F = 0$.

3.4 Identité $d(u)u - ug(u) \in Z$

Théorème 3.4.1. *Soit R un anneau premier et soit U un idéal à gauche non nul de R. Supposons que les dérivations d et g de R sont tels que $d(u)u - ug(u) \in Z$ pour tout $u \in U$. Si $d \neq 0$ alors R est commutatif.*

Si nous supposons que $g \neq 0$ au lieu de $d \neq 0$, alors le résultat ne doit pas nécessairement être vrai. En effet, soit R un anneau premier quelconque ayant des éléments nilpotents, et soit $a(\neq 0) \in R$ de tel sorte que $a^2 = 0$. Soit U un idéal à gauche généré par a. On définit la dérivation intérieure g par $g(x) = [a, x]$. Alors il est clair que $Ug(u) = 0$ pour tout $u \in U$.

Remarque 3.4.1. Pour la preuve du Théorème 3.4.1 nous avons besoin de tois lemmes parmi eux deux qui sont principales. Le dernier lemme fait un cas très particulier du Théorème 4 dans l'article [3]. Cependant, nous présentons la preuve puisqu'elle est légèrement courte.

Lemme 3.4.1. [27] *Soit U un idéal à gauche non nul d'un anneau premier R, si d est une dérivation non nulle de R, alors d est non nulle sur U.*

Preuve. On suppose que

$$d(x) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

On a alors aussi $d(rx) = 0$ pour tout $r \in R$ et $x \in U$. Ainsi, $d(rx) = d(r)x + rd(x) = 0$ et donc, il en résulte que

$$d(r)x = 0 \qquad \text{pour tout } r \in R \text{ et } x \in U.$$

Par conséquent, $d(R)U = 0$. Mais $d(R)RU \subseteq d(R)U = 0$, cela donne que $d(R) = 0$ puisque R est premier. □

Lemme 3.4.2. [3] *Soit R un anneau semi-premier et U un idéal à gauche non nul. Si d est une dérivation de R centralisante sur U, alors d est commutante sur U.*

Preuve. On suppose que

$$[x, d(x)] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

En particulier,

$$[x^2, d(x^2)] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

Ainsi, on développe cette dernière identité, nous avons donc

$$\begin{aligned} [x^2, d(x^2)] &= [x^2, d(x)x + xd(x)] \\ &= [x^2, 2xd(x) - [x, d(x)]] \\ &= [x^2, 2xd(x)] - [x^2, [x, d(x)]] \\ &= 2x[x^2, d(x)] \\ &= 2x^2[x, d(x)] + 2x[x, d(x)]x \\ &= 4x^2[x, d(x)] \in Z. \end{aligned}$$

Ce qui donne que

$$4[x^2[x, d(x)], d(x)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U. \tag{3.15}$$

En développant encore une fois l'équation (3.15), nous obtenons

$$0 = 4[x^2[x, d(x)], d(x)] = 4[x, d(x)][x^2, d(x)] = 8x[x, d(x)]^2 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

Par la même procédure, nous arrivons à

$$8[x, d(x)]^3 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

Par suite, en invoquant la Remarque 2, on obtient

$$2[x, d(x)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U. \tag{3.16}$$

En multipliant l'équation (3.16) par x, on trouve

$$2x[x, d(x)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

Et il en résulte une fois que

$$[x^2, d(x)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U. \tag{3.17}$$

Maintenant, en linéarisant l'hypothèse original, i.e. $[x, d(x)] \in Z$, on aboutit à

$$[x, d(x)] + [x, d(y)] + [y, d(x)] + [y, d(y)] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U,$$

et donc, dès que $[x, d(x)], [y, d(y)] \in Z$, alors nous obtenons

$$[x, d(y)] + [y, d(x)] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U. \tag{3.18}$$

Nous voyons donc que l'équation (3.18) devient

$$2([x, d(y)] + [y, d(x)]) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U.$$

En combinant ce dernier résultat avec l'équation (3.16), on trouve

$$2y[x, d(x)] + 2x[y, d(x)] + 2x[x, d(y)] = 0 \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U.$$

Ainsi, on va utilisé les identités de crochet de Lie et donc cette dernière équation se réduit à

$$[xy + yx, d(x)] + [x^2, d(y)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U. \tag{3.19}$$

En remplaçant, y par yx dans l'équation (3.19), on obtient donc que

$$[xyx + yx^2, d(x)] + [x^2, d(yx)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U$$

ce qui implique que

$$(xy + yx)[x, d(x)] + [xy + yx, d(x)]x + [x^2, d(y)x] + [x^2, yd(x)] = 0. \tag{3.20}$$

On réécrit le premier terme comme $([x, y] + 2yx)[x, d(x)]$ et le dernier terme comme $[x^2, yd(x)] = [x^2, y]d(x) + y[x^2, d(x)]$, donc l'équation (3.20) devient comme

$$\begin{aligned}([x, y] + 2yx)[x, d(x)] + ([xy + yx, d(x)] + [x^2, d(y)])x \\ + [x^2, y]d(x) + y[x^2, d(x)] = 0 \text{ pour tout } x, y \in U.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Par suite, en utilisant les équations (3.16), (3.17) et (3.19), et donc l'équation (3.21) devient comme suit

$$[x, y][x, d(x)] + [x^2, y]d(x) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in U. \tag{3.22}$$

On prend maintenant $y = d(x)x$ dans l'équation (3.22), ce qui donne que

$$[x, d(x)]x[x, d(x)] + [x^2, d(x)]xd(x) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

En vertu à nouveau de l'équation (3.17) et en utilisant l'égalité $x[x, d(x)] = [x, d(x)]^2$, on peut voir que

$$[x, d(x)]x[x, d(x)] = 0 = [x, d(x)]^3 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

Finalement, il s'ensuit que

$$[x, d(x)] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in U.$$

D'où, on trouve le résultat demandé. □

Lemme 3.4.3. *Soit R un anneau premier non commutatif, et soit U un idéal à gauche non nul de R. Si une dérivation d de R est une application de U dans le centre de R, alors $d = 0$.*

Preuve. Prenons $u, v \in U$. Alors $d(u), d(v)$ et $d(vu)$ sont contenus dans Z. Par conséquent, nous avons donc

$$\begin{aligned} 0 = [d(vu), u] &= [d(v)u + vd(u), u] \\ &= [d(v)u, u] + [vd(u), u] \\ &= [v, u]d(u). \end{aligned}$$

D'où, il suit que

$$[v, u]d(u) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in U.$$

Ainsi, d'après la Remarque 1, il s'ensuit que soit $d(u) = 0$ ou u est contenu dans le centre de U. En d'autre terme, U est l'union de ses sous-ensembles suivants :

$$G = \{u \in U \mid d(u) = 0\} \quad \text{et} \quad H = \{u \in U \mid u \text{ est contenu dans le centre de U}\}.$$

Notons que les deux sont des sous-groupes additifs de U. Mais un groupe ne peut pas être l'union de deux sous-groupes propres. Ainsi, soit donc $G = U$ ou $H = U$.

Si $H = U$ alors U est commutatif ce qui est impossible par la Remarque 3. Par suite, on a donc $G = U$. En utilisant le Lemme 3.4.1 nous obtenons l'assertion du lemme. $\square$

***Preuve du théorème* 3.4.1.** Nous supposons que R est un anneau premier non-commutatif, d et g sont des dérivations de R tels que $d(u)u - ug(u) \in Z$ pour tout u dans l'idéal à gauche non nul U. Nous devons montrer que $d = 0$.

En linéarisant la relation $d(u)u - ug(u) \in Z$, on trouve

$$d(u)u + d(u)v + d(v)u + d(v)v - ug(u) - ug(v) - vg(u) - vg(v) \in Z \qquad \text{pour tout } u, v \in U. \tag{3.23}$$

Comme $d(u)u - ug(u), d(v)v - vg(v) \in Z$, la relation (3.23) devient

$$d(u)v + d(v)u - ug(v) - vg(u) \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in U. \tag{3.24}$$

Tout d'abord, on suppose qu'il existe $c \neq 0$ de tel sorte que $c \in Z \cap U$. Prenons $v = c$ dans la relation (3.24), nous obtenons

$$c(d(u) - g(u)) + (d(c) - g(c))u \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U. \tag{3.25}$$

Soit maintenant $v = c^2$ dans la relation (3.24), alors nous trouvons aussi que

$$c^2(d(u) - g(u)) + (d(c^2) - g(c^2))u \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

Ainsi, nous avons

$$c^2(d(u) - g(u)) + 2c(d(c) - g(c))u \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

Par suite, on aboutit

$$c\{c(d(u)-g(u))+(d(c)-g(c))u\}+c(d(c)-g(c))u \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

En utilisant le fait que le premier terme est contenu dans Z d'après la relation (3.25), nous trouvons donc que

$$c(d(c)-g(c))u \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

Ainsi, par la Remarque 3, il existe $u \in U$ pour lequel u n'est pas contenu dans Z et donc, il s'ensuit de la dernière relation, Remarque 4 et Remarque 1 que $d(c)=g(c)$. Manifestement, la relation (3.25) devient comme suit

$$c(d(u)-g(u)) \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

En invoquant à nouveau la Remarque 4, on trouve

$$(d(u)-g(u)) \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

D'après le Lemme 3.4.3, nous sommes obligés de conclure que $d=g$. Maintenant en appliquant le Lemme 3.4.2.
Pourtant, au cas où $Z \cap U \neq 0$ nous avons $d(u)u = ug(u) \quad$ pour tout $\quad u \in U$.

Nous supposons maintenant que $Z \cap U = 0$. Par hypothèse, on a $d(u)u - ug(u) \in Z$ pour tout $u \in U$, ce dernier commute avec chaque élément $v \in U$. Par conséquent, cela montre que $vug(u) \in U$. En effet,

$$(d(u)u-ug(u))v = v(d(u)u-ug(u)) \qquad \text{pour tout} \quad u,v \in U.$$

Ce qui donne que

$$vd(u)u - d(u)uv + ug(u)v = vug(u) \in U \qquad \text{pour tout} \quad u,v \in U.$$

En linéarisant ce dernier terme, on trouve

$$vug(u)+vug(w)+vwg(u)+vwg(w) \in U \qquad \text{pour tout} \quad u,v,w \in U.$$

Comme $vug(u), vwg(w) \in U$, on a alors

$$vug(w)+vwg(u) \in U \qquad \text{pour tout} \quad u,v,w \in U.$$

En remplaçant w par vu, on trouve que

$$vug(vu)+v^2ug(u) \in U \qquad \text{pour tout} \quad u,v \in U.$$

Par suite, $vug(vu) \in U$. On choisit $u \in U$ de tel sorte qu'on a $W = Uu \neq 0$; pour $w \in W$ nous avons alors $d(w)w - wg(w) \in U \cap Z = 0$.
Enfin, nous avons prouvé que dans tous les cas il existe un idéal à gauche non nul ; que nous le désignons par W, tel que

$$d(w)w = wg(w) \qquad \text{pour tout} \quad w \in W.$$

En linéarisant encore une fois cette relation, nous obtenons

$$d(u)u + d(w)u + d(u)w + d(w)w = ug(u) + ug(w) + wg(u) + wg(w) \quad \text{pour tout} \quad u, w \in W.$$

Le fait que $d(u)u = ug(u)$ et $d(w)w = wg(w)$, donne que

$$d(u)w + d(w)u = ug(w) + wg(u) \qquad \text{pour tout} \quad u, w \in W. \tag{3.26}$$

En remplaçant dans la relation (3.26) w par wu, on trouve que

$$d(u)wu + d(wu)u = ug(wu) + wug(u) \qquad \text{pour tout} \quad u, w \in W$$

ce qui implique

$$d(u)wu + (d(w)u + wd(u))u = u(g(w)u + wg(u)) + wug(u) \qquad \text{pour tout} \quad u, w \in W.$$

Cette relation peut être réécrite de la façon

$$(d(u)w + d(w)u - ug(w))u + w(d(u)u - ug(u)) = uwg(u) \qquad \text{pour tout} \quad u, w \in W;$$

et donc, en utilisant la relation (3.26) et le fait que $d(u)u = ug(u)$ nous arrivons à

$$wg(u)u = uwg(u) \qquad \text{pour tout} \quad u, w \in W. \tag{3.27}$$

En remplaçant w par vw et en appliquant la relation (3.27), ce qui conduit à

$$vuwg(u) = uvwg(u) \qquad \text{pour tout} \quad u, v, w \in W,$$

c'est-à-dire,

$$[v, u]wg(u) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v, w \in W.$$

Par suite, puisque $W \supseteq RW$, alors on a aussi que

$$[W, u]RWg(u) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

Ainsi, dès que R est premier, pour chaque $u \in W$ nous avons donc que soit

$$[W, u] = 0 \qquad \text{ou} \qquad Wg(u) = 0.$$

Les sous-ensembles $A = \{u \in W \mid [W, u] = 0\}$ et $B = \{u \in W \mid Wg(u) = 0\}$ sont des sous groupes additifs de W et par ce qui précède, leurs union est égale à W. Par conséquent, soit $A = W$ ou $B = W$.

Si $A = W$ et puisque W est un idéal à gauche de R alors R est commutatif par la Remarque 3. Par conséquent, forcément $B = W$. En particulier, $ug(u) = 0$ pour tout $u \in W$, ce qui donne donc que

$$d(u)u = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W. \tag{3.28}$$

En linéarisant la relation (3.28), nous obtenons

$$d(u)u + d(u)v + d(v)u + d(v)v = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W.$$

Ainsi, nous arrivons à

$$d(u)v + d(v)u = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W. \tag{3.29}$$

En remplaçant v par $d(u)v$ dans la relation (3.29), on peut donc écrire

$$d(u)^2v + d^2(u)vu + d(u)d(v)u = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W.$$

En utilisant la relation (3.29), on aura d'une manière immédiate que

$$d^2(u)vu = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W.$$

Il en résulte donc que

$$d^2(u)Wu = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

Comme $W \supseteq RW$, on a donc aussi que

$$d^2(u)RWu = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

On va utiliser la primalité de R, comme la preuve précédente, le fait qu'un groupe ne peut jamais être la réunion de deux sous-groupes propres et donc il s'ensuit que

$$d^2(u) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

Il en résulte, selon la relation (3.28) que

$$d(d(u)u) = d^2(u)u + d(u)^2 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

D'où, on a

$$d(u)^2 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

En linéarisant encore une fois cette dernière relation nous verrons que

$$d(u)d(v) + d(v)d(u) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W. \tag{3.30}$$

En multipliant à droite par $d(u)$ dans la relation (3.30), nous obtenons

$$d(u)d(v)d(u) + d(v)d(u)^2 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W$$

ce qui donne que

$$d(v)d(W)d(W)v = 0 \quad \text{et aussi que} \quad d(u)d(v)d(u) = 0. \tag{3.31}$$

Dans la dernière expression, on remplace v par wv on aura donc que

$$d(u)d(w)vd(u) + d(u)wd(v)d(u) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v, w \in W. \tag{3.32}$$

En multipliant à droite la relation (3.32) par $d(w)v$, on trouve que

$$(d(u)d(w)v)^2 + d(u)wd(v)d(u)d(w)v = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v, w \in W.$$

En utilisant la relation (3.31), on en déduit que

$$(d(u)d(w)v)^2 = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v, w \in W.$$

Cela signifie donc que $Wd(u)d(w)$ est un idéal à gauche nil d'indice trois, ce qui est impossible par la Remarque 5 sauf si $Wd(u)d(w) = 0$.

En remplaçant maintenant u par uv dans cette dernière relation, nous obtenons

$$Wd(u)vd(w) + Wud(v)d(w) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v, w \in W.$$

Ce qui montre que $Wd(u)vd(w) = 0$; puisque R est premier, dès que $Wd(W)RWd(W) \subseteq Wd(W)Wd(W) = 0$ donc nous devons conclure que $Wd(W) = 0$.

Suivant donc la relation (3.29), nous avons évidemment que

$$d(u)(uv) + d(uv)u = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W.$$

On décompose cette dernière relation, et en utilisant la relation (3.28) on aura immédiatement que

$$d(u)vu + ud(v)u = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W.$$

Ainsi, on trouve depuis que $Wd(W) = 0$ que

$$d(u)vu = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u, v \in W.$$

Par conséquent, il en résulte que

$$d(u)RWu = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u \in W.$$

Finalement, on conclut facilement que $d(W) = 0$. Mais alors $d = 0$ (depuis le Lemme 3.4.1). Cela termine la preuve du théorème. $\square$

Nous clôturons ce chapitre avec quelques corollaires du Théorème 3.4.1, qui ont été décrits au début de ce chapitre.

Corollaire 3.4.1. *Soit R un anneau premier et U un idéal à gauche non nul de R. S'il existe une dérivation non nulle d de R centralisante ou anti-centralisante sur U, alors R est commutatif.*

Corollaire 3.4.2. *Soit R un anneau premier non-commutatif et U un idéal à gauche non nul de R. On suppose qu'ils existent $a, b \in R$ et une dérivation d de R tel que l'application $x \mapsto d(x) + ax + xb$ est centralisante sur U. Alors d est une dérivation intérieure donnée par $d(x) = [x, a]$.*

Preuve. On suppose que

$$[d(u) + au + ub, u] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U. \tag{3.33}$$

La relation (3.33) peut être s'écrit comme suit

$$[d(u), u] + [a, u]u + u[b, u] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

Ce qui permet décrire aussi que

$$(d(u) - [u, a])u - u(d(u) - [b, u]) \in Z \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

De sorte que les applications $u \mapsto d(u) - [u, a]$ et $u \mapsto d(u) - [b, u]$ sont des dérivations de R. Alors, d'après le Théorème 3.4.1 nous avons $d(u) = [u, a]$. □

On prend la dérivation d est nulle dans le Corollaire 3.4.2 nous obtenons

Corollaire 3.4.3. *Soit R un anneau premier et U un idéal à gauche non nul de R. Si $a, b \in R$ sont tels que l'application $x \mapsto ax + xb$ est centralisante sur U. Alors $a \in Z$.*

Chapitre 4

Traces commutantes des applications biadditives

M. Brešar, *Centralizing Maps in Prime Rings with Involution*, Journal of Algebra 161 (1993), 342-357.

M. Brešar, *Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 525-546.

4.1 Introduction

Les applications biadditives $B : R \times R \to R$ où R est un anneau premier avec certaines propriétés supplémentaires, satisfaisant $B(x,x)x = xB(x,x)$ pour tout $x \in R$, sont caractérisés. En tant qu'application, nous déterminons la structure des dérivations de Lie de certains anneaux premiers.

Le but principal de ce chapitre est de passer de l'étude des dérivées commutantes à l'étude des applications additives arbitraires commutantes a bien sûr été une étape importante. Nous allons maintenant faire un pas en avant. Le sujet de ce chapitre dépasse considérablement les précédents par le niveau de généralité, la difficulté et surtout par la signification des applications. De toute façon, les résultats et les méthodes présentées du chapitre précédent nous montrent comment aborder ce paramètre plus complexe. Nous commençons dans la première section par le sujet le plus simple. Il a été traité pour la première fois dans l'article de l'auteur Brešar [10] en 1993. Pourtant, pour la deuxième section nous donnerons des résultats concernant les traces commutatntes des applications biadditives.

Un autre nom (et peut-être meilleur) est les applications quadratiques (cf. [1]), mais nous ne l'utiliserons pas puisque les traces des applications multi-additives dans plus de deux variables ne seront pas notre objectif mais peut être trouvées en détail dans l'article [22].

4.2 Bidérivation d'un anneau premier

La notion de bidérivation se pose naturellement dans l'étude des applications additives commutantes (voir [37], où les bidérivations satisfaisant certaines propriétés spéciales sont étudiées). Les exemples typiques sont les applications de la forme $(x, y) \mapsto c[x, y]$ où c est un élément dans le centre de R. Notre objectif est de montrer que, dans les anneaux premiers non-commutatives, ces exemples évidents sont essentiellement les seuls exemples.

Un cas particulier du lemme suivant, où B était une bidérivation obtenue à partir d'une application additive commutante f, a été prouvé dans l'article [8].

Lemme 4.2.1. *Soit $B : R \times R \to R$ une bidérivation d'un anneau R. Alors*

$$B(x, y)z[u, v] = [x, y]zB(u, v) \quad \textit{pour tous} \quad x, y, z, u, v \in R.$$

Preuve. Nous calculons $B(xu, yv)$ par deux méthodes différentes. En utilisant le fait que B est une dérivation dans le premier argument, nous obtenons

$$B(xu, yv) = B(x, yv)u + xB(u, yv). \tag{4.1}$$

Ainsi, puisque B est aussi une dérivation dans le deuxième argument, il en résulte de la relation (4.1) que

$$B(xu, yv) = B(x, y)vu + yB(x, v)u + xB(u, y)v + xyB(u, v).$$

De façon analogue, nous trouvons aussi que

$$\begin{aligned} B(xu, yv) &= B(xu, y)v + yB(xu, v) \\ &= B(x, y)uv + xB(u, y)v + yB(x, v)u + yxB(u, v). \end{aligned}$$

En comparant les deux relations obtenues, on aboutit à

$$B(x, y)[u, v] = [x, y]B(u, v) \quad \text{pour tout} \quad x, y, u, v \in R. \tag{4.2}$$

En remplaçant v par zv dans la relation (4.2), on obtient donc que

$$B(x, y)[u, z]v + B(x, y)z[u, v] = [x, y]B(u, z)v + [x, y]zB(u, v).$$

En utilisant encore une fois la relation (4.2) on trouve l'assertion du lemme. □

Notre prochain résultat est une légère généralisation du Lemme 3.2.1. Heureusement, la même preuve fonctionne, mais nous l'incluons par souci de complétude.

Lemme 4.2.2. *Soit S un ensemble quelconque et R un anneau premier. Si les fonctions $F : S \to R$, $G : S \to R$ satisfont*

$$F(s)xG(t) = G(s)xF(t) \qquad \textit{pour tout} \quad s, t \in S, \ x \in R, \ \textit{et } F \neq 0. \tag{4.3}$$

Alors il existe $\lambda \in C$, tel que $G(s) = \lambda F(s)$ pour tout $s \in S$.

Preuve. Prenons un $s \in S$ nous avons $F(s)xG(s) = G(s)xF(s)$ pour tout $x \in R$. Si $F(s) \neq 0$, le Lemme 2.6.1 implique que $G(s) = \lambda(s)F(s)$ pour un certain $\lambda(s) \in C$. Ainsi, si $s, t \in S$ sont tels que $F(s) \neq 0$ et $F(t) \neq 0$, la relation (4.3) peut être réécrite sous la forme $(\lambda(t) - \lambda(s))F(s)xF(t) = 0$. La primalité de R donne $\lambda(t) = \lambda(s)$. Par suite, il existe $\lambda \in C$ tel que $G(s) = \lambda F(s)$ pour tout $s \in S$ et $F(s) \neq 0$. Pourtant, si $F(s) = 0$, nous voyons depuis la relation (4.3) que $G(s) = 0$ puisque R est premier et $F \neq 0$. D'où, $G(s) = \lambda F(s)$ pour tout $s \in S$. $\square$

Théorème 4.2.1. *Soit R un anneau premier non-commutatif et soit $B : R \times R \to R$ une bidérivation. Alors il existe $\lambda \in C$ tel que $B(x, y) = \lambda[x, y]$ pour tout $x, y \in R$.*

Preuve. Soit $S = R \times R$ et on définit $A : S \to R$ par $A(x, y) = [x, y]$; $A \neq 0$ puisque R est non-commutatif, en vertu du Lemme 4.2.1, les fonctions $A, B : S \to R$ satisfont les exigences du Lemme 4.2.2. Par suite, $B(x, y) = \lambda A(x, y)$ pour tout $x, y \in R$. D'où, le résultat demandé. $\square$

Théorème 4.2.2. [9] *Soit R un anneau, et $B : R \times R \to R$ une application biadditive. On suppose que l'application $x \mapsto B(x, x)$ est centralisante. Si R est sans 2-torsion et sans 3-torsion, et si le centre Z de R ne contient aucun élément nilpotent non nul (en particulier, si R est semi-premier), alors l'application $x \mapsto B(x, x)$ est commutante.*

Preuve. Soit q une application définie de R vers R par $q(x) = B(x, x)$. Alors q est la trace d'une application biadittive. De plus, puisque R est sans 2-torsion, alors C contient l'élément $\frac{1}{2}$ (i.e., l'élément $1+1$ est inversible). Par suite, nous pouvons supposer que B est symétrique ; autrement, on remplace B par l'application $(x, y) \to B(x, y) + B(y, x)$.
Par hypothèse, pour chaque $x \in R$ nous avons $[B(x, x), x] \in Z$. En linéarisant ce dernier, nous donne immédiatement que

$$[B(x,x),x]+[B(x,x),y]+2[B(x,y),x]+2[B(x,y),y]+[B(y,y),x]+[B(y,y),y] \in Z.$$

Ainsi, comme $[B(x, x), x], [B(y, y), y] \in Z$, alors cette dernière relation devient

$$[B(x, x), y] + 2[B(x, y), x] + 2[B(x, y), y] + [B(y, y), x] \in Z. \tag{4.4}$$

On remplace x par $-x$ dans la relation (4.4). En comparant la relation ainsi obtenue avec la relation (4.4), nous obtenons

$$2([B(x, x), y] + 2[B(x, y), x]) \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

Depuis R est sans 2-torsion, il s'ensuit que

$$[B(x, x), y] + 2[B(x, y), x] \in Z \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R. \tag{4.5}$$

Maintenant, fixons $x \in R$ et montrons que l'élément $c = [B(x, x), x] \in Z$ est égal à 0. Prenons x^2 pour y dans la relation (4.5), on trouve

$$[B(x, x), x]x + x[B(x, x), x] + 2[B(x, x^2), x] \in Z. \tag{4.6}$$

En utilisant encore une fois le fait que R est sans 2-torsion, alors il s'ensuit de la relation (4.6) que

$$cx + u \in Z, \tag{4.7}$$

où u dénote l'élément $[B(x, x^2), x]$. En particulier, $cx + u$ commute avec x, ce qui donne donc que u et x commutent.
Remplaçons y par x et x par x^2 dans la relation (4.5), nous obtenons

$$[B(x^2, x^2), x] + 2[B(x^2, x), x]x + 2x[B(x^2, x), x] \in Z.$$

En utilisant le fait que B est symétrique, et donc cette relation peut être réécrite sous la forme $v+2ux+2xu \in Z$ où $v = [B(x^2, x^2), x]$. Cependant, u et x commutent, donc nous avons

$$v + 4ux \in Z. \tag{4.8}$$

En particulier, $v + 4ux$ commute avec x ; par conséquent, nous voyons que v et x commutent. Ainsi, l'élément $2xv = xv + vx = [B(x^2, x^2), x^2]$ reste dans Z par hypothèse. Par suite, on obtient

$$vx \in Z. \tag{4.9}$$

La relation (4.7) donne

$$0 = [B(x, x), cx + u] = c[B(x, x), x] + [B(x, x), u].$$

Ce qui signifie que

$$[B(x, x), u] = -c^2. \tag{4.10}$$

En invoquant la relation (4.8), nous avons donc

$$0 = [B(x, x), v + 4ux] = [B(x, x), v] + 4[B(x, x), u]x + 4u[B(x, x), x];$$

en appliquant la relation (4.10), alors nous obtenons

$$[B(x, x), v] = 4c^2x - 4cu. \tag{4.11}$$

Depuis la relation (4.9), on a

$$0 = [B(x, x), vx] = [B(x, x), v]x + v[B(x, x), x] = [B(x, x), v]x + cv.$$

En utilisant cette dernière relation et la relation (4.11), on trouve

$$4cux = 4c^2x^2 + cv. \tag{4.12}$$

Considérons $w = [B(x, x), 4cux]$. Il en résulte que

$$w = 4c[B(x, x), ux] = 4c[B(x, x), u]x + 4cu[B(x, x), x],$$

et donc, il s'ensuit de la relation (4.10) que

$$w = -4c^3x + 4c^2u. \tag{4.13}$$

D'autre part, selon la relation (4.12), nous avons donc

$$\begin{aligned} w &= [B(x,x), 4c^2x^2 + cv] \\ &= 4c^2\left([B(x,x),x]x + x[B(x,x),x]\right) + c[B(x,x),v] \\ &= 4c^2(2cx) + c[B(x,x),v], \end{aligned}$$

ainsi, simultanément avec la relation (4.11), donne

$$w = 12c^3x - 4c^2u.$$

En comparant cette dernière expression avec la relation (4.13), nous obtenons $16c^3x = 8c^2u$; ainsi $c^2u = 2c^3x$.
Par conséquent, il s'ensuit de la relation (4.10) que

$$c^4 = -[B(x,x), c^2u] = -[B(x,x), 2c^3x] = -2c^3[B(x,x),x] = -2c^4.$$

Par suite, $3c^4 = 0$ et donc $c^4 = 0$ puisque R est sans 3-torsion par hypothèse, cette relation implique que $c = 0$. Cela termine la preuve de ce théorème. □

4.3 Traces commutantes et applications de Lie

Nous commençons cette section en énumérant quelques résultats plus ou moins connus qui seront nécessaires dans la suite. Premièrement, selon la théorie *PI* standard, les anneaux premiers satisfaisant à S_4 peuvent être caractérisés de plusieurs manières :

Lemme 4.3.1. *Soit R un anneau premier. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *R satisfait S_4.*

(ii) *R est commutatif ou R s'injecte dans $M_2(F)$ avec F un corps.*

(iii) *R est algébrique de degré borné 2 sur C (i.e., pour tout $a \in R$ il existe un polynôme $x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2 \in C[x]$ satisfait par a).*

(iv) *R satisfait $[[x^2, y], [x, y]] = 0$ pour tout $x, y \in R$.*

Lemme 4.3.2. [17] *Soit R un anneau premier de caractéristique différente de 2 et on suppose $a, b \in R$ sont tels que $arb + bra = 0$ pour tout $r \in R$, alors soit $a = 0$ ou $b = 0$.*

Preuve. Par hypothèse on a :

$$arb + bra = 0 \qquad \text{pour tout} \quad r \in R. \tag{4.14}$$

On remplace r par sat dans l'équation (4.14) avec $s, t \in R$, nous obtenons

$$asatb + bsata = 0.$$

Ainsi, puisque $atb = -bta$ et $bsa = -asb$; en les remplaçant dans cette dernière équation, on trouve

$$-2asbta = 0 \qquad \text{pour tout} \quad s, t \in R.$$

Par suite, puisque R est premier et de caractéristique différente de 2, alors on obtient immédiatement que soit $a = 0$ ou $b = 0$. □

Lemme 4.3.3. *Si une dérivation δ d'un anneau premier non-commutatif R application de R dans son centre Z, alors $\delta = 0$.*

Supposons que q est commutante. Les résultats du chapitre précédent nous suggèrent quelle est la forme attendue de q dans ce cas. Notre théorème de base est un «analogue quadratique» du Théorème 3.3.1.

Théorème 4.3.1. *Soit R un anneau premier de caractéristique différente de 2, et soit $q : R \to R$ la trace d'une application biadditive. Supposons que q est commutante. Si R ne satisfait pas la condition S_4 alors q est de la forme*

$$q(x) = \lambda x^2 + \mu(x)x + \nu(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x \in R,$$

où λ est un élément dans C, μ est une application additive de R dans C, et ν est une application de R dans C.

Bien sûr, le Théorème 4.3.1 est une continuation de certains de nos résultats mentionnés ci-dessus [11, 9]. Cependant, nos principales motivations pour l'étude des traces commutantes des applications biadditives étaient les problèmes concernant les dérivations de Lie.

***Preuve du théorème* 4.3.1.** Il existe une application biadditive $B : R \times R \to R$ telle que $q(x) = B(x, x)$. Puisque la caractéristique de R est différente de 2, alors nous pouvons supposer que B est symétrique (voir le début de la preuve du Théorème 4.2.2).
On remplace x par $x + y$ dans la relation $[B(x, x), x] = 0$ nous obtenons immédiatement que

$$[B(x, x), y] + 2[B(x, y), x] + 2[B(x, y), y] + [B(y, y), x] = 0. \tag{4.15}$$

Prenons $-y$ par y dans la relation (4.15). En comparant la relation ainsi obtenue avec la relation (4.15) et en utilisant le fait que R est sans 2-torsion, on trouve

$$[B(x, x), y] + 2[B(x, y), x] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R. \tag{4.16}$$

En linéarisant la relation (4.16) (i.e., on remplace x par $x + z$), on obtient de façon immédiate que

$$2[B(x, z), y] + 2[B(x, y), z] + 2[B(z, y), x] = 0.$$

Depuis R est sans 2-torsion et le fait que B est symétrique, alors cette dernière relation devient

$$[B(x, z), y] + [B(x, y), z] + [B(y, z), x] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y, z \in R. \tag{4.17}$$

En remplaçant z par zw dans la relation (4.17), nous voyons que

$$[B(x, zw), y] + z[B(x, y), w] + [B(x, y), z]w + [B(y, zw), x] = 0.$$

En vertu encore une fois à la relation (4.17), la dernière relation peut donc être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}&[B(x,zw),y]+[B(y,zw),x]\\&\qquad=[B(x,z),y]w+[B(y,z),x]w+z[B(x,w),y]\\&\qquad\quad+z[B(y,w),x]\qquad\text{pour tout}\quad x,y,z,w\in R.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Maintenant fixons $z, w \in R$ et introduisons l'application $M : R \times R \to R$ définie par :

$$M(x,y)=[B(x,zw),y]+z[y,B(x,w)]+[y,B(x,z)]w.\tag{4.19}$$

D'autre part, d'après la relation (4.18), nous voyons que

$$M(x,y)=[x,B(y,zw)]+z[B(y,w),x]+[B(y,z),x]w.\tag{4.20}$$

Selon la relation (4.19) nous voyons que l'application $y \mapsto M(x, y)$ est égale à la somme des compositions des dérivations intérieures et des multiplications unilatérales. Par analogie, la relation (4.20) dire la même chose est vraie pour l'application $x \mapsto M(x, y)$. Ces deux observations sont le concept derrière la preuve du théorème.

Nous comparons les relations (4.19) et (4.20) nous trouvons que

$$M(x,x)=0\qquad\text{pour tout}\quad x\in R.\tag{4.21}$$

On considère $M(y, xw)$ où x et y sont des éléments arbitraires dans R et w est un élément fixé.
Utilisons la relation (4.19), nous trouvons que

$$\begin{aligned}M(y,xw)&=[B(y,zw),xw]+z[xw,B(y,w)]+[xw,B(y,z)]w\\&=[B(y,zw),x]w+x[B(y,zw),w]+z[x,B(y,w)]w\\&\quad+zx[w,B(y,w)]+[x,B(y,z)]w^2+x[w,B(y,z)]w\\&=\{[B(y,zw),x]+z[x,B(y,w)]+[x,B(y,z)]w\}\,w\\&\quad+x\,\{[B(y,zw),w]+z[w,B(y,w)]+[w,B(y,z)]w\}\\&\quad+[z,x][w,B(y,w)].\end{aligned}$$

Ainsi, il en résulte que

$$\begin{aligned}M(y,xw)=M(y,x)w+xM(y,w)+[z,x][w,B(y,w)]\\\text{pour tout}\quad x,y\in R.\end{aligned}\tag{4.22}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}M(xy,xw)=M(xy,x)w+xM(xy,w)+[z,x][w,B(xy,w)]\\\text{pour tout}\quad x,y\in R.\end{aligned}\tag{4.23}$$

En vue de la relation (4.23), nous considérons maintenant l'expression $M(xy, u)$. D'après la relation (4.20), il en résulte que

$$\begin{aligned}M(xy,u)&=[xy,B(u,zw)]+z[B(u,w),xy]+[B(u,z),xy]w\\&=x[y,B(u,zw)]+[x,B(u,zw)]y+zx[B(u,w),y]\\&\quad+z[B(u,w),x]y+[B(u,z),x]yw+x[B(u,z),y]w,\end{aligned}$$

et notons que cette relation peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} M(xy,u) = {} & xM(y,u) + [z,x][B(u,w),y] \\ & + M(x,u)y + [B(u,z),x][y,w] \qquad \text{pour tout} \quad x,y,u \in R. \end{aligned} \tag{4.24}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} M(xy,w) = {} & xM(y,w) + [z,x][B(w,w),y] \\ & + M(x,w)y + [B(w,z),x][y,w]. \end{aligned}$$

Depuis les relations (4.21) et (4.24), nous avons donc

$$M(xy,x) = xM(y,x) + [z,x][B(x,w),y] + [B(x,z),x][y,w].$$

En appliquant les deux dernières relations dans la relation (4.23), on aboutit

$$\begin{aligned} M(xy,xw) = {} & xM(y,x)w + [z,x][B(x,w),y]w \\ & + [B(x,z),x][y,w]w + x^2M(y,w) \\ & + x[z,x][B(w,w),y] + xM(x,w)y \\ & + x[B(w,z),x][y,w] + [z,x][w,B(xy,w)] \qquad \text{pour tout} \quad x,y \in R. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Avec cela, l'expression de $M(xy,xw)$ a été calculée de la première façon. Nous commençons le calcul de la deuxième expression, en utilisant la relation (4.24) :

$$\begin{aligned} M(xy,xw) = {} & xM(y,xw) + [z,x][B(xw,w),y] \\ & + M(x,xw)y + [B(xw,z),x][y,w] \qquad \text{pour tout} \quad x,y \in R. \end{aligned} \tag{4.26}$$

D'après les relations (4.21) et (4.22), nous avons donc

$$M(x,xw) = xM(x,w) + [z,x][w,B(x,w)].$$

En appliquant la relation (4.22) et la dernière relation dans la relation (4.26), on aboutit

$$\begin{aligned} M(xy,xw) = {} & xM(y,x)w + x^2M(y,w) + x[z,x][w,B(y,w)] \\ & + [z,x][B(xw,w),y] + xM(x,w)y \\ & + [z,x][w,B(x,w)]y + [B(xw,z),x][y,w] \\ & \qquad \text{pour tout} \quad x,y \in R. \end{aligned} \tag{4.27}$$

En comparant les relations (4.25) et (4.27), nous arrivons à

$$\begin{aligned} & [z,x][B(x,w),y]w + [B(x,z),x][y,w]w + x[z,x][B(w,w),y] \\ & \quad + x[B(w,z),x][y,w] + [z,x][w,B(xy,w)] \\ & \quad = x[z,x][w,B(y,w)] + [z,x][B(xw,w),y] \\ & \quad + [z,x][w,B(x,w)]y + [B(xw,z),x][y,w] \\ & \qquad \text{pour tout} \quad x,y \in R. \end{aligned} \tag{4.28}$$

D'après la relation (4.16), les identités suivantes sont valables :

$$\begin{aligned}
2[B(x,z),x][y,w]w &= -[B(x,x),z][y,w]w,\\
2[z,x][w,B(xy,w)] &= -[z,x][xy,B(w,w)],\\
2x[z,x][w,B(y,w)] &= -x[z,x][y,B(w,w)].
\end{aligned}$$

En multipliant la relation (4.28) par 2 et en appliquant les identités ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
2[z,x][B(x,w),y]w - [B(x,x),z][y,w]w + 2x[z,x][B(w,w),y]&\\
+ 2x[B(w,z),x][y,w] - [z,x][xy,B(w,w)]&\\
= -x[z,x][y,B(w,w)] + 2[z,x][B(xw,w),y]&\\
+ 2[z,x][w,B(x,w)]y + 2[B(xw,z),x][y,w].&
\end{aligned}$$

On développe cette dernière relation, ce qui donne que

$$\begin{aligned}
&2[z,x]B(x,w)yw - 2[z,x]yB(x,w)w - [B(x,x),z]yw^2\\
&\quad + [B(x,x),z]wyw + 2x[z,x]B(w,w)y - 2x[z,x]yB(w,w)\\
&\quad + 2x[B(w,z),x]yw - 2x[B(w,z),x]wy - [z,x]xyB(w,w)\\
&\quad + [z,x]B(w,w)xy\\
&= -x[z,x]yB(w,w) + x[z,x]B(w,w)y + 2[z,x]B(xw,w)y\\
&\quad - 2[z,x]yB(xw,w) + 2[z,x][w,B(x,w)]y\\
&\quad + 2[B(xw,z),x]yw - 2[B(xw,z),x]wy.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
&[z,x]yf_1(x,w) + [x^2,z]yq(w) + [z,B(x,x)]yw^2\\
&\quad + f_2(x,z,w)yw + f_3(x,z,w)y = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x,y,z,w \in R, \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
f_1(x,w) &= 2B(xw,w) - 2B(x,w)w,\\
f_2(x,z,w) &= 2[z,x]B(x,w) + [B(x,x),z]w\\
&\quad +2x[B(w,z),x] - 2[B(xw,z),x],\\
f_3(x,z,w) &= x[z,x]B(w,w) - 2x[B(w,z),x]w\\
&\quad +[z,x]B(w,w)x - 2[z,x]B(xw,w)\\
&\quad -2[z,x][w,B(x,w)] + 2[B(xw,z),x]w.
\end{aligned}$$

En remplaçant y par $y[z,x]u$ dans la relation (4.29), nous trouvons que

$$\begin{aligned}
&-[z,x]y[z,x]uf_1(x,w)\\
&\quad = [x^2,z]y[z,x]uq(w) + [z,B(x,x)]y[z,x]uw^2\\
&\quad\quad + f_2(x,z,w)y[z,x]uw + f_3(x,z,w)y[z,x]u.
\end{aligned}$$

D'autre part, en invoquant à nouveau la relation (4.29), ce qui donne

$$\begin{aligned}-[z,x]y[z,x]uf_1(x,w) &= [z,x]y(-[z,x]uf_1(x,w)) \\ &= [z,x]y[x^2,z]uq(w)+[z,x]y[z,B(x,x)]uw^2 \\ &\quad + [z,x]yf_2(x,z,w)uw+[z,x]yf_3(x,z,w)u.\end{aligned}$$

En comparant ces deux dernières relations, on arrive à

$$\begin{aligned}&([x^2,z]y[z,x]-[z,x]y[x^2,z])uq(w) \\ &\qquad = g_1(x,y,z)uw^2+g_2(x,y,z,w)uw+g_3(x,y,z,w)u,\end{aligned}\tag{4.30}$$

où

$$\begin{aligned}g_1(x,y,z) &= [z,x]y[z,B(x,x)]-[z,B(x,x)]y[z,x], \\ g_2(x,y,z,w) &= [z,x]yf_2(x,z,w)-f_2(x,z,w)y[z,x], \\ g_3(x,y,z,w) &= [z,x]yf_3(x,z,w)-f_3(x,z,w)y[z,x].\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le Lemme 2.6.1 et le Lemme 4.3.1, il s'ensuit que nous pouvons choisir $x,y,z\in R$ de tel sorte que l'élément $a=[x^2,z]y[z,x]-[z,x]y[x^2,z]$ soit non nul. Nous introduisons donc l'élément b et les applications F et G de R définies par $b=g_1(x,y,z)$, $F(w)=g_2(x,y,z,w)$ et $G(w)=g_3(x,y,z,w)$. Observons aussi que F est une application additive puisque f_2 et g_2 sont additives par rapport à w. Par la relation (4.30), nous avons donc

$$auq(w)=buw^2+F(w)uw+G(w)u \qquad \text{pour tout} \quad u,w\in R. \tag{4.31}$$

En remplaçant u par zau dans la relation (4.31), on trouve alors que $azauq(w)=bzauw^2+F(w)zauw+G(w)zau$. En vertu à la relation (4.31), ce qui conduit à

$$azauq(w)=az(auq(w))=azbuw^2+azF(w)uw+azG(w)u.$$

En comparant ainsi les deux relations obtenues, on aboutit

$$\begin{aligned}&(bza-azb)uw^2+(F(w)za-azF(w))uw+(G(w)za-azG(w))u=0 \\ &\qquad\qquad \text{pour tout} \quad z,u,w\in R.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Par la même procédure, on remplace u par ux dans la relation (4.32) et nous comparons cette relation avec la relation que nous avons obtenu par la multiplication de la relation (4.32) à droite par x. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}&(bza-azb)u[w^2,x]+(F(w)za-azF(w))u[w,x]=0 \\ &\qquad\qquad \text{pour tout} \quad x,z,u,w\in R.\end{aligned}\tag{4.33}$$

On substitue $u[w,x]y$ par u dans la relation (4.33), nous obtenons

$$(bza-azb)u[w,x]y[w^2,x]+(F(w)za-azF(w))u[w,x]y[w,x]=0.$$

Depuis la relation (4.33), le second terme dans cette relation est également égale à

$$-(bza-azb)u[w^2,x]y[w,x].$$

Par suite, il s'ensuit que

$$(bza - azb)R([w,x]y[w^2,x] - [w^2,x]y[w,x]) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x,y,z,w \in R. \tag{4.34}$$

Comme nous l'avons pointé plus haut, il existe $w, x, y \in R$ tels que

$$[w,x]y[w^2,x] \neq [w^2,x]y[w,x].$$

Par conséquent, la relation (4.34) implique que $bza = azb$ pour tout $z \in R$. Ainsi, puisque $a \neq 0$ le Lemme 2.6.1 assure que $b = \lambda a$ pour un certain $\lambda \in C$.
Maintenant, la relation (4.33), peut être réduite à

$$(F(w)za - azF(w))R[w,x] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x,z,w \in R;$$

et donc, pour chaque $w \in R$ nous avons soit $w \in Z$ ou $F(w)za = azF(w)$ pour tout $z \in R$.
L'application F est additive et donc l'ensemble de tous les éléments w satisfaisant la dernière relation est un sous groupe additif de R. Mais un groupe ne peut pas être l'union de deux sous groupes propres. Par hypothèse, R est non-commutatif, ce qui donne forcément que $F(w)za = azF(w)$ pour tout $w, z \in R$. Ainsi, en invoquant encore une fois le Lemme 2.6.1, ce qui donne que pour chaque $w \in R$ il existe $\mu(w) \in C$ tel que $F(w) = \mu(w)a$. Puisque F est additive, il en résulte que

$$(\mu(w+u) - \mu(w) - \mu(u))a = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u,w \in R.$$

Par conséquent, μ est additive. Or nous avons montré que les deux termes de la relation (4.32) sont égaux à zéro. Alors il s'ensuit que

$$G(w)za = azG(w) \qquad \text{pour tout} \quad z,w \in R.$$

Par suite, pour chaque $w \in R$ nous avons $G(w) = \nu(w)a$ pour un certain $\nu(w) \in C$.
En appliquant les dernières formules dans la relation (4.31), on aboutit

$$au(q(w) - \lambda w^2 + \mu(w)w - \nu(w)) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u,w \in R.$$

Puisque $a \neq 0$, nous sommes obligés de conclure que

$$q(w) = \lambda w^2 + \mu(w)w + \nu(w) \qquad \text{pour tout} \quad w \in R.$$

D'où, la preuve du théorème est complète. $\square$

Enfin, il y a la question étroitement liée sur les dérivations de Lie, c'est-à-dire si d est une dérivation de Lie alors elle satisfait

$$[d(x^2) - d(x)x - xd(x), x] = 0 \qquad \text{pour tout } x \in R. \tag{4.35}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} 0 = d\left([x^2,x]\right) &= [d(x^2),x] + [x^2,d(x)] \\ &= [d(x^2),x] + [x,d(x)]x + x[x,d(x)] \\ &= [d(x^2),x] - [d(x)x,x] - [xd(x),x] \\ &= [d(x^2) - d(x)x - xd(x),x]. \end{aligned}$$

En vue de cette observation, nous devons étudier les applications additives satisfaisant (4.35).

Théorème 4.3.2. *Soit R un anneau premier de caractéristique différente de 2 et 3. Supposons que l'application additive $d : R \to R$ satisfait (4.35). Si R ne satisfait pas S_4 alors d est de la forme*

$$d(x) = \gamma x + \delta(x) + \zeta(x) \qquad \text{pour tout} \quad x \in R,$$

où γ est un élément dans C, δ est une dérivation de R dans sa fermeture centrale R_C, et ζ une application additive de R dans C.

Preuve. Par hypothèse, l'application $x \mapsto d(x^2) - d(x)x - xd(x)$ est commutante. Clairement, cette application est la trace d'une application biadditive. Cependant, il s'ensuit du Théorème 4.3.1 que

$$d(x^2) - d(x)x - xd(x) = \lambda x^2 + \mu(x)x + \nu(x), \qquad x \in R, \tag{4.36}$$

où $\lambda \in C$; μ et ν sont des applications de R dans C, et μ est additive. Nous définissons δ par

$$\delta(x) = d(x) + \lambda x + \frac{1}{2}\mu(x), \qquad x \in R. \tag{4.37}$$

Notre intention est de montrer que δ est une dérivation de Jordan. D'après les relations (4.36) et (4.37) nous avons

$$\begin{aligned}\delta(x^2) &= d(x^2) + \lambda x^2 + \frac{1}{2}\mu(x^2)\\ &= d(x)x + xd(x) + 2\lambda x^2 + \mu(x)x + \nu(x) + \frac{1}{2}\mu(x^2),\end{aligned}$$

Tandis que $\delta(x)x + x\delta(x) = d(x)x + xd(x) + 2\lambda x^2 + \mu(x)x$. Alors

$$\delta(x^2) - \delta(x)x - x\delta(x) \in C \qquad \text{pour tout } x \in R. \tag{4.38}$$

En linéarisant la relation (4.38), on trouve

$$\begin{aligned}\delta(x^2) + \delta(xy + yx) + \delta(y^2) - \delta(x)x - \delta(x)y - \delta(y)x\\ - \delta(y)y - x\delta(x) - x\delta(y) - y\delta(x) - y\delta(y) \in C.\end{aligned}$$

Par suite, d'après la relation (4.38), nous voyons que

$$\delta(xy + yx) = \delta(x)y + \delta(y)x + x\delta(y) + y\delta(x) + \rho(x, y) \qquad \text{pour tout } x, y \in R, \tag{4.39}$$

où ρ est une application biadittive symétrique de $R \times R$ dans C.

Considérons $A = \delta(x(xy + yx) + (xy + yx)x)$. D'après la relation (4.39), nous avons

$$\begin{aligned}A &= \delta(x)(xy + yx) + \delta(xy + yx)x\\ &\quad + x\delta(xy + yx) + (xy + yx)\delta(x) + \rho(x, xy + yx)\\ &= 2\delta(x)yx + 2x\delta(y)x + 2xy\delta(x) + \delta(x)xy + \delta(y)x^2\\ &\quad + y\delta(x)x + x\delta(x)y + x^2\delta(y) + yx\delta(x) + 2\rho(x, y)x + \rho(x, xy + yx).\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons aussi

$$\begin{aligned}
A &= 2\delta(xyx) + \delta(x^2y + yx^2) \\
&= 2\delta(xyx) + \delta(x^2)y + \delta(y)x^2 + x^2\delta(y) + y\delta(x^2) + \rho(x^2, y) \\
&= 2\delta(xyx) + \delta(x)xy + x\delta(x)y + \delta(y)x^2 + x^2\delta(y) \\
&\quad + y\delta(x)x + yx\delta(x) + \rho(x, x)y + \rho(x^2, y).
\end{aligned}$$

En comparant les deux expressions ainsi obtenues pour A, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta(xyx) &= \delta(x)yx + x\delta(y)x + xy\delta(x) + \rho(x, y)x \\
&\quad - \frac{1}{2}\rho(x, x)y + \frac{1}{2}\rho(x, xy + yx) - \frac{1}{2}\rho(x^2, y).
\end{aligned} \tag{4.40}$$

En linéarisant la relation (4.40) (i.e., on remplace x par $x + z$), nous obtenons immédiatement que

$$\begin{aligned}
\delta(xyz + zyx) &= \delta(xyz) + \delta(zyx) \\
&= \delta(x)yz + x\delta(y)z + xy\delta(z) + \delta(z)yx \\
&\quad + z\delta(y)x + zy\delta(x) + \rho(x, y)z + \rho(z, y)x \\
&\quad - \rho(x, z)y + \frac{1}{2}\rho(x, zy + yz) + \frac{1}{2}\rho(z, xy + yx) - \frac{1}{2}\rho(xz + zx, y).
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Soit $B = \delta(xyx^2 + x^2yx)$. En appliquant la relation (4.41), nous obtenons

$$\begin{aligned}
B &= \delta(x)yx^2 + x\delta(y)x^2 + xy\delta(x^2) + \delta(x^2)yx + x^2\delta(y)x \\
&\quad + x^2y\delta(x) + \rho(x, y)x^2 + \rho(x^2, y)x - \rho(x, x^2)y \\
&\quad + \frac{1}{2}\rho(x, x^2y + yx^2) + \frac{1}{2}\rho(x^2, xy + yx) - \rho(x^3, y) \\
&= \delta(x)yx^2 + x\delta(y)x^2 + xy\delta(x)x + xyx\delta(x) + \frac{1}{2}\rho(x, x)xy \\
&\quad + \delta(x)xyx + x\delta(x)yx + \frac{1}{2}\rho(x, x)yx + x^2\delta(y)x + x^2y\delta(x) \\
&\quad + \rho(x, y)x^2 + \rho(x^2, y)x - \rho(x, x^2)y \\
&\quad + \frac{1}{2}\rho(x, x^2y + yx^2) + \frac{1}{2}\rho(x^2, xy + yx) - \rho(x^3, y).
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant les relations (4.39) et (4.40), nous voyons que

$$\begin{aligned}
B &= \delta((xyx)x + x(xyx)) \\
&= \delta(xyx)x + xyx\delta(x) + \delta(x)xyx + x\delta(xyx) + \rho(xyx, x) \\
&= \delta(x)yx^2 + x\delta(y)x^2 + xy\delta(x)x + 2\rho(x, y)x^2 - \frac{1}{2}\rho(x, x)yx \\
&\quad + (\rho(x, xy + yx) - \rho(x^2, y))x + xyx\delta(x) + \delta(x)xyx \\
&\quad + x\delta(x)yx + x^2\delta(y)x + x^2y\delta(x) - \frac{1}{2}\rho(x, x)xy + \rho(xyx, x).
\end{aligned}$$

En comparant les deux dernières relations obtenues, nous arrivons à

$$\begin{aligned}\rho(x,x)xy+\rho(x,x)yx-\rho(x,y)x^2-\rho(x,x^2)y\\ +(2\rho(x^2,y)-\rho(x,xy+yx))x\\ =-\frac{1}{2}\rho(x,x^2y+yx^2)-\frac{1}{2}\rho(x^2,xy+yx)+\rho(x^3,y)+\rho(xyx,x).\end{aligned}$$

Par conséquent, il s'ensuit de la dernière relation que

$$\begin{aligned}\rho(x,x)xy+\rho(x,x)yx-\rho(x,y)x^2-\rho(x,x^2)y\\ +(2\rho(x^2,y)-\rho(x,xy+yx))x\in C \qquad \text{pour tout } x,y\in R.\end{aligned} \quad (4.42)$$

En particulier, si $x=y$, alors la relation (4.42) devient

$$\rho(x,x)x^2-\rho(x,x^2)x\in C \qquad \text{pour tout } x\in R. \quad (4.43)$$

Par suite, il en résulte de la relation (4.43) que

$$\rho(x,x)\big[[x^2,u],[x,u]\big]=0 \qquad \text{pour tout } x,u\in R. \quad (4.44)$$

Supposons qu'il existe $x\in R$ tel que x ne vérifie pas la condition

$$\big[[x^2,u],[x,u]\big]=0 \qquad \text{pour tout } u\in R. \quad (4.45)$$

Par conséquent, d'après la relation (4.44), nous voyons que dans ce cas $\rho(x,x)=0$. Mais, alors aussi $\rho(x,x^2)=0$, autrement $x\in C$ depuis la relation (4.43) et donc, certainement x vérifie la relation (4.45). Cependant, la relation (4.42) donne

$$-\rho(x,y)x^2+(2\rho(x^2,y)-\rho(x,xy+yx))x\in C \qquad \text{pour tout } y\in R.$$

Par suite, puisque x ne vérifie pas (4.45), alors la relation ci-dessus implique que $\rho(x,y)=0$ pour tout $y\in R$. Nous avons donc prouvé que pour un $x\in R$ donné, soit $\rho(x,y)=0$ pour tout $y\in R$ ou x vérifie la relation (4.45).
Supposons que δ n'est pas une dérivation de Jordan, i.e. $\rho(x,y)\neq 0$ pour certains $x,y\in R$. Supposons de plus qu'il existe $z\in R$ dans lequel z ne vérifie pas (4.45). Nous avons montré que dans ce cas $\rho(z,y)=0$. Puisque $\rho(x,y)\neq 0$, nous avons alors aussi que $\rho(x+\alpha z,y)=\rho(x,y)+\alpha\rho(z,y)\neq 0$ pour chaque $\alpha\in C$. Par conséquent, les éléments $x+\alpha z$ satisfont la relation (4.45). Par hypothèse, nous devons choisir $u\in R$ de tel sorte que

$$t=\big[[z^2,u],[z,u]\big]\neq 0.$$

Ainsi, en invoquant encore une fois la relation (4.45), on aboutit

$$\big[[(x+\alpha z)^2,u],[x+\alpha z,u]\big]=0 \qquad \text{pour tout } \alpha\in C.$$

On développe cette dernière relation, on trouve

$$\big[[x^2,u]+\alpha[xz+zx,u]+\alpha^2[z^2,u],[x,u]+\alpha[z,u]\big]=0$$

Ce qui donne depuis la relation (4.45) que

$$\alpha r+\alpha^2 s+\alpha^3 t=0 \qquad \text{pour tout } \alpha\in C,$$

où
$$r = \big[[x^2, u], [z, u]\big] + [[xz + zx, u], [x, u]]\,,$$
et
$$s = [[xz + zx, u], [z, u]] + \big[[z^2, u], [x, u]\big]\,.$$
Par suite, pour α égal à $-1, 1$ et 2 respectivement, on aura donc le système d'équation suivant :
$$\begin{cases} 2r + 4s + 8t &= 0 \\ r + s + t &= 0 \\ -r + s - t &= 0 \end{cases}$$
Puisque R est de caractéristique différente de 2 et 3, on trouve à partir de ce système que $t = 0$, et cela contredit clairement l'hypothèse de $t \neq 0$. Manifestement, soit δ est une dérivation de Jordan ou (4.45) est valable pour tout $x \in R$. D'où, il s'ensuit du Lemme 4.3.1 que la deuxième relation ne peut pas être valable pour tout $x \in R$. D'où, forcément δ est une dérivation de Jordan.

Pourtant, nous devons montrer que δ est une dérivation de R. Dans l'article [20] Herstein a prouvé que si R est un anneau premier de caractéristique différente de 2 alors chaque dérivation de Jordan est une dérivation. Malheureusement, nous ne pouvons pas appliquer directement ce résultat puisque δ est une application de R vers sa fermeture centrale R_C. De toute façons, nous montrons que dans ce cas plus général, nous pouvons conclure que δ est une dérivation. On va faire une description de la preuve de cette assertion. [4, Thm. 3] dire que chaque dérivation de Jordan δ, d'un anneau premier sans 2-torsion satisfait
$$a^b r[a, b] + [a, b] r a^b = 0 \qquad \text{pour tout } a, b, r \in R, \tag{4.46}$$
où, $a^b = \delta(ab) - \delta(a)b - a\delta(b)$. De la preuve de ce résultat on voit que la relation (4.46) valable aussi pour les dérivations de Jordan qui sont applications de R dans un anneau contenant R.
Maintenant soit R un anneau premier et δ application de R dans sa fermeture centrale. Ainsi, d'après le Lemme 4.3.2, on trouve
$$a^b = 0 \quad \text{ou} \quad [a, b] = 0.$$
En utilisant le fait qu'un groupe ne peut pas être comme réunion de deux sous groupes propres, et donc il en résulte que soit $a^b = 0$ pour tout $a, b \in R$, i.e. δ est une dérivation de Jordan ou R est commutatif. Cependant, par la définition des dérivations de Jordan nous voyons que dans le cas commutatif, δ est trivialement est une dérivation. En effet, nous avons
$$\delta(x^2) = 2x\delta(x) \qquad \text{pour tout } x \in R. \tag{4.47}$$
En linéarisant cette expression, on aboutit
$$\delta(x^2) + 2\delta(xy) + \delta(y^2) = 2x\delta(x) + 2x\delta(y) + 2y\delta(x) + 2y\delta(y).$$
En utilisant la relation (4.47), nous arrivons à
$$2\delta(xy) = 2x\delta(y) + 2y\delta(x) \qquad \text{pour tout } x, y \in R.$$

Comme R est sans 2-torsion, on voit que cette dernière relation devient

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \qquad \text{pour tout } x, y \in R.$$

D'où, le résultat.

Finalement, d'après la relation (4.37) nous avons $d(x) = \gamma x + \delta(x) + \zeta(x)$ où $\gamma = -\lambda$ et $\zeta(x) = -\frac{1}{2}\mu(x)$. Et cela termine la preuve ce théorème. □

Clairement, les dérivations de Lie et les triples dérivations de Jordan sont des cas particuliers de triple dérivations de Lie. Dans l'article [28], Miers a étudié les triple dérivations de Lie des algèbres de Von Neumann. Pourtant, ici ne semble pas être un analogue théorique du résultat de Miers. Comme une application du Théorème 4.3.2, nous obtiendrons cependant un tel résultat.

Corollaire 4.3.1. *Soit R un anneau premier de caractéristique différente de 2 et 3. Soit d une triple dérivation de Lie de R. Si R ne satisfait pas S_4 alors d est de la forme $\delta + \zeta$, où δ est une dérivation de R dans sa fermeture centrale R_C et ζ est une application additive de R dans C.*

Preuve. Pour chaque $x, y \in R$ nous avons donc

$$0 = d\left([[x^2, x], z]\right) = \left[[d(x^2), x], z\right] + \left[[x^2, d(x)], z\right]$$

Ainsi, puisqu'on a

$$[x^2, d(x)] = x[x, d(x)] + [x, d(x)]x = -[d(x)x + xd(x), x] \qquad \text{pour tout } x \in R,$$

alors nous trouvons que

$$\left[[d(x^2) - d(x)x - xd(x), x], z\right] = 0 \qquad \text{pour tout } x, z \in R.$$

Par le résultat du Théorème 4.2.2, il s'ensuit que

$$\left[d(x^2) - d(x)x - xd(x), x\right] = 0 \qquad \text{pour tout } x \in R.$$

Le corollaire sera prouvé, si en montrant que $\delta = 0$. Puisque d et δ sont les deux triples dérivations de Lie, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\gamma\,[[x, y], z] + \zeta\,([[x, y], z]) &= (d - \delta)\,([[x, y], z]) \\
&= [[d(x) - \delta(x), y], z] + [[x, d(y) - \delta(y)], z] \\
&\quad + [[x, y], d(z) - \delta(z)] \\
&= [[\gamma x + \zeta(x), y], z] + [[x, \gamma y + \zeta(y)], z] + [[x, y], \gamma z + \zeta(z)] \\
&= 3\gamma\,[[x, y], z]\,.
\end{aligned}$$

Par suite, il en résulte de la relation ci-dessus que

$$2\gamma\,[[x, y], z] = \zeta\,([[x, y], z]) \in C \qquad \text{pour tout } x, y, z \in R.$$

Maintenant, si $\gamma \neq 0$, alors 2γ est inversible et donc la dernière relation implique que $[[x, y], z] \in Z$ pour tout $x, y, z \in R$.
L'application $z \mapsto D(z) = [[x, y], z]$ est une dérivation de R, de plus elle est application de R dans son centre Z, alors d'après le Lemme 4.3.3 on a $D(z) = 0$ pour tout $z \in R$. En utilisant encore une fois le Lemme 4.3.3 nous voyons que ceci est impossible. Par conséquent, nécessairement $\gamma = 0$ et le corollaire est prouvé. □

Chapitre 5

Applications centralisatrices dans les anneaux premiers et semi-premiers

J. Vukman, *Centralizers on prime and semiprime rings*, Comment. Math. Univ. Carolinae 38,2 (1997), 231-240.

5.1 Introduction

Le but principal de ce chapitre est d'examiner les identités satisfaites par les applications centralisatrices dans les anneaux semi-premiers. Pourtant, on prouve le résultat suivant qu'il a une importance cruciale dans la suite :
Soit R un anneau premier non-commutatif de caractéristique différente de deux et soient S et T des applications centralisatrices à gauches sur R. Supposons que $[S(x),T(x)]S(x)+S(x)[S(x),T(x)]=0$ est satisfaite pour tout $x\in R$. Si $S\neq 0$ $(T\neq 0)$, alors il existe λ dans le centroïde étendu de R tel que $T=\lambda S$ $(S=\lambda T)$.
A savoir cette recherche a été inspirée par le travail de B. Zalar. Toute application centralisatrice à gauche (resp. à droite) est Jordan centralisatrice à gauche (resp. à droite). Zalar a prouvé que chaque application centralisatrice à gauche (resp. à droite) est Jordan centralisatrice à gauche (resp. à droite) sur un anneau semi-premier sans 2-torsion. Nous limiterons notre attention sur les applications centralisatrices à gauche car tous les résultats présentés dans ce chapitre sont également valables pour les applications centralisatrices à droite, en raison de la symétrie gauche-droite.

5.2 Résultats préliminaires

Pour prouver notre premier résultat, nous avons besoin de trois lemmes simples que nous énonçons maintenant.

Lemme 5.2.1. *Supposons que les éléments a_i, b_i dans la fermeture centrale d'un anneau premier R satisfaisant $\sum a_ixb_i=0$ pour tout $x\in R$. Si $b_i\neq 0$ pour un certain i alors $a_i's$ sont C-dépendant.*

Nous avons déjà prouvé ce lemme dans le Chapitre 2, dans le cas plus large où les éléments a_i et b_i sont pris dans l'anneau quotients $Q_r(R)$ et $x\in I$.

Lemme 5.2.2. *Soit R un anneau premier non-commutatif et soit $T : R \to R$ une application centralisatrice à gauche. Si $T(x) \in Z$ pour tout $x \in R$, alors $T = 0$.*

Preuve. Supposons que

$$[T(x), y] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x, y \in R.$$

Prenons xz pour x dans cette relation, nous avons alors

$$\begin{aligned} 0 = [T(xz), y] &= [T(x)z, y] \\ &= T(x)[z, y] + [T(x), y]z \\ &= T(x)[z, y]. \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve que $T(x)[z, y] = 0$, ce qui donne que

$$T(x)w[z, y] = 0 \qquad \text{pour tous} \quad x, y, z, w \in R.$$

Par suite, il s'ensuit que $T = 0$, autrement R serait commutatif. □

Lemme 5.2.3. *Soit R un anneau premier non-commutatif et soient $S : R \to R$, $T : R \to R$ deux applications centralisatrices à gauche. Supposons que*

$$[S(x), T(x)] = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad x \in R. \tag{5.1}$$

Si $T \neq 0$ alors il existe $\lambda \in C$ tel que $S = \lambda T$.

Preuve. La linéarisation (i.e., en mettant $x + y$ pour x) de la relation (5.1) donne immédiatement que

$$[S(x), T(y)] + [S(y), T(x)] = 0. \tag{5.2}$$

En mettant dans la relation (5.2) yz pour y, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 =& [S(x), T(y)z] + [S(y)z, T(x)] = [S(x), T(y)]z + T(y)[S(x), z] \\ &+ [S(y), T(x)]z + S(y)[z, T(x)] = T(y)[S(x), z] + S(y)[z, T(x)]. \end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit que

$$T(y)[S(x), z] + S(y)[z, T(x)] = 0.$$

En mettant dans cette dernière relation yw pour y, on trouve

$$T(y)w[S(x), z] + S(y)w[z, T(x)] = 0. \tag{5.3}$$

Puisque nous avons supposé que $T \neq 0$ alors il en résulte du Lemme 5.2.1 qu'il existe $x, z \in R$ tel que $[T(x), z] \neq 0$. Maintenant la relation (5.3) et le Lemme 5.2.2 impliquent que $S(y) = \lambda_y T(y)$ où λ_y est un élément de C. En utilisant encore une fois la relation (5.3), en mettant $\lambda_y T(y)$ pour $S(y)$ et $\lambda_x T(x)$ pour $S(x)$, nous trouvons que

$$(\lambda_x - \lambda_y)T(y)w[T(x), z] = 0 \qquad \text{pour toutes paires} \quad y, w \in R.$$

Par suite, ce qui donne $(\lambda_x - \lambda_y)T(y) = 0$ puisque $[T(x), z] \neq 0$. Enfin, nous voyons que $\lambda_x T(y) = \lambda_y T(y)$ ce qui implique facilement que $\lambda_x = \lambda_y$, et cela termine la preuve du lemme. □

5.3 Classifications de certaines applications centralisatrices

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le premier théorème principal de ce chapitre.

Théorème 5.3.1. *Soit R un anneau semi-premier non-commutatif, sans 2-torsion et soient $S : R \to R$, $T : R \to R$ deux applications centralisatrices à gauches. Supposons que $[S(x), T(x)]S(x) + S(x)[S(x), T(x)] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans ce cas nous avons $[S(x), T(x)] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans le cas où R est un anneau premier et $S \neq 0$ ($T \neq 0$) alors il existe $\lambda \in C$ tel que $T = \lambda S$ ($S = \lambda T$).*

Preuve. Nous avons la relation

$$[S(x), T(x)]S(x) + S(x)[S(x), T(x)] = 0, \qquad x \in R. \tag{5.4}$$

En remplaçant dans la relation (5.4) $x + y$ pour y, nous obtenons

$$\begin{gathered}[S(x), T(x)]S(y) + S(y)[S(x), T(x)] + [S(x), T(y)]S(x) + S(x)[S(x), T(y)]+\\ [S(y), T(x)]S(x) + S(x)[S(y), T(x)] + [S(y), T(y)]S(x) + S(x)[S(y), T(y)]+\\ [S(y), T(x)]S(y) + S(y)[S(y), T(x)] + [S(x), T(y)]S(y)+\\ S(y)[S(x), T(y)] = 0.\end{gathered} \tag{5.5}$$

En mettant dans la relation ci-dessus $-x$ pour x, nous trouvons que

$$\begin{gathered}[S(x), T(x)]S(y) + S(y)[S(x), T(x)] + [S(x), T(y)]S(x) + S(x)[S(x), T(y)]+\\ [S(y), T(x)]S(x) + S(x)[S(y), T(x)] - [S(y), T(y)]S(x) - S(x)[S(y), T(y)]-\\ [S(y), T(x)]S(y) - S(y)[S(y), T(x)] - [S(x), T(y)]S(y)-\\ S(y)[S(x), T(y)] = 0.\end{gathered} \tag{5.6}$$

En faisant la somme de ces relations (5.5) et (5.6), ainsi en utilisant le fait que R est sans 2-torsion, nous arrivons à

$$\begin{gathered}[S(x), T(x)]S(y) + S(y)[S(x), T(x)] + [S(x), T(y)]S(x) + S(x)[S(x), T(y)]+\\ [S(y), T(x)]S(x) + S(x)[S(y), T(x)] = 0.\end{gathered} \tag{5.7}$$

En remplaçant dans cette dernière relation xy pour y, on trouve

$$\begin{gathered}0 = [S(x),T(x)]S(x)y + S(x)y[S(x), T(x)] + [S(x), T(x)y]S(x)+\\ S(x)[S(x), T(x)y] + [S(x)y, T(x)]S(x) + S(x)[S(x)y, T(x)] =\\ [S(x), T(x)]S(x)y + S(x)y[S(x), T(x)] + [S(x), T(x)]yS(x) + T(x)[S(x), y]S(x)+\\ S(x)[S(x), T(x)]y + S(x)T(x)[S(x), y] + [S(x), T(x)]yS(x) + S(x)[y, T(x)]S(x)+\\ S(x)[S(x), T(x)]y + S(x)^2[y, T(x)].\end{gathered}$$

Depuis la relation (5.4), le calcul ci-dessus peut être réduit à

$$\begin{gathered}S(x)y[S(x), T(x)]+2[S(x), T(x)]yS(x) + T(x)[S(x), y]S(x)+\\ S(x)T(x)[S(x), y]+S(x)[y, T(x)]S(x) + S(x)[S(x), T(x)]y+\\ S(x)^2[y, T(x)] = 0.\end{gathered} \tag{5.8}$$

En mettant $yS(x)$ pour y dans la relation (5.8), on obtient

$$S(x)yS(x)[S(x),T(x)] + 2[S(x),T(x)]yS(x)^2 + T(x)[S(x),y]S(x)^2 + S(x)T(x)[S(x),y]S(x) + S(x)[y,T(x)]S(x)^2 + S(x)y[S(x),T(x)]S(x) + S(x)[S(x),T(x)]yS(x) + S(x)^2[y,T(x)]S(x) + S(x)^2y[S(x),T(x)] = 0.$$

Ainsi, ce qui mène selon la relation (5.8) à

$$S(x)yS(x)[S(x),T(x)] + S(x)^2y[S(x),T(x)] = 0. \tag{5.9}$$

En substituant $T(x)y$ pour y dans la relation (5.9), nous pouvons voir que

$$S(x)T(x)yS(x)[S(x),T(x)] + S(x)^2T(x)y[S(x),T(x)] = 0. \tag{5.10}$$

En multipliant à gauche par $T(x)$ dans la relation (5.9), ce qui donne

$$T(x)S(x)yS(x)[S(x),T(x)] + T(x)S(x)^2y[S(x),T(x)] = 0. \tag{5.11}$$

A partir des relations (5.10) et (5.11), nous avons alors

$$[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)] + [S(x)^2,T(x)]y[S(x),T(x)] = 0.$$

Par suite, on développe cette dernière relation, nous voyons que

$$[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)] + ([S(x),T(x)]S(x) + S(x)[S(x),T(x)])y[S(x),T(x)] = [S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)] = 0.$$

D'où, il suit que

$$[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)] = 0.$$

En multipliant cette dernière relation à gauche par $S(x)$, on trouve

$$S(x)[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)] = 0 \quad \text{pour toutes paires } x,y \in R. \tag{5.12}$$

Depuis la relation (5.12), il s'ensuit que

$$S(x)[S(x),T(x)] = 0. \tag{5.13}$$

Maintenant, selon les relations (5.4) et (5.13), nous avons aussi

$$[S(x),T(x)]S(x) = 0. \tag{5.14}$$

En utilisant encore une fois la relation (5.13), nous voyons que

$$S(y)[S(x),T(x)] + S(x)[S(y),T(x)] + S(x)[S(x),T(y)] = 0 \quad \text{(voir la preuve de la relation (5.7)).} \tag{5.15}$$

En remplaçant dans la relation (5.15) xy pour y, nous trouvons que

$$0 = S(x)y[S(x),T(x)] + S(x)[S(x)y,T(x)] + S(x)[S(x),T(x)y] = S(x)y[S(x),T(x)] + S(x)[S(x),T(x)]y + S(x)^2[y,T(x)] + S(x)[S(x),T(x)]y + S(x)T(x)[S(x),y] = S(x)y[S(x),T(x)] + S(x)^2[y,T(x)] + S(x)T(x)[S(x),y].$$

D'où, il suit que

$$S(x)y[S(x),T(x)]+S(x)^2[y,T(x)]+S(x)T(x)[S(x),y]=0.$$

Ainsi, cette dernière relation peut être réécrite sous la forme

$$S(x)y[S(x),T(x)]+S(x)^2yT(x)-S(x)T(x)yS(x)+S(x)[T(x),S(x)]y=0,$$

ce qui implique selon la relation (5.13) que

$$S(x)y[S(x),T(x)]+S(x)^2yT(x)-S(x)T(x)yS(x)=0. \tag{5.16}$$

En multipliant à gauche la relation (5.16) par $T(x)$, nous arrivons à

$$T(x)S(x)y[S(x),T(x)]+T(x)S(x)^2yT(x)-T(x)S(x)T(x)yS(x)=0. \tag{5.17}$$

On substitue $T(x)y$ pour y dans la relation (5.16), ce qui donne

$$S(x)T(x)y[S(x),T(x)]+S(x)^2T(x)yT(x)-S(x)T(x)^2yS(x)=0. \tag{5.18}$$

En vertu à les relations (5.17) et (5.18), nous obtenons

$$0=[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]+[S(x)^2T(x)]yT(x)+[T(x),S(x)]T(x)yS(x)=$$
$$[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]+([S(x),T(x)]S(x)+S(x)[S(x),T(x)])yT(x)+$$
$$[T(x),S(x)]T(x)yS(x).$$

Ce qui permet d'écrire

$$[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]+[T(x),S(x)]T(x)yS(x)=0. \tag{5.19}$$

La substitution de $yS(x)z$ pour y dans la relation (5.19), donne

$$[S(x),T(x)]yS(x)z[S(x),T(x)]+[T(x),S(x)]T(x)yS(x)zS(x)=0. \tag{5.20}$$

D'autre part, en multipliant à droite la relation (5.19) par $zS(x)$, on aboutit

$$[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]zS(x)+[T(x),S(x)]T(x)yS(x)zS(x)=0. \tag{5.21}$$

En faisant la différence de ces deux dernières relations, on trouve

$$[S(x),T(x)]yA(x,z)=0, \tag{5.22}$$

où $A(x,z)$ représente le terme $[S(x),T(x)]zS(x)-S(x)z[S(x),T(x)]$. La substitution de $zS(x)y$ pour y dans la relation (5.22), donne

$$[S(x),T(x)]zS(x)yA(x,z)=0. \tag{5.23}$$

En multipliant à gauche la relation (5.22) par $S(x)z$, cela conduit à

$$S(x)z[S(x),T(x)]yA(x,z)=0. \tag{5.24}$$

En combinant les deux dernières relations, nous obtenons

$$A(x,z)yA(x,z) = 0 \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

D'où, il en résulte que $A(x,z) = 0$. En d'autre terme

$$[S(x), T(x)]zS(x) = S(x)z[S(x), T(x)]. \tag{5.25}$$

On substitue maintenant $z = T(x)y$ dans la relation (5.25), nous voyons que

$$[S(x), T(x)]T(x)yS(x) = S(x)T(x)y[S(x), T(x)]. \tag{5.26}$$

Pourtant, la relation (5.26) permet de remplacer dans la relation (5.19) le terme $[S(x), T(x)]T(x)yS(x)$ par le terme $S(x)T(x)y[S(x), T(x)]$. Ainsi, nous avons

$$S(x), T(x)]y[S(x), T(x)] - S(x)T(x)y[S(x), T(x)] = 0.$$

Ce qui peut être réduite à

$$T(x)S(x)y[S(x), T(x)] = 0. \tag{5.27}$$

En prenant dans la relation (5.27) $T(x)y$ pour y, nous trouvons que

$$T(x)S(x)T(x)y[S(x), T(x)] = 0. \tag{5.28}$$

En multipliant la relation (5.27) du côté gauche par $T(x)$, on aboutit

$$T(x)^2S(x)y[S(x), T(x)] = 0. \tag{5.29}$$

En combinant ces deux dernières relations, on obtient

$$T(x)[S(x), T(x)]y[S(x), T(x)] = 0.$$

En remplaçant y pour $yT(x)$ dans la relation ci-dessus, on trouve

$$T(x)[S(x), T(x)]yT(x)[S(x), T(x)] = 0 \quad \text{pour toutes paires } x, y \in R.$$

D'où, il suit que

$$T(x)[S(x), T(x)] = 0. \tag{5.30}$$

La substitution de $yT(x)$ pour z dans la relation (5.25) donne à cause de la relation (5.30) que

$$[S(x), T(x)]yT(x)S(x) = 0. \tag{5.31}$$

Depuis la relation (5.14), nous obtenons la relation suivante

$$[S(x), T(x)]S(y) + [S(x), T(y)]S(x) + [S(y), T(x)]S(x) = 0$$
(voir la preuve de la relation (5.7)).

En remplaçant dans la relation ci-dessus xy pour y, nous arrivons à

$$0 = [S(x), T(x)]S(x)y + [S(x), T(x)y]S(x) + [S(x)y, T(x)]S(x) =$$
$$[S(x), T(x)]yS(x) + T(x)[S(x), y]S(x) + [S(x), T(x)]yS(x) + S(x)[y, T(x)]S(x).$$

Par suite, il s'ensuit que

$$2[S(x),T(x)]yS(x)+T(x)[S(x),y]S(x)+S(x)[y,T(x)]S(x)=0.$$

Ainsi, d'après un calcul simple, cette dernière relation devient

$$[S(x),T(x)]yS(x)+S(x)yT(x)S(x)-T(x)yS(x)^2=0. \tag{5.32}$$

Pourtant, la relation (5.25) permet de remplacer dans la relation (5.32) le terme $[S(x),T(x)]yS(x)$ par le terme $S(x)y[S(x),T(x)]$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{gathered}0=S(x)y[S(x),T(x)]+S(x)yT(x)S(x)T(x)yS(x)^2=\\ S(x)yS(x)T(x)-T(x)yS(x)^2.\end{gathered}$$

D'où, il en résulte que

$$S(x)yS(x)T(x)=T(x)yS(x)^2. \tag{5.33}$$

En mettant dans la relation (5.33) $T(x)y$ pour y, nous voyons que

$$S(x)T(x)yS(x)T(x)=T(x)^2yS(x)^2. \tag{5.34}$$

La multiplication à gauche par $T(x)$ dans la relation (5.33) conduit à

$$T(x)S(x)yS(x)T(x)=T(x)^2yS(x). \tag{5.35}$$

En faisant la différence pour les relations (5.34) et (5.35) nous arrivons à

$$[S(x),T(x)]yS(x)T(x)=0,$$

ce qui donne simultanément avec la relation (5.31) que

$$[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]=0 \quad \text{pour toutes paires } x,y\in R.$$

D'où, il suit que

$$[S(x),T(x)]=0 \quad \text{pour tout } x\in R. \tag{5.36}$$

Dans le cas où R est un anneau premier la relation (5.36) et le Lemme 5.2.3 complète la preuve du théorème □

La proposition ci-dessous est une outil pour certains corollaires, on va juste l'appliquer, mais pour la preuve peut être trouvée dans l'article [40].

Proposition 5.3.1. [40] *Soit R un anneau semi-premier de caractéristique différente de deux et $T:R\to R$ une application additive de telle sorte satisfait $T(x^2)=T(x)x$ pour tout $x\in R$. Alors T est centralisatrice à gauche.*

Corollaire 5.3.1. *Soit R un anneau semi-premier sans 2-torsion et $T:R\to R$ centralisatrice à gauche. Supposons que $[T(x),x]x+x[T(x),x]=0$ pour tout $x\in R$. Dans ce cas T est centralisatrice.*

Preuve. Puisque les hypothèses du Théorème 5.3.1 sont remplies, alors nous avons

$$[T(x), x] = 0 \quad \text{pour tout } x \in R.$$

En utilisant cette relation, on voit que $T(x^2) = T(x)x = xT(x)$. Ainsi, nous trouvons que

$$T(x^2) = xT(x) \quad \text{pour tout } x \in R.$$

En d'autre terme, T est Jordan centralisatrice à droite. Par suite, selon la Proposition 5.3.1 on aboutit que T est centralisatrice à droite, ce qui termine la preuve. □

D'une manière symétrique, en mettant dans le Théorème 5.3.1 $T(x) = x$ et en appliquant à nouveau la proposition 5.3.1 on trouve le résultat suivant

Corollaire 5.3.2. *Soit R un anneau semi-premier sans 2-torsion et $T : R \to R$ centralisatrice à gauche. Supposons que $[T(x), x]T(x) + T(x)[T(x), x] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans ce cas T est centralisatrice.*

Les corollaires ci-dessus caractérisent les applications centralisatrices parmi tous les applications centralisatrices à gauche dans les anneaux semi-premiers sans 2-torsion. Ces deux résultats, ainsi que les corollaires 5.3.3 et 5.3.4 qui sont situés à la fin du document, constituent des contributions à la théorie du soi-disant les applications commutantes et centralisantes.

Nous sommes prêts pour notre prochain résultat.

Théorème 5.3.2. *Soit R un anneau semi-premier non-commutatif, sans 2-torsion et soient $S : R \to R$, $T : R \to R$ deux applications centralisatrices à gauches. Supposons que $[[S(x), T(x)], S(x)] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans ce cas nous avons $[S(x), T(x)] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans le cas où R est un anneau premier et $S \neq 0$ ($T \neq 0$) alors il existe $\lambda \in C$ tel que $T = \lambda S$ ($S = \lambda T$).*

Preuve. La relation

$$[[S(x), T(x)], S(x)] = 0, \tag{5.37}$$

donne immédiatement que

$$[[S(x), T(x)], S(y)] + [[S(x), T(y)], S(x)] + [[S(y), T(x)], S(x)] = 0$$
$$\text{(voir la preuve du Théorème 5.3.1).} \tag{5.38}$$

En remplaçant xy pour y dans la relation (5.38), nous obtenons

$$\begin{gathered}
0 = [[S(x), T(x)], S(x)y] + [[S(x), T(x)y], S(x)] + [[S(x)y, T(x)], S(x)] = \\
[[S(x), T(x)], S(x)]y + S(x)[[S(x), T(x)], y] + \\
[[S(x), T(x)]y + T(x)[S(x), y], S(x)] + [[S(x), T(x)]y + S(x)[y, T(x)], S(x)] = \\
S(x)[[S(x), T(x)], y] + [[S(x), T(x)], S(x)]y + [S(x), T(x)][y, S(x)] + \\
[T(x), S(x)][S(x), y] + T(x)[[S(x), y], S(x)] + [[S(x), T(x)], S(x)]y + \\
[S(x), T(x)][y, S(x)] + S(x)[[y, T(x)], S(x)].
\end{gathered}$$

Pour cette raison, nous arrivons à

$$S(x)[[S(x),T(x)],y]+3[S(x),T(x)][y,S(x)]+T(x)[[S(x),y],S(x)]+ \tag{5.39}$$
$$S(x)[[y,T(x)],S(x)]=0. \tag{5.40}$$

La substitution de $yS(x)$ pour y dans la relation (5.39), donne

$$\begin{gathered}0=S(x)[[S(x),T(x)],yS(x)]+3[S(x),T(x)][yS(x),S(x)]+\\ T(x)[[S(x),yS(x)],S(x)]+S(x)[[yS(x),T(x)],S(x)]=\\ S(x)[[S(x),T(x)],y]S(x)+S(x)y[[S(x),T(x)],S(x)]+\\ 3[S(x),T(x)][y,S(x)]S(x)+T(x)[[S(x),y]S(x),S(x)]+\\ S(x)[[y,T(x)]S(x)+y[S(x),T(x)],S(x)]=S(x)[[S(x),T(x)],y]S(x)+\\ 3[S(x),T(x)][y,S(x)]S(x)+T(x)[[S(x),y],S(x)]S(x)+\\ S(x)[[y,T(x)],S(x)]S(x)+S(x)[y,S(x)][S(x),T(x)]+S(x)y[[S(x),T(x)],S(x)].\end{gathered}$$

Par suite, depuis les relations (5.37) et (5.39), on trouve donc

$$S(x)[y,S(x)][S(x),(x)]=0.$$

Ainsi, la relation ci-dessus peut être réécrite sous la forme

$$S(x)yS(x)[S(x),T(x)]=S(x)^2y[S(x),T(x)]. \tag{5.41}$$

En remplaçant maintenant $T(x)y$ pour y dans la relation (5.41), nous obtenons

$$S(x)T(x)yS(x)[S(x),T(x)]=S(x)^2T(x)y[S(x),T(x)]. \tag{5.42}$$

D'autre part, en multipliant à gauche par $T(x)$ dans la relation (5.41), nous voyons que

$$T(x)S(x)yS(x)[S(x),T(x)]=T(x)S(x)^2y[S(x),T(x)]. \tag{5.43}$$

En faisant la différence de ces deux dernières relations, on aboutit

$$\begin{gathered}0=[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)]-[S(x)^2,T(x)]y[S(x),T(x)]=\\ [S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)]-\\ ([S(x),T(x)]S(x)+S(x)[S(x),T(x)])y[S(x),T(x)].\end{gathered}$$

Par l'hypothèse du théorème, on peut remplacer dans le calcul ci-dessus le terme $[S(x),T(x)]S(x)$ par le terme $S(x)[S(x),T(x)]$, ce qui donne

$$[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)]=2S(x)[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)].$$

En multipliant à gauche par $S(x)$ dans cette dernière relation, on obtient

$$S(x)[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)]=2S(x)^2[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]. \tag{5.44}$$

D'autre part, en mettant $[S(x),T(x)]y$ pour y dans la relation (5.41), cela conduit à

$$S(x)[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)]=S(x)^2[S(x),T(x)]y[S(x),T(x)]. \tag{5.45}$$

En combinant les relations (5.44) et (5.45), nous trouvons que

$$S(x)[S(x),T(x)]yS(x)[S(x),T(x)] = 0 \quad \text{pour tout } x, y \in R.$$

Ce qui implique depuis la semi-primalité de R que

$$S(x)[S(x),T(x)] = 0. \tag{5.46}$$

A partir de la relation (5.46) et l'hypothèse du théorème, nous avons aussi

$$[S(x),T(x)]S(x) = 0.$$

D'où, le reste de la preuve passe de la même manière que dans la preuve du Théorème 5.3.1. □

Le Théorème 5.3.2 donne, avec la Proposition 5.3.1, les caractérisations suivantes des applications centralisatrices parmi tous les applications centralisatrices à gauches dans les anneaux semi-premiers sans 2-torsion.

Corollaire 5.3.3. *Soit R un anneau semi-premier sans 2-torsion et $T : R \to R$ centralisatrice à gauche. Supposons que $[[T(x),x],x] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans ce cas T est centralisatrice.*

Corollaire 5.3.4. *Soit R un anneau semi-premier sans 2-torsion et $T : R \to R$ centralisatrice à gauche. Supposons que $[[T(x),x],T(x)] = 0$ pour tout $x \in R$. Dans ce cas T est centralisatrice.*

Bibliographie

[1] P. Ara, M. Mathieu, *Local multipliers of C*-algebras*, Springer-Verlag, 2003.

[2] R. Awtar, *Lie and Jordan structure in prime rings with derivations*, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 67-74.

[3] H. E. Bell and W. S. Martindale, *Centralizing mappings of semiprime rings*, Canad. Math. Bull. 30(1987), 92-101.

[4] M. Brešar and J. Vukman, *Jordan derivations on prime rings*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 37 (1988), 321-322.

[5] M. Brešar, *Jordan mappings of semiprime rings**, Journal of Algebra 127 (1989), 218-228.

[6] M. Brešar, *Jordan derivations on semiprime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 1003-1006.

[7] M. Brešar, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 108, No. 4 (Apr., 1990), pp. 859-860.

[8] M. Brešar, *Centralizing mappings on von Neumann algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 501-510.

[9] M. Brešar, *On a generalization of the notion of centralizing mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 114 (1992), 641-649.

[10] M. Brešar, *Centralizing Maps in Prime Rings with Involution*, Journal of Algebra 161 (1993), 342-357.

[11] M. Brešar, *Centralizing mappings and derivations in prime rings*, J. Algebra 156 (1993), 385-394.

[12] M. Brešar, *Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 525-546.

[13] M. Brešar, *On generalized biderivations and related maps**, Journal of Algebra 172 (1995), 764-786.

[14] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*, University of Ljubljana and Maribor Slovenia, March 2014.

[15] J. Cusak, *Jordan derivations on rings,* Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), 321-324.

[16] V. De Filippis, A. Mamouni and L. Oukhtite, *Generalized Jordan semiderivations in prime rings*, Canad. Math. Bull. 58 (2015), no. 2, 263-270.

[17] I. N. Herstein, *"Topics in Ring Theory"*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1969.

[18] I. N. Herstein, *"Rings with involution"*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.

[19] I. N. Herstein, *A note on derivations II*, Canad. Math. Bull. 22 (1979), 509-511.

[20] I. N. Herstein, *Jordan derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1104-1110.

[21] Y. Hirano, A. Kaya, and H. Tominaga, *On a theorem of Mayne*, Math. J. Okayama Univ. 25 (1983), 125-132.

[22] Pjek-Hwee Lee, Tsai-Lien Wong, Jer-Shyong Lin and Ren-June Wang, *Commuting Traces of Multiadditive Mappings*, Journal of Algebra 193 (1997), 709-723.

[23] A. Mamouni, L. Oukhtite and B. Nejjar, *On $*$-semiderivations and $*$-generalized semiderivations*, J. Algebra Appl. 16 (2017), no. 4, 1750075.

[24] Martindale, Wallace S., *Lie derivations of primitive rings*, Michigan J. Math. 11 (1964), 183-187.

[25] Martindale W.S., *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity*, Journal of Algebra 12 (1969), 576-584.

[26] J. Mayne, *Centralizing automorphisms of prime rings*, Canad. Math. Bull. 19 (1976), 113-115.

[27] J. Mayne, *Centralizing mappings of prime rings*, Canad. Math. Bull. 27 (1984), 122-126.

[28] C. R. Miers, *Lie triple Derivations of Von Neumann Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1978), 57-61.

[29] C. R. Miers, *Centralizing mappings of operator algebras*, J. Algebra 59 (1979), 56-64.

[30] B. Nejjar, A. Kacha, A. Mamouni, L. Oukhtite, *Commutativity theorems in rings with involution*, Comm. Alg. 45(2017), no. 2, 698-708.

[31] L. Oukhtite, *Posner's second theorem for Jordan ideals in rings with involution*, Expositiones Mathematicae 29 (2011), 415–419.

[32] Öznur Ölbasi*, *On left ideals of prime rings with generalized derivation*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics Volume 34 (2005), 27-32.

[33] E. C. Posner, *Derivations in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 1093-1100.

[34] J. Vukman and Irena Kosi-Ulbl, *On centralizers of semiprime rings*, Aequationes Math. 66 (2003) 277-283.

[35] J. Vukman and Irena Kosi-ulbl, *On centralizers of semiprime rings with involution*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 43 (1), 61–67 (2006).

[36] J. Vukman, *Commuting and centralizing mappings in prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), 47-52.

[37] J. Vukman, *Two results concerning symmetric biderivations on prime rings*, Aequationes Math. 40 (1990), 181-189.

[38] J. Vukman, *Derivation on semiprime rings*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 53 (1995), 353-359.

[39] J. Vukman, *Centralizers on prime and semiprime rings*, Comment. Math. Univ. Carolinae 38,2 (1997), 231-240.

[40] B. Zalar, *On centralizers of semiprime rings*, Comment. Math. Univ. Carolin. 32,4 (1991) 609-614.