كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵙⵉⵍⵍⴰⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵜⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⵙⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Problème bien posé et mal posé pour l'équation de Navier-Stokes-Coriolis dans les espaces de type Besov

Réalisé par: EL BOUAYADI Abdelmajid

Encadré par : Pr. EL BARAKA Azzeddine

Soutenu Le 20 Juin 2019
Devant le jury composé de:

- Pr. AKHMOUCH Mohammed — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EL BARAKA Azzeddine — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. El KHOMSSI Mohamed — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. SIDKI Omar — Faculté des Sciences et Techniques de Fès

Année Universitaire 2018 / 2019

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements avec un grand plaisir et un grand respect à mon encadrant M. EL Baraka Azzeddine pour ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements qui m'ont permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.

J'adresse mes vifs remerciements aux :

— *Pr. AKHMOUCH Mohammed*
— *Pr. EL BARAKA Azzeddine*
— *Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed*
— *Pr. El KHOMSSI Mohamed*
— *Pr. SIDKI Omar*

pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail.

j'exprime de même ma gratitude envers tous ceux qui m'ont accordés leur soutien, tant par leur gentillesse que par leur dévouement.

À toute personne ayant contribuée de près ou de loin à l'avancement de mon projet.

À mes parents, qui ont toujours été là pour moi. À mes frère et mes sœurs, pour leurs encouragements.

je ne pourrai nommer ici toutes les personnes qui m'ont aidées et encouragées de près ou de loin et je les remercie vivement.

Liste des notations

— Les notations dans $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

— u_t : la dérivée partielle de u par rapport à t

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$$

— Δu : le laplacien de u

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

— ∇u : le gradient de u

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$$

— $(u \cdot \nabla)u$: le terme bilinéaire

$$(u \cdot \nabla)u = u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

— $u \otimes v$: produit tensoriel

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 \\ u_1 v_2 & u_2 v_2 & u_3 v_2 \\ u_1 v_3 & u_2 v_3 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

— $\nabla \cdot (u \otimes v)$: divergence du produit tensoriel $u \otimes v$

$$\nabla \cdot (u \otimes v) = \begin{pmatrix} \partial_1(u_1 v_1) + \partial_2(u_2 v_1) + \partial_3(u_3 v_1) \\ \partial_1(u_1 v_2) + \partial_2(u_2 v_2) + \partial_3(u_3 v_2) \\ \partial_1(u_1 v_3) + \partial_2(u_2 v_3) + \partial_3(u_3 v_3) \end{pmatrix} = (\nabla \cdot u)v + (u \cdot \nabla)v$$

— le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

— le symbole de Levi-Civita :
En 3-dimension, on peut figurer le symbole de Levi-Civita comme suit :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (1,2,3),(2,3,1) \text{ ou } (3,1,2), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est } (3,2,1),(1,3,2) \text{ ou } (2,1,3), \\ 0 & \text{si } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i. \end{cases}$$

La relation du symbole Levi-Civita au symbole de Kronecker est :

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

En 2-dimension, le symbole de Levi-Civita est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j) = (1,2) \\ -1 & \text{si } (i,j) = (2,1) \\ 0 & \text{si } i=j \end{cases}$$

— $\widehat{f}$: la transformations de Fourier de f

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

la transformation de Fourier inverse de f

$$\mathscr{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

— $f * g$: le produit de convolution est défini par :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Introduction

En ce moment, l'équation de Navier-Stokes est l'équation au dérivées partielles (EDP) de la physique la plus étudiée par les mathématiciens à travers le monde. Elle nous sert à prédire la météo, simuler les fluides en tourbillon, optimiser les ailes des avions, améliorer le réalisme des jeux vidéos...

Les équations de Navier-Stokes sont des équations non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides. Ces équations sont nommées pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^{eme} siècle, le mathématicien et l'ingénieur des ponts Henri Navier qui introduit la notion de viscosité dans les équations d'Euler en 1823, et le mathématicien-physicien anglo-irlandais George Gabriel Stokes qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845.

le 24 mai 2000, les membres de l'institut Clay de mathématiques ont posé sept problèmes millénaire de mathématique et les équations de Navier-Stokes est l'un de ses problèmes.

Les équations de Navier Stokes forment un modèle bien accepté. Ces équations bien évidement compliquées, cette complication est dûe au terme linéaire de diffusion et au terme non linéaire cinématique qui rendent difficile le choix d'un espace fonctionnel bien adapté au problème, c'est pourquoi jusqu'à présent il n'y a aucune théorie capable d'étudier l'existence, l'unicité, la régularité et le comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes.

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème de Navier Stokes incompressible avec la force de Coriolis (NSC) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ div\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{NSC}$$

où $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ et $p = p(x,t)$ sont respectivement le champ de vitesse et la pression du fluide au point $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, u_0 la vitesse initiale du fluide. Le nombre réel Ω représente la vitesse de rotation du fluide autour du vecteur $e_3 = (0,0,1)$, qui est appelé le paramètre de Coriolis.

Dans ce rapport, on va donner un premier résultat où le problème (NSC) est bien posé, et un deuxième résultat où le problème (NSC) est mal posé. En particulier, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution uniformément globale, pour une petite condition initiale dans un espace invariant d'échelle.

Ici, la solution uniformément globale signifie que la vitesse initiale ne dépend pas de la vitesse de rotation Ω. Un espace de Banach X pour la condition initiale est dit invariant d'échelle s'il vérifie $\|u_0^\lambda\|_X = \|u_0\|_X$ pour tout $\lambda > 0$, où $u_0^\lambda(x) = \lambda u_0(\lambda x)$.

Dans le cas d'une vitesse de rotation $|\Omega|$ suffisamment rapide Babin, Mahalov, et Nikolaenko [1, 2, 3] ont obtenu l'existence globale et la régularité des solutions de (NSC) avec un champ de vitesse initial périodique. Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier [13, 14] ont prouvé que pour toute vitesse initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)^2 + H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)^3$ avec $\operatorname{div} u_0 = 0$, il existe une constante $\Omega_0 > 0$ telle que pour tout $\Omega \in \mathbb{R}$ avec $|\Omega| \geqslant \Omega_0$, (NSC) admet une solution globale unique. Konieczny et Yoneda [31] ont prouvé l'existence globale des solutions "mild" de (NSC) pour toute vitesse initiale dans l'espace de Fourier-Besov $F\dot{B}^{2-3/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$, $1 < p \leqslant \infty$ d'une part ; et dans l'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,1}(\mathbb{R}^3) \cap F\dot{B}^{0}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$ d'autre part.

Dans le cas de l'existence et de l'unicité des solutions uniformément globales avec une petite vitesse initiale, Giga, Inui, Mahalov et Saal [23] ont obtenu la solution dans un espace invariant d'échelle $FM_0^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Hieber et Shibata [25] ont obtenu la solution pour toute vitesse initiale dans l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

Notre travail est basé sur l'article de "Tsukasa Iwabuchi" et "Ryo Takada" [27] et s'intéresse à résoudre le problème de Navier-Stokes avec la force de Coriolis (NSC) dans l'espace de Fourier-Besov $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Il est organisé comme suit :

Dans la première section, on présente une modélisation des équations de Navier-Stokes avec la force de Coriolis, en se basant sur les informations données dans le livre de A.J. Chorin et J.E. Marsden [15], et le livre de Chandrasekhar [12].

La deuxième section est un préliminaire qui consiste à rappeler certaines définitions et certaines inégalités importantes telles que l'inégalité de Young et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Paley. Dans cette même section on définit la décomposition de Littlewood-Paley, le para-produit de Bony, les espaces de Besov ainsi que des propriétés importantes pour la suite de ce travail. Ensuite, on définit les outils de base utilisés dans ce travail, qui sont la transformée de Riesz et le projecteur de Leray-Helmholtz. On termine cette section avec les semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, en donnant une attention particulière au semi-groupe de la chaleur et au semi-groupe de Stokes-Coriolis.

Enfin, la dernière section contient les résultats concernant les équations de Navier-Stokes-Coriolis (NSC) avec des données initiales dans des espaces de Fourier-Besov homogènes. On démontre l'existence globale et l'unicité des solutions mild pour des petittes données initiales dans l'espace $\dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ voisin de $BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$. On montre aussi que le problème (NSC) est mal posé lorsque la donnée initiale appartient à l'espace $\dot{FB}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3)$, $q > 2$, ce qui implique l'optimalité de l'espace $\dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ pour l'existence globale de la solution.

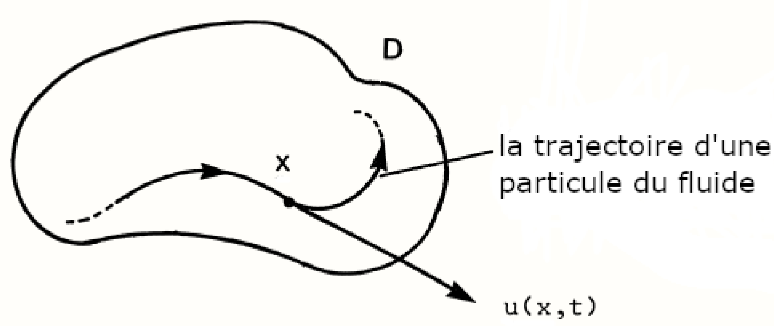
Chapitre 1

Construction physique du modèle

Dans ce chapitre, nous rappelons les constructions physiques des différents modèles en suivant la présentation faite dans le chapitre 1 livre de A. J. Chorin et J. E. Marsden [15] .

Soit D un domaine remplie d'un fluide dans un espace à deux ou trois dimensions. Imaginez que le fluide soit en mouvement. Notre objet est de décrire ce mouvement.

Soit x un point dans D, et considérons la particule de fluide qui se déplace à travers x à l'instant t. Par exemple, nous pouvons imaginer une particule de poussière en suspension dans le fluide ; cette particule parcourt une trajectoire bien définie. Soit $u(x, t)$ la vitesse de la particule de fluide de coordonnées x à l'instant t. Ainsi, pour chaque instant fixe, u est un champ de vecteur sur D. Voir la figure. On dit que u est le champ de vitesse du fluide.



Pour chaque instant t, on supposera que le fluide homogène a une masse volumique $\rho(x,t)$ bien définie. Ainsi, si W est un sous-domaine de D, on suppose que la masse de fluide dans W à l'instant t est donnée par

$$m(W,t) = \int_W \rho(x,t)dx. \tag{1.1}$$

Dans ce qui suit, on supposera que les fonctions u, ρ (et les autres fonctions à introduire plus tard) sont suffisamment régulières pour que les opérations de calcul standard puissent être effectuées sur elles.
La dérivation des équations qu'on va voir plus tard, est basée sur trois principes de base :

— la masse ne peut être ni créée ni détruite,
— la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le fluide(deuxième loi de Newton),
— l'énergie ne peut être ni créée, ni détruite.

1.1 L'équation de continuité

Soit W un sous-domaine fixe de D (W ne change pas avec le temps). La dérivée de la quantité de mouvement en W et à l'instant t est égale à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(W,t) &= \frac{d}{dt}\int_W \rho(x,t)dx \\ &= \int_W \frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx. \end{aligned}$$

Soit ∂W la frontière de W supposée réguliere, n le vecteur normale vers l'extérieur définie aux points de ∂W . Le débit volumique traversant par unité de surface est $u \cdot n$ et le débit massique traversant par unité de surface est $\rho u \cdot n$.
Ainsi, le débit massique total qui travers ∂W est l'intégrale de surface de ρu sur ∂W :
le taux de changement de masse croisant le sens sortant

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{le taux de changement} \\ \textit{de masse croisant} \\ \textit{le sens sortant} \end{array} \right\} = \int_{\partial W} \rho u \cdot n dS.$$

Le principe de la conservation de la masse peut être énoncé plus précisément comme suit : le taux de variation de la masse en W est égale au débit massique qui traverse ∂W vers l'intérieur, c-à-d

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho dx = -\int_{\partial W} \rho u \cdot n dS, \tag{1.2}$$

c'est la forme intégrale de la loi de conservation de la masse. Selon le théorème de flux-divergence, cette affirmation est équivalente à

$$\int_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u)\right) dx = 0. \tag{1.3}$$

Comme cela est vérifié pour tous les W, alors elle est équivalente à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0, \tag{1.4}$$

cette équation est l'équation de continuité.

1.2 La deuxième loi de Newton

Soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, le trajet suivi par une particule de fluide, alors le champ de vitesse est

$$u(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) = \left(\frac{\partial x_1(t)}{\partial t}, \frac{\partial x_2(t)}{\partial t}, \frac{\partial x_3(t)}{\partial t}\right), \tag{1.5}$$

c-à-d

$$u(x(t), t) = \frac{dx(t)}{dt}. \tag{1.6}$$

L'accélération d'une particule fluide est donnée par

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{d^2}{dt^2}x(t) \\
&= \frac{d}{dt}u(x(t), t) \\
&= \frac{d}{dt}u(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t},
\end{aligned}$$

i.e

$$a(t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u. \tag{1.7}$$

On peut déduire aussi que pour toute fonction f dépend de l'espace et du temps, on a

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u, \tag{1.8}$$

pour tout continuum ou milieu continu (décrire un fluide par milieu continu), les forces agissant sur le continuum sont de deux types :

— les forces volumiques qui s'exercent sur chaque particule fluide interne au continuum .

— les forces surfaciques ou de contact qui s'exercent sur la frontière S du continuum .

On examine plus tard les forces de contact en général, mais pour l'instant définissons un fluide idéal comme ayant la propriété suivante : pour tout mouvement du fluide, il existe une fonction $p(x, t)$ appelée pression telle que si S est une surface dans le fluide avec une unité normale n choisie, la force de contact exercée sur la surface S en $x \in S$ à l'instant t dans la direction de n est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{la force surfacique} \\ \text{traverse } S \text{ dans} \\ \text{la direction } n \end{array} \right\} = p(x, t)n.$$

Notez que la force agit orthogonalement sur la surface S ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas de force tangentielle.
Intuitivement, l'absence de force tangentielle implique qu'il n'y a aucun moyen pour que la rotation commence dans le fluide. Cette idée sera développée dans la section suivante.

Considérons donc un domaine W quelconque du fluide. Sur chaque élément dS de la frontière de W , une force normale rentrant dans le domaine W, définie par la pression p locale :

$$dS_{\partial W} = -p\, n\, dS$$

et donc, pour la surface ∂W toute entière :

$$S_{\partial W} = -\int_{\partial W} pndS. \tag{1.9}$$

Si v est un vecteur fixe dans l'espace, on a

$$\begin{aligned} v \cdot S_{\partial W} &= -\int_{\partial W} pv \cdot n dS \\ &= -\int_W div(pv)dx. \\ &= -\int_W \nabla p \cdot v dx \end{aligned}$$

Donc

$$S_{\partial W} = -\int_W \nabla p dx. \tag{1.10}$$

Soit $X(x,t)$ la force volumique s'exerçant sur le continuum, la force total s'exerçant sur chaque particule fluide est :

$$\text{Force Totale } = \rho X - \nabla p.$$

Par la seconde loi de Newton (force = masse $\times$ accélération), nous sommes conduits à l'équation différentielle suivante :

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X - \nabla p, \tag{1.11}$$

cette équation est une simple équation de l'hydrodynamique.

1.3 Les équations de l'hydrodynamique

Les équations de l'hydrodynamique nous donne les différentes lois de conservation de la physique. Pour ce faire, nous suivons la présentation faite dans le chapitre 2 et 3 du livre de Chandrasekhar [12].

On considère un fluide dont la densité $\rho(x,t)$ où $x \in \mathbb{R}^3$ et $t \in [0,\infty[$. On note par $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ la vitesse du fluide.

Soit l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \tag{1.12}$$

qui exprime la conservation de la masse. Une autre forme de (1.12) qui pourra être utile, est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{1.13}$$

Pour un fluide homogène incompressible ($\rho = \rho_0$ est constante), l'équation de continuité est réduite à :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ ou } \nabla \cdot u = 0, \tag{1.14}$$

dans ce cas, la vitesse est donc un champ de divergence nulle. Les équations de mouvement de l'hydrodynamique :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1.15}$$

où X_i est la i^{eme} composante de toute force extérieure qui pourrait agir sur le fluide. P_{ij} est la tenseur des contrainte exercée dans la direction x_j sur un élément de surface normal à x_i. Cette force doit dépendre du taux de croissance de déformation dans le fluide donné par :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.16}$$

D'après une des hypothèses de la dynamique des fluides, nous donne l'équation suivante :

$$P_{ij} = w_{ij} + \sum_{k,l=1}^{3} q_{ij;kl} e_{kl}, \tag{1.17}$$

où $w_{ij} = -p\delta_{ij}$ est un tenseur symétrique vers lequel tend P_{ij} quand $e_{ij} = 0$, et $q_{ij;kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ est un tenseur d'ordre 4, où p, λ et μ sont des fonctions(scalaires). Dans le cas d'un fluide isotropique, la forme de (1.17) doit être invariante par toutes les rotations et les translations des coordonnées du système. Ça implique donc que w_{ij} et $q_{ij;kl}$ sont des tenseurs isotropiques. On trouve :

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} e_{kk}. \tag{1.18}$$

On définit p comme étant la pression isotropique en x_i quand il n'y a pas de déformation,dans ce cas,

$$\sum_{i=1}^{3} P_{ii} = -3p = -3p + 2\mu \sum_{i=1}^{3} e_{ii} + 3\lambda \sum_{k=1}^{3} e_{kk} \tag{1.19}$$

On trouve alors, dans le cas où le fluide n'est pas forcément incompressible :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \tag{1.20}$$

et

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + -\frac{2}{3}\mu\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} e_{kk}. \tag{1.21}$$

Le coefficient μ qui apparaît dans cette équation est le coefficient de viscosité. Les termes dans (1.21) qui sont proportionnels à μ définissent les contraintes dues à la viscosité. Si on les note par

$$p_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \sum_{k=1}^{3} \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]. \tag{1.22}$$

Dans le cas d'un fluide homogène incompressible, le tenseur visqueux a la forme plus simple :

$$p_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.23}$$

En remplaçant P_{ij} dans (1.15) par son expression, on trouve :

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{1.24}$$

Dans le cas d'un fluide homogène incompressible pour lequel μ est constante, l'équation (1.24) est réduite à :

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\Delta u_i. \tag{1.25}$$

1.4 Les équations de l'hydrodynamique dans un référentiel en rotation

Considérons un fluide en rotation autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante Ω. Il conviendra de décrire les mouvements qui s'y produisent, comme ils apparaîtront à un observateur au repos dans un référentiel en rotation autour du même axe et avec la même vitesse angulaire. Dans un tel référentiel tournant, des quantités qui seront reconnues comme des vitesses et des accélérations par un observateur au repos dans celui-ci, ne sont pas identiques aux vitesses et aux accélérations reconnues par un observateur au repos par rapport à un repère inertiel fixé.

Pour éviter les ambiguïtés qui en résultent et pour fixer les idées, considérons explicitement le cadre inertiel (ξ, η, ζ) par rapport auquel le système de coordonnées choisi (x, y, z) est en rotation avec une vitesse angulaire Ω autour de l'axe ζ. De plus, les axes z et ζ coïncident. La transformation reliant les deux systèmes de coordonnées est :

$$\begin{aligned} x &= +\xi\cos(\Omega t) + \eta\sin(\Omega t), \\ y &= -\xi\sin(\Omega t) + \eta\cos(\Omega t), \\ z &= \zeta. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Un vecteur q, avec les composantes q_ξ, q_η et q_ζ, dans le repère inertiel, aura les composantes suivantes suivant les directions instantanées des axes du référentiel en rotation :

$$\begin{aligned} q_x^{(0)} &= +q_\xi\cos(\Omega t) + q_\eta\sin(\Omega t) \\ q_y^{(0)} &= -q_\xi\sin(\Omega t) + q_\eta\cos(\Omega t) \\ q_z^{(0)} &= q_\zeta. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Nous avons distingué les composantes du vecteur obtenu par cette transformation par un indice supérieur, car elles ne sont pas nécessairement les mêmes quantités, qui seront reconnues par l'observateur au repos dans le référentiel en rotation. L'indice supérieur distinguera ensuite les quantités qui auront le même sens absolu, par opposition au sens relatif. La raison de cette distinction apparaîtra clairement lorsque nous considérerons les quantités, qui ont le sens de vitesse et d'accélération dans le référentiel en rotation et leurs relations avec la vitesse et l'accélération 'absolue'. On dérive l'équation (1.26) par rapport à t, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\xi}{dt}\cos(\Omega t) + \frac{d\eta}{dt}\sin(\Omega t)\right) - \Omega(\xi\sin(\Omega t) - \eta\cos(\Omega t)), \tag{1.28}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(-\frac{d\xi}{dt}\sin(\Omega t) + \frac{d\eta}{dt}\cos(\Omega t) \right) - \Omega(\xi\cos(\Omega t) + \eta\sin(\Omega t)). \qquad (1.29)$$

Clairement, $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$ sont les quantités que l'observateur au repos dans le référentiel en rotation reconnaîtra comme les composantes u_x et u_y des vitesses de fluide le long des directions x et y. Les équations (1.28) et (1.29) mettent en relation u_x et u_y avec $u_x^{(0)}$ et $u_y^{(0)}$. On a

$$\begin{aligned} u_x &= u_x^{(0)} + \Omega y \\ u_y &= y_y^{(0)} - \Omega x \\ u_z &= u_z^{(0)}. \end{aligned} \qquad (1.30)$$

Ces équations peuvent être combinées en une seule équation vectorielle :

$$u = u^{(0)} - \Omega \times r. \qquad (1.31)$$

Maintenant, en dérive les équations (1.28) et (1.29) une deuxième fois par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2x}{dt^2} &= \left(\tfrac{d^2\xi}{dt^2}\cos(\Omega t) + \tfrac{d^2\eta}{dt^2}\sin(\Omega t) \right) + 2\Omega\left(-\tfrac{d\xi}{dt}\sin(\Omega t) + \tfrac{d\eta}{dt}\cos(\Omega t) \right) - \Omega^2 x, \\ \tfrac{d^2y}{dt^2} &= \left(-\tfrac{d^2\xi}{dt^2}\sin(\Omega t) + \tfrac{d^2\eta}{dt^2}\cos(\Omega t) \right) + 2\Omega\left(-\tfrac{d\xi}{dt}\cos(\Omega t) + \tfrac{d\eta}{dt}\sin(\Omega t) \right) - \Omega^2 y. \end{aligned} \qquad (1.32)$$

Les équations sont équivalents au équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \left(\frac{du_x^{(0)}}{dt} \right)^{(0)} + 2\Omega u_y^{(0)} - \Omega^2 x, \\ \frac{du_y}{dt} &= \left(\frac{du_y^{(0)}}{dt} \right)^{(0)} - 2\Omega u_x^{(0)} - \Omega^2 y. \end{aligned} \qquad (1.33)$$

En remplaçant $u_x^{(0)}$ et $u_y^{(0)}$ de (1.30) dans les équations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_x^{(0)}}{dt} \right)^{(0)} &= \frac{du_x}{dt} + 2\Omega u_y - \Omega^2 x, \\ \left(\frac{du_y^{(0)}}{dt} \right)^{(0)} &= \frac{du_y}{dt} + 2\Omega u_x - \Omega^2 y, \\ \left(\frac{du_Z^{(0)}}{dt} \right)^{(0)} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \qquad (1.34)$$

Ces équations peuvent être combinées en une seule equation vectorielle :

$$\left(\frac{du^{(0)}}{dt}\right)^{(0)} = \frac{du}{dt} + 2\Omega \times u - \frac{1}{2}\nabla(|\Omega \times r|^2). \tag{1.35}$$

Le terme $2\Omega \times u$ dans cette équation représente l'accélération de Coriolis et le terme $-\frac{1}{2}\nabla(|\Omega \times r|^2)$ représente la force centrifuge.

Pour les dérivés par rapport aux coordonnées d'espace, il n'y a pas de considérations compliquées telles que celles que nous venons d'expliquer pour les différenciations par rapport au temps conduisant à des vitesses et à une accélération. En conséquence, l'équation hydrodynamique standard ((1.15)) :

$$\frac{du_i}{dt} = X_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.36}$$

(où X_i est la i^{eme} composante des forces externes agissant sur le fluide et P_{ij} le tenseur des contraintes), dans le référentiel en rotation , devient

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = X_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}|\Omega \times r|^2) + 2\epsilon_{ijk}u_j\Omega_k \tag{1.37}$$

L'équation de continuité et l'équation de la chaleur ne sont pas affectées. Pour un fluide incompressible, les équations du mouvement prennent la forme explicite ((1.25)) :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = X_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}|\Omega \times r|^2\right) + \mu\Delta u_i + 2\epsilon_{ijk}u_j\Omega_k. \tag{1.38}$$

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 L'espace de Lebesgue L^p

Dans cette partie. On présente quelque propriété importante de l'espace de Lebesgue, comme inégalité de Hölder, inégalité de Young, inégalité de Hardy-Littlewood-Paley, convolution, dualité ... le contenant de cette partie est basé sur les livre [8] et [18].
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesurable avec μ une mesure positive. On dit que deux fonctions sont égales si et seulement si elles coïncident sauf sur un ensembles négligeable (i.e. de mesure nulle). Soit f une fonction mesurable dans X, on définit :

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 0 < p < \infty \\ \underset{x \in X}{sup} |f(x)| & \text{si} \quad p = \infty \end{cases} \tag{2.1}$$

et l'espace

$$L^p(X) = L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C}, \quad f \text{ est mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty\}. \tag{2.2}$$

On va utiliser la notation $L^p(X)$ ou L^p au lieu de $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ puisque la notation ne cause pas de confusion. On sait que l'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est muni d'une semi-norme $\|.\|_{L^p}$, en particulier pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, le couple $(L^p(X, \mathcal{M}, \mu), \|.\|_{L^p}$ est un espace normé.

La proposition suivante est une forme générale de l'inégalité de Hölder trouvée dans [[8], page 118].

Proposition 1. ***(L'inégalité de Hölder)****. Soient $f_1, f_2, ..., f_k$ des k fonctions tel que $f_i \in L^{p_i}(X)$, $i = 1, 2, ..., k$ avec $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$. Si*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x),$$

alors $f \in L^p(X)$ avec $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ et

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L^{p_i}}.$$

En cas particulier, $k = 2$ et $p_1 = p_2 = 2$ on a le corollaire suivant :

Corollaire 1. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)****. Si $f_1, f_2 \in L^2(X)$, alors*

$$\|f\|_{L^1} \leqslant \|f_1\|_{L^2} \|f_2\|_{L^2}.$$

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on sait que $(L^p, \|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach. On a l'inégalité triangulaire pour la norme dans ces espaces.

Proposition 2. ***(Inégalité de Minkowski)****. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $f, g \in L^p(X)$, on a :*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{2.3}$$

L'inégalité de Minkowski (2.3) précise que la norme L_p de la somme des deux fonctions est au plus la somme de la norme L_p de ces fonctions. Le théorème suivant est une généralisation de la proposition 2 trouvée dans [[17], page 194], connue sous le nom d'inégalité de Minkowski pour les intégrales. Ici, la somme est remplacée par les intégrales comme suit :

Théorème 1. ***(Inégalité de Minkowski pour intégrales)****. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés de mesure $\sigma-$finie, et soit f une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})-$mesurable dans $X \times Y$*

— *Si $1 \leqslant p < \infty$ et $f \geqslant 0$, alors*

$$\left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y),$$

— *Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $f(.,y) \in L^p(X)$ pour presque partout y, et la fonction $y \mapsto \|f(.,y)\|_{L^p}$ appartient à $L^1(Y)$. Alors $f(x,.) \in L^1(Y)$ pour presque partout x, la fonction $x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$ appartient à $L^p(X)$ et*
$$\left\| \int f(.,y)d\nu(y) \right\|_{L^p} \leqslant \int \|f(.,y)\|_{L^p} d\nu(y).$$

Les deux théorèmes donnés ci-dessous nous donnent deux résultats importants de la théorie de l'intégration. La première est une généralisation du théorème de changement de variable que nous connaissons par Calcul. Et la seconde nous permet, sous certaines hypothèses, de changer l'ordre d'intégration en intégrales doubles. Ici, pour un espace mesuré de mesure $\sigma-$finie $(X, \mathcal{M}, \mu)$, on note $L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables de X à $[0, \infty]$. De plus, pour une fonction f définie sur $X \times Y$, les fonctions f_x et f^y de f sont données respectivement par $f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)$.

Théorème 2. ***(théorème de changement de variable [17, page 73])****.*

(i) Soit $T \in GL(n, \mathbb{R})$. Si f est mesurable sur $\mathbb{R}^n$, alors $f \circ T$ est une fonction mesurable dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, si $f \geqslant 0$ ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)(x)dx,$$

(ii) Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $G : X \to \mathbb{R}^n$ un C^1-difféomorphisme. Si f est une fonction mesurable sur $G(X)$, alors $f \circ G$ est aussi une fonction mesurable sur X. Ainsi, si $f \geqslant 0$ ou $f \in L^1(G(X))$, alors
$$\int_{G(X)} f(x)dx = \int_X (f \circ G)(x)|\det D_xG|dx.$$

Théorème 3. ***(Théorème de Fubini-Tonelli [17, page 67])****. Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés de mesure $\sigma-$finie.*

(i) (Tonelli) Si $f \in L^+(X \times Y)$, alors les fonction $g(x) = \int f_x d\nu$ et $h(y) = \int f^y d\mu$ sont dans $L^+(X)$ et $L^+(Y)$ respectivement, et
$$\int f d(\mu\times\nu) = \int \left[\int f(x,y)d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x,y)d\mu(x) \right] d\nu(y) \tag{2.4}$$

(ii) (Fubini) Si $f \in L^1(X \times Y)$, alors $f_x \in L^1(Y)$ pour presque partout $x \in X$, $f^y \in L^1(X)$ pour presque partout $y \in Y$, les fonctions $g(x) = \int f_x d\nu$ et $h(y) = \int f^y d\mu$ sont dans $L^1(X)$ et $L^1(Y)$ respectivement et (2.4) *tient.*

Lemme 1. ***(lemme de Fatou).***
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si (f_n) une suite de fonctions mesurables dans $L^+(X)$, alors

$$\int_X \liminf f_n \, d\mu \leqslant \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

Théorème 4. ***(Dualité [17, page 190]).***
On suppose $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $(L^p)' = L^q$ dans le sens suivant : pour toute fonctionnelle linéaire continue φ sur L^p, il existe une et une seule application $g \in L^q$ telle que :

$$\varphi(f) = \int_X f(x) g(x) \, d\mu(x) \quad \forall f \in L^p$$

De plus, $\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q}$

Aussi, on rappelle la définition du produit de convolution et ses propriétés

Définition 1. *Soient f et g deux foncions mesurables sur $\mathbb{R}^n$. Le produit de convolution de f et g est la fonction $f * g$ définie par :*

$$f * g(x) = \int_X f(x - y) g(y) \, dy \tag{2.5}$$

pour tout x tel que l'intégrale existe.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on donne la translation $\tau_y f(x) = f(x - y)$. Dans la suite, on présente quelques propriétés du produit de convolution.

Proposition 3. ***[17, page 240].***
Supposons que toutes les intégrales existent. Alors :
(i) $f * g = g * f$
(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$
(iii) $\tau_y (f * g) = (\tau_y f) * g = f * (\tau_y g)$
(iv) $supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g)$

Afin de garantir que l'intégrale (2.5) existe, plusieurs conditions peuvent être imposées à f et g. Par exemple, si f est bornée et à support compact, et si g est localement intégrable, nous avons (2.5) existe. Plus généralement, les résultats suivants sont valables.

Proposition 4. ***(voir [17, page 241]).***
Soient $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *tels que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Si* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$, *alors* $f * g(x)$ *existe pour tout* x, $f * g$ *est bornée et uniformément continue, et*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * g(x)| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Proposition 5. ***(Inégalité de Young voir [17, page 240]).***
Supposons $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ *et* $\dfrac{1}{r} + 1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$. *Si* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$, *alors* $g * f \in L^r$ *et*

$$\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

L'une des propriétés les plus remarquables de la convolution est sa relation avec le dérivée. Un exemple de ceci est donné dans le résultat suivant.

Proposition 6. ***(voir [17, page 241]).***
Si $f \in L^1$, $g \in C^k$, *et* $\partial^\alpha g$ *est bornée pour* $|\alpha| \leqslant k$, *alors* $f * g \in C^k$ *et* $\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g)$ *pour* $|\alpha| \leqslant k$.

Ensuite, nous présentons une inégalité importante que nous utiliserons dans le dernier chapitre. Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev et il estime, selon la norme de Lebesgue, le potentiel de Riesz d'ordre α, I_α, qui est défini par

$$I_\alpha f(x) = 2^{-\alpha} \pi^{-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} \mathrm{d}y.$$

Proposition 7. ***(Inégalité Hardy-Littlewood-Sobolev, voir [24, page 3]).***
Soient $0 < \alpha < n$ *et* $1 < p < q < \infty$ *vérifient* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$. *Alors, il existe une constante positive* $C = C(n, \alpha, p)$ *telle que, pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *on a :*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leqslant C \|f\|_{L^p}$$

2.2 La décomposition de Littlewood-Paley et le para-produit de Bony

Dans cette partie, nous rappelons la décomposition de Littlewood-Paley et le para-produit de Bony, outils nécessaires qui nous aident à définir les espaces de Besov et dans les preuves d'estimations basées sur ces espaces.

Soit φ une fonction de la classe de Schwarz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. on choisi une fonction φ qui vérifie :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \begin{cases} 0 \leqslant \widehat{\varphi}(\xi) \leqslant 1 & \\ \widehat{\varphi}(\xi) = 1 & \text{si } |\xi| \leqslant 1 \\ \widehat{\varphi}(\xi) = 0 & \text{si } |\xi| \geqslant 2 \end{cases}$$

donc

$$supp\widehat{\varphi}(\xi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \leqslant 2\}$$

$$\widehat{\varphi_j}(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$\widehat{\phi}_j = \widehat{\varphi_j} - \widehat{\varphi_{j-1}} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \widehat{\phi} = \widehat{\phi}_0 = \widehat{\varphi} - \widehat{\varphi_{-1}}$$

Donc, on a :

$$0 \leqslant \widehat{\phi}(\xi) \leqslant 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\operatorname{supp} \widehat{\phi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n | \quad 2^{-1} \leqslant | \xi | \leqslant 2\},$$

et,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\phi}_j(\xi) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{2.6}$$

On remarque que $\phi_j(x) := 2^{jn}\phi(2^j x)$.
En effet :
Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \phi_j(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \widehat{\phi}_j(\xi) d\xi \\ &\overset{\zeta = 2^{-j}\xi}{=} 2^{jn} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2^j x \cdot \zeta} \widehat{\phi}(\zeta) d\zeta \\ &= 2^{jn}\phi(2^j x). \end{aligned}$$

Définition 2. *Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, on note*

$$\Delta_j f := \mathscr{F}^{-1}(\widehat{\phi}_j \widehat{f}), \qquad S_j f = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{\varphi_j} \widehat{f})$$

Remarque 1. *Les opérateurs Δ_j et S_j vérifient les identités suivantes :*

$$\Delta_j \Delta_k f = 0, \quad si |j-k| > 2, \tag{2.7}$$

$$\Delta_j (S_{k-1} f \Delta_k g) = 0, \quad si |j-k| > 5, \tag{2.8}$$

pour toutes $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$.

On rappelle ensuite la décomposition de Littlewood-Paley trouvée dans [34, page 23].

Proposition 8. ***(Décomposition de Littlewood-Paley)***
Soient $N \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathscr{S}'$. Alors $f = S_N + \sum_{j \geqslant N} \Delta_j f$ avec convergence dans $\mathscr{S}'$. Cette égalité est dit la décomposition de Littlewood-Paley de f. En outre, si $\lim_{N \to -\infty} \Delta_j f = 0$ dans $\mathscr{S}'$, alors l'égalité $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$ est dite la décomposition homogène de Littlewood-Paley de f.

La proposition suivante garantie la convergence de la décomposition de Littlewood-Paley dans $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$.

Proposition 9. ***(voir[34, page 24]).*** *Pour $f \in \mathscr{S}'$, il existe $N \in \mathbb{Z}$, et une suite polynomiale $(P_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ avec le degré de P_j est inférieur ou égal à N tel que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\Delta_j f + P_j)$ converge vers f dans $\mathscr{S}'$. Ainsi l'égalité $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f = f$ tient dans $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$.*

Ensuite, on va définir un sous-espace de $\mathscr{S}$ qui jouera un rôle important tout au long du texte.

Définition 3. *On définit l'espace des distributions tempérées qui s'annule à l'infini comme étant l'espace $\mathscr{S}'_0$ des distributions pour que $\lim_{N \to -\infty} S_N f = 0$ dans $\mathscr{S}'$.*

En général, une distribution f ne peut pas être complètement recouvrable en utilisant sa décomposition homogène de Littlewood-Paley. Cependant, cela est possible si f appartient à l'espace des distributions tempérées modulo l'espace des polynômes $\mathcal{P}$.

Proposition 10. *(Décomposition homogène de Littlewood-Paley, voir [[34], page 24]). Pour tout $f \in \mathscr{S}'$, il existe $N \in \mathbb{Z}$ et une suite de polynômes $(P_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de degré inférieur ou égal à N de sorte que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} (\Delta_j f + P_j)$ converge vers f dans $\mathscr{S}'$. Ainsi, l'égalité $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$ tient dans $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$.*

Une inégalité importante dans cette théorie qui nous permet d'obtenir des estimations de la norme de Besov est l'inégalité de Bernstein, énoncée ci-dessous.

Lemme 2. ***(Inégalité de Bernstein).***
On suppose que $f \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *et supp* $\widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 | \quad 2^{j-2} \leqslant |\xi| < 2^j\}$.
Il existe alors une constante $C = C(k) > 0$ *telle que*

$$C^{-1} 2^{jk} \|f\|_{L_p} \leqslant \|D^k f\|_{L_p} \leqslant C 2^{jk} \|f\|_{L_p}. \tag{2.9}$$

Un autre outil important dans l'analyse de Littlewood-Paley est l'opérateur para-produit introduit par Bony [6].

Le para-produit de Bony

La décomposition de Bony est un outil pour étudier la régularité de produit des fonctions.

Soient f et g deux éléments de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}$. Par la décomposition homogène de Littlewood-Paley $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_k f$ et $g = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j g$. Donc, on a

$$\begin{aligned}
fg &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_k f \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j g \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \Delta_k f \Delta_j g \\
&= \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \sum_{|j-k|\geqslant 3} \Delta_k f \Delta_j g + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \sum_{|j-k|<3} \Delta_k f \Delta_j g \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\leqslant j-3} \Delta_k f \Delta_j g + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\leqslant k-3} \Delta_k f \Delta_j g + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{|j-k|\leqslant 2} \Delta_k f \Delta_j g
\end{aligned}$$

c-à-d :

$$fg = \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-3} f \Delta_j g + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Delta_k f S_{k-3} g + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{|k-j|\leqslant 2} \Delta_k f \Delta_j g \tag{2.10}$$

c'est la décomposition de Bony. Cette décomposition est une formule particulière d'une formule générale écrite par J.M. Bony (théorème 2.5 page 8) dans l'article [6]

2.3 L'espace de Fourier-Besov

Dans cette section, on présente quelque définitions et propriétés concernant l'espace de Fourier-Besov.

Définition 4. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, et*

$$\|u\|_{F\dot{B}^s_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\|\widehat{\Delta_j u}\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} & si\ q < \infty \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js}\|\widehat{\Delta_j u}\|_p & si\ q = \infty \end{cases}$$

On définie l'espace de Fourier-Besov homogène $F\dot{B}^s_{p,q}$ par

$$F\dot{B}^s_{p,q} = \{u \in \mathscr{S}'/\mathcal{P} \mid \|u\|_{F\dot{B}^s_{p,q}} < \infty\}$$

Particulièrement Cannone et Wu ont introduit l'espace de Fourier-Herz $\dot{\mathcal{B}}^s_q$ [10] associé par la norme suivante

$$\|u\|_{\dot{\mathcal{B}}^s_q} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsq}\|\widehat{\Delta}_j u\|_1^q\right)^{\frac{1}{q}} & si\ q < \infty \\ \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js}\|\widehat{\Delta_j u}\|_1 & si\ q = \infty \end{cases}$$

il est clair que $\dot{\mathcal{B}}^s_q = F\dot{B}^s_{1,q}$

On montre une propriété importante de l'espace Fourier-Besov $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$,

Lemme 3. *L'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est un espace invariant d'échelle, c-à-d $\forall u \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \lambda \geq 0$:*

$$\|u^\lambda\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)} \qquad u^\lambda = \lambda u(\lambda.) \tag{2.11}$$

preuve. Soit $u \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\widehat{\phi}_j \widehat{u^\lambda}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}_j(\xi)\widehat{u^\lambda}(\xi)| \mathrm{d}\xi$$

et comme pour tout $\lambda \geq 0$, $\widehat{u^\lambda}(\xi) = \frac{\lambda}{\lambda^n}\widehat{u}(\frac{\xi}{\lambda})$. Alors

$$\|\widehat{\phi_j}\widehat{u^\lambda}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda}{\lambda^n}|\widehat{\phi_j}(\xi)\widehat{u}(\frac{\xi}{\lambda})|\mathrm{d}\xi$$
$$\overset{\lambda\zeta=\xi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda|\widehat{\phi_j}(\lambda\zeta)\widehat{u}(\frac{\zeta}{\lambda})|\mathrm{d}\zeta$$

On prend $2^{-j}\lambda = 2^{-j'}$, on obtient

$$j' = -log_2 2^{-j\lambda} = j - log_2\lambda.$$

Donc $\widehat{\phi_j}(\lambda\zeta) = \widehat{\phi_{j'}}(\zeta)$, ce qui implique

$$\|\widehat{\phi_j}\widehat{u^\lambda}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \lambda\|\widehat{\phi_{j'}}\widehat{u}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

c-à-d

$$2^{-j}\|\widehat{\phi_j}\widehat{u^\lambda}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = 2^{-j}2^{log_2\lambda}\|\widehat{\phi_{j'}}\widehat{u}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$
$$= 2^{-j'}\|\widehat{\phi_j}\widehat{u^\lambda}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

On applique la norme l^2, On obtient

$$\|u^\lambda\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)}$$

□

2.4 La transformation de Riesz et la projection de Leray-Helmholtz

Dans cette section, on définit la transformation de Riesz pour l'espace de Schwarz et pour l'espace des distributions tempérées modulo les polynômes. Cette transformation permettra de définir la projection de Leray-Helmholtz, qui sera utilisée dans la manipulation des équations de Navier-Stokes.

On commence avec la définition des distributions tempérées W_j.

Définition 5. *Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on définit les distributions tempérées W_j dans $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\langle W_j, \varphi\rangle = c_n \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon} \frac{y_i}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy, \quad \forall\varphi\in\mathscr{S},$$

où $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi^{-\frac{n+1}{2}}$ et Γ est la fonction Gamma.

Maintenant on va définir la transformation de Riesz dans $\mathscr{S}$. Et après, dans $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$.

Définition 6. *Soient $1 \leqslant j \leqslant n$ et $f \in \mathscr{S}$. On définit la $j-$ème transformée de Riesz de f par $R_j f$, comme :*

$$R_j f(x) = f * W_j(x) = c_n p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy,$$

où p.v. est la valeur principale de Cauchy, telle que :

$$p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy$$

Pour définir la projection de Leray-Helmholtz, on doit calculer la transformation de Fourier de la transformation de Riesz. En fait, on va vérifier que

$$\mathscr{F}\left[R_j f\right](\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}(\xi).$$

Au début, note que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} = (n-1) p.v. \left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}} \right)$$

au sens des distributions. En effet :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1}, f \right\rangle (y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1} f(y-x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1-n) \frac{x_j}{|x|^{n+1}} f(y-x) \mathrm{d}x \\
&= (1-n) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{x_j}{|x|^{n+1}} f(y-x) \mathrm{d}x \\
&= (1-n) p.v. \left\langle \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, f \right\rangle (y)
\end{aligned}$$

Par la définition 6 et en appliquant la transformation de Fourier, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[R_j f\right](\xi) &= \mathscr{F}\left[c_n p.v. \left\langle \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, f \right\rangle\right](\xi) \\
&= c_n \mathscr{F}\left[\frac{1}{1-n}\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1}\right](\xi)\widehat{f}(\xi) \\
&= \frac{c_n}{1-n}(i\xi_j)\mathscr{F}\left[|x|^{-n+1}\right](\xi)\widehat{f}(\xi) \\
&= \frac{c_n}{1-n}(2\pi i\xi_j)\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}|\xi|^{-1}\widehat{f}(\xi) \\
&= -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

en vérifiant la définition 5 pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ le symbole de $j-$ème transformée de Riesz. on notera par $\widehat{R_j}(\xi) := -i\frac{\xi_j}{|\xi|}$. D'autre part, la transformation de Riesz satisfait

$$I = -\sum_{j=1}^{n} R_j^2$$

où I est l'identité. Cela peut être démontré en utilisant la définition 5 et $\sum_{j=1}^n \left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)^2 = -1$. Maintenant, on est prêt à définir la $j-$ème transformée de Riesz R_j dans $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$. Étant donné $f \in \mathscr{S}'/\mathcal{P}$, la manière la plus naturelle de définir R_j serait :

$$\langle R_j f, \varphi\rangle = \langle f, R_j \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Cependant, cette définition n'est pas possible car, étant donné $\varphi \in \mathscr{S}$, ce n'est pas toujours vrai. Ainsi, on utilise une autre façon de définir la transformation de Riesz dans $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$. Dans la section précédente, nous avons donné un sens à la définition de l'élément $|\xi|^{-1}\widehat{f}$ en $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$. En combinant ce fait et la définition de la transformation de Riesz en $\mathscr{S}$, on peut définir la transformation de Riesz en $\mathscr{S}'/\mathcal{P}$.

Définition 7. *Soient $f \in \mathscr{S}'/\mathcal{P}$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. la $j-$ème transformée de Riesz de f, $R_j f$ est défini par sa transformée de Fourier comme suit*

$$\widehat{R_j f}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$$

On note que $R_j f \in \mathscr{S}'/\mathcal{P}$, car $-i\xi_j$ est un polynôme et $|\xi|^{-1}\widehat{f} \in \mathscr{S}'/\mathcal{P}$. On dispose maintenant de tous les outils nécessaires pour présenter la projection de Leray.

Définition 8. *La projection de Leray est définie comme suit*

$$\mathbb{P} = I + R \otimes R$$

Où I est l'identité sur $(\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$, $R = (R_1, R_2, ..., R_n)$ et $R \otimes R = (R_k R_j)_{1 \leqslant k,j \leqslant n}$.

Il en résulte que $\mathbb{P}f = f + (R \otimes R)f$ pour tout $f \in (\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$. En appliquant la transformation de Fourier, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\mathbb{P}f] &= \widehat{f} + \mathscr{F}[(R \otimes R)f] \\
&= \widehat{f} + (\mathscr{F}[R_k R_j])_{k,j}\widehat{f} \\
&= \widehat{f} + \left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\mathscr{F}[R_j]\right)_{k,j}\widehat{f} \\
&= \widehat{f} + \left(\frac{\xi_k}{|\xi|}\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)_{k,j}\widehat{f}
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathscr{F}[\mathbb{P}f](\xi) = \left(\delta_{k,j} - \frac{\xi_k \xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1 \leqslant k,j \leqslant n}\widehat{f}(\xi). \tag{2.12}$$

Dans la proposition suivante, on résume les autres propriétés que $\mathbb{P}$ satisfait :

Proposition 11. *(i) $\mathbb{P}$ est un opérateur linéaire ;*
(ii) $\nabla \cdot (\mathbb{P}f) = 0$ pour tout $f \in (\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$;
(iii) si $f \in (\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$ vérifie $\nabla \cdot f = 0$, alors $\mathbb{P}f = f$.

Démonstration. .
La partie (i) découle directement de la définition de $\mathbb{P}$.
Pour (ii), on a l'identité suivante

$$\nabla \cdot \mathbb{P} = \nabla \cdot I + \nabla \cdot (R \otimes R) = (\partial_k)_k + (R_k \nabla \cdot R)_k.$$

En appliquant la transformation de Fourier, on a

$$\widehat{\nabla \cdot \mathbb{P}} = (\widehat{\partial}_k)_k + (\widehat{R_k \nabla \cdot R})_k$$

Alors

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial}_k + (\widehat{R_k \nabla \cdot R})_k &= (-i\xi_k) + \frac{-i\xi_k}{|\xi|}(\widehat{\nabla \cdot R}) \\
&= (-i\xi_k) + \frac{-i\xi_k}{|\xi|}\sum_{l=1}^{n} -i\xi_l \widehat{R_l} \\
&= (-i\xi_k) + \frac{-i\xi_k}{|\xi|}\sum_{l=1}^{n} -i\xi_l \frac{-i\xi_l}{|\xi|} \\
&= (-i\xi_k) + \frac{i\xi_k}{|\xi|^2}\sum_{l=1}^{n} \xi_l^2 = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathscr{F}\{\nabla \cdot (\mathbb{P}f)\} = 0$ et donc $\nabla \cdot (\mathbb{P}f) = 0$.
Pour (iii) , on utilise (7) pour obtenir

$$(\mathscr{F}[\mathbb{P}f])_k = (\widehat{f})_k + \frac{i\xi_k}{|\xi|^2}\left(\sum_{j=1}^{n} -i\xi_j \widehat{f}_j\right), \tag{2.13}$$

Comme $\nabla \cdot f = 0$, On a

$$0 = \mathscr{F}[\nabla \cdot f] = \sum_{j=1}^{n} \mathscr{F}[\partial_j f_j] = \sum_{j=1}^{n} -i\xi_j \widehat{f}_j,$$

Et donc, en remplaçant dans (2.13), on obtient $\mathscr{F}[\mathbb{P}f] = \widehat{f}$. □

Remarque 2. *A partir de (ii) dans la proposition 11, on trouve $\mathbb{P}$ applique $(\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$ sur le sous-espace de $(\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$ formé par toutes les distributions à divergence nulle dans $(\mathscr{S}'/\mathcal{P})^n$. De plus, d'après (iii) dans la proposition 11, on a $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}$ est une projection.*

Cette projection sera utile pour étudier les équations de Navier-Stokes avec la force de Coriolis. Leurs propriétés par rapport à la transformée de Fourier nous aideront à établir des estimations importantes. Elle sera également utilisée pour définir un autre type de projection pour traiter les problèmes d'Euler-Coriolis et de Boussinesq-Coriolis.
Comme $\mathbb{P}$ sera appliquée dans la suite, on verra certaines de ses propriétés liées à des termes qui apparaissent dans les équations.

Proposition 12. .

(i) $\partial_t \mathbb{P} = \mathbb{P}\partial_t$;
(ii) $\Delta\mathbb{P} = \mathbb{P}\Delta$;
(iii) $\mathscr{F}[\mathbb{P}\nabla] = 0$.

On travaillera maintenant sur $\mathbb{R}^3$, où les résultats des sections suivantes ont été obtenus. Afin de gérer le terme de Coriolis, on définit les opérateurs de projection $P_\pm$ suivants :

$$\begin{aligned} P_\pm : L^2(\mathbb{R}^3)^3 &\to L^2(\mathbb{R}^3)^3 \\ f &\mapsto \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}f \pm i\frac{D}{|D|} \times f\right), \end{aligned}$$

Où $\dfrac{D}{|D|}\times$ est défini par la transformé de Fourier comme

$$\left(\widehat{\frac{D}{|D|} \times f}\right)(\xi) := \frac{\xi}{|\xi|} \times \widehat{f}(\xi).$$

Le lemme suivant contient les propriétés de $P_\pm$, que l'on peut trouver dans [30].

Lemme 4. *les projections $P_\pm$ vérifie $P_\pm\mathbb{P} = P_\pm$. De plus, si $\nabla \cdot f = 0$ on a :*
(i) $f = P_+f + P_-f$;
(ii) $\mathbb{P}(e_3 \times f) = -i\dfrac{D_3}{|D|}(P_+f - P_-f)$;
(iii) $P_\pm P_\pm = P_\pm$;
(iv) $P_\pm P_\mp = 0$.

Démonstration. soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$, on remarque que

$$\begin{aligned} P_\pm(\mathbb{P}f) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(\mathbb{P}f) \pm i\frac{D}{|D|} \times (\mathbb{P}f)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}f \pm i\frac{D}{|D|} \times (\mathbb{P}f)\right) \end{aligned}$$

On montrera que

$$\frac{D}{|D|} \times (\mathbb{P}f) = \frac{D}{|D|} \times f.$$

On sait que

$$(\widehat{\mathbb{P}f})_k = \widehat{f}_k + i\frac{\xi_k}{|\xi|^2}\left(\sum_{l=1}^{3} -i\xi_l \widehat{f}_l\right),$$

et donc,

$$\xi_j(\widehat{\mathbb{P}f})_k - \xi_k(\widehat{\mathbb{P}f})_j = \xi_j\widehat{f}_k - \xi_k\widehat{f}_j.$$

Ainsi,

$$\frac{\xi}{|\xi|} \times (\widehat{\mathbb{P}f})(\xi) = \frac{1}{|\xi|}\begin{pmatrix} \xi_2\widehat{f}_3 - \xi_3\widehat{f}_2 \\ -\xi_1\widehat{f}_3 + \xi_3\widehat{f}_1 \\ \xi_1\widehat{f}_1 - \xi_2\widehat{f}_1 \end{pmatrix} = \frac{\xi}{|\xi|} \times \widehat{f}(\xi)$$

Alors $P_{\pm}(\mathbb{P}f) = P_{\pm}f$. Si $\nabla \cdot f = 0$ alors $\mathbb{P}f = f$, et par conséquent

$$P_+f + P_-f = \frac{1}{2}\left(f + i\frac{D}{|D|} \times f\right) + \frac{1}{2}\left(f - i\frac{D}{|D|} \times f\right) = f$$

Ainsi (i) est vérifié.
Ensuite, on va prouver (ii). Puisque $P_+f - P_-f = i\dfrac{D}{|D|} \times f$, on a

$$-i\frac{D_3}{|D|}(P_+f - P_-f) = \frac{D_3}{|D|}\left(\frac{D}{|D|} \times f\right).$$

Par conséquent, en appliquent la transformations de Fourier sur le côté droit de l'égalité ci-dessus, on a

$$\frac{\xi_3}{|\xi|}\frac{\xi}{|\xi|} \times (\widehat{\mathbb{P}f})(\xi) = \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\begin{pmatrix} \xi_2\widehat{f}_3 - \xi_3\widehat{f}_2 \\ -\xi_1\widehat{f}_3 + \xi_3\widehat{f}_1 \\ \xi_1\widehat{f}_1 - \xi_2\widehat{f}_1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, à l'aide de $\xi_1\widehat{f_1}+\xi_2\widehat{f_2}+\xi_3\widehat{f_3}=0$ on obtient

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{P}\widehat{(e_3\times f)})_1 &= (\widehat{e_3\times f})_1 + i\frac{\xi_1}{|\xi|^2}\sum_{j=1}^{3}(-i\xi_j(\widehat{e_3\times f})_j)\\
&= -\widehat{f_2} - \frac{\xi_1}{|\xi|^2}(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1})\\
&= -\widehat{f_2} - \frac{1}{|\xi|^2}(\xi_1^2\widehat{f_2}-\xi_2(-\xi_2\widehat{f_2}-\xi_3\widehat{f_3}))\\
&= -\left(1-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{|\xi|^2}\widehat{f_2}\right)+\frac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2}\widehat{f_3}\\
&= \frac{\xi_3}{|\xi|^2}(\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2}).
\end{aligned}
$$

De même, on a

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{P}\widehat{(e_3\times f)})_2 &= \frac{\xi_3}{|\xi|^2}(-\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1}),\\
(\mathbb{P}\widehat{(e_3\times f)})_3 &= \frac{\xi_3}{|\xi|^2}(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1}).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\mathbb{P}\widehat{(e_3\times f)}=\dfrac{\xi_3}{|\xi|^2}\xi\times\widehat{f}$. En appliquant le Fourier inverse, on obtient (ii).

Pour (iii) on note que

$$
\begin{aligned}
P_\pm P_\pm f &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(P_\pm f)\pm i\frac{D}{|D|}\times P_\pm f\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}f\pm i\frac{D}{|D|}\times f\right)\pm i\frac{D}{|D|}\times\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}f\pm i\frac{D}{|D|}\times f\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbb{P}f\pm i\mathbb{P}\frac{D}{|D|}\times f\pm i\frac{D}{|D|}\times\left(\mathbb{P}f\pm i\frac{D}{|D|}\times f\right)\right)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
P_\pm P_\pm f = \frac{1}{4}\left(f\pm i\frac{D}{|D|}\times f\pm i\mathbb{P}\frac{D}{|D|}\times f-\frac{D}{|D|}\times\left(\frac{D}{|D|}\times f\right)\right). \tag{2.14}
$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$
-\frac{D}{|D|}\times\left(\frac{D}{|D|}\times f\right)=f \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\frac{D}{|D|}\times f=\frac{D}{|D|}\times f.
$$

En appliquant le transformé de Fourier et $\nabla.f=0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left(\frac{D}{|D|}\times\left(\frac{D}{|D|}\times f\right)\right) &= \frac{1}{|\xi|^2}(\xi\times(\xi\times\widehat{f}))\\
&= \frac{1}{|\xi|^2}(\xi\times\begin{pmatrix}\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2}\\ -\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1}\\ \xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1}\end{pmatrix})\\
&= \frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix}\xi_2(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1})-\xi_3(-\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1})\\ -\xi_1(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1})+\xi_3(\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2})\\ \xi_1(-\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1})-\xi_2(\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2})\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix}\xi_1(\xi_2\widehat{f_2}-\xi_3\widehat{f_3})-(\xi_2^2+\xi_3^2)\widehat{f_1})\\ \xi_2(\xi_1\widehat{f_1}-\xi_3\widehat{f_3})-(\xi_1^2+\xi_3^2)\widehat{f_2})\\ \xi_3(\xi_1\widehat{f_1}-\xi_2\widehat{f_2})-(\xi_1^2+\xi_2^2)\widehat{f_3})\end{pmatrix}\\
&= -\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2}\widehat{f}\\
&= -\widehat{f}
\end{aligned}$$

Et pour la deuxième égalité

$$\mathscr{F}\{\mathbb{P}\frac{D}{|D|}\times f\}=\left(\delta_{k,j}-\frac{\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{k,j}\frac{\xi}{|\xi|}\times\widehat{f}$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\left(\delta_{k,j}-\frac{\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{k,j}\begin{pmatrix}\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2}\\ -\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1}\\ \xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\begin{pmatrix}\left(1-\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\right)(\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2})+\left(-\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2}\right)(-\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1})+\left(-\frac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2}\right)(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1})\\ \left(-\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2}\right)(\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2})+\left(1-\frac{\xi_2^2}{|\xi|^2}\right)(-\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1})+\left(-\frac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2}\right)(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1})\\ \left(-\frac{\xi_1\xi_3}{|\xi|^2}\right)(\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2})+\left(-\frac{\xi_2\xi_3}{|\xi|^2}\right)(-\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1})+\left(1-\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}\right)(\xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1})\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\begin{pmatrix}\xi_2\widehat{f_3}-\xi_3\widehat{f_2}\\ -\xi_1\widehat{f_3}+\xi_3\widehat{f_1}\\ \xi_1\widehat{f_2}-\xi_2\widehat{f_1}\end{pmatrix}=\frac{\xi}{|\xi|}\times\widehat{f}$$

Ainsi, en appliquant la transformée de Fourier inverse et en remplaçant les deux égalités ci-dessus dans (2.14), d'où $P_\pm$ est une projection.

Et enfin, pour (iv) , on remarque que

$$\begin{aligned} P_\pm P_\mp f &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(P_\mp f) \pm i\frac{D}{|D|} \times P_\mp f\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}f \mp i\frac{D}{|D|} \times f\right) \pm i\frac{D}{|D|} \times \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}f \mp i\frac{D}{|D|} \times f\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{P}f \mp i\mathbb{P}\frac{D}{|D|} \times f \pm i\frac{D}{|D|} \times \left(\mathbb{P}f \mp i\frac{D}{|D|} \times f\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f \mp i\frac{D}{|D|} \times f \pm i\mathbb{P}\frac{D}{|D|} \times f + \frac{D}{|D|} \times \left(\frac{D}{|D|} \times f\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f \mp i\frac{D}{|D|} \times f \pm i\frac{D}{|D|} \times f - f\right) = 0 \end{aligned}$$

□

2.5 Semi-groupe de la chaleur et de Stokes-Coriolis

On commence par définir ce qu'est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés et les Semi-groupes uniformément continus

Définition 9. *Soit X un espace de Banach. la famille $(T(t))_{0\leqslant t<\infty}$ des opérateurs linéaires bornées de X vers X est un semi-groupe sur X si :*
(i) $T(0) = I$, où I est l'identité sur X ;
(ii) $T(t+t') = T(t)T(t')$ pour tout $t, t' \geqslant 0$.
un semi-groupe $T(t)$ est uniformément continue si :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

L'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{x \in X : \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{existe}\right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{pour } x \in D(A)$$

est l'opérateur infinitésimal de T, $D(A)$ est le domaine de A.
En conséquence du semi-groupe uniformément continu, on a :

$$\lim_{t\to t'} \|T(t') - T(t)\| = 0$$

Proposition 13. *Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

La proposition suivante garantie l'unicité des semi-groupes uniformément continus pour un générateur infinitésimal.

Proposition 14. *(voir [35, page 2])*
Soient $T(t)$ et $S(t)$ deux semi-groupes uniformément continus, si :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t) - I}{t},$$

Alors $T(t) = S(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Certaines propriétés de semi-groupes uniformément continus sont résumées dans le corollaire suivant :

Corollaire 2. *(voir [35, page 3])*
Soit $T(t)$ un semi-groupe uniformément continu, donc :
(i) Il existe une constante $w \geqslant 0$ telle que $\|T(t)\| \leqslant e^{wt}$;
(ii) Il existe un seul opérateur linéaire borné A tel que $T(t) = e^{tA}$;
(iii) L'opérateur A dans (ii) est un générateur infinitésimal de $T(t)$;
(iv) L'application $t \mapsto T(t)$ est différentiable et

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Ensuite, on va présenter la définition d'un semi groupe fortement continu ou C_0 semi-groupe.

Définition 10. *Un semi-groupe $T(t)$, $0 \leqslant t < \infty$ d'opérateur linéaire bornés sur X, est dit fortement continu si :*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x \quad \forall x \in X$$

dans ce cas, $T(t)$ est dit un semi-groupe de classe C_0 ou tout simplement C_0 semi-groupe.

Proposition 15. *(voir [35, page 4])*
Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe, ils existent des constantes $w \geqslant 0$ et $M \geqslant 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad \forall 0 \leqslant t < \infty.$$

De plus, pour tout $x \in X$ l'application $t \mapsto T(t)x$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ vers X.

Si $w = 0$, $T(t)$ est dit uniformément borné, et de plus si $M = 1$, $T(t)$ est dit un C_0 semi-groupe de contraction.
On résume plusieurs propriétés des C_0 semi-groupes dans la proposition suivante.

Proposition 16. *(voir [35, page 4])*
Soient $T(t)$ un C_0 semi-groupe et A un générateur infinitésimal. Alors

(i) Pour, $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau = T(t)x;$$

(ii) Pour, $x \in X$, $\int_0^t T(\tau)x \in D(A)$ et

$$A\left(\int_0^t T(\tau)x\,d\tau\right) = T(t)x - x;$$

(iii) Pour $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

(iv) Pour $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(t')x = \int_{t'}^{t} T(\tau)Ax\,d\tau = \int_{t'}^{t} AT(\tau)x\,d\tau;$$

(v) $D(A)$ dense dans X et A un opérateur linéaire fermé.

La proposition suivante garantit l'unicité des C_0 semi-groupes pour un générateur infinitésimal.

Proposition 17. *(voir [35, page 6])*
Soient $T(t)$ et $S(t)$ deux C_0 semi-groupes de générateur infinitésimal A et B, respectivement. Si $A = B$, alors $T(t) = S(t) \quad \forall t \geqslant 0$.

Soient A un opérateur linéaire défini sur X qui n'est pas nécessairement borné. L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A est défini comme l'ensemble de tous les nombres complexes λ pour lesquels $\lambda I - A$ est inversible. La famille $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$ des opérateurs linéaires bornés est appelée la résolvante de A.
Un résultat important dans la théorie des semi-groupes est le théorème suivant.

Théorème 5. ***(Théorème de Hille-Yosida, voir [35, page 8])*** *Un opérateur linéaire (non borné) A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions $T(t), t \geqslant 0$ si et seulement si :*
(i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$;
(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et $\forall \lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Étant donné $x \in X$, le problème abstrait de Cauchy pour A avec la donnée initiale x consiste à trouver une solution au problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, \quad t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{2.15}$$

où la solution est une fonction $u(t)$ à valeur dans X telle que $u(t)$ soit continue pour $t \geqslant 0$, continuellement différentiable, $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et que (2.15) est satisfaite. D'après la proposition 16, il est clair que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, le problème (2.15) a une solution, $u(t) = T(t)x$ pour tout $x \in D(A)$.

Définition 11. *Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe sur un espace de Banach X. Le semi-groupe $T(t)$ est dit différentiable pour $t > t_0$ si pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$. $T(t)$ est dit différentiable s'il est différentiable pour $t > 0$.*

L'existence et l'unicité de la solution de (2.15) sont garanties pour les semi-groupes différentiables.

Proposition 18. *(voir [35, page 104]) Si A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe différentiable, alors pour tout $x \in X$* (2.15) *admet une solution unique.*

Maintenant, on considère le problème de Cauchy non homogène à (2.15), c'est-à-dire le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f, \quad t > 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{2.16}$$

où $f : [0, T[\to X$. On suppose ici que A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ tel que l'équation homogène correspondante ($f \equiv 0$) admet une solution unique pour toute donnée initiale $x \in D(A)$. Pour l'existence de solutions de (2.16). On a le résultat suivant.

Proposition 19. *Si $f \in L^1(0, T; X)$ alors pour tout $x \in X$ le problème* (2.16) *a au plus une solution. S'il a une solution, cette solution est donnée par*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{2.17}$$

Ici, la fonction $u \in C([0, T], X)$ donnée par (2.17) pour $t \in [0, T]$ est appelée solution "mild" pour (2.16) sur $[0, T]$. On remarque que toutes les solutions "mild" de (2.16) ne sont pas en effet des solutions classiques, même dans le cas $f \equiv 0$. Il est clair que (2.16) a une solution "mild" unique si $f \in L^1(0, T; X)$. Il faut donc imposer des conditions à f pour que, pour $x \in D(A)$, la solution "mild" devienne une solution classique de (2.16). Notez que la continuité de f, en général, n'est pas suffisante pour assurer l'existence de solutions de (2.16), pour $x \in D(A)$. Par exemple, considérons A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ et prenons $x \in X$ tel que $T(t)x \notin D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$. Supposons que la fonction continue f soit définie par $f(\tau) = T(\tau)x$ pour $\tau \geqslant 0$, et considérons le problème suivant :

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + T(t)x \quad \text{et} \quad u(0) = 0. \tag{2.18}$$

Alors (2.18) n'a pas de solution, car la fonction

$$u(t) = \int_0^t T(t-\tau)T(\tau)x\mathrm{d}\tau = tT(t)x$$

n'est pas différentiable pour $t > 0$. On doit donc donner plus de conditions à f pour garantir l'existence de solutions au problème (2.16).

Le résultat suivant donne des conditions pour assurer l'existence de solutions à (2.16).

Théorème 6. *(voir [35, page 107]).*
Soient A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, $f \in L^1(0,T;X)$ et

$$v(t) = \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

le problème (2.16) *a une solution forte u sur $[0,T]$ pour tout $x \in D(A)$, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $v(t)$ est différentiable p.s. sur $[0,T]$ et $v'(t) \in L^1(0,T;X)$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ p.s. sur $[0,T]$ et $Av(t) \in L^1(0,T;X)$.

Si 2.16 a une solution forte u sur $[0,T]$ pour un $x \in D(A)$, Alors v satisfait à la fois (i) et (ii).

Nous nous intéressons à deux semi-groupes. Le premier est connu dans la littérature sous le nom de semi-groupe de la chaleur, désigné généralement par $e^{t\Delta}$ et d'un générateur infinitésimal $A = \Delta$. Son nom est dû à sa relation connue avec les équations de chaleur, car $u(t) = e^{t\Delta}x$ est la solution au problème homogène 2.15 pour $A = \Delta$. Le second est moins connu et s'appelle le semi-groupe de Stokes-Coriolis, $T_\Omega(t)$, avec le générateur infinitésimal $A = \Delta - (e_3 \times \cdot)$. Comme nous le verrons, ce semi-groupe peut s'écrire comme une composition du semi-groupe de chaleur et d'un opérateur oscillant. Ces deux semi-groupes s'avèrent d'une grande importance en raison des techniques utilisées pour obtenir l'existence de solutions aux problèmes étudiés.

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution des équations de Navier-Stokes avec la force de Coriolis

Nous avons vu que l'on peut modéliser les équations de Navier-Stokes, pour un fluide visqueux homogène incompressible de viscosité constante, en rotation autour d'un axe fixe. Si nous négligeons la force centrifuge, on a le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = X_i - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{p}{\rho}\right) + \mu \Delta u_i + 2\epsilon_{ijk} u_j \Omega_k. \\ \sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans ce qui suit on va utiliser Ω au lieu de 2Ω. Nous donnons maintenant le système des équations de Navier-Stokes que nous considérons dans la suite :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = X - \nabla\left(\dfrac{p}{\rho}\right) + \mu\Delta u - \Omega e_3 \times u & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ div\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3.2}$$

dont $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ et $p = p(x,t)$ sont respectivement le champ de vitesse et la pression du fluide au point $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, $u_0 = u_0(x) = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), u_{0,3}(x))$ la vitesse initiale du fluide vérifie $div\ u_0 = 0$. Le nombre réel Ω représente la vitesse de rotation autour du vecteur $e_3 = (0,0,1)$, qui est appelé le paramètre de Coriolis.

Pour simplifier, on considère le cas d'un fluide de densité $\rho = 1$ et viscosité $\mu = 1$. le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \Omega e_3 \times u + (u.\nabla)u + \nabla p = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ div\ u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{array}\right. \tag{NSC}$$

Il convient évidement de préciser, dès le début, le sens mathématique que nous voulons donner aux équations du système (NSC). Car souvent, dans la littérature concernant la résolution des équations de Navier-Stokes, le mot "solution" a été utilisé de manière fort différente.

Définition 12. *On dira que $u(x,t)$ est une solution forte classique des équations de Navier-Stokes s'il existe deux espaces de Banach E et F de distributions de x tels que les propriétés suivantes soit vérifiées :*

$$u(x,t) \in \mathscr{C}(E;[0,T[) \cap \mathscr{C}^1(F;[0,T[) \tag{3.3}$$

$$E \hookrightarrow F \quad \textbf{\textit{(injection continue)}} \tag{3.4}$$

$$u \in E \Rightarrow \Delta u \in F \quad \textbf{\textit{(opérateur continue)}} \tag{3.5}$$

$$u \in E \Rightarrow (u \cdot \nabla)u \in F \quad \textbf{\textit{(opérateur continue)}} \tag{3.6}$$

Définition 13. *On dit que $u(\xi,t)$ est une solution "mild" des équations de Navier-Stokes s'il existe un espace de Banach E tel que $u(\xi,t) \in \mathscr{C}(E;[0,T[)$ et si $u(\xi,t)$ vérifie :*

$$u(t) = T(t)u_0 - \int_0^t T(t-\tau)\mathbb{P}div(u \otimes u)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{IE}$$

où $T(t) = e^{t\Delta}e^{-\Delta t \boldsymbol{S}}$ est le semi-groupe de Stokes-Coriolis avec $\boldsymbol{S} = \mathbb{P}J\mathbb{P}$,$\mathbb{P}$ l'opérateur de projection sur les champs de vecteurs à divergence nulle, l'intégral $\int_0^t T(t-\tau)\mathbb{P}div(u \otimes u)(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ étant considérée au sens de Bochner.

Pour réduire le système différentiel (NSC) sous la forme d'intégrale "mild", il faut introduire l'opérateur de projection $\mathbb{P}$ sur le champs de vecteur à divergence nulle. soit $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ un champs de vecteurs arbitraire, on pose d'abord

$$z(x) = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3$$

$R_j = -i\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3$ étant la transformation de Riesz classique, et l'on désigne par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}u &= (u_1 - R_1 z, u_2 - R_2 z, u_3 - R_3 z)\\ &= (I - \nabla\Delta^{-1}\nabla\cdot)u\end{aligned}$$

On vérifié les propriétés suivantes :

$$\nabla \cdot u = 0 \Rightarrow \mathbb{P}u = u \tag{3.7}$$

$$\nabla \cdot \mathbb{P}u = 0 \qquad \forall u \tag{3.8}$$

Ces propriétés sont facile à vérifiés en passant par la transformée de Fourier. En effet, on a :

$$\widehat{\mathbb{P}u}_j(\xi) = \sum_{k=1}^{3}(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2})\widehat{u}(\xi)$$

On sait aussi que si $\nabla \cdot u = 0$ alors de même $\nabla \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ et $\nabla \cdot \Delta u = 0$. On applique la divergence sur l'équation de Navier-Stokes (NSC) on obtient :

$$\nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \Delta u + \nabla \cdot \Omega e_3 \times u + \nabla \cdot (u.\Delta)u + \nabla \cdot \nabla p = 0$$

D'après la simplification

$$\nabla \cdot \nabla p = -\nabla \cdot (u.\Delta)u - \nabla \cdot \Omega e_3 \times u$$

et comme, on a $\nabla \cdot \Omega e_3 \times u = (\nabla \times \Omega e_3) \cdot u + \Omega e_3 \cdot (\nabla \times u) = \Omega e_3 \cdot (\nabla \times u)$

$$\Delta p = -\big(\nabla \cdot (u.\Delta)u + \Omega e_3 \cdot (\nabla \times u)\big)$$

On applique la transformé de Fourier à l'équation précédente :

$$-|\xi|^2\widehat{p} = -\big(\nabla \cdot (u.\Delta)\widehat{u + \Omega e_3} \cdot (\nabla \times u)\big)$$

c-à-d :

$$\widehat{p} = |\xi|^{-2}\big(\nabla \cdot (u.\Delta)\widehat{u + \Omega e_3} \cdot (\nabla \times u)\big)$$

Par transformé de Fourier inverse, on obtient :

$$p = -\Delta^{-1}\big(\nabla \cdot (u.\Delta)u + \Omega e_3 \cdot (\nabla \times u)\big)$$

D'où :

$$\nabla p = -\nabla\Delta^{-1}\nabla\cdot(u.\Delta)u + \Omega\nabla\Delta^{-1}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) \tag{3.9}$$

Soit J la matrice qui vérifiée $Ja = e_3 \times a$ pour tout vecteur a. Alors

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut exprimé la projection de Leray qu'on a vu précédemment par :

$$\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant 3}; \qquad \mathbb{P}_{ij} = \delta_{ij} + R_i R_j$$

tel que δ_{ij} est le symbole de Kronecker, le symbole $\sigma(R_j)$ de R_j égale $i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}$, ou $i = \sqrt{-1}$.

On applique la projection de Leray sur (NSC). On obtient :

$$\mathbb{P}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbb{P}\Omega J u + \mathbb{P}(-\Delta)u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla)u + \mathbb{P}\nabla p = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mathbb{P}u}{\partial t} + \Omega\mathbb{P}J\mathbb{P}u - \Delta\mathbb{P}u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla)u + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \Omega\mathbf{S}u - \Delta u + \mathbb{P}(u\cdot\nabla)u = 0 \tag{3.10}$$

où $\mathbf{S} = \mathbb{P}J\mathbb{P}$. On prend $A(\Omega)u = \Omega\mathbf{S}u - \Delta u$, l'équation (3.10) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(\Omega)u = -\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u \tag{3.11}$$

La solution du système linéaire de (3.11) est donné par [22] comme suivante :

$$u(t) = e^{t\Delta}e^{-\Omega t\mathbf{S}}u_0 \tag{3.12}$$

On pose $T(t) = e^{t\Delta}e^{-\Omega t\mathbf{S}}$, d'après le principe de Duhamel, on a l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = T(t)u_0 - \int_0^t T(t-\tau)\mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

et comme on a $\nabla\cdot u = 0$, alors

$$u(t) = T(t)u_0 - \int_0^t T(t-\tau)\mathbb{P}div(u\otimes u)(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.13}$$

Remarque 3. *la pression p n'apparait plus dans les équations de Navier-Stokes sous la forme d'intégrale "mild". on peut exprimer la forme donné en* (3.9) *en fonction de transformé de Riez comme suivant :*

$$\partial_i p = -\sum_{j=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_j R_k u_j u_k + \Omega R_i (R_2 u_1 - R_1 u_2) \tag{3.14}$$

3.0.1 La transformée de Fourier de Semi-groupe $T(.)$

La transformée de fourier de l'opérateur $T(.)$ qu'on a présenté dans la partie précédente est s'écrit comme suit :

$$\widehat{T(t)f}(\xi) = \cos(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t)e^{-|\xi|^2 t} I\widehat{f}(\xi) + \sin(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t)e^{-|\xi|^2 t} R(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

pour tout $t \geqslant 0$ et f le champs de vecteur à divergence nulle. Ici $\{R_i\}_{i=0}^{3}$ signifie la transformation de Riesz, I la matrice identité dans $\mathbb{R}^3$ et $R(\xi)$ est une matrice antisymétrique, qui est définie par

$$R(\xi) := \frac{1}{\xi}\begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ \xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \xi \in \mathbb{R}^3 \backslash 0.$$

Pour plus d'information de la forme explicite de $T(.)$, on se réfère à Hieber et Shibata [25].

3.1 Énoncé des théorèmes fondamentaux

Théorème 7. *Pour tout* $0 < \alpha < 1$*, il existe des constantes positives* C *et* δ *indépendants de* Ω*, tel que pour tout* $u_0 \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)^3$ *avec* $div\, u_0 = 0$ *et* $\|u_0\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}} \leqslant \delta$*,* (NSC) *possède une solution global "mild" unique* $u \in X^\alpha$*,*

$$X^\alpha := \{u \in C([0,\infty); F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3))^3 \quad | \quad \|u\|_{X^\alpha} \leqslant 2C\delta, \quad div\, u = 0\}$$

avec,

$$\|u\|_{X^\alpha} := \|u\|_Y + \|u\|_{Z^\alpha} + \|u\|_{Z^{-\alpha}}$$

$$\|u\|_Y := \sup_{t>0} \|u(t)\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}}, \qquad \|u\|_{Z^{\pm\alpha}} := \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{\pm\alpha j} \|\widehat{\phi_j}\widehat{u}\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^1(\mathbb{R}^3))})^2 \Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 4. *Le théorème 7 indique l'existence et l'unicité de la solution globale "mild" de* (NSC) *pour toute condition initiale suffisamment petite dans* $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$*. De plus, la constante positive* δ *dans le théorème 7 peut être prise indépendament de* $\Omega \in \mathbb{R}$*, ce qui implique que la solution "mild" est uniformément globale. Ainsi, il est facile de voir que* $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *et* $F\dot{B}^{-1}_{1,1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$*. Par conséquent, le théorème 7 couvre les résultats obtenus par Hieber et Shibata [25] et une partie des résultats de Konieczny et Yoneda [31].*

Remarque 5. *Il n'existe aucune relation d'inclusion entre* $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *et* $FM_0^{-1}(\mathbb{R}^3)$ *dans [23], et entre* $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ *et* $F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$ *avec* $1 < p \leqslant \infty$ *[31],non plus. En effet, nous donnerons des exemples* F_1*,* F_2 *et* F_3 *des fonctions sur* $\mathbb{R}^3$ *telles que*

$$F_1 \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3) \qquad avec \quad F_1 \notin FM_0^{-1}(\mathbb{R}^3), \quad F_1 \notin F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3) \tag{3.15}$$

$$F_2 \in FM_0^{-1}(\mathbb{R}^3) \qquad avec \quad F_2 \notin F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{3.16}$$

$$F_3 \in F\dot{B}^{2-\frac{3}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3) \qquad avec \quad F_3 \notin F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{3.17}$$

Soit $f_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$ *vérifié*

$$\widehat{f_0} \geqslant 0, \quad \widehat{f_0}(\xi) = \begin{cases} 1 & si\ |\xi| \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & si\ |\xi| \geqslant 1 \end{cases}$$

On met $\widehat{f_j}(\xi) := \widehat{f}(\xi - 2^j e_1)$ pour $j \in \mathbb{N}$ avec $e_1 = (1,0,0)$. Puis on définie les fonctions F_1, F_2 et F_3 par

$$F_1(x) := \sum_{j=10}^{\infty} \frac{2^j}{j} f_j(x), \qquad F_2(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j . x}, \qquad F_3(x) := \frac{1}{|x|},$$

Où $a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ avec $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{|\lambda_j|} < \infty$.

Démonstration. .
$\underline{F_1 \in \dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3) :}$
Pour toutes $j \in \mathbb{Z}$ et $10 \leqslant k \leqslant \infty$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\widehat{\phi_j} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\} \\ \mathrm{supp}\widehat{f_k} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2^k - 1 \leqslant |\xi| \leqslant 2^k + 1\}. \end{cases}$$

Donc pour tout $10 \leqslant k \leqslant \infty$

$$\begin{cases} \widehat{\phi_j}\widehat{f_k} \not\equiv 0 & \mathrm{si}\, k = j-1, j, j+1 \\ \widehat{\phi_j}\widehat{f_k} \equiv 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\widehat{\phi_j}\widehat{F_1} = \sum_{k \geqslant 10} \frac{2^k}{k} \widehat{\phi_j}\widehat{f_k} \sim \frac{2^j}{j} \widehat{\phi_j}\widehat{f_j}, \tag{3.18}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|F_1\|^2_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-2j} \|\widehat{\phi_j}\widehat{F_1}\|^2_{L^1} \\ &\leqslant C \sum_{j \geqslant 10} 2^{-2j} \|\frac{2^j}{j} \widehat{\phi_j}\widehat{f_j}\|^2_{L^1} \\ &\leqslant C \sum_{j \geqslant 10} \frac{\|\widehat{\phi_j}\widehat{f_j}\|^2_{L^1}}{j^2} \\ &\leqslant C \sum_{j \geqslant 10} \frac{1}{j^2}. \end{aligned}$$

D'où le resultat.

$\underline{F_1 \notin F\dot{B}^{2-\frac{3}{P}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3) :}$

$$\|F_1\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{P}}_{p,\infty}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(2-\frac{3}{p}}\|\widehat{\phi}_j\widehat{F_1}\|_{L^p} \tag{3.19}$$

D'après (3.18), on a

$$\begin{aligned} 2^{j(2-\frac{3}{p}}\|\widehat{\phi}_j\widehat{F_1}\|_{L^p} &\sim 2^{j(2-\frac{3}{p}}\|\frac{2^j}{j}\widehat{\phi}_j\widehat{f}_j\|_{L^p} \\ &\sim \frac{2^{3j-\frac{3j}{p}}}{j}\|\widehat{\phi}_j\widehat{f}_j\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|F_1\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{P}}_{p,\infty}} \geqslant C\sup_j \frac{2^{3j-\frac{3j}{p}}}{j},$$

pour tout $0 < p \leqslant \infty$. D'où le résultat.

$\underline{F_3 \in F\dot{B}^{2-\frac{3}{P}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^3) :}$

La transformée de Fourier de F_3 :

D'après ([4] page 23) ($1 \in]0,3[$), il existe une constante c_d dépend de d telle que :

$$\mathscr{F}\left(\frac{1}{|.|}\right) = c_d\frac{1}{|.|^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{F\dot{B}^{2-\frac{3}{P}}_{p,\infty}} &= C\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(2-\frac{3}{p})}\|\widehat{\phi}_j\frac{1}{|.|^2}\|_{L^p} \\ &\leqslant C\sup_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{j(2-\frac{3}{p})}}{2^{2j}}\|\widehat{\phi}_j\|_{L^p} \qquad (\|\widehat{\phi}_j\|_{L^p} = C2^{\frac{3j}{p}}) \\ &\leqslant C. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\underline{F_3 \notin F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3) :}$

$$\begin{aligned}
\|F_1\|^2_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-2j}\|\widehat{\phi}_j\widehat{F_3}\|^2_{L^1}\\
&= C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-2j}\|\widehat{\phi}_j\frac{1}{|.|^2}\|^2_{L^1}\\
&\geqslant C\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{2^{-2j}2^{6j}}{2^{4j}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Remarque 6. *On remarque que des exemples similaires comme F_1 et F_2 (dans la remarque précédente) ont été utilisés dans [26] et [23], respectivement.Notons que la fonction F_1 vérifie aussi $F_1 \in \dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et $F_1 \in \dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)\setminus \dot{FB}^{-1}_{1,1}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent, l'espace fonctionnel $\dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ est strictement plus grand que celui de [25] et [31].*

Démonstration. .
$\underline{F_1 \notin H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) :}$
D'après le théorème de Bernstein et la propriété (3.18), on a

$$\begin{aligned}
\|F_1\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j}\|\Delta_j F_1\|^2_{L^2}\\
&= C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j}\|\widehat{\Delta_j F_1}\|^2_{L^2}(\text{Bernstein})\\
&= C\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j}\|\widehat{\phi}_j\widehat{F_1}\|^2_{L^2}\\
&\geqslant C\sum_{j\geqslant 10} 2^{j}\|\frac{2^j}{j}\widehat{\phi}_j\widehat{f}_j\|^2_{L^2}\\
&\geqslant C\sum_{j\geqslant 10}\frac{2^{3j}}{j^2}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\underline{F_1 \notin \dot{FB}^{-1}_{1,1}(\mathbb{R}^3) :}$

$$\begin{aligned}
\|F_1\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,1}} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j}\|\widehat{\phi_j}\widehat{F_1}\|_{L^1} \\
&\geqslant C\sum_{j\geqslant 10} 2^{-j}\left\|\frac{2^j}{j}\widehat{\phi}_j\widehat{f}_j\right\|_{L^1} \qquad \text{(d'après (3.18))} \\
&\geqslant C\sum_{j\geqslant 10}\frac{1}{j}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Il semble naturel de se demander si (NSC) est bien-posé ou non dans des espaces fonctionnels plus grands que $\dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$. Alors le deuxième résultat :

Théorème 8. *Pour $2 < q \leqslant \infty$, (NSC) est mal-posé dans l'espace $\dot{FB}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3)$, dans le sens où la continuité de l'application solution ne tient pas de la donnée initiale à la solution.*

Remarque 7. *Le théorème 8 indique que la stabilité des solutions ne tient pas dans $\dot{FB}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3)$, avec $2 < q \leqslant \infty$, ce qui signifie également que l'espace $\dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ dans le théorème 7 est optimal pour que (NSC) soit bien-posé.*

Remarque 8. *On remarque que théorème 8 est valable même dans le cas $\Omega = 0$. Par conséquent, le théorème 8 implique que (NS) est mal posée dans $\dot{FB}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < q \leqslant \infty$. Pour (NS), Germain [20] a montré la discontinuité du deuxième itéré dans $\dot{FB}^{-1}_{\infty,q}(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < q \leqslant \infty$. Bourgain et Pavlović [6] ont prouvé que le probleme est mal posé dans $\dot{FB}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Yoneda [37] a démontré que (NSC) est mal posé dans certains espaces fonctionnels X satisfaisant $\dot{FB}^{-1}_{\infty,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow X \hookrightarrow \dot{FB}^{-1}_{\infty,q}(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < q \leqslant \infty$. Comme on a $\dot{FB}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{FB}^{-1}_{\infty,q}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $2 < q \leqslant \infty$. Alors théorème 8 améliore les résultats de "mal posés" pour (NS) dans $\dot{FB}^{-1}_{\infty,q}(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < q \leqslant \infty$.*

3.2 Preuve du théorème 7

Dans ce qui suit, nous désigne par C les constantes qui peuvent changer de ligne en ligne. Notons en particulier $C = C(\cdot, ..., \cdot)$ la constante qui ne dépend que des quantités apparaissant entre parenthèses.
Nous établissons d'abord les estimations linéaires pour le semi-groupe $T(\cdot)$.

Lemme 5. *Il existe une constante positive C_1 telle que*

$$\|T(t)f\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}} \leqslant C_1 \|f\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}}$$

pour tout $t \geqslant 0$ et tout $f \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)^3$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{T(t)f}\right| &= \left|e^{-|\xi|^2 t}\left(\cos(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t)I + \sin(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t)R(\xi)\right)\widehat{f}(\xi)\right| \\
&\leqslant 2e^{-|\xi|^2 t}\left|\widehat{f}(\xi)\right| \\
&\leqslant 2\left|\widehat{f}(\xi)\right|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{T(t)f}\right\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^3}\left|\widehat{\phi}_j(\xi)\widehat{T(t)f}(\xi)\right| \, \mathrm{d}\xi \\
&\leqslant 2\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{f}\right\|_{L^1},
\end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On multiplie les deux côtés de l'inégalité précédente par 2^{-j} et on applique la norme $l^2(\mathbb{Z})$. On obtient

$$\|T(t)f\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}} \leqslant 2\,\|f\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}}.$$

D'où le résultat. □

Lemme 6. *Pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe une constante positive $C_2 = C(\alpha)$ telle que*

$$\|T(.)f\|_{Z^{\pm\alpha}} \leqslant C_2 \|f\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}}$$

pour tout $f \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)^3$.

preuve. On a
$$\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{T(t)f}\right\|_{L^1} \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} C|\widehat{\phi}_j e^{-|\xi|^2 t}\widehat{f}(\xi)| \,\mathrm{d}\xi,$$
et comme on a
$$\operatorname{supp}\widehat{\phi}_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 2^{j-1} \leqslant \xi| \leqslant 2^{j+1}\},$$
et
$$\sup_{\xi\in\operatorname{supp}\hat{\phi}_j} e^{-|\xi|^2 t} \leqslant e^{-t2^{2j-2}}.$$
Alors
$$\begin{aligned}\|\widehat{\phi}_j\widehat{T(t)f}\|_{L^1} &\leqslant \int_{2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}} Ce^{-|\xi|^2 t}|\widehat{\phi}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)| \,\mathrm{d}\xi \\ &\leqslant Ce^{-t2^{2j-2}}\|\widehat{\phi}_j\widehat{f}\|_{L^1}\end{aligned}$$

pour tout $t \geqslant 0$. On intègre par rapport à t, on obtient :
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+}\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{T(t)f}\right\|_{L^1}^{\frac{2}{1\pm\alpha}} \mathrm{d}t &\leqslant C\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{f}\right\|_{L^1}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}\int_{\mathbb{R}^+} e^{-t2^{2j-2}\frac{2}{1\pm\alpha}} \,\mathrm{d}t \\ &= C\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{f}\right\|_{L^1}^{\frac{2}{1\pm\alpha}} 2^{-2j}.\end{aligned}$$
Donc
$$\|\widehat{\phi}_j\widehat{T(.)f}\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^1(\mathbb{R}^3))} \leqslant C2^{-(1\pm\alpha)j}\|\widehat{\phi}_j\widehat{f}\|_{L^1} \tag{3.20}$$

En multipliant les deux côtés de (3.20) par $2^{\pm\alpha j}$ et en impliquant la norme $l^2(\mathbb{Z})$, on complète la preuve du lemme 6. □

Ensuite, on établit les estimations non linéaires. On prouve d'abord les estimations bilinéaires suivantes.

Lemme 7. *Pour tout* $0 < \alpha < 1$, *il existe une constante positive* $C_3 = C(\alpha)$ *telle que*
$$\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j\widehat{fg}(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3(\|f\|_{Z^\alpha}\|g\|_{Z^{-\alpha}} + \|g\|_{Z^\alpha}\|f\|_{Z^{-\alpha}})$$

pour toutes espace-temps distributions f *et* g *avec* $\|f\|_{Z^{\pm\alpha}}, \|g\|_{Z^{\pm\alpha}} < \infty$.

preuve. La stratégie de la preuve est liée à Christ et Weinstein [16], Kozono et Shimada [32] et [26]. Par la décomposition de Bony , nous décomposons fg comme suit

$$\begin{aligned}fg &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k-3}g\Delta_k f + \sum_{k\in\mathbb{Z}} S_{k-3}f\Delta_k g + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|l-k|\leqslant 2} \Delta_k f\Delta_l g\\ &= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

On applique l'inégalité triangulaire dans $L^1(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\left\|\widehat{\phi}_j\widehat{fg}(\tau)\right\|_{L^1} \leqslant \left\|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_1(\tau)\right\|_{L^1} + \left\|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_2(\tau)\right\|_{L^1} + \left\|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_3(\tau)\right\|_{L^1}. \tag{3.21}$$

Alors, on intègre sur τ et on applique l'inégalité triangulaire dans $l^2(\mathbb{Z})$, on obtient

$$\begin{aligned}&\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j\widehat{fg}(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_1(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}} + \Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_2(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + \Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_3(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ &= J_1 + J_2 + J_3\end{aligned} \tag{3.22}$$

Pour J_1 :
On a

$$\int_0^\infty \left\|\widehat{\phi}_j\widehat{I}_1(\tau)\right\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty \left\|\widehat{\phi}_j\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{S_{k-3}g\Delta_k}f(\tau)\right\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau,$$

puisque $\mathscr{F}[S_{k-3}g\Delta_k f] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \quad | \quad 2^{k-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+2}\}$, alors

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{\phi}_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{S_{k-3}g\Delta_k} f(\tau) \right\|_{L^1} &= \left\| \sum_{|k-j|\leqslant 3} \widehat{\phi}_j \widehat{S_{k-3}g\Delta_k} f(\tau) \right\|_{L^1} \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \left\| \widehat{\phi}_j \big(\widehat{S_{k-3}g}(\tau) * \widehat{\Delta_k f}(\tau) \big) \right\|_{L^1} \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^3} |\widehat{\phi}_j| \sum_{|k-j|\leqslant 3} \left\| \widehat{S_{k-3}g}(\tau) * \widehat{\Delta_k f}(\tau) \right\|_{L^1} \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \|\widehat{S_{k-3}g}(\tau)\|_{L^1} \|\widehat{\Delta_k f}(\tau)\|_{L^1} \quad \text{(inégalité de Young)} \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l\leqslant k-3} \|\widehat{\Delta_l g}(\tau)\|_{L^1} \|\widehat{\Delta_k f}(\tau)\|_{L^1},
\end{aligned}$$

on intègre par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j \widehat{I}_1(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l\leqslant k-3} \int_0^\infty \|\widehat{\Delta_l g}(\tau)\|_{L^1} \|\widehat{\Delta_k f}(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau \\
\text{(inégalité de Hölder)} &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \sum_{l=-\infty}^{k-3} \|\widehat{\Delta_l g}\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;L^1)} \|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)}\,\mathrm{d}\tau \\
\text{(inégalité de Hölder)} &\leqslant \sum_{|k-j|\leqslant 3} \left(\sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{2\alpha l} \right)^{\frac12} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{k-3} \big(2^{-\alpha l} \|\widehat{\Delta_l g}\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;L^1)}\big)^2 \right\}^{\frac12} \|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)}.
\end{aligned}$$

C'est facile de voir $\left(\sum_{l=-\infty}^{k-3} 2^{2\alpha l} \right)^{\frac12} = C 2^{\alpha k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j \widehat{I}_1(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau \leqslant C\|g\|_{Z^{-\alpha}} \sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{\alpha k} \|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)}$$

comme $j \sim k$. Donc

$$\begin{aligned}
J_1 &\leqslant C\|g\|_{Z^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{|k-j|\leqslant 3} 2^{2\alpha k} \|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)} \right)^2 \right\}^{\frac12} \\
&\leqslant C\|f\|_{Z^\alpha}\|g\|_{Z^{-\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour J_2 :
De même que J_1, nous avons

$$J_2 \leqslant C\|g\|_{Z^{\alpha}}\|f\|_{Z^{-\alpha}}. \tag{3.24}$$

Pour J_3 :
On a

$$\begin{aligned}
J_3 &= \Big\{\sum_{j\in Z}\Big(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j \widehat{I}_3(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j \widehat{I}_3(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau \quad (l^1 \hookrightarrow l^2)\\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}_j(\xi)|\widehat{I}_3(\xi,\tau)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^\infty \|\widehat{I}_3(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^\infty \|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|l-k|\leqslant 2}\frac{1}{(2\pi)^n}\widehat{\Delta_k f}(\tau) * \widehat{\Delta_l g}(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|l-k|\leqslant 2}\int_0^\infty \|\widehat{\Delta_k f}(\tau)\|_{L^1}\|\widehat{\Delta_l g}(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau \text{ (inégalité triangulaire +Young)}\\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|l-k|\leqslant 2}\|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)}\|\widehat{\Delta_l g}\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;L^1)} \text{ (inégalité de Hölder)}\\
&\overset{m=l-k}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{|m|\leqslant 2}2^{\alpha k}\|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)}2^{\alpha m}2^{-\alpha(k+m)}\|\widehat{\Delta_{m+k} g}\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;L^1)}\\
&\leqslant \sum_{|m|\leqslant 2}2^{\alpha m}\Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{\alpha k}\|\widehat{\Delta_k f}\|_{L^{\frac{2}{1+\alpha}}(0,\infty;L^1)})^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \times \Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{-\alpha(k+m)}\|\widehat{\Delta_{m+k} g}\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(0,\infty;L^1)})^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\|f\|_{Z^{\alpha}}\|g\|_{Z^{-\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

En substituant (3.23), (3.24) et (3.25) à (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j \widehat{fg}(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}} &\leqslant J_1 + J_2 + J_3\\
&\leqslant C(\|f\|_{Z^{\alpha}}\|g\|_{Z^{-\alpha}} + \|g\|_{Z^{\alpha}}\|f\|_{Z^{-\alpha}}).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 7. $\square$

Maintenant, on considère les estimations du terme de Duhamel pour (NSC),

$$N(u,v)(t) := \int_0^t T(t-\tau)\mathbb{P}div(u\otimes v)(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \geqslant 0$. On détermine l'estimation du terme bilinéaire $N(\cdot,\cdot)$ dans les espaces de solutions.

Lemme 8. *Pour tout $0<\alpha<1$, il existe une constante positive $C_4 = C(\alpha)$ telle que*

$$\|N(u,v)\|_Y \leqslant C_4(\|u\|_{Z^\alpha}\|v\|_{Z^{-\alpha}} + \|v\|_{Z^\alpha}\|u\|_{Z^{-\alpha}})$$

pour tous espace-temps vecteurs u et v avec $\|u\|_{Z^{\pm\alpha}}, \|v\|_{Z^{\pm\alpha}} < \infty$.

preuve. Soient $j\in\mathbb{Z}$ et $t\geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\phi}_j\widehat{N(u,v)}(t)\|_{L^1} &= \left\|\widehat{\phi}_j\int_0^t \big(T(t-\tau)\mathbb{P}div(u\otimes v)(\tau)\big)\,\widehat{}\;\mathrm{d}\tau\right\|_{L^1}\\
&\leqslant \int_0^t \|\widehat{\phi}_j\big(T(t-\tau)\mathbb{P}div(u\otimes v)\big)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\\
\text{D'après le lemme 5} &\leqslant C\int_0^t \|\widehat{\phi}_j\big(\mathbb{P}div(u\otimes v)\big)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
|\widehat{\phi}_j(\xi)\big(\mathbb{P}div(u\otimes v)\big)\,\widehat{}\,(\xi,\tau)| &= |\widehat{\phi}_j(\xi)\left(\delta_{k,l} - \frac{\xi_k\xi_l}{|\xi|^2}\right)\widehat{div(u\otimes v)}(\xi,\tau)|\\
&\leqslant |\widehat{\phi}_j(\xi)\widehat{div(u\otimes v)}(\xi,\tau)|\\
&\leqslant |\widehat{\phi}_j(\xi)|\xi|\widehat{u\otimes v}(\xi,\tau)|\\
&\leqslant 2^{j+1}|\widehat{\phi}_j(\xi)\widehat{u\otimes v}(\xi,\tau)|.
\end{aligned}$$

Alors

$$2^{-j}\|\widehat{\phi}_j\widehat{N(u,v)}(t)\|_{L^1} \leqslant C\int_0^t \|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau,$$

on applique la norme l^2 et le *sup*, On obtient

$$\begin{aligned}\|N(u,v)\|_Y &\leqslant C\sup_{t>0}\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^t \|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &= C\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^\infty \|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

D'où, d'après le lemme 7

$$\|N(u,v)\|_Y \leqslant C\big(\|u\|_{Z^\alpha}\|v\|_{Z^{-\alpha}} + \|v\|_{Z^\alpha}\|u\|_{Z^{-\alpha}}\big).$$

Ce qui termine la preuve du lemme 8. □

Lemme 9. *Pour tout* $0<\alpha<1$*, il existe une constante positive* $C_5 = C(\alpha)$ *telle que*

$$\|N(u,v)\|_{Z^{\pm\alpha}} \leqslant C_5(\|u\|_{Z^\alpha}\|v\|_{Z^{-\alpha}} + \|v\|_{Z^\alpha}\|u\|_{Z^{-\alpha}})$$

pour tous espace-temps vecteurs u *et* v *avec* $\|u\|_{Z^{\pm\alpha}}, \|v\|_{Z^{\pm\alpha}} < \infty$.

preuve. soient $j\in\mathbb{Z}$ et $t\geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\|\widehat{\phi}_j\widehat{N(u,v)}(t)\|_{L^1} &\leqslant \int_0^t \|\widehat{\phi}_j\big(T(t-\tau)\mathbb{P}div(u\otimes v)\big)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant C\int_0^t \|\widehat{\phi}_j e^{-|.|^2(t-\tau)}\big(\mathbb{P}div(u\otimes v)\big)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\\ &\leqslant C2^j\int_0^\infty e^{-(t-\tau)2^{2j-2}}\chi_{[0,t]}(\tau)\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Ce qui implique d'après l'inégalité intégrale de Minkowski ($\frac{2}{1\pm\alpha}>1$)

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{\phi}_j\widehat{N(u,v)}(t)\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^1)}\\
&\leqslant C2^j\left\{\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(t-\tau)2^{2j-2}}\chi_{[0,t]}(\tau)\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{1\pm\alpha}}\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{1\pm\alpha}{2}}\\
&\leqslant C2^j\int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-(t-\tau)\frac{2^{2j-1}}{1\pm\alpha}}\chi_{[0,t]}(\tau)\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}^{\frac{2}{1\pm\alpha}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1\pm\alpha}{2}}\mathrm{d}\tau\\
&=C2^j\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \chi_{[0,t]}(\tau)e^{-(t-\tau)\frac{2^{2j-1}}{1\pm\alpha}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1\pm\alpha}{2}}\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

il est facile de voir que $\chi_{[0,t]}(\tau)=1\quad\forall\tau\in[0,t]\Leftrightarrow\chi_{[0,t]}(\tau)=1\quad\forall t\in[\tau,\infty[$, et

$$\left(\int_\tau^\infty e^{-(t-\tau)\frac{2^{2j-1}}{1\pm\alpha}}\right)^{\frac{1\pm\alpha}{2}}=C2^{-j-(\pm\alpha)j}.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\|\widehat{\phi}_j\widehat{N(u,v)}(t)\|_{L^{\frac{2}{1\pm\alpha}}(0,\infty;L^1)}\\
&\leqslant C2^j\int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty e^{-(t-\tau)\frac{2^{2j-1}}{1\pm\alpha}}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1\pm\alpha}{2}}\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\\
&=C2^{\mp\alpha j}\int_0^\infty\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

On multiplie les deux côtés par $2^{\pm\alpha j}$ et on applique la norme l^2. Donc d'après le lemme 7

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{N(u,v)}(t)\|_{Z^{\pm\alpha}}&\leqslant C\left\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(\int_0^\infty\|\widehat{\phi}_j(u\otimes v)\,\widehat{}\,(\tau)\|_{L^1}\,\mathrm{d}\tau\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C\big(\|u\|_{Z^\alpha}\|v\|_{Z^{-\alpha}}+\|v\|_{Z^\alpha}\|u\|_{Z^{-\alpha}}\big).
\end{aligned}
$$

Ce qui termine la preuve du lemme 9.

□

Maintenant, on est prêt à démontrer le théorème 7 :

Démonstration. du théorème 7. Soient $0 < \alpha < 0$ et $\varepsilon > 0$. On définit l'application Ψ et l'espace X^α par

$$\Psi(u)(t) := T(t)u_0 - N(u,u)(t),$$

$$X^\alpha := \{u \in C\big([0,\infty); \dot{FB}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)\big)^3 \big| \|u\|_{X^\alpha} \leqslant 2\varepsilon, div\, u = 0\}$$

avec

$$\|u\|_{X^\alpha} := \|u\|_Y + \|u\|_{Z^{+\alpha}} + \|u\|_{Z^{-\alpha}}.$$

Soit $u \in X^\alpha$

$$\|\Psi(u)\|_{X^\alpha} \leqslant \|T(.)u_0\|_{X^\alpha} + \|N(u,u)\|_{X^\alpha} \tag{3.26}$$

D'après le lemme 5 et le lemme 6. On a

$$\begin{aligned} \|T(.)u_0\|_{X^\alpha} &= \|T(.)u_0\|_Y + \|T(.)u_0\|_{Z^{+\alpha}} + \|T(.)u_0\|_{Z^{-\alpha}} \\ &\leqslant C_1\|u_0\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}} + C_2\|u_0\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}} + C_2\|u_0\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}} \\ &\leqslant (C_1 + 2C_2)\|u_0\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Et d'après le lemme 8 et le lemme 9. On a :

$$\begin{aligned} \|N(u,u)\|_{X^\alpha} &= \|N(u,u)\|_Y + \|N(u,u)\|_{Z^+} + \|N(u,u)\|_{Z^-} \\ &\leqslant (C_4 + 2C_5)(\|u\|_{Z^{+\alpha}}\|u\|_{Z^{-\alpha}} + \|u\|_{Z^{-\alpha}}\|u\|_{Z^{+\alpha}}) \\ &= 2(C_4 + 2C_5)\|u\|_{Z^{-\alpha}}\|u\|_{Z^{+\alpha}} \\ &\leqslant 8(C_4 + 2C_5)\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Alors, on applique (3.27) et (3.28) sur (3.26), on obtient

$$\|\Psi(u)\|_{X^\alpha} \leqslant (C_1 + 2C_2)\|u_0\|_{\dot{FB}^{-1}_{1,2}} + 8(C_4 + 2C_5)\varepsilon^2, \tag{3.29}$$

pour tout $u \in X^\alpha$.
De plus, on a :

$$\begin{aligned} \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{X^\alpha} &= \|N(u,u) - N(v,v)\|_{X^\alpha} \\ &= \|N(u-v,u) + N(v,u-v)\|_{X^\alpha} \\ &\leqslant \|N(u-v,u)\|_{X^\alpha} + \|N(v,u-v)\|_{X^\alpha}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

d'après le lemme 8 et le lemme 9, on a :

$$\begin{aligned} \|N(u-v,u)\|_Y &\leqslant C_4(\|u-v\|_{Z^{+\alpha}}\|u\|_{Z^{-\alpha}} + \|u\|_{Z^{-\alpha}}\|u-v\|_{Z^{+\alpha}}) \\ &= 2C_4\|u-v\|_{X^\alpha}\|u\|_{X^\alpha}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

et

$$\|N(u-v,u)\|_{Z^{\pm\alpha}} \leqslant 2C_5\|u-v\|_{X^\alpha}\|u\|_{X^\alpha}. \tag{3.32}$$

Alors, on applique (3.31) et (3.32) sur (3.30), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{X^\alpha} &\leqslant (2C_4+4C_5)(\|u\|_{X^\alpha}+\|v\|_{X^\alpha})\|u-v\|_{X^\alpha} \\ &\leqslant 8(C_4+2C_5)\varepsilon\|u-v\|_{X^\alpha}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

pour tout u et v appartient à X^α.
On choisie $\varepsilon > 0$ vérifie

$$\varepsilon = \frac{1}{16(C_4+2C_5)}.$$

Donc, pour tout $u_0 \in F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)^3$ vérifie $\|u_0\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{C_1+2C_2}$, on obtient d'après (3.29) et (3.33) que

$$\|\Psi(u)\|_{X^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad \|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{X^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\|u-v\|_{X^\alpha}$$

pour tout u et v appartiennent à X^α. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe, on obtient l'existence et l'unicité de la solution "mild" globale, pour tout $\Omega \in \mathbb{R}$, il est clair que la constante ε ne dépend que de α. Ce qui termine la démonstration du théorème 7.

□

3.3 Preuve du théorème 8

Pour la preuve du théorème 8, Iwabuchi et Takada ont utilisé la théorie d "ill-posedness" par Bejenaru et Tao [5]. On pose $D := F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)^3$, selon le théorème 7, pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe $\delta > 0$ tel que l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{u}[.]\colon (B_D, \|.\|_D) &\to (X^\alpha, \|.\|_{X^\alpha}) \\ f &\mapsto u[f] = T(.)f - N(u,u), \end{aligned}$$

est définie, où $B_D = \{f \in D \,|\, \|f\|_D < \delta\}$. L'application $u[.]$ est continue d'après le théorème 3 de ([5] page 4).

On fixe $D' := F\dot{B}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3)^3$, $S' := L^\infty(0,\infty; F\dot{B}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^3))^3$ avec $2 < q \leqslant \infty$. À l'aide de l'injection continue $l^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow l^q(\mathbb{R}^3)$ pour tout $2 < q \leqslant \infty$, on démontre facilement que $D \hookrightarrow D'$ et $X^\alpha \hookrightarrow S'$. Donc l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{u}[.]\colon (B_D, \|.\|_{D'}) &\to (X^\alpha, \|.\|_{S'}) \\ f &\mapsto u[f] = T(.)f - N(u,u), \end{aligned} \tag{3.34}$$

est définie.

Supposons que (3.34) est continue, alors l'application $A_2 : (B_D, \|.\|_{D'}) \ni f \to N(T(.)f, T(.)f) \in (X^\alpha, \|.\|_{S'})$ est aussi continue d'après la théorie de Bejenaru et Tao [5]. Cependant, on va construire une suite $(f^N)_{1 \leqslant N < \infty} \subset B_D$ telle que

$$\|f^N\|_{D'} \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty, \tag{3.35}$$

et

$$\exists c > 0, \quad \|A_2(f^N)\|_{S'} \geqslant c \tag{3.36}$$

pour tout N suffisamment grand, ce qui est contradictoire. Donc l'application (3.34) n'est pas continue. Cela signifie que la solution ne dépend pas d'une façon continue de la vitesse initiale dans l'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^3)$ avec $2 < q \leqslant \infty$.

Maintenant on construit une suite $(f^N)_{1 \leqslant N \leq \infty} \subset B_D$ satisfaisant (3.35) et (3.36). Soit

$$\chi(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi_k| \leqslant 1,\ k = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

et $\chi_j^{\pm}(\xi) := \chi(\xi \mp 2^j e_2)$ pour $j \in \mathbb{Z}$, où $e_2 := (0, 1, 0)$. Ensuite, on définit le contre-exemple $(f_N)_{1 \leqslant N < \infty}$ par sa transformée de Fourier

$$\widehat{f^N}(\xi) := \frac{\sqrt{-1}}{N^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=N}^{2N} 2^j \{\chi_j^+(\xi) + \chi_j^-(\xi)\} \frac{1}{|\xi|} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

f^N est une fonction à valeur réelle, de divergence nulle et qu'il existe une constante $C_0 > 0$, telle que

$$\left\|f^N\right\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,q}} \leqslant C_0 N^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{q}}, \tag{3.37}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $2 \leqslant q \leqslant \infty$. En effet

$$\widehat{\chi}(x) = \left(\frac{2 \sin x}{x}\right)^3.$$

Donc

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_j^{\pm}}(x) &= \widehat{\chi(.\mp 2^j e_2)}(x)\\ &= e^{i\mp x2^j e_2}\widehat{\chi}(x)\\ &= e^{i\mp x2^j e_2}\left(\frac{2\sin x}{x}\right)^3.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}f^N(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\widehat{\widehat{f^N}}(-x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=N}^{2N}2^j\mathscr{F}\left(\{\chi_j^+(\xi)+\chi_j^-(\xi)\}\begin{pmatrix}\xi_2\\ -\xi_1\\ 0\end{pmatrix}\right)(-x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=N}^{2N}2^j\begin{pmatrix}-R_2\{2\cos(x2^je_2)(\frac{2\sin x}{x})^3\}\\ R_1\{2\cos(x2^je_2)(\frac{2\sin x}{x})^3\}\\ 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

pour tout $N\in\mathbb{N}^*$. On calcule la divergence de f^N

$$\begin{aligned}\nabla\cdot f^N = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=N}^{2N}2^j\Big\{&-\partial_1R_2\{2\cos(x2^je_2)\Big(\frac{2\sin x}{x}\Big)^3\}\\ &+\partial_2R_1\{2\cos(x2^je_2)\Big(\frac{2\sin x}{x}\Big)^3\}+0\Big\}\\ =\ &0.\end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'estimation de f^N. On a

$$\begin{aligned}\|f^N\|^q_{FB^{-1}_{1,q}} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{-jq}\|\widehat{\phi}_j\widehat{f^N}\|^q_{L^1}\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{-jq}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\left|\widehat{\phi}_j(\xi)\frac{\sqrt{-1}}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=N}^{2N}2^k\{\chi_k^+(\xi)+\chi_k^-(\xi)\}\frac{1}{|\xi|}\begin{pmatrix}\xi_2\\ -\xi_1\\ 0\end{pmatrix}\right|\mathrm{d}\xi\Big)^q,\end{aligned}$$

comme on a $j\sim k$ et $\left|\frac{1}{|\xi|}\begin{pmatrix}\xi_2\\ -\xi_1\\ 0\end{pmatrix}\right|<1$, alors

$$\|f^N\|^q_{FB^{-1}_{1,q}}\leqslant C\sum_{j=N}^{2N}2^{-jq}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{\phi}_j(\xi)\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}2^j\{\chi_j^+(\xi)+\chi_j^-(\xi)\}\,\mathrm{d}\xi\Big)^q,$$

puisque $\int_{\mathbb{R}^3} \widehat{\phi}_j(\xi)\chi_j^{\pm}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \leqslant C$, C une constante qui ne dépend d'aucun paramètre pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\|f^N\|^q_{F\dot{B}^{-1}_{1,q}} \leqslant C \sum_{j=N}^{2N} \frac{1}{N^{\frac{q}{2}}} = CN^{\frac{q}{2}+1}.$$

D'où (3.37).

Ainsi, on a $\delta C_0^{-1} f^N \in B_D$ et $\|f^N\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,q}} \to 0$, $\forall\, 2 < q \leqslant \infty$. Dans ce qui suit, on omet la constante δC_0^{-1} pour simplifier la démonstration de la propriété (3.36).

Soit E un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}^3$, tel que la mesure de Lebesgue de E est positive, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} \geqslant c \tag{3.38}$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in E$, et

$$E \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \frac{1}{100} \leqslant \xi_1 \leqslant 1, 0 < \xi_3 \leqslant \frac{|\xi|}{1+|\Omega|},\ |\xi| \leqslant 1\right\}. \tag{3.39}$$

Il est clair que E est un compact, donc il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=-j_0}^{j_0} \widehat{\phi}_j(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in E$.
On a

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{F}[A_2(f^N)(t)]\|_{L^1(E)} &= \int_E \sum_{l=-j_0}^{j_0} 2^l 2^{-l} \widehat{\phi}_l(\xi) |\widehat{A_2(f^N)}(t,\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\
&\leqslant \sum_{l=-j_0}^{j_0} 2^l 2^{-l} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\phi}_l(\xi)\widehat{A_2(f^N)}(t,\xi)|\,\mathrm{d}\xi \\
\underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{\text{l'inégalité de Hölder}} &\leqslant \left(\sum_{l=-j_0}^{j_0} 2^{pl}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=-j_0}^{j_0} 2^{-lq} \|\widehat{\phi}_l(\xi)\widehat{A_2(f^N)}(t,\xi)\|^q_{L^1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\sum_{l=-j_0}^{j_0} 2^{pl}\right)^{\frac{1}{p}} \|A_2(f^N)(t)\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,q}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $t \geqslant 0$

$$\left\| A_2(f^N)(t) \right\|_{FB^{-1}_{1,q}} \geqslant c \left\| \mathscr{F}[A_2(f^N)(t)] \right\|_{L^1(E)}. \tag{3.40}$$

Soient $\widehat{T}_c$ et $\widehat{T}_s$ deux applications définies comme suit

$$\widehat{T}_c(\xi,t) := \cos\Big(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\Big)e^{-|\xi|^2 t}, \qquad \widehat{T}_s(\xi,t) := \sin\Big(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\Big)e^{-|\xi|^2 t}.$$

On a

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}[A_2(f^N)(t)](\xi)\\
&= \int_0^t \mathscr{F}\Big[T(t-\tau)\mathbb{P}div(T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N)\Big](\xi)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^t \big(\widehat{T}_c(\xi,t-\tau) + \widehat{T}_s(\xi,t-\tau)R(\xi)\big)\mathscr{F}\Big[\mathbb{P}div(T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N)\Big](\xi)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \int_0^t \widehat{T}_c(\xi,t-\tau)\Big(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\Big)_{1\leqslant j,k\leqslant 3}\Big(\sum_{l=1}^3 \xi_l(\widehat{T(\tau)f^N})_l * (\widehat{T(\tau)f^N})_m\Big)_{1\leqslant m\leqslant 3}\mathrm{d}\tau\\
&\quad + \int_0^t \widehat{T}_s(\xi,t-\tau)R(\xi)\big)\mathscr{F}\Big[\mathbb{P}div(T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N)\Big](\xi)\,\mathrm{d}\tau\\
&= \Big(\int_0^t \widehat{T}_c(\xi,t-\tau)\sum_{k=1}^3\Big(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\Big)\sum_{l=1}^3 \xi_l(\widehat{T(\tau)f^N})_l * (\widehat{T(\tau)f^N})_k\,\mathrm{d}\tau\Big)_{1\leqslant j\leqslant 3}\\
&\quad + \int_0^t \widehat{T}_s(\xi,t-\tau)R(\xi)\big)\mathscr{F}\Big[\mathbb{P}div(T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N)\Big](\xi)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

En considérant la première composante du vecteur $\mathscr{F}[A_2(f^N)(t)](\xi)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{F}[A_2(f^N)(t)](\xi)|\\
&\geqslant \Big|\int_0^t \widehat{T}_c(\xi,t-\tau)\sum_{k=-1}^3\Big(\delta_{1,k} - \frac{\xi_1\xi_k}{|\xi|^2}\Big)\sum_{l=1}^3 \xi_l(\widehat{T(\tau)f^N})_l * (\widehat{T(\tau)f^N})_k\,\mathrm{d}\tau\Big|\\
&\quad - \Big|\int_0^t \widehat{T}_s(\xi,t-\tau)R(\xi)\mathscr{F}[\mathbb{P}div(T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N)](\xi)\,\mathrm{d}\tau\Big|
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Il est facile de vérifier $(\widehat{T(\tau)f^N})_3 = 0 \quad$ (car $(\widehat{f^N})_3 = 0$) et

$$\widehat{T(\tau)f^N} = T_c\widehat{(\tau) * f}^N + R(.)T_s\widehat{(\tau) * f}^N.$$

D'après l'inégalité (3.41) et la commutativité du produit de convolution, on obtient

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{F}[A_2(f^N)(t)](\xi)| \\
&\geqslant \left| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi, t-\tau)\left(1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\right)\xi_1(T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_1 * (T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_1 \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\quad - \left| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi, t-\tau)\left(1 - \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\right)\xi_2(T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_2 * (T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_1 \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\quad - \left| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi, t-\tau)\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2}\xi_1(T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_1 * (T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_2 \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\quad - \left| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi, t-\tau)\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2}\xi_2(T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_2 * (T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_2 \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\quad - 2\sum_{k,l=1}^{3} \left| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi, t-\tau)\left(\delta_{1,k} - \frac{\xi_1\xi_k}{|\xi|^2}\right)\xi_l(T_s\widehat{(\tau) * f}^N)_l * (R(.)T_c\widehat{(\tau) * f}^N)_k \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\quad - \sum_{k,l=1}^{3} \left| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi, t-\tau)\left(\delta_{1,k} - \frac{\xi_1\xi_k}{|\xi|^2}\right)\xi_l(R(.)T_s\widehat{(\tau) * f}^N)_l * (R(.)T_s\widehat{(\tau) * f}^N)_k \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&\quad - \left| \int_0^t \widehat{T}_s(\xi, t-\tau)R(\xi)\mathscr{F}[\mathbb{P}div(T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N)](\xi) \, \mathrm{d}\tau \right| \\
&= I_1(\xi,t) - I_2(\xi,t) - I_3(\xi,t) - I_4(\xi,t) - I_5(\xi,t) - I_6(\xi,t) - I_7(\xi,t) \quad (3.42)
\end{aligned}$$

où $(T_c\widehat{(\tau)f^N})_k$ et $(R(.)T_s\widehat{(\tau)f^N})_k$ désignent les k-ème composants de $T_c\widehat{(\tau)f^N}$ et $R(.)T_s\widehat{(\tau)f^N}$, respectivement.

On considère d'abord l'estimation de $I_1(\xi,t)$ pour $\xi \in E$:

$$I_1(\xi,t) = \Big| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi,t-\tau)\Big(1-\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\Big)\xi_1 (T_c\widehat{(\tau)*f}^N)_1 * (T_c\widehat{(\tau)*f}^N)_1 \,\mathrm{d}\tau \Big|$$

$$= \Big| \int_0^t \widehat{T}_c(\xi,t-\tau)\Big(1-\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\Big)\xi_1 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|\xi-\eta|^2\tau} \cos\Big(\Omega\frac{\xi_3-\eta_3}{|\xi-\eta|}\tau\Big)$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=N}^{2N} 2^j \big\{\chi_j^+(\xi-\eta)+\chi_j^-(\xi-\eta)\big\}\frac{\xi_2-\eta_2}{|\xi-\eta|}e^{-|\eta|^2\tau}\cos\Big(\Omega\frac{\eta_3}{|\eta|}\tau\Big)$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{N^{\frac{1}{2}}}\sum_{j=N}^{2N} 2^j \big\{\chi_j^+(\eta)+\chi_j^-(\eta)\big\}\frac{\eta_2}{|\eta|}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\tau\Big|$$

comme, on a pour tout $\xi \in E$

$$\begin{cases} \chi_j^+(\xi-\eta)\chi_j^+(\eta) = 0 & \forall \eta \in \mathbb{R}^3 \ \forall j \geqslant 2 \\ \chi_j^-(\xi-\eta)\chi_j^-(\eta) = 0 & \forall \eta \in \mathbb{R}^3 \ \forall j \geqslant 2 \\ \int_{\mathbb{R}^3} \chi_j^+(\xi-\eta)\chi_j^-(\eta) + \chi_j^-(\xi-\eta)\chi_j^+(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 2\int_{\mathbb{R}^3}\chi_j^+(\xi-\eta)\chi_j^-(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \end{cases} \tag{3.43}$$

Alors

$$I_1(\xi,t) = \Big| -2\int_0^t \widehat{T}_c(\xi,t-\tau)\Big(1-\frac{\xi_1^2}{|\xi|^2}\Big)\xi_1\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\tau(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)}$$
$$\times \cos\Big(\Omega\frac{\xi_3-\eta_3}{|\xi-\eta|}\tau\Big)\cos\Big(\Omega\frac{\eta_3}{|\eta|}\tau\Big)\frac{(\xi_2-\eta_2)\eta_2}{|\xi-\eta|\eta|}\frac{1}{N}\sum_{j=N}^{2N}2^{2j}\chi_j^+(\xi-\eta)\chi_j^-(\eta)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\Big|.$$

Puisqu'il existe une constante $c>0$ telle que

$$\cos\Big(\Omega\frac{\eta_3}{|\eta|}\tau\Big) \geqslant c$$

pour tout $0<\tau\leqslant 1$ et tout $\eta \in E \cup \mathrm{supp}\widehat{f^N}$ si $2^N \geqslant 2+|\Omega|$, et

$$-1 \leqslant \frac{(\xi_2-\eta_2)\eta_2}{|\xi-\eta||\eta|} \leqslant -\frac{1}{16}$$

pour tout $\eta \in \mathrm{supp}\chi_j^-$, avec $\xi-\eta \in \mathrm{supp}\chi_j^+$, ou pour tout $\eta\in\mathrm{supp}\chi_j^+$ avec $\xi-\eta\in\mathrm{supp}\chi_j^-$.

Donc

$$I_1(\xi,t) \geqslant \frac{c}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\tau(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)}\chi_j^+(\xi-\eta)\chi_j^-(\eta)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau.$$

On peut vérifier facilement que

$$\forall \eta \in \operatorname{supp}\chi_j^{\pm}, 2^{j-1} \leqslant |\eta| \leqslant 2^{j+1}, \quad \forall j \geqslant 1. \tag{3.44}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_1(\xi,t) &\geqslant \frac{c}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}\int_0^t e^{-\tau 8\times 2^{2j}}\,\mathrm{d}\tau \\ &\geqslant \frac{c}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}2^{-2j}(1-e^{-t8\times 2^{2j}}) \\ &\geqslant \frac{c}{N}\sum_{j=N}^{2N}(1-e^{-8}) \\ &\geqslant c, \end{aligned}$$

pour tout $\xi \in E$ et pour tout $2^{-2N} \leqslant t \leqslant 1$, ce qui donne

$$\|I_1(.,t)\|_{L_1(E)} \geqslant c. \tag{3.45}$$

L'estimation de $I_2(\xi,t)$ et $I_3(\xi,t)$ pour tout $\xi \in E$:
D'après (3.44) et (3.43), on a

$$\begin{aligned} I_2(\xi,t)+I_3(\xi,t) &\leqslant \frac{C}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\tau(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)}\frac{|\xi_1-\eta_1||\eta_2|}{|\xi-\eta||\eta|} \\ &\quad \times\{\chi_j^+(\xi-\eta)+\chi_j^-(\xi-\eta)\}\{\chi_j^+(\eta)+\chi_j^-(\eta)\}\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \frac{C}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1-e^{-\tau(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)}}{|\xi-\eta|^2+|\eta|^2}2^{-j}\chi_j^+(\xi-\eta)\chi_j^-(\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &\leqslant \frac{C}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}2^{-2j}2^{-j} \\ &\leqslant \frac{C}{N2^N} \end{aligned} \tag{3.46}$$

L'estimation de $I_4(\xi,t)$ pour tout $\xi \in E$:
D'après (3.44) et (3.43), on a

$$\begin{aligned} I_4(\xi,t) &\leqslant \frac{C}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\tau(|\xi-\eta|^2+|\eta|^2)}\frac{|\xi_1-\eta_1||\eta_1|}{|\xi-\eta||\eta|} \\ &\quad\times\{\chi_j^+(\xi-\eta)+\chi_j^-(\xi-\eta)\}\{\chi_j^+(\eta)+\chi_j^-(\eta)\}\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \frac{C}{N}\sum_{j=N}^{2N} 2^{2j}2^{-2j}2^{-2j} \\ &\leqslant \frac{C}{N2^{2N}} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Par conséquent, nous avons d'après (3.47) et (3.46) que

$$\|I_2(\xi,t)+I_3(\xi,t)+I_4(\xi,t)\|_{L^1(E)} \leqslant \frac{C}{N2^N} \tag{3.48}$$

L'estimation de $I_5(\xi,t)$ et $I_6(\xi,t)$ pour tout $\xi \in E$:
On remarque d'abord que

$$|\widehat{T}_s(\eta,\tau)| \leqslant |\Omega|\frac{\eta_3}{\eta}\tau \leqslant t$$

pour tout $\tau \in (0,t)$ et tout $\eta \in \operatorname{supp}\widehat{f^N}$ avec $2^N \geqslant 2+|\Omega|$.
Donc, pour tout $\xi \in E$

$$I_5(\xi,t)+I_6(\xi,t) \leqslant C(t+t^2)\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\tau|\xi-\eta|^2}|\widehat{f^N}(\xi-\eta)|e^{-\tau|\eta|^2}|\widehat{f^N}(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau.$$

Puisque $\sum_{j=-j_0}^{j_0}\widehat{\phi}_j(\xi)=1$ pour tout $\xi \in E$. Alors d'après l'inégalité de Hölder, lemme 6 et lemme 7 on obtient

$$\begin{aligned} &\|I_5(.,t)+I_6(.,t)\|_{L^1(E)} \\ &\quad\leqslant C(t+t^2)\Big\{\sum_{j=-j_0}^{j_0}\Big(\int_0^t\Big\|\widehat{\phi}_j\mathscr{F}[(\mathscr{F}^{-1}[e^{-\tau|.|^2}|\widehat{f^N}|])^2]\Big\|_{L^1}\Big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\leqslant C(t+t^2)\Big\|\mathscr{F}^{-1}[e^{-\tau|.|^2}|\widehat{f^N}|]\Big\|_{Z^\alpha}\Big\|\mathscr{F}^{-1}[e^{-\tau|.|^2}|\widehat{f^N}|]\Big\|_{Z^{-\alpha}} \\ &\quad\leqslant C(t+t^2)\left\|f^N\right\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}} \\ &\quad\leqslant C(t+t^2). \end{aligned} \tag{3.49}$$

L'estimation de $I_7(\xi,t)$ pour $\xi \in E$:
On a pour tout $\xi \in E$ et pour tout $\tau \in [0,t]$

$$|\widehat{T}_s(\xi, t-\tau)| \leqslant |\Omega| \frac{|\xi_3|}{|\xi|}(t-\tau) \leqslant t.$$

Alors pour tout $\xi \in E$

$$I_7(\xi,t) \leqslant Ct \int_0^t \left| \mathscr{F}[T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N](\xi) \right| \,\mathrm{d}\tau.$$

Ensuite, de la même manière que (3.49). Donc d'après lemme 6 et lemme 7

$$\begin{aligned} \|I_7(.,t)\| &\leqslant Ct \int_0^t \left\| \mathscr{F}[T(\tau)f^N \otimes T(\tau)f^N] \right\|_{L^1(E)} \,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant Ct \left\| T(.)f^N \right\|_{Z^{\alpha}} \left\| T(.)f^N \right\|_{Z^{-\alpha}} \\ &\leqslant Ct \left\| f^N \right\|^2_{F\dot{B}^{-1}_{1,2}} \\ &\leqslant Ct \end{aligned} \tag{3.50}$$

D'après (3.40),(3.42),(3.45),(3.48),(3.49) et (3.50), il existe $0 < c_0 < 1$ et $C_0 > 1$ telles que

$$\left\| A_2(f^N)(t) \right\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,q}} \geqslant c_0 - C_0(t+t^2) - \frac{C_0}{N2^N}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, avec $2^N \geqslant 2 + |\Omega|$ et $2^{-2N} \leqslant t \leqslant 1$. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ vérifie $N_0 > \max\{3C_0c_0^{-1}, log_2(2+|\Omega|)\}$. On obtient

$$\left\| A_2(f^N)(t) \right\|_{F\dot{B}^{-1}_{1,q}} \geqslant \frac{c_0}{3}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $t > 0$ avec $N \geqslant N_0$ et $2^{-2N} \leqslant t \leqslant c_0(6C_0)^{-1}$, ce qui implique (3.36).
Ce qui termine la preuve du théorème.

Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier un modèle parmi les modèles des équations de Navier-Stokes. Au premier chapitre, on va aller d'un modèle simple qui décrit le mouvement d'un fluide vers un modèle un peu complexe qui modélise le mouvement d'un fluide visqueux homogène incompressible de viscosité constante, et en rotation autour d'un axe fixe. Ce modèle est dit les équations de Navier-Stokes-Coriolis et il est noté (NSC).

Avant d'étudier le modèle, on va rappeler dans le deuxième chapitre des outils mathématiques nécessaires :

- Les inégalités classiques (inégalité de Hölder, inégalité de Young, inégalité de Minkowski ...) sont très importantes dans les démonstrations des théorèmes qu'on va voir dans le troisième chapitre ;
- La décomposition de Littlewood-Paley, qui en général nous permet de généraliser les propriétés et les résultats de l'espace de Lebesgue L^2 à l'espace de Lebesgue L^p ;
- Le paraproduit de Bony est une décomposition du produit de deux distributions tempérées, il nous permet de faire l'estimation du terme bilinéaire de l'équation intégrale 'mild'.
- La transformée de Reisz et la transformée de Leray, sont deux opérateurs bien définis. ILs nous aideront à transformer le problème (NSC) en une équation intégrale 'mild', et aussi à estimer quelques termes dans la suite.
- Les espaces de Fourier-Besov qui sont des espaces fonctionnels de Banach. On va s'intéresser à l'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et les espace $F\dot{B}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $q > 0$.
- Le semi-groupe de Stokes-Coriolis est un opérateur qui n'est pas assez aussi connu que le semi-groupe de la chaleur. Il exprime la solution de l'équation homogène de (NSC). On va s'intéresser à sa transformée

de Fourier qui est définie dans le troisième chapitre. Cet opérateur est un outil fondamental pour faire les preuves des théorèmes.

Avec tous ces outils (et de l'analyse fonctionnelle et des techniques usuelles dans l'étude des équations aux dérivées partielles, comme l'intégration par parties et des théorèmes de point fixe ...), on est prêt dans le dernier chapitre à étudier les équations de Navier-Stokes-Coriolis, on prend le cas où la masse volumique $\rho = 1$ et $\mu = 1$, les résultats obtenus restent vraies lorsque ρ et μ sont des constantes. Pour étudier ces équations, on va travailler sur l'équation intégrale 'mild', la résolution de cette équation est équivalente la résolution de système (NSC). Les résultats obtenus sont :
Le premier résultat (théorème 7) montre qu'à une petite condition initiale les équations de Navier-Stokes-Coriolis sont bien posées dans l'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$. L'idée de la démonstration est de montrer que l'équation $\psi(u) = u$ admet une et une seule solution pour tout condition initiale u_0 avec ψ est l'application solution définie par $\Psi(u)(t) := T(t)u_0 - N(u,u)(t)$. On commence par montrer des lemmes et à la fin on utilise ces lemmes et le théorème de point fixe pour finir la preuve.
Le deuxième résultat (théorème 8) montre que pour tout $q > 2$ le système (NSC) est mal posé dans l'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^n)$, parce que la stabilité de la solution fait défaut. L'idée de la démonstration est de montrer que l'application solution ne dépend pas d'une façon continue de la donnée initiale, c.-à-d. on montre la discontinuité de l'application $u[f] = T(.)f - N(u,u)$. On fait cette preuve en se basant sur la théorie de [5] et d'un contre-exemple qui va nous donner la contradiction.

Les résultats précédents montre que l'espace $F\dot{B}^{-1}_{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est optimal dans les espaces $F\dot{B}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $q \in \mathbb{R}$. Les questions qui se posent maintenant sont :

- (i) Est-ce que le problème est bien posé pour toute donnée initiale dans l'espace précédent ?
- (ii) Sinon existe-t-il une possibilité d'optimiser cet espace ?
- (iii) Est-ce que le problème est mal posé pour toute donnée initiale supérieure à une constante donnée dans les espaces $F\dot{B}^{-1}_{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $q \in \mathbb{R}$?

Bibliographie

[1] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko, Regularity and integrability of 3D Euler and Navier–Stokes equations for rotating fluids, Asymptot. Anal. 15 (1997) 103–150.

[2] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko, Global regularity of 3D rotating Navier–Stokes equations for resonant domains, Indiana Univ. Math. J. 48 (1999) 1133–1176.

[3] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko, 3D Navier–Stokes and Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity, Indiana Univ. Math. J. 50 (2001) 1–35.

[4] H. Bahouri, J.Y. Chemin and R. Danchin, Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Fundamental Principles of mathematical Sciences) (springer, Heidelberg),2011.

[5] I. Bejenaru, T. Tao, Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation, J. Funct. Anal. 233 (2006) 228–259.

[6] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Ann. Scien. Ecole Norm. Sup. 14 (1981).

[7] J. Bourgain, N. Pavlović, Ill-posedness of the Navier–Stokes equations in a critical space in 3D, J.Funct. Anal. 255 (2008) 2233–2247.

[8] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differentiel equations, Springer Science and Business Media, 2010.

[9] M. Cannone, Ondelettes paraproduits et Navier-Stokes. Thèse de doctorat en 1994.

[10] M. Cannone, G. Wu ; Global well-posedness for Navier-Stokes equations in critical Fourier-Herz spaces, Nonlinear Anal., 75 (2012), 3754-3760.

[11] V. A. Castillo, Some classical fluid dynamics models with Coriolis force in Besov spaces. Thèse de doctorat en 2018.

[12] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic And Hydromagnetic Stability . Dover,New- York,1981.

[13] J.Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, Anisotropy and dispersion in rotating fluids, Stud. Math. Appl. 31 (2002) 171–192.

[14] J.Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, Mathematical Geophysics, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[15] A.J. Chorin, J.E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer, 1st ed. 1979.

[16] F.M. Christ, M.I. Weinstein, Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg–deVries equation, J. Funct. Anal. 100 (1991) 87–109.

[17] G. B. Folland, Real analysis : modern techniques and their applications, John Wiley and Sons, 2013.

[18] M. Fu, C. Cai, Remarks on pressure blow-up criterion of the 3D zero-diffusion Boussinesq equations in margin Besov spaces, Adv. Math. Phys. (2017).

[19] H. Fujita, T. Kato, On the Navier–Stokes initial value problem. I, Arch. Ration. Mech. Anal. 16 (1964) 269–315.

[20] P. Germain, The second iterate for the Navier–Stokes equation, J. Funct. Anal. 255 (2008) 2248–2264.

[21] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, S. Matsui, Uniform local solvability for the Navier–Stokes equations with the Coriolis force, Methods Appl. Anal. 12 (2005) 381–393.

[22] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, S. Matsui, Navier–Stokes equations in a rotating frame in R^3 with initial data nondecreasing at infinity, Hokkaido Math. J. 35 (2006) 321–364.

[23] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, J. Saal, Uniform global solvability of the rotating Navier–Stokes equations for nondecaying initial data, Indiana Univ. Math. J. 57 (2008) 2775–2791.

[24] L. Grafakos, Classical Fourier analysis, Springer, 2008. v. 2.

[25] M. Hieber, Y. Shibata, The Fujita–Kato approach to the Navier–Stokes equations in the rotational framework, Math. Z. 265 (2010) 481–491.

[26] T. Iwabuchi, Global well-posedness for Keller–Segel system in Besov type spaces, J. Math. Anal. Appl. 379 (2011) 930–948.

[27] T. Iwabuchi, R. Takada, Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type, J. Funct. Anal. 267.5 (2014), 1321-1337.

[28] T. Kato, Strong L^p-solutions of the Navier–Stokes equation in R^m, with applications to weak solutions, Math. Z. 187 (1984) 471–480.

[29] H. Koch, D. Tataru, Well-posedness for the Navier–Stokes equations, Adv. Math. 157 (2001) 22–35.

[30] Y. Koh, S. Lee and R. Takada, Strichartz estimates for the Euler equations in the rotational framework, J. Differential Equations 256 (2) (2014), 707-744.

[31] P. Konieczny, T. Yoneda, On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier–Stokes equations, J. Differential Equations 250 (2011) 3859–3873.

[32] H. Kozono, Y. Shimada, Bilinear estimates in homogeneous Triebel–Lizorkin spaces and the Navier–Stokes equations, Math. Nachr. 276 (2004) 63–74.

[33] H. Kozono, M. Yamazaki, Semilinear heat equations and the Navier–Stokes equation with distri-butions in new function spaces as initial data, Comm. Partial Differential Equations 19 (1994) 959–1014.

[34] P. G. Lemarié-Rieusset, Recent developments in the Navier-Stokes problem, CRC Press, 2002.

[35] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci., vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[36] M. Toumlilin, Etude des solutions de certaines équations de la mécanique des fluides. Thèse de doctorat en 2018.

[37] T. Yoneda, Ill-posedness of the 3D-Navier–Stokes equations in a generalized Besov space near BMO^{-1}, J. Funct. Anal. 258 (2010) 3376–3387.

[38] T. Yoneda, Long-time solvability of the Navier–Stokes equations in a rotating frame with spatially almost periodic large data, Arch. Ration. Mech. Anal. 200 (2011) 225–237.

[39] M. Cannone, Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes. Thèse de doctorat en 1995.