كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵙⵉⵍⴰⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵉⵏⵉⵙⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Sciences et Techniques (LST)

CALCUL SCIENTIFIQUE ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Géométrie dans un domaine de l'espace euclidien

Présenté par :

- **Mohammed GMIRA**

Encadré par :

- **Pr Seddik GMIRA**
- **Pr Mohamed BELLHMAR**

Soutenu Le 11 Juin 2019 devant le jury composé de:

- **Pr Seddik GMIRA**
- **Pr Mohamed BELLHMAR**
- **Pr Mohammed BEKKALI**
- **Pr Mustapha ALAMI**

Année Universitaire 2018 / 2019

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Géométrie dans un domaine de l'espace euclidien

Mohammed GMIRA

11/06/2019

Contents

Remerciment:

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant le Professeur Seddik Gmira de m'avoir proposé ce projet de mémoire et le Profésseur Mohemed Bellahmar codirecteur pour son intérèt au sujet. J'espère que mon travail soit à la hauteur de leur attente.

Je remercie également mesieurs les Professeurs Mohamed Bekkali, Mustapha Alami membres de jury qui m'ont honoré de leur présence pour le soutient de mon mémoire.

Mes remérciments vont aussi à l'ensemble de tous les Professeurs de la FST de Fès qui assurent l'enseignement des Mathématiques.

Introduction:

Ce projet a pour objectif d'étudier des transformations élémentaires dans un espace euclidein de dimention fini. Nous commençons par définir des coordonnées locales sur un voisinage d'un point P qui seront des fonctions du point. Ensuite nous établissons une relation analytique entre deux systémes de coordonnées d'un domaine, ceci nous permet de donner la définition d'une courbe d'un espace euclidien. Nous pouvons définir aussi un vecteur tangent à la courbe dans un systéme de coordonnées donné. En changeant le système de coordonnée il en résulte une formule de changement entre les vecteurs tangents. Ainsi nous pouvons calculer les longueurs des courbes a l'aide de la métrique euclidienne, il en sort que la norme d'un vecteur tangent peut être interprétée comme une forme quadratique g_{ij} au voisinage d'un tel point P.

On peut voir alors qu'une métrique riemannienne n'est en fait que la donné des longueurs des vecteurs tangents (des formes quadratique g_{ij} au point P).

En partant de deux domaines Ω_x et Ω_z, on peut aboutir d'aprés ce qu'on vient de dire à une transformation élélmentaire entre ces deux domaines:

$$g'_{ij} = g'_{ij}(z^1, ..., z^n) \text{ où } g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}$$

la tansformation du domaine $\Omega_x \to \Omega_z$ est un déplacement si

$$g'_{ij}(z^1, ..., z^n) = g_{ij}(x^1(z), ..., x^n(z)).$$

Nous terminons ce projet par l'étude des exemples classiques sur des domaines d'un espace eulidien: groupe de translations, groupe d'homotetie,...

Chapter 1

Systèmes de coordonées.

1.1 Coordonnées cartésiennes dans l'espace.

Nos conceptes géomértiques fondamentaux sont les suivants:

1. La géométrie est construitée dans un espace contitue de points $P, Q, ...$

2. Conformement a la méthode de la géométrie analytique,on introduit dans cet espace des coordonnées cartésiennes

A chaque point de l'espace on fait correspondre des nombres rèeles $x^1, x^2, x^3, ...$ possédant les proprietés suivantes:

i)-Aux points distincts correspondent des collections differentes de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ et $(y^1, ..., y^n)$ se confondent si et seulement si on a :$x_i = y_i$ pour $i = 1, 2, 3, ...n$.

ii)-Réciproquement, à toute collection de nombres $(x^1, ..., x^n)$ où les x^i sont des nombres rèels correspond néssairement à un point P de l'espace en question.

Définition 1 *Tout espace muni d'un système de coordonées cartesiennes* $(x^1, ..., x^n)$ *presentant les propriétes ci-dessus est appelé espace cartésien de dimention n,et on note* $\mathbb{R}^n$*, le nombre n est la dimention de l'espace*

Bien souvent nous utilisons le mot "point" pour désigner une collection de nombre $(x^1, ..., x^n)$, l'exempe le plus élémentaire d'un espace cartésien est fourni par, la droite numerique les deux cas rencontrés en géométrie analytique sont les coordonées cartesiennes sur le plan et dans l'espace usuel a trois dimensions.

1.2 Changement de coordonnées.

Soit dans l'espace cartésien de dimention n une fonction numerique $f(P)$ c'est à dire fonction définissant la position d'un point P dans l'espace.En faisant intervenir les coordonnées cartésiennes, nous assimilons f à une fonction de n variables réelles si:

$$P = (x^1, ..., x^n) \text{ on a } f(P) = f(x^1, ..., x^n)$$

seules seront considérées des fonctions continues, ces fonctions et même continûment dérivables f peuvent être définies tant sur l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier que sur une partie ou "domaine",de celui-ci.

Définition 2 *On appelle domaine ou domaine sans bord (ensemble ouvert) une collection D de points dans $\mathbb{R}^n$ telle que si un point quelconque de cette collection lui appartient, tous les points suffisamment voisins des l'espace lui appartiennent également. plus exactement si $P_0 = (x^1, ..., x^n)$ est situé dans D, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si le point $P = (y^1, ..., y^n)$ vérifie les inégalités:*

$$\left|y^i - x^i\right| < \varepsilon \qquad \text{avec } i = 1, ..., n.$$

alors P est bien situé dans D.

Définition 3 *Le domaine à bord est un domaine sans bord auquel on a ajouté ses points frontières, le bord d'un domaine est l'ensemble des points frontières.*

Théorème 4 *Soit une collection des fonctions continues $f_1(P), ..., f_m(P)$, $P = (x^1, ..., x^n)$, définies dans l'espace $\mathbb{R}^n$. Si D est un ensemble de points P tels que:*

$$f_1(P) < 0, \qquad f_2(P) < 0, ..., f_m(P) < 0$$

alors D est un domaine sans bord.

Preuve. Supposons que $P_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ soit situé dans D ,en sorte que $f_1(P_0) < 0, ..., f_m(P_0) < 0$. Alors en vertu du théoreme sur la consérvation du signe d'une fonction continue, pour tout j on trouve un $\varepsilon_j > 0$ tel que les inégalités

$$\left|x^i - x_0^i\right| < \varepsilon_j \qquad \text{avec } i = 1, ..., n$$

impliquent l'inégalité $f_j(P) < 0$. En faisant $\varepsilon = \min(\varepsilon_{1,...}, \varepsilon_m)$, nous voyons que D contient tous les points $(x_1, ...x_n)$ tels que

$$\left|x^i - x^i_0\right| < \varepsilon.$$

Ainsi donc D est un domaine sans bord. ■

Supposons qu'un autre système des coordonnées $(z^1, ..., z^n)$ soit introduit dans le même domaine. On peut écrire alors:

$$\begin{array}{ll} x^i = x^i(z^1, ..., z^n) & i = 1, ..., n \\ z^j = z^j(x^1, ..., x^n) & j = 1, ..., n. \end{array}$$

Ces deux égalités reviennent tout simplement a dire qu'à chaque point de l'espace on peut associer tant la collection de coordonnées cartésiennes

$$(x^1, ..., x^n)$$

qu'une autre collection de coordonnées $(z^1, ..., z^n)$. On conçoit donc que les coordonnées cartesiennes se laissent exprimer en fonction de nouvelles coordonnées, et réciproquement. Etudions d'abord les changements de coordonnées linéaires dans l'espace

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j z^j \qquad\qquad i = 1, ..., n.$$

(On peut les écrire sous une forme plus condensée $x^i = a^i_j z^j$, avec sommation suivant les indicess répétés). Pour définir z en fonction de x il faut et il suffit que la matrice A=a^i_j admet un inverse $B = A^{-1} = b^i_j$. La matrice inverse définie comme suit:

$$b^i_j a^j_k = \delta_{ik} \qquad\qquad \text{où } \delta_{ik}\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pour } i = k \\ 0 \text{ pour } i \neq k \end{array}$$

(Toujours en sommant suivant les j). Ainsi donc, on peut exprimer les coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ d'un point P en fonction d'une nouvelle collection de nombre $z^1, ..., z^n$ au moyen de la matrice $A = (a^i_j)$. L'égalité $x^i = \sum_{j=1}^n a^i_j z^j$ s'écrit aussi sous la forme condensée:

$$X = AZ \qquad\qquad X = (x^1, ..., x^n) \text{ et } Z = (z^1, ..., z^n).$$

Nous avons dit que la matrice A doit être inversible, donc avoir le déterminant non nul (non dégénérée). On peut donc aussi exprimer les coordonnées nouvelles en fonction des anciennes:

$$Z = BX \qquad\qquad z^j = b^j_k x^k.$$

Considérons maintenant des coordonnées nouvelles quelconques

$$x^i = x^i(z^1, ..., z^n)$$

$i = 1, ..., n$, où les fonctions $x^i(z^1, ..., z^n)$ sont supposées continûment dérivables. Nous supposons que les les nouvelles coordonnées s'étendent à chaque point du domaine considéré de l'éspace, c'est à dire qu'à chaque collection de nombres $(x^1_0, ..., x^n_0)$ correspond dans ce domaine au moins une collection $(z^1_0, ..., z^n_0)$ telle que $x^i_{_0} = x^i(z^1_0, ..., z^n_0)$, $i = 1, ..., n$.

Définition 5 *Nous disons que le point* $P = (x^1_0, ..., x^n_0)$ *est un point non singulier dans le système de coordonnées* $(z^1, ..., z^n)$ *si la matrice*

$$A = (a^i_j) = (\frac{\partial x^i}{\partial z^j}).$$

avec $z^1_0, ..., z^n_0$ *tels que* $x_{0i} = x_i(z^1_0, ..., z^n_0)$, $i = 1, ..., n$, *a le déterminant non nul.*

La matrice A s'applle matrice Jacobienne du changement de coordonnées elle est désignée par

$$\hat{J} = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right).$$

Le détérminant de la matrice jacobienne s'applle le jacobien, il se désigne par:

$$J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = \det \hat{J}.$$

Dans le cours du calcul differentiel on établit le théorème suivant sur la transformation inverse (cas particulier du théorème général sur les fonctions implicites).

Etant donné un changement de coordonnées $x^i = x^i(z)$, $i = 1, ..., n$, tel que $x^i_{_0} = x^i(z^1_0, ..., z^n_0)$, et $J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) \neq 0$ pour $z^1 = z^1_0, ..., z^n = z^n_{_0}$

on peut, dans un voisinage assez restreint du point $(x_0^1, ..., x_0^n)$ exprimer les coordonnées $z^1, ..., z^n$ par les coordonnées $x^1, ..., x^n$ en sort que $z^i = z^i(x)$ avec $z_0^i = z^i(x^1, ..., x^n)$, $i = 1, ..., n,$. La matrice

$$(b_j^i) = \left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right)$$

c'est à dire la matrice jacobienne de la transformation inverse sera alors l'inverse de la matrice $(a_v^j) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial z^v}\right)$:

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} . \frac{\partial x^j}{\partial z^v} = \delta_{iv} = I_n.$$

Pour $n = 1$ cette assertion s'énonce comme suit: Si $x = x(z)$, $x^0 = x(z^0)$ et $\frac{\partial x}{\partial z} \neq 0$ pour $z = z^0$, on peut exprimer z en fonction de x, $z = z(x)$, da façon à avoir $z^0 = z(x^0)$ et

$$\frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial z} = 1$$

dans un voisinage suffisamment réstreint du point x^0. Dans le cas du changement linéaire de coordonnées ci-dessus $X = AZ$ c'est-à-dire $x^i = a_j^i z^j$. la matrice jacobienne $(\partial x / \partial z)$ se confond alors avec la matrice A car $a_k^i = \partial x^i / \partial z^k$ et ces nombres sont constants,est si det $A \neq 0$, ce changement est inversible dans l'espace, et $Z = BX$, où B est la matrice inverse de A.

Exemple 6 *Coordonnées polaires r, φ sur le plan on a:*

$$x^1 = r \cos \varphi \quad x^2 = r \sin \varphi$$

avec $r \geqslant 0$ dans tous les cas. Ensuite les couples (r, φ) et $(r, \varphi + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{N}$, définissent un même point $P = (x^1, x^2)$. Ainsi, si l'on veut que φ soit une coordonnée univoque, il faut qu'il y ait $0 < \varphi < 2\pi$. Si $r = 0$, tous les couples $(0, \varphi)$ définissent un seul et même point "l'origine". Voyons si l'origine est vraiment un point singulier en coordonnées polaires, la matrice jacobienne est

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial r} & \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x^2}{\partial r} & \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Exemple 7

$$\det A = r\cos\varphi.\cos\varphi - (-r\sin\varphi.\sin\varphi).$$

$$\det A = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

Le jacobien ne s'annule donc que pour $r = 0$, *et si on cherche à définir* r *en fonction de* x^1, x^2 *on trouve* $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$, *une fonction qui n'est pas différentiable pour* $(x^1, x^2) = (0, 0)$.*Dans le domaine* $\{r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ *les nouvelles coordonnées sont parfaitement univoques et exemptes de points singuliers.*

Chapter 2

Espace euclidien

2.1 Courbe dans l'espace euclidien

Soit un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace à trois dimensions, tel que si un point P est associé à ses trois coordonnées (x^1, x^2, x^3) et à un autre point Q ses trois coordonnées (y^1, y^2, y^3), le carré de la longeur du segment de droite joignant P et Q est:

$$l^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2.$$

On dit alors que l'espace considéré est euclidien, les coordonnées présentant les propriétés demandées s'appllent "coordonnées euclidiennes". On apprend en Algèbre linéaire qu'il est commode d'associer des vecteurs aux point de l'espace euclidien. Plaçons l'origine des coordonnées en O, menons un vecteur de O jusqu'au point étudié P et appllons-le rayon vecteur de ce point. Les coordonnnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) de P seront alors les coordonnées du vecteur. On peut faire la somme (coordonnée par coordonnée) de deux vecteurs $\overrightarrow{v} = (x^1, x^2, x^3)$ et $\overrightarrow{w} = (y^1, y^2, y^3)$ prenant naissance en O et aboutissant aux point P et Q respectivement, on obtient de cette façon un troisième vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ de coordonnées $(x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3)$. On peut aussi multiplier un vecteur par un scalaire. Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées (x^1, x^2, x^3) peut s'écrir sous la forme $\overrightarrow{v} = x^1\overrightarrow{e_1} + x^2\overrightarrow{e_2} + x^3\overrightarrow{e_3}$. Dans ce cas l'espace est de dimention trois, toutes ces considérations restent naturellement valables pour l'espace de dimention n quelconque. Dans l'espace euclidien, on définit une opération trés importante appelée produit scalaire de deux vecteurs.

Définition 8 *Etant donné deux vecteurs* $\overrightarrow{v} = (x^1, x^2, x^3)$ *et* $\overrightarrow{w} = (y^1, y^2, y^3)$, *leur produit scalaire euclidien est le nombre:*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i.$$

Ce produit scalaire présente les trois propriétés importantes:
a)$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.
b)$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \beta \langle v_2, w \rangle$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
c)$\langle v, v \rangle > 0$ si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
Soit maintenant une courbe dans l'espace euclidien, définie sous forme:

$$x^1 = f_1(t), ..., x^n = f_n(t).$$

Le paramétre t parcourt le segement compris entre a et b, les fonctions $f_i(t)$ sont des fonctions differentiables du paramétre t, $i = 1, ..., n$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial t} \right)$$

est appelé le vecteur vitesse ou le vecteur tangent de la courbe à l'instant t.

Définition 9 *On entend par longeur d'une courbe la quantité:*

$$l = \int_a^b \sqrt{\langle v(t), v(t) \rangle \, dt} = \int_a^b |v(t)| \, dt.$$

c'est l'integrale de la longeur du vecteur vitesse de la courbe.

Soient deux courbes

$$x^i = f^i(t) \quad x^i = g^i(t) \quad i = 1, ..., n$$

qui viennent de se couper à l'instant $t = t_0$ $(f^i(t_0) = g^i(t_0), \ i = 1, ..., n)$. Désignons par v, w les vecteurs tangentts à ces courbes pour $t = t_0$:

$$v = \left(\frac{df^1}{dt}, ..., \frac{df^n}{dt} \right)_{t=t_0}$$
$$w = \left(\frac{dg^1}{dt}, ..., \frac{dg^n}{dt} \right)_{t=t_0}$$

Définition 10 *On appelle angle formé par deux courbes au point de leur intersection pour $t = t_0$ un angle φ $(0 \leq \varphi < \pi)$ tel que l'egalité suivante soit vérifiée:*

$$\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{|v|\,|w|}.$$

On considére l'espace euclidien muni de coordonnées $(x^1, ...x^n)$, un nouveau systémé de coordonnées $(z^1, ...z^n)$ telles que:

$$x^i = x^i(z^1, ...z^n) \qquad\qquad i = 1, ..., n.$$

Soit une courbe définie paramétriquement en coordonnée nouvelle $z^i = z^i(t)$, $i = 1, ..., n$. Dans les coordonnées euclidiennes primitives, la courbe se définit par:

$$x^j = x^j(z(t)) = h^j(t) \qquad\qquad j = 1, ..., n.$$

Définition 11 *On applle vecteur vitesse de la courbe en coordonnée $(z^1, ...z^n)$, un vecteur*

$$v_z(t) = (v_z^1, ..., v_z^n) \qquad\qquad \textit{tel que: } v_z^j = \frac{dz^j}{dt}.$$

En coordonnée primitive $(x^1, ...x^n)$, le vecteur vitesse

$$v_x = (\frac{dh^1}{dt}, ..., \frac{dh^n}{dt})$$

est attacé au point $P = (h^1(t), ..., h^n(t))$. C'est le même vecteur que v_z. Voyons ce que deviennent les coordonnées du vecteur vitesse lorsqu'on change de système de coordonnées, on a:

$$v_x^i = \frac{dh^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j.$$

Le carré de la longeur est:

$$|v_x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dh^i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j} v_z^j\right)^2 = g_{jk} v_z^j v_z^k.$$

Avec

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^k}.$$

Conclusion 12 *En coordonnées quelconques* $(z^1, ..., z^n)$ *avec* $x = x(z)$, *le carré scalaire du vecteur vitesse* $v_z(t) = (\frac{dz^1}{dt}, ..., \frac{dz^n}{dt})$ *d'une courbe se définit par la formule*

$$|v_z|^2 = |v_x|^2 = g_{jk}\frac{dz^j}{dt}.\frac{dz^k}{dt}.$$

2.2 Vecteurs et formes quadratiques.

Nous venons de voir qu'en opérant un changement de coordonnées $x = x(z)$, les coordonnées du vecteur vitesse d'une courbe se transforme suivant la loi

$$v_x^i = Av_z^i. \quad *$$

ou plus brièvement

$$v_x = Av_z.$$

où A est la matrice jocobienne du changement de coordonnées. La loi de transformation $(*)$ peut être mise a la base de la définition d'un vecteur.

Définition 13 *On apple vecteur en un point* $P = (x_0^1, ..., x_0^n)$ *une collection de nombres* $\left(\xi^1, ..., \xi^n\right)$ *rapportée au systéme de coordonnées* $(x^1, ..., x^n)$. *Si deux systémes de coordonnées* $(x^1, ..., x^n)$ *et* $(z^1, ..., z^n)$ *se laissent transformer l'un dans l'autre par un changement de la forme* $x = x(z)$ *tel que* $x^i(z_0^1, ..., z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, ..., n$ *le meme vecteur se définiit en coordonnées nouvelles* z, *au point* $z_0^1, ..., z_0^n$ *par une autre collection de nombres* $\zeta^1, ..., \zeta^n$ *liée à la première par la formule*

$$\xi^i = \left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right)_{z^k = z_0^k} \zeta^j.$$

Envisageons un autre objet géométrique extrêmement répandu, à savoir: le gradient d'une fonction numérique $f(x^1, ..., x^n)$ est un vecteur aux composantes:

$$\text{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n}\right).$$

Posons $\xi_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$, $j = 1, ..., n$. Exprimons le gradient de cette même fonction au moyen d'autres coordonnées $(z^1, ..., z^n)$, où $x = x(z)$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f \left(x^1(z), ..., x^n(z)\right) &= \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial z^n}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x^a}\frac{\partial x^a}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial z^n}\right) \\
&= \left(\xi_a \frac{\partial x^a}{\partial z^1}, ..., \xi_b \frac{\partial x^b}{\partial z^n}\right)
\end{aligned}$$

Désignant par η_i les composantes $\frac{\partial f}{\partial z^i}$ du gradiant dans le nouveau systéme de coordonnées$(z^1, ..., z^n)$, on obtien:

$$\eta_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i}\xi_{j.}$$

Nous voyons qu'en opérant un changement de coordonnées, le gradient de la fonction se transforme autrement qu'un vecteur. Dans le texte qui suit, nous l'appellerons covecteur.

Supposons maintenant que les coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ soient euclidiennes; soit $\xi_1 = \left(\xi_1^1, ..., \xi_1^n\right)$, $\xi_2 = \left(\xi_2^1, ..., \xi_2^n\right)$ deux vecteur ayant pour origine un même point $P = (x_0^1, ..., x_0^n)$. Etant donné un autre système de coordonnées $(z^1, ..., z^n)$ tel que $x = x(z)$, $x(z_0) = x_0$, ces mêmes vecteures auront respectivement les coordonnées $(\eta_1^1, ..., \eta_1^n)$ et $(\eta_2^1, ..., \eta_2^n)$ liées aux anciennes coordonnées pa les formules:

$$\xi_1^i = a_j^i \eta_1^j \quad \xi_2^i = a_j^i \eta_2^j$$

dans lesquelles a_{ij} est la matrice jacobienne. Dans le premier système de coordonnées le produit scalaire des vecteurs ξ_1 et ξ_2 est:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_1^i \xi_2^i = \delta_{ij} \xi_1^i \xi_2^i.$$

Dans le système nouveau, il est:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ij}\eta_1^j\right)\left(a_{ij}\eta_2^j\right) = g_{jk}\eta_1^j \eta_2^k.$$

où la matrice des composantes

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_j^i a_k^i = \delta_{sq} a_j^s a_k^q.$$

Dans les coordonnées nouvelles, le produit scalaire de deux vecteurs se définit donc par la même matrice $G = (g_{ij})$. Traduite dans le langage algébrique, la formule précédente s'écrit:

$$G = A^T A$$

Voyons ce que deviennent les composantes g_{ij} de la matice G lorsqu'on effectue un changement de coordonnées. Introduisons dans le même domaine des coordonnées nouvelles $y^1, ..., y^n$ telles que $z^j = z^j(y)$, $j = 1, ..., n$. Posons:

$$B = (b_j^i) = \frac{\partial z^i}{\partial y^j}.$$

Nous savons que les vecteurs ξ_1, ξ_2 exprimés en coordonnées $y^1, ..., y^n$ ont alors les composantes $\left(\zeta_1^1, ..., \zeta_1^n\right)$ et $\left(\zeta_2^1, ..., \zeta_2^n\right)$, avec

$$\eta_1^i = b_j^i \zeta_1^j \quad \eta_2^i = b_j^i \zeta_2^j$$

Soit (h_{ij}) la matrice exprimant le produit scalaire en coordonnées (y). Cela revient à dire que:

$$\begin{aligned} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle &= h_{kl} \zeta_1^k \zeta_2^l = g_{ij} \eta_1^i \eta_2^j \\ &= g_{ij} b_k^i \zeta_1^k b_l^j \zeta_2^l \\ &= \left(b_k^i g_{ij} b_l^j\right) \left(\zeta_1^k \zeta_2^l\right) \end{aligned}$$

d'où

$$h_{kl} = b_k^i g_{ij} b_l^j.$$

On a donc

$$H = B^T G B.$$

Définition 14 *On appelle forrme quadratique (sur les vecteurs) en un point* $x_0^1, ..., x_0^n$ *une collection de nombres* g_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, *telle que* $g_{ij} = g_{ji}$, *rapportée au systeme de coordonnées* $(x^1, ..., x^n)$. *S'il existe un changement de coordonnées* $x = x(z)$ *par laquel on transforme les coordonnées* $(x^1, ..., x^n)$ *en* $(z^1, ..., z^n)$ *avec* $x^i(z_0^1, ..., z_0^n) = x_0^i$, $i = 1, ..., n$, *cette même forme quadratique* *se définit dans les coordonnées nouvelles* $(z^1, ..., z^n)$ *par une collection de nombres* h_{kl}*,* $k, l = 1, ..., n$ *telle que* $h_{kl} = h_{lk}$*, liée à la précédente par la formule:* $g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^j} h_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^i}$ $**$ *Sous sa forme matricielle, cette égalité s'écrit:*

$$G = A^T H A.$$

Si la forme quadratique g_{ij} *définie au oint* P *se transforme suivant la loi* $(**)$ *lorsqu'on effectue un changement de coordonnées, on définit sur les vecteurs tangents en* P *une fonction quadratique* $\{\xi, \xi\}$ *(ou* $\{\xi, \eta\}$*) en posant*

$$\{\xi, \xi\} = g_{ij} \xi^i \xi^j$$
$$\left(\{\xi, \eta\} = g_{ij} \xi^i \eta^j\right)$$

En vertu de la loi de transformation $(**)$, les fonctions ainsi définies ne dépendent pas du choix du système de coordonnées mais uniquement du point P et du vecteur ξ (ou des vecteurs ξ et η).

Chapter 3

Espaces Riemanniens et pseudoriemanniens

3.1 Métrique riemannienne

Nous avons déjà discuté la notion de longuer ou, comme l'on dit la métrique dans l'espace ou dans un domaine de l'espace . Par définition , la longueur d'une courbe différentiable $x^i = x^i(t)$ dans l'espace de dimention n muni de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ se définit par la formule:

$$l = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt \qquad\qquad \dot{x} = v = \tfrac{dx}{dt}.$$

La métrique riemannienne implique la donnée des longueurs des vecteurs $\xi = \left(\xi^1, ..., \xi^n\right)$ sous la forme

$$|\xi|^2 = g_{ij}\xi^i\xi^j$$

dans le système de coordonnées introduit. Cela revient à dire que $|\xi|^2$ est un fonction quadratique du vecteur ξ. La longueur du vecteur doit être independante du choix du système de coordonnées, aussi lorsqu'on effectue un changement de coordonnées, les quantités g_{ij} doivent-elles se transformer comme les composantes d'une forme quadratique, c'est à dire d'apres la formule(∗∗) du chapitre précédent.

Définition 15 *Par métrique riemannienne dans un domaine de l'espace* $\mathbb{R}^n$,*on entend une forme quadratique positive qui est définie sur les vecteurs tangents en chaque point et qui représente une fonction différentiable du point.*

Définition 16 *Par métrique riemannienne dans un domaine de l'espace, muni fe coordonnées quelconques* $(z^1, ..., z^n)$, *on entend une collection de fonction* $g_{ij} = g_{ji}(z^1, ..., z^n)$, $i, j = 1, ..., n$, *telle que la matrice* (g_{ij}) *soit défine positive. En introduisant dans le même domaine un nouveau système de coordonnées* $(y^1, ..., y^n)$, *tel que* $z^i = z^i(y^1, ..., y^n)$, $i = 1, ..., n$, *la métrique riemannienne se définie en coordonnées nouvelles par une collection de fonctions* $g'_{ij} = g'_{ji}(y^1, ..., y^n)$, $i, j = 1, ..., n$ *telles que:*

$$g'_{ij} = \frac{\partial z^k}{\partial y^i} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial y^j}.$$

Le fait que la matrice (g_{ij}) *soit définie positive implique* $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0$ *si le vecteur* ξ *est non nul. Etant donné la métrique riemannienne la longueur d'une courbe* $z^i = z^i(t)$ *s'exprime par la formule:*

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t)) \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}} dt.$$

Etant donné deux courbes:

$$z^i = f^i(t) \quad z^i = h^i(t)$$

qui se coupent pour $t = t_0$ *l'angle formé par ces courbes est uune quantité* φ $(0 \leq \varphi < \pi)$ *telle que:*

$$\cos\varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi| \, |\eta|}.$$

où $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\xi^i\eta^j$, $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$, ξ, η *étant les vecteurs vitesse au point* $t = t_0$.

Définition 17 *Soient* ξ, η *deux vecteurs dans un point* $P_0 = (z_0^1, ..., z_0^n)$. *Par leur produit scalaire, on entend alors la quantité* $\langle \xi, \eta \rangle$ *égale à:*

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}\left(z_0^1, ..., z_0^n\right) \xi^i \eta^j.$$

En vertu des lois de transformation des grandeurs (g_{ij}) et $\left(\xi^i\right)$ des coordonnées de vecteurs, le produit scalaire de deux vecteurs attachés au même point est toujours indépendant du choix du système de coordonées. Quand au produit scalaire de deux vecteurs attachés à deux point différents, il n'est pas invariant par le choix du système de coordonnées.

Définition 18 *La métrique $g_{ij} = g_{ji}(z)$ est dite euclidienne s'il existe des coordonnées $x^1, ..., x^n$, $x^i = x^i(z)$ telle que:*

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right) \neq 0, \qquad\qquad g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}.$$

On a alors en coordonnées $x^1, ..., x^n$

$$g'_{ij} = \delta_{ij} = \{ \begin{matrix} 1, i = j \\ \\ 0, i \neq j \end{matrix}$$

Les coordonnées $x^1, ..., x^n$ sont appelées coordonnées euclidiennes.

3.2 Métrique de Minkowski

Soient des grandeurs $g_{ij} = g_{ji}(z)$, $i, j = 1, ..., n$ telles que la matrice (g_{ij}) soit non dégénérée, mais que la forme $g_{ij}\xi^i\xi^j$ soit non positive. On parle alors de la métrique pseudoriemannienne. Nous disons que g_{ij} est une métrique pseudoriemannienne d'espace (p, q) , où $p + q = n$, si p et q sont des indices d'inértie positif et négatife de la forme quadratique $g_{ij}\xi^i\xi^j$.

Il est facile de voir que les quantités p et q sont définies corréctement, c'est à dire que les indices d'inértie sont indépendants du système de coordonnées. Si g_{ij} est une métrique pseudoriemannienne d'espèce (p, q) et $g^0_{ij} = g_{ij}(z^1_0, ..., z^n_0)$, on peut donner à la forme quadratique $g^0_{ij}\xi^i\xi^j$, par lechangement $\xi^i = \lambda^i_k\eta^k$, la représentation suivante:

$$\eta_1^2 + ... + \eta_p^2 - \eta_{p+1}^2 - ... - \eta_n^2.$$

Dans le voisinage d'un point, une telle représentation sera déjà impossible en général.

Définition 19 *On dit que la métrique $g_{ij} = g_{ji}(z)$ est pseudo-euclidienne s'il existe un nouveau système de coordonnées $x^1, ..., x^n$, $x^i = x^i(z)$,* $\det\left(\frac{\delta x^i}{\delta z^j}\right) \neq 0$, *tel que:*

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial z^i}\frac{\partial x^1}{\partial z^j} + ... + \frac{\partial x^p}{\partial z^i}\frac{\partial x^p}{\partial z^j} - \frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^i}\frac{\partial x^{p+1}}{\partial z^j} - ... - \frac{\partial x^n}{\partial z^i}\frac{\partial x^n}{\partial z^j}$$

On a en ces dérnier coordonnées

$$g'_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ si \ i \neq j \\ 1 \ si \ i = j, \ i \leq p \\ -1 \ si \ i = j, \ i \geq p+1 \end{array} \right|$$

Les coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ *sont appelées coordonnées pseudo-euclidiennes d'espèce* (p, q) *, où* $q = n - p$*. On peut introduire dans l'espave* $\mathbb{R}^n$ *la métrique pseudo-euclidiennes d'espèce* (p, q) *en définissant le "produit scalaire" de deux vecteurs* $\overrightarrow{v} = (v_1, ...v_n)$ *et* $\overrightarrow{w} = (w_1, ...w_n)$ *par la formule:*

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + ... + v_p w_p - v_{p+1} w_{p+1} - ... - v_n w_n.$$

Les coordonnées habituelles $x^1, ..., x^n$ *seront alors pseudo-euclidiennes.De même l'espace* $\mathbb{R}^n$ *muni de cette métrique s'applle l'espace pseudo-euclidien, et on le note* $\mathbb{R}^n_{p,q}$*.*

Chapter 4

Groupes des transformations élémentaires

4.1 Groupe des transformation d'un domaine.

Soit deux domaine Ω_x et Ω_z definis dans l'espace euclidien de dimention n aux coordonnées x^i et z^i avec $i = 1, ..., n$ où chaque point de Ω_z soit associé a un point de Ω_x tq: $x^i = x^i(z^1, ..., z^n)$ avec $i = 1, ..., n$, reciproquement on a: $z^j = z^j(x^1, ..., x^n)$ avec $j = 1, ..., n$. Alors on a une transformation du domaine Ω_z en le domaine Ω_x.

Remarque 20 *Il faut naturellement que les fonctions $x^i(z^1, ..., z^n)$ et leurs reciproques $z^j = z^j(x^1, ..., x^n)$ soient différentiables: alors les jacobiens $\det(\frac{\partial x}{\partial z})$ et $\det(\frac{\partial z}{\partial x})$ ne s'annulent nulle part. Si les deux domaines Ω_x et Ω_z se confondent: On entend donc par transformation d'un domaine Ω l'introduction dans ce domaine d'un nouveau systéme de coordonnées tel que les nouvelles coordonnées puissent, en tout point du domaine être exprimées en fonction des anciennes et réciproquement*

$$x^i = x^i\left(z^1, ..., z^n\right), \qquad\qquad z^i = z^i\left(x^1, ..., x^n\right).$$

Définition 21 *On applle une collection C d'elements un groupe, si les trois proprietés sont satisfaites:*
soient $f, g, h \in C$
1) $(f \circ g) \in C$.
2) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

3) $\exists\ e \in C : e \circ g = g \circ e$.
4) $\forall\ g \in C \exists\ g^{-1} \in C : g \circ g^{-1} = e$.

Proposition 22 *L'ensemble des transformations d'un domaine* Ω *a une structure de groupe.*
Preuve. *Soit* C *l'ensemble des transformations d'un domaine donné* Ω *:*
Soient φ *et* $\psi \in C$ *tels que:*

$$\varphi : x = x(z)$$

$$\psi : z = z(y)$$

alors $\varphi \circ \psi : x = x(z(y))$ *est une transformation de* $y \to x$ *la reciproque de* φ *est* φ^{-1} *donnée par:* $z = z(x)$, *la tansfromation identique est* $x^i = z^i$ *avec* $i = 1, ..., n$, *par suite nous devrons extraire du groupe des transformations* C, *quelques sous groupes utiles pour la géometrie.* ∎

Soit le domaine Ω muni d'une métrique (riemannienne ou pseudoriemannienne) définie en coordonnées $x^1, ..., x^n$.par une matrice symétrique non dégénérée $g_{ij} = g_{ji}(x^1, ..., x^n)$ et soit la transformation $x^i = x^i(z^1, ..., z^n)$,la même métrique se laisse exprimer en coordonnées $z_1, ..., z_n$ par la matrice

$$g'_{ij} = g'_{ij}(z^1, ..., z^n) \text{ où } g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial z^j}.$$

Définition 23 *La transformation* $x^i = x^i(z^1, ..., z^n)$ *est un déplacement pour la métrique donnée si*

$$g'_{ij}(z^1, ..., z^n) = g_{ij}(x^1(z), ..., x^n(z)).$$

donc un tel déplacement laisse strictement invariante la forme du produit scalaire (g_{ij}).

Lemme 24 *L'ensemble des déplacements d'une métrique donnée a une structure de groupe.*
Preuve. *Si deux transformations* φ *et* ψ *conservent la forme de la métrique alors leur composé* $\varphi \circ \psi$ *conservera la fome de la métrique il est de même pour* φ^{-1} *la reciproque conserve la forme de la métrique. Quand à la transformation identique elle conserve la forme de la métrique par définition.* ∎

4.2 Transformation du plan.

4.2.1 Translation dans le plan.

Soient x_1^1, x^2 deux coordonnées planaires La transformation la plus élémentaire du plan est la translation de ce plan dans son ensemble par un vecteur $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$. Cette transformation se présente comme suit:

$$x^1 = z^1 + v_1 \text{ et } x^2 = z^2 + v_2.$$

et la transformation inverse est donnée par le vecteur $\overrightarrow{-v} = (-v_1, -v_2)$,et se présente comme suit:

$$z^1 = x^1 - v_1 \text{ et } z^2 = x^2 - v_2.$$

Le produit de deux translations de vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ est:

$$x^1 = z^1 + (v_1 + w_1) \text{ et } x^2 = z^2 + (v_2 + w_2).$$

On obtient une nouvelle translation du vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. La translation identique est la translation du vecteur nul $\overrightarrow{0}$:

$$z^1 = x^1 + 0 \text{ et } z^2 = x^2 + 0.$$

Remarque 25 *Ainsi l'ensemble des translations du plan a une structure de groupe,et chaque translation correspand à un vecteur $\overrightarrow{\omega}$ dans le plan ,et la translation inverse correspond au vecteur $\overrightarrow{-\omega}$. Cela signifie,que le groupe des translations est isomorphe au groupe des vecteurs dans le plan,et il s'agit d'un groupe abélien.*

4.2.2 Homothéstie dans le plan.

Un autre exemple fourni par les homothéties du plan.Ce ne sont pas des deplacements au sens propre.Exprimé en coordonnées ,l'homothétie s'écrit:

$$x^1 = \lambda.z^1 \text{ et } x^2 = \lambda.z^2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

et l'homothétie inverse du scalaireλ est l'homothétie du scalaire $1/\lambda$ se présente comme suit

$$z^1 = \frac{1}{\lambda}x^1 \text{ et } z^2 = \frac{1}{\lambda}x^2 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Le produit de deux homothétie de scalaire λ et μ s'écrit:

$$x^1 = \lambda.\mu.z^1 \text{ et } x^2 = \lambda.\mu.z^2 \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

L'homotétie identique est définie par le scalaire $\lambda = 1$.

Remarque 26 *Les homothéties du plan ont également une structure de groupe Abélien. Ce groupe est isomorphe au groupe des nombres réels non nuls pour la multiplication.*

4.2.3 Translation et homothétie dans un plan.

Il s'agit des transformations de la forme:

$$x^1 = \lambda z^1 + v_1 et x^2 = \lambda z^2 + v_2 \quad \text{où} \quad \lambda \neq 0.$$

Si $z^1 = \mu y^1 + w_1$,$z^2 = \mu y^2 + w_2$ avec $\mu \neq 0$ est une autre transformation la composé de ces deux transformation sera de la même forme:

$$x^1 = \lambda(\mu y^1 + w_1) + v_1$$

$$x^1 = \lambda\mu y^1 + \lambda w_1 + v_1$$

$$x^1 = \lambda\mu y^1 + (v_1 + \lambda w_1)$$

la même chose pour la deuxieme coordonée x^2,on trouve: $x^2 = \lambda\mu y^2 + (v_2 + \lambda w_2)$Si on definit la premiére transformation par le couple $(\lambda, \overrightarrow{v})$,et la deuxieme par le couple $(\mu, \overrightarrow{w})$leur composée sera sous la forme

$$(\lambda, \overrightarrow{v}) \circ (\mu, \overrightarrow{w}) = (\lambda\mu, \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}).$$

La transformation inverse de la transformation $(\lambda, \overrightarrow{v})$ sera $(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{v})$. L'élément neutre de cette collection est definit par le couple $(1, \overrightarrow{0})$.

Remarque 27 *L'ensemble constitué des homothéties de scalaire non nul et des translations forme un groupe non abélien car* $(\lambda, \overrightarrow{v}) \circ (\mu, \overrightarrow{w}) \neq (\mu, \overrightarrow{w}) \circ (\lambda, \overrightarrow{v})$.

4.2.4 Transformations linéaires dans le plan.

Les transformations linéaires dans le plan s'écrivent sous la forme:

$$\begin{aligned} x^1 &= az^1 + bz^2 \\ x^2 &= cz^1 + dz^2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

La matrice d'une telle transformation est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,et pour que cette transformation soit inversible il faut que le déterminant $\Delta = ad - bc \neq 0$ c'est à dire que la matrice soit non dégénérée.Soit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice non dégénérée. S'il existe une autre matrice non dégénérée telle que

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

alors la transformation composée des deux matrice est:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + dc' & b'c + dd' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x^1 &= (aa' + bc')\, y^1 + (ab' + bd')\, y^2 \\ x^2 &= (a'c + dc')\, y^1 + (b'c + dd')\, y^2 \end{aligned}$$

Cette transformation est également linéaire définie par le produit des deux matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

la transformation identique est caractérisée par la matrice unité de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 28 *L'ensemble des transformations linéaires admet une structure de groupe non abélien,et ce dérnier est isomorphe au groupe des matrices inversibles de* $M_2(\mathbb{R})$.

4.2.5 Groupe affine

Chaque transformation dans ce groupe est définie par le vecteur $(A, \overrightarrow{v})$,où A est une matrice non dégénérée et $\overrightarrow{v}$ est un vecteur dans le plan

$$x = Az + \overrightarrow{v}$$

La composée de deux transformation de ce type définie par les couples $(A, \overrightarrow{v})$ et $(B, \overrightarrow{w})$ s'écrit:

$$(A, \overrightarrow{v})(B, \overrightarrow{w}) = (AB, \overrightarrow{v} + A\overrightarrow{w})$$

est une transformation affine. Le groupe affine est le produit semi-direct du groupe des matrices non dégénérées de $M_2(\mathbb{R})$ et le groupe des vecteurs du plan. Soient x^1, x^2 les coordonnées euclidiennes sur le plan muni de la métrique euclidienne g_{ij} Exprimée à l'aide des coordonnées, la métrique g_{ij} s'écrit:

$$g_{ij} = \delta_{ij}.$$

Voyons lesquelles des transformations affines sont des déplacements pour la métrique euclidienne. En coordonnées (z^1, z^2) la métrique se définit par la matrice g'_{ij}, où

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\delta_{kl}\frac{\partial x^l}{\partial z^j} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial x^k}{\partial z^j}.$$

La matrice jacobienne $\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i}\right)$ de la transformation affine se confond avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si la transformation affine est un déplacement, on a $g'_{ij} = \delta_{ij}$, l'égalité se décomposant alors en trois équations simultanées.

$$a^2 + c^2 = 1 \quad ab + cd = 0 \quad b^2 + d^2 = 1 \ *$$

équivalentes à l'équation matricielle:

$$A^T A = 1.$$

Cela signifie que la matrice A est orthogonale. Ainsi donc, la tronsformation affine est un déplacement pour la métrique si et seulement si la matrice est orthogonale. L'équation $(*)$ admet une solution explicite. Puisque $a^2 + c^2 = 1$, il existe un angle φ tel que:

$$a = \cos\varphi \text{ et } b = \sin\varphi.$$

On a alors:

$$d = \cos\varphi,\ b = -\sin\varphi \quad \textit{où} \quad d = -\cos\varphi,\ b = \sin\varphi\ .$$

On a pour chaque φ deux types de matrices orthogonales:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices du premier type définissent une rotation du plan tout entier de l'angle φ autour de l'origine des coordonnées. Le déterminant d'une telle matrice est égale à 1.les matrice du deuxième type sont une rotation de l'angle φ suivi d'une transformation symétrique par rapport à l'axe des abcisses:

$$\begin{aligned} z^1 &= y^1 \\ z^2 &= -y^2. \end{aligned}$$

Les déterminant de A est égale à -1. Les déplacements du premier type forment un sous groupe au sein du groupe des déplacements. Les déplacements qui constituent ce sous groupe seront applés propres.

Lemme 29 $a)$ *Tout déplacement propre du plan est une rotation autour d'un point ou une translation.*

$b)$ *Tout déplacement du type $z \longrightarrow Az+\xi$ avec le déterminant de la matrice égalle à -1 constitue la composé d'une symétrie par rapport à une droite et d'une translation le long de cette droite "symétrie glissante".*

Considéron maintenant encore un groupe, celui des déplacements et homothéties. Voyons ce que devient la métrique euclidienne quand on effectue des transformations du type:

$$x = \lambda B + \xi \qquad \text{où} \qquad BB^T = 1.$$

La matrice jacobienne $A = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ s'écrit dans ce cas $A = \lambda B$ où B est une matrice orthogonale. Alors la métrique euclidienne s'écrira en coordonnées (z^1, z^2) de la sorte:

$$g'_{ij} = \lambda^2 g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}.$$

Les transformations proposées équivalent donc à multiplier la métrique g_{ij} par un nombre. Nous dirons que ce sant des transformations conformes. Voyons quelles sont les conditions pour qu'une transformation affine soit conforme. Par un raisonnement analogue au précédent, on établit la condition de conformité pour la matrice A :

$$\left(\frac{1}{\lambda}A^T\right)\left(\frac{1}{\lambda}A\right) = 1.$$

Ainsi donc la matrice $B = \dfrac{1}{\lambda}A$ est orthogonale. Nous voyons que le sous groupe des transformations conformes est constitué des transformations affines de la forme:

$$x = \lambda Bz + \xi$$

avec la matrice B orthogonale. Supposons que le déterminant de B soit égale à 1, c'est à dire que la matrice B soit de la forme:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Introduisons deux variables complexes

$$v = z^1 + iz^2$$
$$w = x^1 + ix^2$$

On a alors

$$w = \left(x^1 + ix^2\right) = \lambda\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)\left(z^1 + iz^2\right) + \left(\xi^1 + i\xi^2\right).$$

avec la notation condensée:

$$w = \alpha v + \beta.$$

où

$$\alpha = \lambda e^{-i\varphi}$$
$$\beta = \left(\xi^1 + i\xi^2\right)$$

Cette formule nous dit que les transformations conformes propres du plan sont des transformations linéaires complexes de la droite complexe $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$.

$$v = z^1 + iz^2 \rightarrow w = x^1 + ix^2.$$

Soit maintenant $\det(B) = -1$. Nous venons de voir que des transformations de ce type s'obtiennet en ajoutant aux rotations les symétries par rapport à l'axe des abscisses:

$$\begin{array}{rcl} x^1 & = & z^1 \\ x^2 & = & -z^2 \end{array}$$

Dans le langage des variables complexes la symétrie s'écrit:

$$w = \overline{v} = z^1 - iz^2.$$

Ainsi donc, la forme générale d'une transformation affine confome pour la métrique euclidienne sur le plan est:

$$w = \alpha v + \beta \qquad ou \qquad w = \alpha\overline{v} + \beta.$$

où α et β sont des nombres complexes quelconques, $\alpha \neq 0$. $|\alpha| = 1$, les transformations sont; si α est réel, on retrouve les translations suivies d'homothéties discutées dans les paraghraphes précédents.

4.3 Déplacemenet de l'espace euclidien à trois dimensions

Considérons d'abord le déplacement qui est une transformation linéaire conservant l'origine des coordonnées. Elle est définie par une matrice $A = \left(a^i_j\right)$ du troisiémé ordre:

$$\begin{array}{rcl} x & = & Az \\ x^i & = & a^i_j z^j \end{array}$$

En coordonnées x^1, x^2, x^3 la métrique est euclidienne, soit $g_{ij} = \delta_{ij}$. La matrice jacobienne $\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = a^i_j$ se confond alors avec la matricee A. La métrique s'écrira donc en coordonnées z^1, z^2, z^3 comme g'_{ij}, où:

$$g'_{ij} = a^k_i \delta_{kl} a^l_j = \sum_{k=1}^{3} a^k_i a^k_j.$$

Si $g'_{ij} = \delta_{ij}$ c'est à dire si la transformation est un déplacement , il vient:

$$\sum_{k=1}^{3} a^k_i a^k_j = \delta_{ij}.$$

l'égalité signifie tout simplement que si les vecteurs de base $e_1{=}(1,0,0)$, $e_2{=}(0,1,0)$, $e_3{=}(0,0,1)$ étaient orthonormés:. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, alors les vecteurs $Ae_i = a^k_i e_k$ seront orthonormés, eux aussi. Sous la forme matricielle l'égalité s'écrit:

$$A^T A = 1.$$

ce qui veut dire que la matrice A est orthogonale. Comme $\det A^T = \det A$, le déterminant de la matrice égale a $^+_-1$:

$$\det A =^+_- 1$$

Le groupe des matrice orthogonales se confond avec le groupe des transformations qui laissent invarinte la forme

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2$$

c'est à dire avec le groupe des matrices A telles que

$$\langle x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle .$$

Lemme 30 *La transformation A admet une droite invariante sur laquelle A est soit fixe, soit une symétrie.*

Preuve. Si v est le vecteur directeur d'une telle droite, on doit avoir

$$Av = \lambda v$$

avec λ réel. il s'ensuit que v rst un vecteur propre de valeur propre égale a λ. Dans cette expression λ est racine du polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\det(A - \lambda \cdot 1) = 0$$

L'équation est cubique en λ à coefficients réels, ce quiveut dire qu'elle admet nécessairement au moins une racine réelle λ_0 à laquelle correspond au moin un vecteur propre v_0. Il vient alors:

$$\langle v_0, v_0 \rangle = \langle Av_0, Av_0 \rangle = \lambda_0^2 \langle v_0, v_0 \rangle$$

d'où $\lambda_0 =^+_- 1$. ■

Soit un vecteur w orthogonal au vecteur propre v_0, en sorte que $\langle w, v_0 \rangle = 0$. Le vecteur Aw est alors orthogonal à v_0 lui aussi:

$$\langle v_0, Aw \rangle =^+_- \langle Av_0, Aw \rangle =^+_- \langle v_0, w \rangle = 0.$$

Conclusion 31 *Le plan orthogonale à v_0 et passant par l'origine des coordonnées est invariant par la transformation A. Choisissons dans l'espace un repère euclidien (x^1, x^2, x^3) tel que l'axe des x^3 soit parallèle au vecteur v_0. La matrice A s'écrira alors en ces coordonnées comme suit:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ressort de $A^T A = 1$ que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est orthogonale. Elle s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Suivant les signes de λ_0 et de $ad - bc$, on a les déplacements des types suivants

a)- Rotation autour d'un axe:

La matrice de cette transformation (où x^3 est l'axe de rotation) s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \lambda_0 (ad - bc) = 1.$$

Si $\lambda_0 = -1$ et $ad - bc = -1$, on peut, par un choix approprié des coordonnées (x^1, x^2), faire en sorte que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ définit la rotationde l'angle π autour de l'axe x^3.

b)- Rotation impropre:

C'est le résultat de deux transformations successives: d'une rotation autour d'un axe et d'une symétrie par rapport à un plan orthogonal à cet axe. La matrice s'écrit alors sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det A = -1.$$

Nous voyons que si $\det A = 1$, la transformation orthogonale qu'elle définit est toujours une rotation autour d'un axe. Les matrices orthogonales A forment in froupe noté $O(3)$. Les matrices orthogonalesde déterminat 1 forment au sein de $O(3)$ un sous groupe noté $SO(3)$. Chaque matrice de $SO(3)$ admet au moin une valeur propre égale à 1.Conformément a ce raisonnement le groupe $SO(3)$ est constitué des rotations autour de toutes les droites passant par l'origine des coordonnées. Envisageons maintenant le cas des déplacements quleconques de l'espace à trois dimentions. Ce seront des transformations affines:

$$z \longrightarrow Az + \xi.$$

De même pour le cas bidimensionnel, nous verrons que la matrice A est orthogonale. faisons subir à l'origine des coordonnées une translation telle que $z = y + y_0$. Le déplacement sera alors:

$$y \longrightarrow Ay + (A - 1)y_0 + \xi.$$

Supposons qu A soit du type rotation impropre. La matrice $(A - 1)$ est alors non dégénérée. Il existe donc un vecteur y_0 tel que

$$(1 - A)\, y_0 = \xi \quad y_0 = (1 - A)^{-1}\, \xi$$

La transformation exprimée en coordonnées y est alors une simple rotation impropre

$$y \to Ay, \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons maintenant que la matrice $A \neq 1$ soit du type rotation autour d'un axe. La matrice $A - 1$ est alors dégénérée. En faisant intervenir le vecteur $y0$, l'équation s'écrira:

$$(1 - A)\, y_0 = \xi \Leftrightarrow \{ \begin{array}{c} (1-\cos\varphi)\, y_0^1 - \sin\varphi y_0^2 = \xi^1 \\ \sin\varphi y_0^1 + (1-\cos\varphi)\, y_0^2 = \xi^2 \\ 0 = \xi^3 \end{array}$$

Ce système est impossible si $\left(\xi^3 \neq 0\right)$. Par contre, les deux premiéres quations simultanées permettent de calculer y_0^1 et y_0^2 (lorsqu $\varphi \neq 0$, c'est à dire que $z \to Az + \xi$ n'est pas une translation simple). Alors, endonnant à la troisième coordonnée y_0^3 une valeur arbitraire. le déplacement $z \to Az + \xi$ s'écrit sous la forme:

$$y \to Ay + \left(0, 0, \xi^3\right), \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\eta = \left(0, 0, \xi^3\right)$ est parallèle à l'axe de rotation de A, $A\eta = \eta$. Il s'agit donc d'un déplacement hèlicoïdal.

Conclusion 32 *Les déplacement propres* $(\det A = 1)$ *de l'espace à trois domensions sont des déplacements hèlicoïdaux (des translations et des rotations dans des cas particuliers). Le groupe des déplacements s'obtient en ajoutant les rotations impropres.*

4.4 Autres groupes de transformations

4.4.1 Groupe des déplacement de l'espace euclidien à n dimensions

Par analogie avec $n = 3$ considèrons le groupe des déplacements de l'espace euclidien à n dimensions qui conservent l'origine des coordonnées. Ce groupe est noté $O(n)$. Chaque élément de $O(n)$ se définit par une matrice orthogonale A d'ordre n :

$$x = Az \quad A^T A = 1 \quad \det A = \pm 1$$

Les transformations du type, avec $\det A = 1$, forment un sous groupe $SO(n) \subset O(n)$, appelé groupes des rotations de dimension n. Cette appellation est toutefois conventionelle, car, pour $n \geq 3$, la rotation de dimension n n'est pas en générale une rotation plane. Le groupe $SO(n)$ est connexe. Cela revient à dire que si A_0 et A_1 sont deux rotations quelconques, A_0,$A_1 \in SO(n)$, il existe dans $SO(n)$ une courbe $A(t)$, $0 \leq t \leq 1$ (une famille continue de matrives orthogonales de déterminat égale à 1), telle que $A(0) = A_0$ et $A(1) = A_1$. Il suffit de démontrer cette assertion pour le cas où A_0 est la matrice unité $1 \in SO(n)$. On sait selon le cour d'agèbre que toute matrice orthogonale est diagonalisable par blocs:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

où le i-ième bloc est du type:

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

Considérons la fammille des matrices $A(t)$ en remplaçant dans chaque bloc l'angle φ_i par $t\varphi_i$. Alors, si $t = 1$, nous retrouvons la matrice initiale A, et si $t = 0$, nous obtenons la matrice dont tous les termes diagonaux sont ± 1 uniquement. Puisque $\det A = 1$, le nombre d'unité négatives est paire.Numérotons les coordonnées et mettons la matrice sous la forme:

$$A\,(0)=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

où chaque bloc est:

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice peut déjà être liée par une courbe à la matrice unité: en effet, au lieu de chaque bloc, mettons

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Pour $t=\pi$ nous retrouvons la matrice initiale, et por $t=0$, la matrice unité. Il est clair que le groupe $O(n)$ n'est pas connexe: si les matrices A_0 et A_1 sont telles que $\det A_0 = 1$ et $\det A_1 = -1$, ces matrices ne peuvent pas être liées par une courbe dans le groupe $O(n)$. En effet, si une courbe pareille $A(t)$ existe, alors $A(t)$ est une fonction continue de t. Or $\det A_0 = \det A(0) = 1$ et $\det A(1) = -1$.

Bibliographie

1. Géométrie contempraine, méthodes et applications, première partie, B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV, A. FOMENKO. Ediotion MIR. Moscou 1979.

2. Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces, M. BERGER B. GOSTIAUX. PUF. Paris 1987.