

# Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

### Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

# Etude de programmation linéaire dans un environnement incertain

◆ **Réalisé par:** EL-ADAMI Layla

◆ **Encadré par:** Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed

**Soutenu le 18 Juin 2019**

**Devant le jury composé de:**

Pr. Mohammed EL KHOMSSI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Président
Pr. Abdelmajid HILALI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examineur
Pr. Fatima EZZAKI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examineur
Pr. Ouafae AMMOR	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examineur
Pr. Ahmed EL HILALI ALAOUI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant

**Année Universitaire 2018 / 2019**

# Remerciements

Avant toute chose, je tiens à remercier Allah de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce projet et d'avoir mis sur mon chemin plusieurs personnes qui ont contribué à la réussite de ce travail.

Bien entendu, ma reconnaissance va particulièrement à mon encadrant professeur AHMED EL HILALI ALAOUI qui m'a guidé tout au long de ce mémoire. Je le remercie pour sa disponibilité, son encouragement et son enthousiasme envers ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres de jury composé de : AHMED EL HILALI ALAOUI, ABDELMAJID HILALI, FATIMA EZZAKI, AMMOR OUAFABE et MOHAMMED EL KHOMSSI pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger et d'évaluer mon travail.

Je profite de l'occasion pour exprimer ma profonde gratitude à tous les professeurs du département mathématiques de la FSTF pour la formation dont j'ai profité.

Finalement, tous mes sincères remerciements vont à mes parents qui m'ont toujours soutenus et encouragés durant mes années d'études, c'est à eux que je dédie le fruit de ce travail, sans oublier de remercier chaleureusement mes frères et sœurs et toute ma famille et mes amies.

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>4</b>
<b>1 Analyse de sensibilité</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Préliminaire . . . . .	6
1.3 Modification des coûts relatifs . . . . .	8
1.3.1 Variable de base . . . . .	8
1.3.2 Variable hors-base base . . . . .	9
1.4 Modification des termes de droite . . . . .	10
1.5 Modification des coefficients de la matrice des contraintes . . . . .	11
1.6 Introduction d'une nouvelle activité(variable) . . . . .	13
1.7 Introduction d'une nouvelle contrainte . . . . .	14
1.8 Conclusion . . . . .	15
<b>2 Optimisation Robuste</b>	<b>16</b>
2.1 Introduction . . . . .	16
2.2 Incertitude dans les problèmes d'optimisation . . . . .	16
2.2.1 Optimisation Stochastique . . . . .	17
2.2.2 Optimisation Robuste . . . . .	17
2.2.3 Comparaison entre optimisation Robuste et Stochastique . . . . .	18
2.3 Robustesse en programmation linéaire . . . . .	19
2.3.1 La robustesse selon le critère du pire cas . . . . .	19
2.3.2 La robustesse selon le critère du regret . . . . .	32
2.3.3 La robustesse selon Bertsimas et Sim . . . . .	36
2.3.4 Incertitudes portant sur la matrice des contraintes . . . . .	41
2.3.5 Application . . . . .	49
2.4 Conclusion . . . . .	53
<b>3 Optimisation Floue</b>	<b>55</b>
3.1 Introduction . . . . .	55
3.2 Les variables et les ensembles flous . . . . .	55
3.2.1 Variables linguistiques . . . . .	56
3.2.2 Les ensembles flous . . . . .	56
3.2.3 Opérations sur les ensembles flous . . . . .	59
3.2.4 Les règles floues . . . . .	61
3.2.5 Description et structure d'une commande par la logique floue . . . . .	61
3.3 Les trois étapes de construction d'un modèle de logique floue . . . . .	63
3.3.1 La fuzzification . . . . .	63
3.3.2 L'inférence floue . . . . .	64

3.3.3	La défuzzification . . . . .	66
3.4	Optimisation Floue . . . . .	69
3.4.1	Résolution de problèmes à objectifs multiples par la logique floue . . . . .	69
3.5	Conclusion . . . . .	70
	<b>Bibliographie</b>	<b>72</b>

# Liste des figures

2.1	Figure : Domaine des solutions réalisables du problème ( $P_{\text{pireCas}}^c$ ) . . . . .	22
2.2	Figure : Les différents scénarios . . . . .	26
2.3	Figure : Solution optimal suivant le critère du pire cas modèle de pénalité . . . . .	30
2.4	Figure : Domaine des solutions réalisables du problème incertain ( $P^A$ ) . . . . .	44
2.5	Figure : Domaine des solutions réalisables du problème ( $P^A(\Gamma)_{BS}$ ) . . . . .	49
2.6	Figure : La solution du problème d’infirmières . . . . .	53
3.1	Figure : Exemple d’ensembles flous pour la variable température . . . . .	56
3.2	Figure : Montre la fonction d’appartenance choisie pour caractériser le sous-ensemble ’bon’ de la qualité du service. . . . .	57
3.3	Figure : Représentation graphique d’un ensemble classique et d’un ensemble flou. . . . .	57
3.4	Figure : Comparaison entre fonction caractéristique d’un ensemble classique et fonction d’appartenance d’un ensemble flou. . . . .	57
3.5	Figure : Propriétés d’un ensemble flou . . . . .	59
3.6	Figure : Structure interne d’un contrôleur flou. . . . .	62
3.7	Figure : Fonction de véracité. . . . .	63
3.8	Figure : Matrice de décision. . . . .	64
3.9	Figure : Activation. . . . .	65
3.10	Figure : Activation finale. . . . .	66
3.11	Figure : Principe de l’optimisation multi-critères par la logique floue. . . . .	69
3.12	Figure : Mécanisme de la commande floue. . . . .	70

# Introduction Générale

L'optimisation mathématique se heurte dans de nombreux cas au caractère incertain des données du problème qu'elle se propose de résoudre. En effet, les incertitudes liées aux problèmes vont impliquer des difficultés à établir un modèle exact. Ceci est le cas, par exemple dans les problèmes d'optimisation de chaînes d'approvisionnement, où la demande effective des produits et le rendement financier ne sont pas connus avec précision. Dans cette situation, les valeurs exactes des paramètres du modèle ne sont pas accessibles, et seules des estimations sont fournies. Plus généralement, un grand nombre des problèmes d'optimisation, tels que les problèmes de gestion de production, d'ordonnancement, de transport, d'allocation de ressources, et de gestion des risques financiers exigent que les décisions soient prises en présence d'incertitudes. L'incertitude dans ces problèmes peut toucher les prix des matières premières, leur disponibilité et le niveau de la demande des clients. En ingénierie, les données sont soumises à des erreurs de mesure ou d'arrondi qui constituent aussi des sources d'incertitude dans les modèles d'optimisation.

Les difficultés à établir des modèles exacts rendent nécessaire l'établissement de méthodologies qui tiennent compte de ces imprécisions dans le processus d'optimisation et offrent des solutions acceptables au problème posé. L'optimisation stochastique s'est intéressée, dès les années 1950, à ce type de problématiques en se basant sur des modèles probabilistes pour la représentation des imprécisions (une littérature étendue  $y$  est consacrée, dont voici quelques références Birge et Louveaux (1997), Prékopa (1995), Kall et Wallace (1994))[25]. Cependant, dans de nombreux cas, l'optimisation stochastique n'est pas applicable en raison de l'insuffisance d'information pour l'élaboration des lois de probabilité. De plus, elle présente un inconvénient majeur, celui de la taille très importante des problèmes qu'elle génère. On se trouve dès lors confronté à des problèmes d'espace mémoire et de temps de calcul.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons la modélisation d'incertitude par *analyse de sensibilité* dans laquelle introduit l'incertitude après la phase de résolution du problème. Ainsi il s'agit d'étudier le comportement des solutions déjà trouvées face aux variations éventuelles des données de départ et non pas de résoudre le problème posé. D'ailleurs, dans le cas général, l'évaluation de l'impact de telles variations sur une solution est possible sans que le problème initial soit résolu.

L'analyse de sensibilité a été initialement utilisée pour évaluer l'influence des modifications d'un des paramètres des problèmes de programmation linéaire résolus à l'aide de l'algorithme du simplexe. Le but était d'analyser le comportement de la fonction objectif sans devoir résoudre le problème à nouveau.

Dans le deuxième chapitre, nous décrivons le contexte *d'optimisation robuste* qui est une approche différente qui vise à apporter des solutions aux problématiques liées à l'incertain, sans avoir recours à l'analyse probabiliste. Le premier à avoir proposé des méthodes non probabilistes est Dantzig (1955). Depuis, cette thématique a connu un regain d'intérêt et un développement

rapide durant les deux dernières décennies.

La mise en application des approches robustes nécessite d'identifier trois principales composantes. La première est la représentation du modèle d'incertitude; la deuxième consiste à identifier les objectifs ainsi que le contexte décisionnel du problème et la troisième composante vise à déterminer le moyen ou la démarche à suivre permettant d'atteindre les objectifs fixés.

Parmi les modèles d'incertitude non probabilistes relevés dans la littérature, citons la modélisation par scénarios discrets, où les paramètres incertains sont représentés par un ensemble fini de valeurs discrètes (voir par exemple les domaines d'applications de Yu et Yang (1998) et Deineko et Woeginger (2006)); la modélisation par des intervalles continus, ou plus généralement par des ensembles convexes est, elle aussi, très utilisée en optimisation robuste (à titre d'exemples, voir les travaux de Kouvelis et Yu (1997), Bertsimas et Sim (2003) et Averbakh et Lebedev (2005))[12]. La modélisation de l'incertitude par des intervalles est celle que nous avons retenue tout au long de cette mémoire.

En dernier lieu, il faut définir les outils et les méthodologies pour répondre à la préoccupation de la robustesse ainsi que leur mise en œuvre. Les critères issus de la théorie de la décision ont été les premiers outils utilisés en robustesse, notamment le *critère du pire cas* et le *critère du regret maximum* (voir Averbakh et Lebedev (2005))[9]. A la fin de cette partie nous proposons une application du problème d'infirmières dans le cas où les besoins maximaux infirmières est incertain résolu par les critères d'optimisation robuste.

Dans le troisième chapitre, nous définirons les notions de base de la logique floue. La logique floue est une extension de la logique booléenne créée par Lotfi Zadeh en 1965 en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, nous permettons à une condition d'être dans un autre état que vrai ou faux. La logique floue confère ainsi une flexibilité très appréciable aux raisonnements qui l'utilisent, ce qui rend possible la prise en compte des imprécisions et des incertitudes.

# Chapitre 1

## Analyse de sensibilité

### 1.1 Introduction

L'analyse de sensibilité consiste à étudier l'impact des variations des données initiales d'un problème sur ses solutions. Ainsi il ne s'agit pas de résoudre un problème d'optimisation, mais d'évaluer le comportement des solutions déjà trouvées face à des perturbations des données initiales. De cette façon, l'incertitude est introduite dans la phase après la résolution du problème.

L'optimisation sensibilité a été initialement utilisée pour évaluer l'influence des modifications d'un des paramètres des problèmes de programmation linéaire résolus à l'aide de l'algorithme du simplexe. Le but était d'analyser le comportement de la fonction objectif sans devoir résoudre le problème à nouveau.

L'analyse de sensibilité pour des problèmes de l'optimisation combinatoire est apparue un peu plus tard. Les tentatives pour employer directement les méthodes développées pour les problèmes linéaires continus sur ces problèmes n'ont pas abouti à un résultat satisfaisant. Ainsi depuis les années 1970, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de sensibilité pour les problèmes d'optimisation combinatoire. Le premier état de l'art a été publié par Geoffrion et Nauss en 1977.

Pour les problèmes d'optimisation, les coefficients de la fonction objectif et des contraintes sont fournis sous formes des données ou des paramètres du modèle. En général, les valeurs de certains coefficients sont soumises aux fluctuations du marché et sont alors sujettes à des modifications. Par exemple, le coûts de l'énergie, le coût des matières premières au même la demande des clients ne sont pas connus avec certitude. Chaque variation de ces paramètres peut affecter la solution optimale du problème[1].

Le souci du gestionnaire peut se résumer en une question : dans quelle mesure la solution optimale d'un problème obtenue par des techniques d'optimisations (simplexe) est sensible aux modifications que peuvent subir certains paramètres du problème ?

### 1.2 Préliminaire

Dans ce chapitre, nous étudions l'effet de toute modification de l'un des paramètres sur la solution optimale, obtenue par la méthode du Simplexe, d'un problème de programmation linéaire. Nous étudions aussi l'effet de l'ajout d'une nouvelle activité ou d'une nouvelle contrainte sur la solution optimale du programme linéaire sans être obligé de résoudre le problème à nouveau.



Considérons le problème de programmation linéaire sous la forme :

$$(P) \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Supposons avoir obtenue une solution de base optimale du problème  $(P)$  et l'on effectue l'une des variations suivantes :

$$c \leftarrow \tilde{c} = c + \Delta c, \quad b \leftarrow \tilde{b} = b + \Delta b \quad \text{ou} \quad A \leftarrow \tilde{A} = A + \Delta A$$

Nous nous intéressons à la recherche des domaines dans lesquels les données  $A$ ,  $b$  et  $c$  du problème peuvent varier sans affecter la solution de base optimale du problème. Les questions suivantes peuvent être posées : Quel effet peut avoir cette variation sur la base optimale ? Peut-on utiliser la solution optimale de  $(P)$  pour déduire celle du nouveau problème ?

Si  $x^*$  est une solution optimale de  $(P)$  associée à une base  $B^*$ , alors l'analyse de sensibilité est l'étude des domaines dans lesquels les données  $A$ ,  $b$  et  $c$  du problème peuvent varier sans que la base  $B^*$  ne change.

La postoptimalité est l'ensemble des techniques permettant, non seulement d'analyser la sensibilité de la solution optimale suite à la modification des paramètres  $a_{ij}$ ,  $c_j$  et  $b_i$ , mais également d'évaluer l'effet de l'ajout d'une nouvelle activité ou d'une nouvelle contrainte sur la solution optimale.

Nous pouvons aussi étudier l'effet du changement d'un paramètre de façon continue. On parlera alors de la programmation linéaire paramétrique.

Afin d'illustrer chacun des cas possibles, nous allons utiliser l'exemple du fleuriste avant de généraliser pour le cas d'un problème de programmation linéaire avec minimisation.

Un fleuriste dispose de 45 roses, 36 tulipes et 27 marguerites achetées à M MAD. Il veut offrir à ses clients deux types de bouquets de fleurs :

- Type 1 : bouquet à 80 MAD composé de 10 roses, 4 tulipes et 2 marguerites.
- Type 2 : bouquet à 60 MAD composé de 6 roses, 6 tulipes et 6 marguerites.

Le problème du fleuriste consiste à déterminer le nombre de bouquets de chaque type afin de maximiser son revenu total. Le problème est modélisé de la façon suivante, ainsi le tableau initial et le tableau optimal du simplexe qui est associé à ce problème :

$$(P) \begin{cases} \max 80x + 60y \\ \text{s.c} \\ 10x + 6y \leq 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Tableau initial

$$\begin{array}{l} u \\ v \\ h \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 10 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 45 \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 36 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 27 \\ \hline -80 & -60 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Tableau optimal

$$\begin{array}{l} x \\ v \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 15/4 \\ \hline 0 & 0 & 15/2 & 0 & 5/2 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

Le vecteur des multiplicateurs du simplexe optimaux est

$$\pi^t = (-15/2, 0, -5/2)$$

Nous allons étudier les conséquences

1. d'une modification de l'un des coûts relatifs  $c_j$ .
2. d'une modification de l'un des termes de droite  $b_i$ .
3. de l'ajout d'une nouvelle variable.
4. de l'ajout d'une nouvelle contrainte.
5. d'une modification de l'un des  $a_{ij}$ .

### 1.3 Modification des coûts relatifs

Deux cas peuvent se présenter selon que le coût relatif  $c_j$  corresponde à une variable de base ou à une variable hors base.

#### 1.3.1 Variable de base

Si le coût relatif  $c_j$  d'une variable de base  $x_j$  est remplacé par  $c_j + \Delta c_j$  alors le coût relatif à une itération quelconque  $\bar{c}_j$  sera remplacé par  $\tilde{c}$ . En effet, rappelons que :

$$\bar{c}_j = c_j - \pi^t a_{.j}$$

donc,

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j - \pi^t a_{.j} = (c_j + \Delta c_j) - \pi^t a_{.j} = c_j - \pi^t a_{.j} + \Delta c_j = \bar{c}_j + \Delta c_j$$

Et puisque  $x_j$  est une variable de base alors  $\bar{c}_j = 0$  et suite  $\tilde{c} = \Delta c_j$ .

Par exemple, si dans le problème du fleuriste, on remplace  $c_2 = -60$  par  $\tilde{c}_2 = c_2 + \Delta c_2$ , alors

$$\tilde{c}_2 = \bar{c}_2 - \pi^t a_{.2} = (c_2 + \Delta c_2) - \pi^t a_{.2} = \bar{c}_2 + \Delta c_2 = \Delta c_2.$$

Ainsi, le tableau optimal du Simplexe prend la forme :

$$\begin{array}{l} x \\ v \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 15/4 \\ \hline 0 & \Delta c_2 & 15/2 & 0 & 5/2 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

Nous constatons que le coût relatif de la variable de base  $y$  ne prend plus la valeur zéro. il faut donc remplacer  $\Delta c_2$  par 0 dans la dernière ligne du tableau du Simplexe. Nous allons donc multiplier la 3<sup>ème</sup> ligne du tableau par  $\Delta c_2$  et la soustraire de la 4<sup>ème</sup> ligne. Nous obtenons le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} x \\ v \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{ccccc|c|c} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 15/4 \\ \hline 0 & 0 & \frac{15}{2} + \frac{\Delta c_2}{24} & 0 & \frac{5}{2} - \frac{5\Delta c_2}{24} & 1 & 405 - \frac{15\Delta c_2}{4} \end{array} \right]$$

Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, alors la solution demeure optimale si  $\bar{c} \geq 0$ . Autrement dit si

$$\begin{cases} \bar{c}_3 = \frac{15}{2} + \frac{\Delta c_2}{24} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \geq -180 \\ \bar{c}_5 = \frac{5}{2} - \frac{5\Delta c_2}{24} \geq 0 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 12 \end{cases}$$

Donc la solution demeure optimale si :

$$-180 \leq \Delta c_2 \leq 12$$

Par contre, si  $\Delta c_2 < -180$  (respectivement  $\Delta c_2 > 12$ ) alors la solution actuelle n'est plus une solution optimale et on doit continuer l'algorithme du Simplexe avec  $u$  (respectivement  $h$ ) comme variable d'entrée.

En général, si le coût relatif  $c_{j_r}$  de la variable de base  $x_{j_r}$ , subit la variation :

$$c_{j_r} \leftarrow \tilde{c}_{j_r} = c_{j_r} + \Delta c_{j_r}$$

alors, les coûts relatifs des variables hors-base subiront les variations :

$$\bar{c}_j \leftarrow \tilde{\bar{c}}_j = \bar{c}_j - \Delta c_{j_r} \bar{a}_{rj} \quad j \in J$$

où  $J$  désigne l'ensemble des indices des variables hors-base à cette itération.

Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, alors la solution de base demeure optimale si :

$$\max_{j \in J} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0 \right\} \leq \Delta c_{j_r} \leq \min_{j \in J} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} > 0 \right\}$$

Autrement, au moins l'un des coûts relatifs sera négatif et alors l'algorithme du Simplexe sera poursuivi.

### 1.3.2 Variable hors-base base

En générale, si le coût relatif  $c_j$  d'une variable hors-base prend la valeur  $\tilde{c}_j = c_j + \Delta c_j$ , alors seul le cout relatif de cette variable sera affecté dans le tableau final. On a alors :

$$\tilde{c}_j = \bar{c}_j + \Delta c_j$$

Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, alors la solution demeure optimale si :

$$\tilde{c}_j \geq 0 \quad \text{c'est à dire si} \quad \Delta c_j \geq -\bar{c}_j.$$

Par contre, si  $\Delta c_j \leq -\bar{c}_j$  alors  $\tilde{c}_j < 0$  et on doit appliquer d'autres itérations de l'algorithme primal du Simplexe pour trouver une solution optimale du nouveau problème.

## 1.4 Modification des termes de droite

Si l'un des termes de droite  $b_r$  subi une variation de  $\Delta b_r$ , alors que deviennent les termes de droite dans le tableau optimal ?

**Remarque 1.** La modification des termes de droite n'affecte pas les coûts relatifs.

Reprenons l'exemple du problème du fleuriste et supposons que  $b_2$  subit la variation  $\Delta b_2$  :

$$b_2 \leftarrow \tilde{b}_2 = b_2 + \Delta b_2$$

Soit  $B$  la base optimale, alors

$$\begin{pmatrix} x \\ v \\ y \end{pmatrix} = B^{-1}(b + \Delta b) = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -1/8 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/24 & 0 & 5/24 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 45 \\ 36 \\ 27 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Les coûts relatifs n'ayant subi aucun changement, alors la solution demeure réalisable, et donc optimale, si  $9/2 + \Delta b_2$ , c'est à dire  $\Delta b_2 \geq -9/2$ .

Si  $\Delta b_2 < -9/2$ , alors  $v < 0$  et nous utilisons l'algorithme dual du Simplexe pour retrouver une solution optimale du nouveau problème.

En général, si le terme de droite  $b_r$  est remplacé par  $b_r + \Delta b_r$ , alors les termes de droite du tableau final deviennent :

$$B^{-1} \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \bar{b} + B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Delta b_r \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 + \beta_{1r} \Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{b}_r + \beta_{rr} \Delta b_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m + \beta_{mr} \Delta b_r \end{pmatrix}$$

où  $\beta_{.r} = (\beta_{1r}, \beta_{2r}, \dots, \beta_{mr})^t$  est la  $r^{eme}$  colonne de  $B^{-1}$ .

Pour que la solution demeure réalisable et donc optimale il faut que :

$$\bar{b}_i + \beta_{ir} \Delta b_r \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq m.$$

Donc la solution est optimale si :

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\beta_{ir}} : \beta_{ir} > 0 \right\} \leq \Delta b_r \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\beta_{ir}} : \beta_{ir} < 0 \right\}$$

Si la solution n'est pas réalisable sous l'effet du changement, alors nous cherchons une nouvelle solution pour le nouveau problème en appliquant l'algorithme dual du Simplexe.

**Exemple 1.** Considérons le cas où la  $\Delta b_2 = 4$  dans le problème du fleuriste, c'est à dire que  $b_2 = 36$  est remplacé par  $\tilde{b}_2 = 40$ . Le tableau optimal du Simplexe devient alors

$$\begin{array}{c} x \\ v \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|cc} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 17/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 15/4 \\ \hline 0 & 0 & 15/2 & 0 & 5/2 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

Les coût relatif n'ayant subi aucun changement et tous les termes de droite sont positifs, donc la solution demeure réalisable et donc optimale.

**Exemple 2.** Considérons le cas où la  $\Delta b_2 = -6$  dans le problème du fleuriste, c'est à dire que  $b_2 = 36$  est remplacé par  $\tilde{b}_2 = 30$ . Le tableau optimal du Simplexe devient alors

$$\begin{array}{l} x \\ v \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|cc} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 15/4 \\ \hline 0 & 0 & 15/2 & 0 & 5/2 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

L'un des termes de droite est négatif, donc la solution est non réalisable.

Nous appliquons alors l'algorithme dual du Simplexe pour trouver une solution de base optimale du nouveau problème. La variable  $v$  joue le rôle de variable de sortie. Pour trouver la variable d'entrée, nous appliquant le critère du plus petit rapport :

$$\min \left( \frac{15/2}{1/4}, \frac{5/2}{3/4} \right) = \min \left( 30, \frac{10}{3} \right) = \frac{10}{3}.$$

Ce minimum correspond à la variable  $h$  qui joue alors le rôle de variable d'entrée. Nous pivotons alors sur l'élément  $-4/3$  pour obtenir le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} x \\ h \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|cc} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & -4/3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/9 & 5/18 & 0 & 0 & 10/3 \\ \hline 0 & 0 & 20/3 & 10/3 & 0 & 1 & 400 \end{array} \right]$$

Les coûts relatifs et les termes de droite sont tous non négatif, donc la solution actuelle est une solution de base optimale.

## 1.5 Modification des coefficients de la matrice des contraintes

Vu l'ampleur des calculs à effectuer dans le cas où le coefficient  $a_{ij}$  est associé à une variable de base, nous ne discuterons que le cas d'une variable hors-base  $x_j$ . Supposons que le coefficient  $a_{ij}$  associé à une variable hors-base  $x_j$  soit modifier :

$$a_{ij} \leftarrow \tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \Delta a_{ij}$$

Posons,

$$\tilde{a}_{.j} = a_{.j} + (0, \dots, 0, \Delta a_{ij}, 0, \dots, 0)^t.$$

Alors le coût relatif de la variable  $x_j$  est modifié et devient :

$$\begin{aligned} \bar{c}_j &= c_j - \pi^t (\tilde{a}_{.j} + (0, \dots, 0, \Delta a_{ij}, 0, \dots, 0)^t) \\ &= (c_j - \pi^t a_{.j}) - \pi^t (0, \dots, 0, \Delta a_{ij}, 0, \dots, 0)^t \\ &= \bar{c}_j - \pi_i \Delta a_{ij} \end{aligned}$$

où  $\pi$  est le vecteur des multiplicateurs optimaux du Simplexe. Puisqu'il s'agit d'un problème de minimisation, alors la solution demeure optimale si  $\bar{c}_j \geq 0$ , ce qui est vérifié si l'une des situations suivantes est satisfaite :

$$(\Delta a_{ij} \leq \frac{\bar{c}_j}{\pi_i} \text{ et } \pi_i > 0)$$

où

$$(\Delta a_{ij} \geq \frac{\bar{c}_j}{\pi_i} \text{ et } \pi_i < 0)$$

où

$$(\Delta a_{ij} \text{ quelconque et } \pi_i = 0)$$

Par contre, si  $\bar{c}_j < 0$  alors la solution actuelle n'est pas optimale et nous procédons à l'exécution d'une autre itération de l'algorithme primal du Simplexe avec  $x_j$  comme variable d'entrée.

**Exemple 3.** *Considérons le problème de programmation linéaire :*

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = -3x - 5y \\ \text{s.c} \\ 6x + 10y \geq 60 \\ 8x + 25y \geq 200 \\ 2x + 8y \leq 80 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Le tableau initial et le tableau optimal du Simplexe associés à ce problème sont :

Tableau initial

$$\begin{array}{c} u \\ v \\ h \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|cc} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 6 & 10 & -1 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ 8 & 25 & 0 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 80 \\ \hline -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 400 \end{array} \right]$$

Tableau optimal

$$\begin{array}{c} x \\ u \\ v \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|cc} x & y & u & v & h & -z & b \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 40 \\ 0 & 14 & 1 & 0 & 3 & 0 & 180 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 4 & 0 & 120 \\ \hline 0 & 7 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 120 \end{array} \right]$$

Du tableau optimal, nous déduisons que le vecteur des multiplicateurs optimaux du Simplexe est  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^t = (0, 0, -3/2)^t$  et que  $\bar{c}_2 = 7$ .

1<sup>er</sup> cas : variation de  $a_{12} = 10$  : Puisque le multiplicateur associé à la première contrainte est nul,  $\pi_1 = 0$ , alors la solution demeure optimale quelle que soit la variation  $\Delta a_{12}$ .

2<sup>eme</sup> cas : variation de  $a_{22} = 25$  : Puisque le multiplicateur associé à la deuxième contrainte est nul,  $\pi_2 = 0$ , alors la solution demeure optimale quelle que soit la variation  $\Delta a_{22}$ .

3<sup>eme</sup> cas : variation de  $a_{32} = 8$  : Dans ce cas, le multiplicateur associé à la troisième contrainte n'est pas nul,  $\pi_3 = -3/2$ . Par conséquent la solution demeure optimale si :

$$\Delta a_{32} \geq \frac{\bar{c}_2}{\pi_3} = -\frac{7}{3/2} = -\frac{14}{3}$$

C'est-à-dire si  $a_{32} \geq 8 - \frac{14}{3} = \frac{10}{3}$ .

Par contre, si  $a_{32} < \frac{10}{3}$ , alors la solution n'est pas optimale et il faut exécuter d'autres itérations du Simplexe où la variable  $y$  devra être introduite dans la base.

## 1.6 Introduction d'une nouvelle activité(variable)

Supposons que le fleuriste prépare un 3<sup>ème</sup> type de bouquet qu'il vend à  $(-c_3)$  MAD composé de  $a_{13}$  rose,  $a_{23}$  tulipes et  $a_{33}$  marguerites.

Soit  $x_3$  le nombre de bouquets de type 3 à préparer. Le coût relatif de cette nouvelle variable est :

$$\bar{c}_3 = c_3 - \pi^t a_{.3} = c_3 + \frac{15}{2}a_{13} + \frac{5}{2}a_{33} \quad (\pi^t = (-15/2, 0, -5/2))$$

Si  $\bar{c}_3 \geq 0$ , alors la solution actuelle demeure optimale.

Sinon, nous continuons l'algorithme du simplexe avec  $x_3$  comme variable d'entrée.

Pour déterminer la variable de sortie, nous appliquons la règle du plus petit rapport. On doit alors calculer  $\bar{a}_{.3} = B^{-1}a_{.3}$ .

**Exemple 4.** Considérons le cas où l'on prépare un troisième type de bouquet de fleurs à 50 MAD et qui est composé de 4 roses, 4 tulipes et 4 marguerites ( $c_3 = -50$ ,  $a_{.3} = (4, 4, 4)^t$ ). Quelle est la solution optimale du nouveau problème ? Soit  $t$  la nouvelle variable représentant le nombre de bouquets de fleurs de troisième type à préparer. Le coût relatif de cette variable est donné par :

$$\bar{c}_3 = c_3 - \pi^t a_{.3} = -50 + 4\frac{15}{4} + 4\frac{5}{2} = -10$$

$\bar{c}_3$  étant négatif, donc nous continuons l'algorithme du Simplexe avec  $t$  comme variable d'entrée. Nous évaluons  $\bar{a}_{.3} = B^{-1}a_{.3}$  où :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -1/8 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/24 & 0 & 5/24 \end{pmatrix}, a_{.3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{a}_{.3} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{33} \end{pmatrix} = B^{-1}a_{.3} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & -1/8 \\ -1/4 & 1 & -3/4 \\ -1/24 & 0 & 5/24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Le tableau du Simplexe devient alors :

$$\begin{array}{c} x \\ v \\ y \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c|c} x & y & u & v & h & t & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 2/3 & 0 & 15/4 \\ \hline 0 & 0 & 15/2 & 0 & 5/2 & -10 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

La variable  $t$  entre dans la base et la variable  $y$  quitte la base. Le nouveau tableau du Simplexe est :

$$\begin{array}{c} x \\ v \\ t \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c|c} x & y & u & v & h & t & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 3/2 & -1/16 & 0 & 5/14 & 1 & 0 & 45/8 \\ \hline 0 & 15 & 55/8 & 0 & 45/8 & 0 & 1 & 1845/4 \end{array} \right]$$

La nouvelle solution de base optimale est donc :

$$(x, y, u, v, t) = (9/4, 0, 0, 9/2, 45/8)^t.$$

En général, si nous désirons introduire une nouvelle activité  $x_{n+1}$  avec comme paramètre  $(c_{n+1}, a_{.n+1})$ , alors nous déterminons d'abord si son coût relatif dans la base actuelle reste optimale. Sinon, nous continuons l'algorithme du Simplexe avec  $x_{n+1}$  comme variable d'entrée.

On évalue  $\bar{a}_{.n+1} = B^{-1}a_{.n+1}$  et on applique la règle du plus petit rapport pour déterminer la variable de sortie.

## 1.7 Introduction d'une nouvelle contrainte

Dans ce paragraphe, nous étudions l'impact d'ajouter une nouvelle contrainte sur la solution optimale d'un problème de programmation linéaire. Afin d'illustrer ceci, nous allons reprendre l'exemple du fleuriste en ajoutant un 4<sup>ème</sup> type de fleur.

**Exemple 5.** Supposons que le fleuriste possède un 4<sup>ème</sup> type de fleur, 15 hérissons. Il décide d'ajouter 3 hérissons dans les bouquets à 80 MAD et 3 hérissons dans les bouquets à 60 MAD. Ceci nous donne une nouvelle contrainte :

$$3x + 3y \leq 15$$

Soit  $k$  la variable d'écart :

$$3x + 3y + k = 15$$

Ajoutons cette ligne au tableau optimal et déterminons le nouveau tableau du Simplexe :

$$\begin{array}{c} x \\ v \\ y \\ k \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c|c} x & y & u & v & h & k & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 0 & 15/4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 15/2 & 0 & 5/2 & 0 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

Les variables  $x$  et  $y$  doivent jouer le rôle de variable de base. Pour cela il faut que les vecteurs qui leur sont associés dans le tableau du Simplexe soient des vecteurs unités. Afin de retrouver cette forme, nous multiplions la 1<sup>ère</sup> ligne et la 3<sup>ème</sup> ligne du tableau par coefficient 3 et puis nous les soustrayons de la 4<sup>ème</sup> ligne. Nous obtenons le tableau suivant :

$$\begin{array}{c} x \\ v \\ y \\ k \\ -z \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc|c|c} x & y & u & v & h & k & -z & b \\ \hline 1 & 0 & 1/8 & 0 & -1/8 & 0 & 0 & 9/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 & -3/4 & 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & -1/24 & 0 & 5/24 & 0 & 0 & 15/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & -1/4 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 15/2 & 0 & 5/2 & 0 & 1 & 405 \end{array} \right]$$

Remarquons que le critère d'optimalité est toujours vérifié puisque tous les coûts relatifs sont positifs ou nuls, la solution obtenue n'est pas réalisable à cause du terme de droite négatif : -3. Nous allons alors appliquer l'algorithme dual du simplexe pour obtenir une nouvelle solution de base réalisable. En appliquant le critère d'entrée et le critère de sortie de l'algorithme dual du



simplexe, nous constatons que la variable  $h$  va entrer dans la base pour  $y$  remplacer la variable  $k$ . En pivotant sur  $-1/4$ , nous obtenons le nouveau tableau :

$$\begin{array}{c}
 x \\
 v \\
 y \\
 h \\
 -z
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{cccccc|c|c}
 x & y & u & v & h & k & -z & b \\
 \hline
 1 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 15/4 \\
 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 27/2 \\
 0 & 1 & -1/4 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 5/4 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 12 \\
 \hline
 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 10 & 1 & 375
 \end{array} \right]$$

Cette solution de base est optimale puisque les termes de droite sont tous positifs et les coûts relatifs demeurent non-négatifs.

En général, Si nous désirons introduire une nouvelle contrainte  $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{m+1j}x_j \leq b_{m+1}$ , nous introduisons la variable d'écart  $x_{m+1}$  qui devient la variable de base dans la  $(m+1)^{eme}$  de nouveau problème. Nous transformons le tableau du Simplexe de sorte que le coefficient de la variable  $x_j$  dans cette  $(m+1)^{eme}$  ligne devient :

$$\bar{a}_{m+1j} = a_{m+1j} - \sum_{r=1}^m a_{m+1jr} \bar{a}_{rj}$$

$$\bar{b}_{m+1} = b_{m+1} - \sum_{r=1}^m a_{m+1jr} \bar{b}_r$$

Si  $\bar{b}_{m+1} \geq 0$ , alors  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1} = \bar{b}_{m+1}$  est une solution optimale du nouveau problème. Sinon, alors la valeur de  $x_{m+1}$  étant négative, donc la solution de base n'est plus réalisable. Nous utilisons alors l'algorithme dual du Simplexe pour trouver une solution optimale (Si elle existe).

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la modélisation de l'incertitude des données dans les problèmes d'optimisation. Nous avons présenté l'approche utilisée dans la littérature pour prendre en compte l'incertitude. Puis, nous nous sommes focalisés sur les approches a posteriori et plus précisément sur les approches déterministes comme l'analyse de sensibilité, pour lesquelles une revue de la littérature a été effectuée. Les techniques de l'analyse de sensibilité permettent d'évaluer la sensibilité de la solution optimale face à des modifications éventuelles de certains paramètres du problème. L'analyse de sensibilité permet de déterminer les domaines dans lesquels les données du problème peuvent varier sans modifier les variables de la base optimale.

## Chapitre 2

# Optimisation Robuste

### 2.1 Introduction

L'*optimisation robuste* traite des problèmes d'optimisation dans lesquels les coefficients des contraintes et de l'objectif sont incertains. Son but est de fournir une solution opérationnelle à des problèmes de cette classe, en des temps de calcul raisonnables, là où les approches traditionnelles, basées sur un modèle probabiliste, se heurtent à des difficultés numériques considérables. En effet, il est en général très difficile, voir impossible, de formuler un modèle probabiliste pertinent pour les paramètres incertains du problème. Lorsque cela est malgré tout possible, le calcul d'espérances mathématiques avec des distributions multidimensionnelles peut être numériquement très lourd, voire impossible à effectuer avec une précision raisonnable. Et si ces difficultés sont surmontées, le problème d'optimisation est alors d'une telle dimension ou d'une complexité telle qu'il est impossible à résoudre.

L'*optimisation robuste* contourne ces difficultés en stipulant au départ des hypothèses minimales et non probabilistes sur le domaine de variation des paramètres incertains. Le calcul d'espérances mathématiques est ainsi évacué ; il est remplacé par la notion de « pire des cas ». Cela conduit à des problèmes d'optimisation de même nature que la version déterministe du problème original et de taille modérément supérieure.

La première formulation d'une solution robuste à un problème de programmation mathématique avec coefficients incertains peut être attribuée à Soyster au début des années 70. Le domaine a pris son essor beaucoup plus tard, dans la fin des années 90, grâce au travail de pionniers de Ben-Tal et Nemirovski, mais également de El-Gahoui et Lebret[3]. Depuis, l'optimisation robuste est devenue un des domaines de recherche en optimisation des plus actifs. Les principaux développements théoriques se trouvent dans les articles de Ben-Tal et co-auteurs ou Bertsimas[12].

### 2.2 Incertitude dans les problèmes d'optimisation

Dans les modèles d'optimisation en contexte incertains, la quantité d'information disponible sur les incertitudes varient énormément d'un problème à l'autre. On identifie deux types d'informations.

Dans le meilleur des cas, l'incertitude peut être identifiée par une distribution aléatoire, dans ce cas, le problème est le plus souvent résolu en utilisant les méthodes d'optimisation stochastique, dans le second cas, l'incertitude est identifiée, mais ne peut pas être caractérisée par une loi de probabilités, dans ce cas, les méthodes d'optimisation robuste sont souvent efficaces, dans la troisième cas l'incertitude est définie sur un ensemble flou, le problème est le plus souvent

résolu en utilisant les méthodes d'optimisation flou.

### 2.2.1 Optimisation Stochastique

Les méthodes d'optimisation stochastiques supposent que l'incertitude prise en compte est caractérisée par une loi de probabilité connue, certains paramètres du problème sont alors considérés comme des variables aléatoires.

L'ensemble des réalisations possibles de ces variables aléatoire crée un jeu des scénarios potentiellement infini, une première approche naïve, serait de fixer tous les paramètres aléatoire à leur espérance, créant ainsi un 'scénario moyen', puis d'optimiser ce scénario.

Sen et Higle (1999) ont montré que cette approche mène rarement à des solutions optimales, et peut même donner des solutions irréalisables sur certains scénarios, c'est pourquoi les méthodes d'optimisation stochastique se concentrent sur la minimisation de l'espérance de la fonction objectif du problème.

$$\min_{x \in X} \{g(x) = E(G(x, \omega))\}$$

Avec  $G(x, \omega)$  représentant la fonction objective,  $X$  l'ensemble des solutions réalisables et  $\omega$  l'ensemble des scénarios aléatoire.

Cette formulation est le plus souvent appelée programmation stochastique dans la littérature (Kleywegt et Shapiro 2007), Le nombre de scénarios potentiellement infini rend cependant cette formulation extrêmement difficile à résoudre, son caractère abstrait la rend aussi difficile à appliquer sur des problèmes réels. Une alternative, l'optimisation stochastique avec recours a été introduite par Dantzig (1955).

L'optimisation stochastique avec recours consiste en deux types de problèmes d'optimisation, le problème maître optimise le problème avant que la réalisation des paramètres aléatoires soient connus, en optimisant une fonction déterministe ainsi que l'espérance des problèmes esclave, chaque problème esclave optimise le cout de la chaîne logistique après réalisations des variables aléatoire, une application classique concerne l'optimisation de chaîne logistique.

Une autre approche consiste à optimiser un sous ensemble de scénario, puis d'analyser les solutions obtenues par une analyse de sensibilité de Monte-Carlo, Choisir la meilleure solution peut cependant être difficile, une procédure pour choisir la solution, en utilisant par exemple le critère de Pareto-Optimalité, ou encore la dominance stochastique a été proposé par Lowe et al (2002).

### 2.2.2 Optimisation Robuste

Historiquement, les méthodes d'optimisation stochastique étaient utilisées pour résoudre les problèmes d'optimisation en contexte incertain. Cependant, déterminer la loi de probabilité associée à chaque variable ou paramètre aléatoire peut s'avérer une tâche particulièrement ardue. Des méthodes d'optimisation robuste, ne nécessitant pas de loi de probabilités ont donc été développées. Le premier usage de méthode d'optimisation robuste apparait en 1968 avec Gupta et al. qui fournissent des solutions flexibles dans un contexte incertain. Ces solutions peuvent facilement être modifiées pour s'adapter aux différentes réalisations possibles. Cependant, les méthodes d'optimisation robustes récentes semblent plutôt se concentrer de trouver des solutions qui sont capable de résister aux aléas. (voir Roy 2002 et Roy 2008)[7].

Les méthodes d'optimisation robuste nécessitent un ensemble de scénarios représentants des réalisations possibles de paramètres aléatoires. Cependant, aucune probabilité n'est associée à ces scénarios. Ses scénarios peuvent être discret, ou encore continu, indiquant un intervalle dans lequel le paramètre aléatoire peut prendre valeur. Les méthodes d'optimisation les plus courantes sont les modèles min max. Le but de cette mesure, introduite par Kouvelis et Yu (1997) est de

minimiser le coût maximum parmi tous les scénarios.

Soit  $S$  un ensemble fini de scénarios et  $X$  un ensemble fini de solutions réalisable. Soit  $F_s(x)$  le coût de la solution  $x$  sur le scénario  $S$ , et  $F_s^*$  la solution optimale sur ce même scénario.

Le modèle min max est alors :

$$Z = \min_{x \in X} (\max_{s \in S} (F_s(x)))$$

Cette mesure de robustesse est très conservative, se concentrant principalement sur le scénario de pire cas.

La solution trouvée n'a aucune garantie de résultat sur les scénarios de plus faible coût. Cette mesure est donc adaptée aux problèmes d'optimisation avec un adversaire, telle que les Intelligences Artificielle, ou quand un concurrent peut faire des décisions après celle de votre entreprise, cependant, elle est peu adaptée au problème d'optimisation logistique.

C'est pourquoi Kouvelis et Yu s'intéressent aussi au regret d'une solution, soit la différence (absolue ou relative) entre le coût de la solution et la valeur de la solution optimale des scénarios. Cela permet à chaque scénario d'avoir la même importance dans la solution finale.

Le modèle regret maximum est alors :

$$Z = \min_{x \in X} (\max_{s \in S} (F_s(x) - F_s^*(x)))$$

Les modèles d'optimisation robuste sont au cœur des travaux de Ben-Tal et al. (1999, 2000, 2002 et 2009). Leurs travaux sont basés sur une des premières applications de l'optimisation robuste proposée par Soyster (1973). Soyster propose un modèle qui permet d'obtenir une solution réalisable pour tout paramètre appartenant à un ensemble convexe.

A partir de ce modèle, Ben-Tal et al. vont développer un modèle permettant de trouver une solution réalisable sur l'ensemble des paramètres incertain, et minimisant le cout en pire cas.

Bien que cette approche reste conservative, Ben Tal et al. la justifie en rappelant que la plupart des problèmes réels sont composés de contraintes dure, et que la solution doit rester réalisable. Ils citent en exemple la construction d'un pont, ou de petits changements peuvent mener à une structure instable. Ils introduisent en 2000 la notion de fiabilité pour gérer le fait que leur modèle soit conservatif. Ils considèrent que chaque paramètre doit se trouver dans un intervalle donné. De plus pour chaque contrainte, la solution finale ne doit pas dévier de la solution optimale de plus d'un seuil fixé à l'avance. Ils appliquent cette méthode en 2009 pour résoudre un problème d'optimisation de chaine logistique multi-échelons et multi-périodes sous incertitude de demandes.

Berstimas et Sim (2004) notent que les modèles proposés par Ben-Tal et Nemirovski (2000) nécessitent trop de variables supplémentaires et ne sont donc pas adaptés pour traiter les problèmes réels. Ils proposent donc une nouvelle formulation qui limite l'impact des paramètres incertains sur la méthode robuste. Pour chaque contrainte, ils introduisent une variable  $\Gamma_i$  qui limite le nombre de paramètre pouvant varier, les autres étant fixés à leur valeur médiane. Cela a pour effet de limiter le nombre des scénarios, simplifiant significativement le problème. Le paramètre  $\Gamma_i$  contrôle le compromis entre la prise en compte des incertitudes et l'impact sur le problème. Leurs travaux sont approfondis dans Bertsimas et al. (2004)[3].

### 2.2.3 Comparaison entre optimisation Robuste et Stochastique

Si l'optimisation stochastique possède l'avantage de minimiser efficacement les coûts à long terme, elle possède aussi quelque désavantage justifiant l'utilisation des méthodes d'optimisation robuste.

Le premier désavantage consiste en la nécessité de connaître une loi de probabilité pour chaque paramètre aléatoire. Comme indiqué plus haut, déterminer ces lois de probabilité peut se révéler extrêmement difficile, du à un faible nombre de réalisation antérieure, ou plus simplement du a un manque de données historiques. En utilisant pas de probabilités, les méthodes robustes esquivent cette difficulté.

Ensuite, même si la loi de probabilité est connue, les méthodes d'optimisations stochastiques ne fournissent une garantie que sur l'espérance de la solution, et non sur l'efficacité de la solution par rapport à une réalisation donnée. Même une solution avec une espérance de coût faible peut mener à des coûts importants en cas de 'malchance'. Au contraire, les méthodes d'optimisation robustes garantissent que la solution fournie restera bonne quelles que soient les réalisations des paramètres aléatoires.

Ainsi, les méthodes d'optimisation robuste et stochastique sont donc complémentaires dans la gestion des problèmes en contexte incertain. En face de décisions à haut risque, pouvant mener à des pertes importantes, ou bien face à des aléas difficiles à caractériser, les méthodes d'optimisation robuste sont préférables. Au contraire, face à des décisions à long termes, ou bien avec des variations faibles et facilement caractérisée, les méthodes d'optimisation stochastique se révèlent plus efficace.

## 2.3 Robustesse en programmation linéaire

Dans un programme mathématique modélisant un problème de décision réel, un certain nombre de paramètres est souvent entaché d'incertitude et d'indétermination.

Cette incertitude peut être de nature différente (erreurs de calcul, phénomènes aléatoires, avenir incertain, ...) et se présente par différents modèles : loi de probabilités, intervalles, nombres flous, .... , la difficulté provient alors du fait qu'il n'existe, le plus souvent pas de solution qui soit optimales pour tous les jeux de paramètres à considérer.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de décision modélise sous la forme d'un programme linéaire de la forme :

$$(P) \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

où  $x$  est une matrice colonne de taille  $n$  qui représente les variables du problème. La matrice des contraintes  $A$  est de taille  $m \times n$  et  $rgA = m$  et le second membre des contraintes  $b$  est une matrice colonne de taille  $m$ , le coût  $c$  est une matrice ligne de taille  $n$ .

Dans ce modèle, l'incertitude peut porter sur les coefficients de la fonction objectif  $c$ , les coefficients de second membres  $b$  et les coefficients de matrice des contraintes  $A$ .

Nous supposons que le modèle d'incertitude est un modèle par intervalle, c'est à dire qu'un coefficient incertain  $\alpha$  est représenté par intervalle de valeur  $[\bar{\alpha} - \alpha^*, \bar{\alpha} + \alpha^*]$  centré sur  $\bar{\alpha}$ , considérée comme une valeur nominale.

### 2.3.1 La robustesse selon le critère du pire cas

Le critère du pire cas peut être considéré comme étant le critère de référence en optimisation robustes, quand il s'agit de déterminer des solutions avant la réalisation des incertitudes. De manière générale, son application sur un problème incertain permet de déterminer la solution

optimale suivant le scénario le plus défavorable, la solution ainsi obtenue est robuste car elle offre une garantie absolue à toutes les éventualités pouvant se réaliser.

On considère le programme linéaire  $(P)$  suivant :

$$(P) \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.c} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

où  $x$  est une matrice colonne de taille  $n$  qui représente les variables du problème, la matrice des contraintes  $A$  est de taille  $m \times n$ , et le second membre des contraintes  $b$  est une matrice colonne de taille  $m$ , le coût  $c$  est une matrice ligne de taille  $n$ .

On suppose que  $(P)$  admet un ensemble non vide de solutions et un optimum borné, par la suite, on note  $v(P)$  la valeur de la solution optimale de  $(P)$ .

### 2.3.1.1 Incertitude sur les coefficients de la fonction objectif

Dans le problème  $(P)$ , on suppose que l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif avec, pour tout  $j = 1, \dots, n$ .  $\bar{c}_j - c_j^* \leq c_j \leq \bar{c}_j + c_j^*$ ,  $c_j^* \geq 0$ .

Notons  $\Lambda$  l'ensemble d'incertitude représenté par le produit cartésien des intervalles :  $[\bar{c} - c^*, \bar{c} + c^*]$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Nous définissons un scénario comme étant une réalisation de l'incertitude dans le domaine  $\Lambda$  et notons  $v^*(P^c)$  la valeur de l'optimum pour le scénario  $c$  fixé.

Dans la plupart des études, l'objectif est de déterminer une solution, qualifiée de robuste, avant de connaître les vraies valeurs des paramètres incertains, avec la seule indication que ces derniers varient dans un domaine d'incertitude préalablement défini. Une solution robuste doit alors présenter une certaine "garantie" sur tous ou la plupart des scénarios pouvant se réaliser.

#### ► Le critère du pire cas

Le critère du pire cas peut être considéré comme étant le critère de référence en optimisation robuste, quand il s'agit de déterminer des solution avant la réalisation des incertitudes. De manière générale, son application sur un problème incertain permet de déterminer la solution optimale suivant le scénario le plus défavorable. La solution ainsi obtenue est robuste car elle offre une garantie absolue à toutes les éventualités pouvant se réaliser.

Appliquer le critère du pire cas revient à évaluer une solution  $x$  en retenant le scénario qui lui sera le plus défavorable, soit :

$$f_c(x) = \max_{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^*} cx$$

Cette valeur  $f_c(x)$  constitue une garantie absolue sur la valeur de  $x$  puisque quel que soit le scénario qui se réalisera, la valeur de  $x$  sera inférieure ou égale à  $f_c(x)$ . C'est en ce sens que  $f_c(x)$  constitue une mesure de robustesse.

Rechercher une solution optimisant le critère du pire cas lorsque l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, revient à résoudre le problème noté  $(P_{\text{pireCas}}^c)$  dans lequel il s'agit de déterminer, parmi toutes les solutions  $x$  réalisables, celle qui minimise  $f_c(x)$ , soit :

$$v(P_{pirCas}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \max_{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^*} cx$$

Or, comme  $x \geq 0$ , le scénario du pire cas correspond à  $c = \bar{c} + c^*$ . Par conséquent,

$$v(P_{pirCas}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\bar{c} + c^*)x$$

qui n'est autre que le programme linéaire initial dans lequel les coefficients de la fonction objectif sont à leur plus grande valeur.

**Remarque 1.** Même si l'on ne fait pas l'hypothèse des  $x \geq 0$ , en passant par la dualité, on retrouve un programme linéaire pour définir le problème du pire cas. En effet, pour un  $x$  fixé le problème :

$$\begin{cases} \max & cx \\ \text{s.c} & \\ & c \leq \bar{c} + c^* \\ & -c \leq -(\bar{c} - c^*). \end{cases}$$

admet une solution optimale finie dont la valeur est égale à celle du dual, à savoir :

$$\begin{cases} \min & (\bar{c} + c^*)u - (\bar{c} - c^*)v \\ \text{s.c} & \\ & u - v = x \\ & u, v \geq 0. \end{cases}$$

On peut ré-exprimer le problème du pire cas de la façon suivante :

$$v(P_{pirCas}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \min_{\substack{u-v=x \\ u, v \geq 0}} (\bar{c} + c^*)u - (\bar{c} - c^*)v$$

Ce qui est équivalent au programme linéaire :

$$(P_{pirCas}^c) \begin{cases} \min & (\bar{c} + c^*)u - (\bar{c} - c^*)v \\ \text{s.c} & \\ & u - v = x \\ & Ax \geq b \\ & u, v \geq 0. \end{cases}$$

On notera que si l'on remplace  $u$  par son expression en fonction de  $x$  et  $v$  on obtient :

$$(P_{pirCas}^c) \begin{cases} \min & (\bar{c} + c^*)x - 2c^*v \\ \text{s.c} & \\ & Ax \geq b \\ & x + v \geq 0 \\ & u \geq 0. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où  $x \geq 0$ , on aura  $v = 0$  à l'optimum et on retrouve naturellement le scénario du pire cas.

**Exemple 6.** Soit le programme linéaire  $(P^c)$  suivant :

$$(P^c) \begin{cases} \min & c_1x + c_2y \\ \text{s.c} & \\ & -x + 3y \leq 4 \\ & 3x + 2y \geq -4 \\ & -5x + 2y \leq -6 \\ & x, y \geq 0. \end{cases}$$

Les coefficients  $(c_1, c_2)$  de la fonction objectif sont incertains et peuvent prendre n'importe quelle valeur dans les intervalles suivants :  $c_1 \in [-3, 3]$  et  $c_2 \in [1, 3]$ .

la solution robuste selon le critère du pire cas pour le problème  $(P^c)$  s'obtient par la résolution du programme linéaire  $(P_{\text{pirCas}}^c)$  s'écrivant :

$$(P_{\text{pirCas}}^c) \begin{cases} \min & 3u_1 + 3u_2 + 3v_1 - v_2 \\ \text{s.c} & \\ & u_1 - v_1 - x = 0 \\ & u_2 - v_2 - y = 0 \\ & -x + 3y \leq 4 \\ & 3x + 2y \geq -4 \\ & -5x + 2y \leq -6 \\ & u_1, v_1, u_2, v_2 \geq 0. \end{cases}$$

La solution robuste selon le critère du pire cas est  $x_{\text{pirCas}}^* = (0, 2)$  de valeur égale à  $-2$ , elle se réalise pour tous les scénarios  $(c_1, 1)$  où  $c_1 \in [-3, 3]$ . En adoptant la solution  $x_{\text{pirCas}}^*$ , le décideur est sûr de garantir un coût égal à  $-2$  dans le pire cas. La figure illustre le domaine des solutions réalisables du problème  $(P^c)$ . Nous remarquons que  $x_{\text{pirCas}}^*$  ne se situe pas sur un point extrême du domaine des solutions réalisables du problème  $(P_{\text{pirCas}}^c)$ .

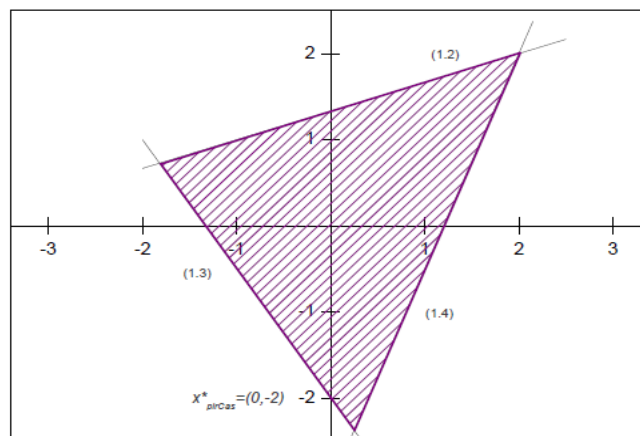


FIGURE 2.1 – Domaine des solutions réalisables du problème  $(P_{\text{pirCas}}^c)$

**Propriétés 1.** [Averbakh et Lebedev] (2005)

L'application du critère du pire cas sur un programme linéaire, dont les coefficients coûts sont incertains et appartiennent à des intervalles, est un problème polynomiale.



$(P_{pirCas}^c)$  est la version robuste de  $(P)$  lorsque le critère du pire cas est considéré, à l'inverse du critère du pire cas, on peut s'intéresser au critère du meilleur cas qui, s'il s'avère peu pertinent en terme de robustesse d'une solution, permet cependant de déterminer la meilleure solution atteignable, et donc, de mesurer la "distance" entre le pire et le meilleur cas.

► **Le critère du meilleur cas**

Appliquer le critère du meilleur cas revient à évaluer une solution  $x$  en retenant le scénario qui lui sera le plus favorable, soit :

$$f_b(x) = \min_{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^*} cx$$

Rechercher une solution optimisant le critère du meilleur cas lorsque l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, revient à résoudre le problème noté  $(P_{meilCas}^c)$  dans lequel il s'agit de déterminer, parmi toutes les solutions  $x$  réalisables celle qui minimise  $f_b(x)$ , soit :

$$v(P_{meilCas}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \min_{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^*} cx$$

Or, comme  $x \geq 0$ , le scénario du meilleur cas correspond à  $c = \bar{c} - c^*$ . Par conséquent,

$$v(P_{meilCas}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\bar{c} - c^*)x$$

qui n'est autre que le programme linéaire initial dans lequel les coefficients de la fonction objectif sont à leur plus petite valeur.

**Remarque 2.** Si l'on fait pas l'hypothèse des  $x \geq 0$ , le problème du meilleur cas revient au problème quadratique ci-dessous :

$$(P_{meilCas}^c) \left\{ \begin{array}{l} \min cx \\ s.c \\ Ax \geq b \\ c \leq \bar{c} + c^* \\ -c \leq -(\bar{c} - c^*). \end{array} \right.$$

Averbakh et Lebedev, ont montré aussi, que le problème  $(P_{meilCas}^c)$  est NP-difficile.

En optimisation combinatoire, le critère du pire cas est utilisé dans de nombreuses applications, citons : Le problème de l'arbre couvrant (traité par Yaman et al(2001)), le problème du plus court chemin robuste (traité par Yu et Yong (1998)), le problème de sac à dos robuste (Yu (1996) et Maniguchi et al (2008)).

**2.3.1.2 Incertitude sur le second membre des contraintes**

On parle maintenant de la détermination de décisions robustes pour des programmes linéaires dont le second membre des contraintes est incertain, nous nous situons dans un contexte décisionnel où la décision doit être prise avant la réalisation de l'incertain.

Dans ce cas, nous cherchons des solutions robustes qui, selon l'approche de Soyster (1973) doivent être des solutions réalisables quel que soit le scénario qui se produit. La détermination

de telles solutions dépend de la nature des contraintes du problème. En effet, nous rappelons que lorsque le problème admet des contraintes d'égalité, il n'existe pas de solution réalisable sur tous les scénarios, en effet, chaque scénario définissant un ensemble unique de solution réalisables, il s'en suit que pour toute solution, il existe au moins un scénario pour lequel cette solution n'est pas réalisable, et il n'existe pas de solution réalisable sur tous les scénarios.

Il n'y a donc pas de décision de pire cas, puisque il n'est pas possible de discriminer une solution d'une autre.

Nous séparons alors notre étude en deux parties : nous traiterons en premier les programmes linéaires contenant des contraintes d'inégalité, puis nous emploierons un modèle de pénalités pour traiter les programmes linéaires avec contraintes d'égalité.

### Programmes linéaires avec contraintes d'inégalité

Dans le problème  $(P)$ , on suppose que l'incertitude porte maintenant sur les second membres des contraintes, soit, pour tout  $i = 1, \dots, m$ .  $\bar{b}_i - b_i^* \leq b_i \leq \bar{b}_i + b_i^*$ ,  $b_i^* \geq 0$ .

#### ► Le critère du pire cas

Soit le problème linéaire suivant :

$$(P^b) \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.c} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

où  $x$  une matrice colonne de taille  $n$  représentant les variables du problème,  $c$  est une matrice ligne de taille  $n$ , la matrice des contraintes  $A$  est de dimension  $m \times n$  et de rang égal à  $m$ , et le second membre  $b$  est une matrice colonne de taille  $m$ .

Nous supposons que pour toute contrainte  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , le coefficient incertain  $b_i$  appartient à l'intervalle  $[\bar{b}_i - b_i^*, \bar{b}_i + b_i^*]$ , donc  $b_i^* \geq 0$ , notons  $B$  le produit cartésien des intervalles  $[\bar{b}_i - b_i^*, \bar{b}_i + b_i^*]$ , pour  $i = 1, \dots, m$ .

Tout d'abord, énonçons quelques définitions. Pour tout scénario  $b$  dans  $B$  nous définissons l'ensemble :

$$X^b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

comme étant le domaine des solutions réalisables de  $(P^b)$ . Nous supposons que le polyèdre  $X^b$  est non vide pour tout  $b$ .

L'incertitude porte maintenant sur la réalisabilité même d'une solution, un scénario  $b$  est défavorable à une solution  $x$  lorsque  $x$  n'appartient pas à l'ensemble des solutions réalisables défini par :  $X^b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ . Aussi, pour une solution  $x$  donnée, deux cas de figure sont à considérer :

- Si  $x$  est réalisable pour tous les scénarios, autrement dit pour toutes les valeurs possibles de  $b$  et dans ce cas,  $v(b, x) = cx$  indépendamment de la valeur de  $b$ .

• Si il existe au moins une valeur de  $b$  pour laquelle  $x$  n'est pas réalisable et, dans ce cas,  $v(b, x)(x) = +\infty$ .

Comme on cherche à minimiser  $v(b, x)$ , les solutions qui ont pour évaluation  $+\infty$  ne pourront être optimales, et la solution optimale se trouve donc parmi celles qui sont réalisables sur tous les scénarios.

Compte tenu de la forme des contraintes, l'ensemble des solutions réalisables qui résiste sur tous les scénarios est :  $\underline{X}^b = \bigcap_{b \in B} X^b \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq \bar{b} + b^*, x \geq 0\}$ , par conséquent, rechercher une solution optimisant le critère du pire cas lorsque l'incertitude porte sur les second membres des contraintes sur le scénario qui définit le plus petit domaine réalisable.

Après avoir défini le domaine d'incertitude du problème, calculons une solution robuste de pire cas associée au problème  $(P^b)$ . Il s'agit de déterminer la solution qui possède la meilleure évaluation dans le scénario de pire cas. Le problème robuste, noté  $(P^b)_{pirCas}$ , s'écrit :

$$(P^b_{pirCas}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in X^b} \max_{b \in B} v(b, x) \end{array} \right.$$

Soit  $x$  une solution appartenant à  $\underline{X}^b$ . Nous observons que l'évaluation de  $x$  est constante quel que soit le scénario  $b \in B$ . Par conséquent, la pire évaluation de  $x$  est égale à :

$$\max_{b \in B} v(b, x) = cx$$

Par ailleurs, la pire évaluation de toute autre solution qui n'appartient pas à  $\underline{X}^b$  est égale à  $+\infty$  (car elle est non réalisable sur le scénario  $b$ ). Par conséquent, la solution robuste selon le critère du pire cas appartient nécessairement à  $\underline{X}^{\bar{b}+b^*}$ .

En rappelant que  $\underline{X}^b$  n'est autre que  $X^{\bar{b}+b^*}$ , nous déduisons que la solution robuste de pire cas de  $(P^b)$  s'obtient par la résolution du programme linéaire admettant le plus petit domaine réalisable. Revient à résoudre le programme linéaire, noté  $(P^b_{pirCas})$  :

$$(P^b_{pirCas}) \left\{ \begin{array}{l} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} + b^* \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

**Exemple 7.** Soit le problème linéaire suivant :

$$(P^b) \left\{ \begin{array}{l} \min 4x_1 + x_2 \\ \text{s.c} \\ x_1 + 2x_2 \geq b_1 \\ x_1 - x_2 \geq b_2 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

avec l'incertitude portant sur les second membres des contraintes :  $b_1 \in [1, 5]$  qui correspond à  $\bar{b}_1 = 3$ ,  $b_1^* = 2$  et  $b_2 \in [2, 4]$  qui correspond à  $\bar{b}_2 = 1$ ,  $b_2^* = 3$  citons que nous avons notée  $\bar{b}_i$  qui représente la valeur nominale.

En utilisant le critère du pire cas, la version robuste du problème ( $P^b$ ) est donc :

$$(P_{\text{pirCas}}^b) \begin{cases} \min 4x_1 + x_2 \\ \text{s.c} \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ x_1 - x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

qui admet comme solution optimale :  $x_{w1} = \frac{13}{3}$  et  $x_{w2} = \frac{1}{3}$  et  $v(P_w^b) = \frac{53}{3}$ .

La solution optimale de ( $P_{\text{pirCas}}^b$ ) est jugée robuste dans le sens où elle est réalisable quel que soit le scénario pouvant se réaliser.

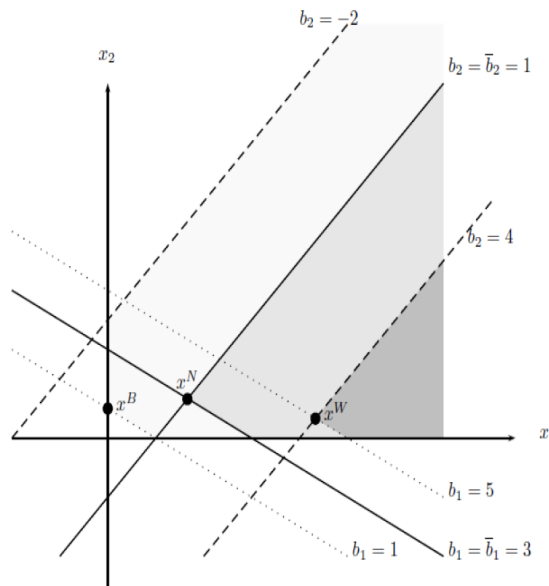


FIGURE 2.2 – Les différents scénarios

Nous remarquons, sur la figure 2.2, que cette solution est réalisable quel que soit le scénario  $(b_1, b_2)$  se réalisant.

Par contre, elle a un coût important, puisque la valeur de la solution  $x_{n1} = 5/3$  et  $x_{n2} = 2/3$  du problème nominal (dans lequel  $b_1 = \bar{b}_1$  et  $b_2 = \bar{b}_2$ ) est de  $22/3$ , alors que la solution robuste au sens du critère du pire cas, a pour valeur  $53/3$ , la solution optimale de ( $P_{\text{pirCas}}^b$ ) est jugée robuste dans le sens où elle est réalisable quel que soit le scénario pouvant se réaliser.

En contrepartie, elle risque d'être beaucoup plus mauvaise que la meilleure solution atteignable (sur au moins un scénario). Et afin de mesurer cette détérioration, on peut utiliser le critère du meilleur cas.

#### ► Critère du meilleur cas

Cette fois, pour toute solution  $x$  réalisable sur au moins un scénario  $b$  dans  $[\bar{b} - b^*, \bar{b} + b^*]$  sa meilleure valeur sera  $cx$  car :

$$f_{\text{bes}} = \min(cx, +\infty)$$

Il faut donc chercher la solution optimale sur l'union des ensembles de solutions réalisables définie par :  $\bar{X}^b = \bigcup_{b \in B} X^b \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq \bar{b} - b^*, x \geq 0\}$ . Par conséquent, le problème du meilleur cas avec incertitude sur les second membres des contraintes, notée  $(P_{meilCas}^b)$  est le programme linéaire :

$$(P_{meilCas}^b) \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} - b^* \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Reprenons le programme linéaire de l'exemple précédent, Si l'on applique le critère du meilleur cas, le problème à résoudre est :

$$(P_{meilCas}^b) \begin{cases} \min 4x + y \\ \text{s.c} \\ x + 2y \geq 1 \\ x - y \geq -2 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

qui admet comme solution optimale :  $x_{b1} = 0, x_{b2} = 1/2$  de valeur  $v(P_{meilCas}^b) = 1/2$ .

Cette valeur est la meilleur solution atteignable en considérant l'ensemble des scénarios pouvant se réaliser, ainsi, la valeur de toute solution optimale est comprise dans l'intervalle  $[1/2, 53/3]$ .

### Programmes linéaires avec contraintes d'égalité : modèle de pénalités

Dans cette section, nous nous intéressons aux programmes linéaires dans lesquels les contraintes sont exclusivement des égalités.

En premier, nous montrerons (à l'aide d'un exemple) que la détermination d'une solution robuste réalisable sur tous les scénarios est non pertinente.

Puis, nous proposerons un modèle, dit modèle de pénalités, pour lequel il sera possible de décider des solutions robustes de pire cas.

Soit un programme linéaire de minimisation contenant exclusivement des contraintes d'égalité, qu'on notera  $(P_{=}^b)$  :

$$(P_{=}^b) \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Sachant que  $x$  est une matrice colonne de taille  $n$  des variables du problème, la matrice ligne  $c$  est de taille  $n$ , la matrice des contraintes  $A$  est de dimension  $m \times n$  et le second membre  $b$  est une matrice colonne de taille  $m$ .

Cette dernière est incertaine : chaque coefficient  $b_i$  de la  $i^{eme}$  contrainte varie dans l'intervalle  $[\bar{b}_i - b_i^*, \bar{b}_i + b_i^*], i = 1, \dots, m$ .

Notons  $B$  le produit cartésien des intervalles,  $[\bar{b}_i - b_i^*, \bar{b}_i + b_i^*]. i = 1, \dots, m$ . Pour tout scénario  $b$  dans  $B$ , notons :

$$X_{=}^b = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

Comme étant le domaine des solutions réalisables de  $(P_{=}^b)$ , le polyèdre  $X_{=}^b$  est supposé non vide pour tout vecteur  $b$ .

De plus, notons  $v^*(P_{\underline{=}}^b)$  la valeur (que nous supposons finie) de l'optimum du problème  $(P_{\underline{=}}^b)$  pour un scénario  $b$  fixé dans  $B$ .

Par ailleurs, pour tout vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , nous définissons la valeur de  $x$  pour le problème  $(P_{\underline{=}}^b)$ , notée  $v_{\underline{=}}(b, x)$  comme suit :

$$v_{\underline{=}}(b, x) = \begin{cases} cx & \text{si } x \in X_{\underline{=}}^b \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, nous définissons  $\bar{X}_{\underline{=}}$  l'ensemble des solutions réalisables de  $(P_{\underline{=}}^b)$  pour au moins un scénario  $b$  :

$$\bar{X}_{\underline{=}} = \bigcup_{b \in B} X_{\underline{=}}^b$$

Afin d'illustrer la spécificité de  $(P_{\underline{=}}^b)$  par rapport à  $(P_{\underline{\geq}}^b)$  considérons l'exemple suivant : Soit le problème incertain  $(P^b)$  :

$$(P_{\text{meilCas}}^b) \begin{cases} \min & 5x_1 - 10x_2 \\ \text{s.c} & \\ & x_1 + 2x_2 = b_1 \\ & -x_1 + x_2 = b_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

où les contraintes sont des égalités et le second membre est incertain avec  $b_1 \in [9, 14]$  et  $b_2 \in [2, 8]$ .

L'ensemble, noté  $\bar{X}(P^b)$ , représentant l'union de toutes les solutions réalisables, s'écrit :

$$\bar{X}^b = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid 9 \leq x_1 + 2x_2 \leq 14, 2 \leq -x_1 + x_2 \leq 8\}$$

Soit  $x' = (x'_1, x'_2) = (2, 4) \in \bar{X}(P^b)$ , nous remarquons que cette solution est réalisable sur un seul scénario :  $b'_1 = 10$  et  $b'_2 = 6$ , il s'en suit que la pire évaluation de  $x'$  sur tous les scénarios possibles est :

$$\max_{b \in B} v_{\underline{=}}(b, x') = +\infty$$

Cette observation étant valide pour toute solution dans  $X(P^b)$ , il n'est plus possible de discriminer une solution d'une autre solution.

La décision de pire cas qu'on choisirait, avant la réalisation des incertitudes, pour se prémunir contre tous les scénarios possibles n'existe pas.

Dans ce qui suit, nous proposons une alternative qu'il est possible d'employer dans certains contextes de décisions. Dans cette approche l'objectif est de limiter la distance à la réalisabilité d'une solution et cela en intégrant dans le modèle des pénalités de violation des contraintes.

Supposons, en effet, que la non satisfaction d'une contrainte d'égalité puisse être traduite par un sur-coût connu, que le décideur accepte de payer. Il est alors possible d'évaluer le coût d'une solution (son coût réel auquel s'ajoutent des pénalités) sur tous les scénarios et par conséquent il devient envisageable de déterminer la décision la " moins irréalisable ".

Formellement, nous employons un modèle, dit de pénalités, où la non satisfaction de toute contrainte  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$  du problème initial  $(P_{\underline{=}}^b)$  est mesurée par une nouvelle variable  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  telle que :

$$e_i = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)$$

et l'évaluation d'une solution  $x \in \bar{X}_=$  pour le scénario  $b$  est définie par :

$$v_p^b(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \max(p_i e_i, -q_i e_i)$$

où  $p_i$  et  $q_i$  sont des pénalités positives relatives à  $e_i \geq 0$  et  $e_i \leq 0$  respectivement.

La pire évaluation de la solution  $x$  sur tous les scénarios n'est plus infinie mais se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \max_{b \in B} v_p^b(x) &= \max_{b \in B} \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \max(p_i e_i, -q_i e_i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \max_{b \in B} \left\{ \sum_{i=1}^m \max \left( p_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right), q_i \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \max_{b_i \in [\bar{b}_i - b_i^*, \bar{b}_i + b_i^*]} \left\{ \max \left( p_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right), q_i \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \max \left( p_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - (\bar{b}_i - b_i^*) \right), q_i \left( (\bar{b}_i + b_i^*) - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \right). \end{aligned}$$

Sachant évaluer toute solution sur n'importe quel scénario, nous pouvons calculer la solution robuste de pire cas. Celle-ci s'obtient par la résolution du problème noté  $(P_{pirCas}^b)$  qui s'écrit :

$$(P_{pirCas}^b) \left\{ \min_{x \geq 0} \max_{b \in B} v_p^b(x) \right.$$

Ce problème se simplifie en un programme linéaire comme suit :

$$(P_{pirCas}^b) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.c} \\ y_i - p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -p_i (\bar{b}_i - b_i^*) \quad i = 1, \dots, m \\ y_i + q_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq q_i (\bar{b}_i + b_i^*) \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

Reprenons maintenant le programme linéaire incertain  $(P_{=}^b)$  que nous ne pouvons traiter au préalable, nous considérons que la non satisfaction de chacune des contraintes d'égalité engendre les pénalités suivantes :  $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 100$ , alors suivant le modèle de pénalités présenté

ci dessus, la solution robuste de pire cas s'obtient par la résolution du problème :

$$(P_{pirCas}^b) \left\{ \begin{array}{l} \min 5x_1 - 10x_2 + y_1 + y_2 \\ \text{s.c} \\ y_1 - 100x_1 - 200x_2 \geq -900 \\ y_1 + 100x_1 + 200x_2 \geq 1400 \\ y_2 + 100x_1 - 100x_2 \geq -200 \\ y_2 - 100x_1 + 100x_2 \geq 800 \\ x_1, x_2, y \geq 0. \end{array} \right.$$

La solution optimale est  $x_{pr}^* = (3.25, 4.125, 250, 300)$  de valeur égal a 525.

La figure 2.3 illustre la projection de la solution  $x_{pr}^*$  sur l'espace à deux dimensions formé par les variables  $x_1$  et  $x_2$ , nous remarquons que cette solution correspond à la solution du problème selon le scénario correspondant à  $b_1 = 11.5$  et  $b_2 = 5$ , qui n'est autre que  $(\bar{b}_i)$  pour les contrainte  $i = 1, 2$ .

Nous observons, qu'étant donné des pénalités égales et de valeurs bien plus élevées que les coûts du vecteur  $c$ , le scénario de pire cas est constitué des valeurs du second membre qui se situent au milieu des intervalles, en effet, ce scénario est celui qui engendre le plus faible coût de pénalités de non satisfaction des contraintes d'égalité.

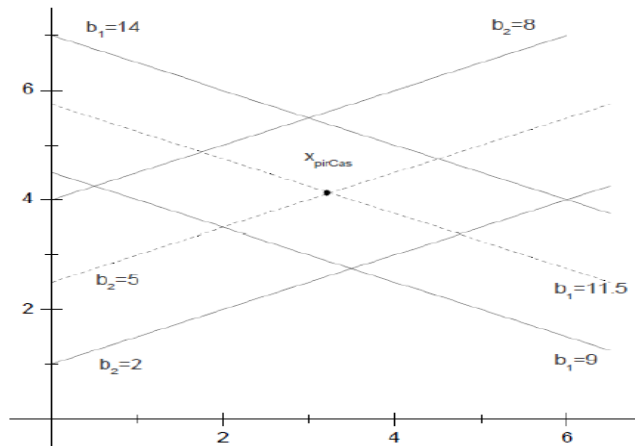


FIGURE 2.3 – Solution optimal suivant le critère du pire cas modèle de pénalité

### Second contexte décisionnel : pire et meilleur optimaux

Nous considérons à présent des problèmes incertains s'inscrivant dans un autre contexte de décision, où l'incertitude est levée au moment de la prise de décision. Dans ce cas, le décideur est capable de choisir la meilleure solution étant donnée la réalisation de l'aléa. Il n'y a pas lieu de déterminer de décision robuste de pire cas. Cependant, afin de préparer la prise de décision à venir, notamment pour des besoins de planification, il peut être profitable au décideur de calculer les coûts des différentes solutions qu'il pourrait être amené à choisir. Nous proposons alors de calculer deux valeurs extrêmes de l'optimum : la plus grande valeur, nommée pire optimum et la plus petite, nommée meilleur optimum. Ainsi, nous exhiberons d'une part l'intervalle de variation des valeurs des solutions optimales, et d'autre part les scénarios extrêmes se réaliser.



Le calcul du pire et du meilleur optimum sont des notions relativement récentes dans la littérature (voir Alefeld et Herzberger (1983), Mráz (1998), Chinneck et Ramadan (2000), Fiedler et al. (2006), Hladik). Dans ces travaux, sont traités des programmes linéaires dans lesquels tous les coefficients du problème sont potentiellement incertains et représentés par des intervalles. Compte tenu de ces incertitudes, il s'agit de calculer les deux valeurs extrêmes de l'optimum : la plus grande valeur et la plus petite valeur. Dans la section suivante, nous calculerons ces deux valeurs dans le cas de programmes linéaires où seuls les coefficients du second membre sont incertains. Nous étudierons également la complexité des problèmes engendrés.

### ► Calcul du pire optimum

La valeur du pire optimum dans le cas du problème  $(P_{\geq}^b)$  est la plus grande évaluation d'une solution optimale (dans le cas d'un problème de minimisation) parmi toutes les solutions optimales selon les différents scénarios possibles. Son calcul s'obtient par la résolution du problème :

$$(P_{\geq}^b)_{pirOpt} \left\{ \begin{array}{l} \max_{b \in B} v^*(P_{\geq}^b) \end{array} \right.$$

où  $v^*(P_{\geq}^b)$  est la valeur de la solution optimale du problème  $(P_{\geq}^b)$  lorsque le scénario  $b$  est réalisé.

**Proposition 1.** *Le calcul du pire optimum d'un programme linéaire avec des contraintes d'inégalité, où le second membre des contraintes est incertain et appartenant à des intervalles est un problème polynomial. Il est donné par la valeur de la solution optimale du programme linéaire suivant :*

$$(P_{\geq}^b)_{pirOpt} \equiv (P_{\geq}^{\bar{b}+b^*}) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} + b^* \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

**Preuve 1.** *Compte tenu du sens des contraintes dans  $(P_{\geq}^b)$ , il est clair que le domaine réalisable  $X_{\geq}^{\bar{b}+b^*}$  pour le scénario  $\bar{b} + b^*$  est inclus dans tout autre domaine réalisable  $X_{\geq}^b$ , où  $b$  est un scénario quelconque dans  $B$ . Par conséquent, la relation  $v^*(P_{\geq}^b) \leq v^*(P_{\geq}^{\bar{b}+b^*})$  est vérifiée pour tout  $b \in B$ . Ceci implique que la valeur du pire optimum pour le problème  $(P_{\geq}^b)$  est la valeur de la solution optimale du programme linéaire  $(P_{\geq}^{\bar{b}+b^*})$ .*

Nous pouvons retrouver ce résultat en adoptant le raisonnement suivant. Rappelons que, pour tout scénario  $b$  dans  $B$ , le problème  $(P_{\geq}^b)$  est réalisable, et son optimum est atteint en une valeur finie. Selon le théorème fort de la dualité, il est possible de remplacer le problème de minimisation dans l'écriture de  $(P_{\geq}^b)_{pirOpt}$  par son dual. Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{b \in B} \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} b^t y \end{array} \right.$$

Ce problème se simplifie en remarquant que les variables  $y$  sont non négatives, et revient à résoudre le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad (\bar{b} + b^*)^t y \\ \text{s.c} \\ A^t y = c^t \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

qui, en appliquant de nouveau le théorème fort de la dualité, est équivalent à :

$$(P_{\geq}^{\bar{b}+b^*}) \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} + b^* \\ x \geq 0. \end{cases}$$

**Remarque 2.** Le calcul d'une solution de pire cas pour  $(P_{\geq}^b)$  coïncide avec le calcul d'un pire optimum pour le même problème. En effet, pour le problème linéaire incertain  $(P_{\geq}^b)$ , la valeur de la solution robustes de pire cas est le pire optimum. Ces deux problèmes sont équivalents au programme linéaire défini selon le scénario qui décrit le plus petit domaine réalisable  $X_{\geq}^{\bar{b}+b^*}$ .

### ► Calcul du meilleur optimum

La valeur du meilleur optimum associé au problème  $(P_{\geq}^b)$  représente la valeur la plus favorable (dans le cas d'une minimisation, c'est la plus faible) d'une solution optimale sur tous les scénarios  $b$  dans  $B$ . Cette valeur, associée à celle d'un pire optimum, forment les bornes de l'intervalle de variation de l'optimum du problème incertain  $(P_{\geq}^b)$ . Le meilleur optimum se calcule comme suit :

$$(P_{\geq}^b)_{\text{meiOpti}} \begin{cases} \min_{b \in B} v^*(P_{\geq}^b) \end{cases}$$

où  $v^*(P_{\geq}^b)$  est la valeur de la solution optimale du problème  $(P_{\geq}^b)$  lorsque le scénario  $b$  est réalisé.

**Proposition 2.** Le meilleur optimum pour le programme linéaire  $(P_{\geq}^b)$  correspond à la valeur de la solution optimale du problème selon le scénario qui décrit le plus grand domaine réalisable. Cette valeur s'obtient en résolvant le programme linéaire suivant :

$$(P_{\geq}^b)_{\text{meiOpti}} \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} - b^* \\ x \geq 0. \end{cases}$$

**Preuve 2.** Rappelons que le domaine réalisable  $X_{\geq}^b$  pour tout scénario  $b \in B$  vérifie  $X_{\geq}^b \subseteq X_{\geq}^{\bar{b}-b^*}$ . Par conséquent, la relation  $v^*(P_{\geq}^{\bar{b}-b^*}) \leq v^*(P_{\geq}^b)$  est vraie pour tout  $b \in B$ . Il en résulte que la valeur du meilleur optimum s'obtient en résolvant le programme linéaire  $(P_{\geq}^{\bar{b}-b^*})$ .

### 2.3.2 La robustesse selon le critère du regret

Le critère de regret maximum a été introduit par Savage (1954) et Luce et Raiffa (1957)[22]. C'est le critère le plus étudié et le plus utilisé en théorie de la décision, lorsque la fonction objectif ou sur le second membre des contraintes d'un programme linéaire est incertaine et la décision doit être prise avant la réalisation de l'incertain. Par définition, le regret est le sentiment de perte ressenti par un décideur après avoir appris qu'une autre solution (ou décision) aurait été préférable à celle sélectionnée. En programmation mathématique, le regret est souvent associé à la notion de robustesse. En effet, la solution robuste obtenue par l'application de ce critère est celle dont le plus grand écart par rapport aux valeurs optimales sur tous les scénarios est le plus faible.

### 2.3.2.1 Incertitude sur les coefficients de la fonction objectif

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'application du critère du regret maximum sur un programme linéaire, dont les coefficients de la fonction objectif sont incertains. Les premiers travaux sont ceux de Shimizu et Aiyoshi (1980) qui, comme nous le verrons dans ce qui suit, proposent un algorithme pour résoudre ce problème robuste.

Dans le problème  $(P)$ , on suppose que l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif avec,  $\bar{c} - c^* \leq c \leq \bar{c} + c^*$ ,  $c^* \geq 0$ .

Pour une solution  $x$  et un scénario  $c$ , le regret, noté  $reg(x, c)$ , se définit comme la différence entre la valeur de la solution  $x$  pour le scénario  $c$  et la valeur de la solution optimale pour le scénario  $c$  :

$$reg(x, c) = cx - \min_{\substack{Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy$$

Il s'agit ici de mesurer le manque à gagner d'avoir fait le choix de  $x$  pour le scénario  $c$ . Évaluer une solution  $x$  selon le critère du regret consiste, à évaluer  $x$  selon le plus grand regret qu'elle puisse engendrer, à savoir :

$$f_{reg}(x) = \max_{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^*} (cx - \min_{\substack{Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy) = \max_{\substack{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^* \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} c(x - y)$$

Averback et Lebedev ont montré que le problème de calculer  $f_{reg}(x)$  pour une solution  $x$  fixée est NP-difficile.

Selon le critère du regret maximum, la version robuste de  $(P)$  consiste à résoudre le problème  $(P_R^c)$  ci-dessous :

$$v(P_R^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \max_{\substack{\bar{c}-c^* \leq c \leq \bar{c}+c^* \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} c(x - y)$$

Inuiguchi et sakawa montrent que, pour la résolution de  $(P_R^c)$ , il n'est pas nécessaire de considérer tout l'intervalle de variation possible sur les  $c$ , mais il suffit de considérer uniquement les valeurs extrêmes de l'intervalle. Un scénario  $(c_1, \dots, c_n)$  est extrême  $\forall j = 1, \dots, n$ , on a  $c_j = \bar{c}_j + c_j^*$  ou  $c_j = \bar{c}_j - c_j^*$ . On note  $S$  l'ensemble des  $2^n$  scénarios extrêmes. Ainsi, on a :

$$v(P_R^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \max_{\substack{c \in S \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} c(x - y)$$

Or, pour un scénario  $c$  il est facile de calculer la solution optimale notée  $y^c$  correspondante. Il est alors possible de linéariser  $(P_R^c)$  en introduisant une nouvelle variable, que nous noterons  $r$ , et autant de contraintes qu'il n'y a de scénarios extrêmes. Nous obtenons alors :

$$(D_R^c) \left\{ \begin{array}{l} \min r \\ \text{s.c} \\ r \geq c(x - y^c) \quad \forall c \in S \\ Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

**Exemple 8.** Reprenons le problème de l'exemple ( $P^b$ ), et examinons son dual dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, dans ce cas, sous le critère du regret maximum, la version robuste du dual devient :

$$v(D_R^c) = \min_{\substack{x_1+x_2 \leq 4 \\ 2x_1-x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0}} \max_{\substack{-2 \leq c_1 \leq 4 \\ 1 \leq c_2 \leq 5 \\ y_1+y_2 \leq 4 \\ 2y_1-y_2 \leq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0}} c_1(x_1 - y_1) + c_2(x_2 - y_2)$$

Considérons l'ensemble des scénarios extrêmes :

- Pour  $c = (1, -2)$  la solution optimale du dual est  $(1/2, 0)$  de valeur  $1/2$ .

Toute solution  $(x_1, x_2)$  va donc induire un regret de  $1/2 - x_1 + 2x_2$  pour ce scénario extrême.

- Pour  $c = (1, 4)$  la solution optimale du dual est  $(0, 4)$  de valeur  $16$ .

Toute solution  $(x_1, x_2)$  va donc induire un regret de  $16 - x_1 - 4x_2$  pour ce scénario extrême.

- Pour  $c = (5, -2)$  la solution optimale du dual est  $(5/3, 7/3)$  de valeur  $11/3$ .

Toute solution  $(x_1, x_2)$  va donc induire un regret de  $11/3 - 5x_1 + 2x_2$  pour ce scénario extrême.

- Pour  $c = (5, 4)$  la solution optimale du dual est  $(5/3, 7/3)$  de valeur  $53/3$ .

Toute solution  $(x_1, x_2)$  va donc induire un regret de  $53/3 - 5x_1 - 4x_2$  pour ce scénario extrême.

Le regret maximum, représenté par la variable  $r$  devra donc être plus grand que chacun de ces regrets, et par conséquent :

$$(D_R^c) \left\{ \begin{array}{l} \min r \\ \text{s.c} \\ r \geq 1/2 - x_1 + 2x_2 \\ r \geq 16 - x_1 - 4x_2 \\ r \geq 11/3 - 5x_1 + 2x_2 \\ r \geq 53/3 - 5x_1 - 4x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

La solution optimale de ce problème est  $x_1 = 17/12$ ,  $x_2 = 31/12$  et  $r = 17/4$ . Or, si l'on se place dans l'espace des solutions réalisables du dual, on constate que cette solution ne correspond pas à un sommet, mais est un point intérieur.

### 2.3.2.2 Incertitude sur le second membre des contraintes

Dans le problème ( $P$ ), on suppose que l'incertitude porte sur les second membres des contraintes, soit,  $\bar{b} - b^* \leq b \leq \bar{b} + b^*$ ,  $b^* \geq 0$ .

Pour calculer le regret d'une solution  $x$  pour un scénario  $b$ , il faut considérer 2 cas :

- Si  $x \in X^b$  alors,  $reg(x, b) = cx - \min_{\substack{Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy$
- Si  $x \notin X^b$  alors,  $reg(x, b) = +\infty$

Si on considère une solution  $x$  qui n'est pas réalisable sur tous les scénarios, alors

$$f_{reg}(x) = \max_{\bar{b}-b^* \leq b \leq \bar{b}+b^*} reg(x, b) = +\infty$$

Tout comme dans le critère du pire cas, la solution qui minimise  $f_{reg}(x)$  se trouve nécessairement parmi les solutions réalisables sur tous les scénarios : elle appartient donc à  $X^{\bar{b}+b^*}$

Dans ce cas,  $\forall x \in X^{\bar{b}+b^*}$  nous aurons :

$$f_{reg}(x) = \max_{\bar{b}-b^* \leq b \leq \bar{b}+b^*} \left( cx - \min_{\substack{Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy \right) = cx - \min_{\substack{\bar{b}-b^* \leq b \leq \bar{b}+b^* \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy = cx - \min_{\substack{Ay \geq \bar{b}-b^* \\ y \geq 0}} cy$$

Le problème, noté  $(P_R^b)$ , de déterminer la solution qui minimise  $f_{reg}(x)$  sera donc tel que :

$$\begin{aligned} v(P_R^b) &= \min_{x \in X^{\bar{b}+b^*}} f_{reg}(x) \\ &= \min_{x \in X^{\bar{b}+b^*}} \left( cx - \min_{\substack{Ay \geq \bar{b}-b^* \\ y \geq 0}} cy \right) \\ &= \min_{\substack{Ax \geq \bar{b}+b^* \\ x \geq 0}} cx - \min_{\substack{Ay \geq \bar{b}-b^* \\ y \geq 0}} cy \\ &= (P_{pirCas}^b) - (P_{meilCas}^b). \end{aligned}$$

En conséquence, la solution optimale selon le critère du regret maximum correspond exactement à la solution optimale selon le critère du pire cas. Les problèmes  $(P_{pirCas}^b)$  et  $(P_{meilCas}^b)$  étant des programmes linéaires, le problème  $(P_R^b)$  est d'une complexité similaire à celle de  $(P)$ . Aussi,  $(P_R^b)$  est un problème facile car équivalent à  $v(P_{pirCas}^b)$  alors que, dans le cas d'incertitude sur les coefficients de la fonction objectif,  $(P_R^c)$  est NP-difficile mais porte un autre point de vue sur la robustesse que celui du critère du pire cas.

De plus, les solutions optimales  $(P_R^c)$  pouvant être des solutions intérieures au polyèdre, le "transfert" de l'incertitude des coefficients de la fonction objectif vers les second membres des contraintes du problème dual ne peut être exploité.

### 2.3.3 La robustesse selon Bertsimas et Sim

#### 2.3.3.1 L'approche de Bertsimas et Sim pour les coefficients de la fonction objectif

Dans le problème  $(P)$  ci-dessous, on suppose que l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, soit pour tout  $j = 1, \dots, n$ .  $\bar{c}_j - c_j^* \leq c_j \leq \bar{c}_j + c_j^*$ ,  $c_j^* \geq 0$ .

$$(P) \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.c} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0. \end{cases}$$

Bertsimas et Sim considèrent que, pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,  $\bar{c}_j$  constitue une valeur nominale dont on risque de s'éloigner du fait des incertitudes. Considérer le critère du pire cas revient à décider dans un contexte où tous les paramètres vont simultanément dévier vers leur pire valeur.

L'approche de Bertsimas et Sim part du principe que les paramètres ne devraient pas tous dévier simultanément dans le mauvais sens : seul un sous-ensemble de paramètres, de cardinale maximale  $\Gamma_0$  avec  $(\Gamma_0 \leq n)$ , risque d'être modifié dans le pire des cas (sans que ce sous ensemble ne soit fixé a priori). Leur approche peut donc s'interpréter comme une généralisation du critère du pire cas (que l'on retrouve lorsque  $\Gamma_0 \leq n$ ).

Dans la version robuste selon Bertsimas et Sim, il s'agit de déterminer le sous ensemble de paramètres dont la perturbation détériorera le plus la valeur d'une solution, pour le problème  $(P)$  considéré, cela revient à calculer la plus forte augmentation de la valeur d'une solution sachant qu'au plus  $\Gamma_0$  coefficients de la fonction objectif vont dévier de leur valeur nominale  $\bar{c}_j$ , on On représente la déviation de  $c_j$  en introduisant une variable  $z_j$  définie par  $c_j = \bar{c}_j + z_j c_j^*$  avec  $-1 \leq z_j \leq 1$ .

Selon Bertsimas et Sim, la version robuste du programme linéaire  $(P)$ , notée  $(P_{wg}^c)$ , se définit comme suit :

$$v(P_{wg}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\bar{c}x + \max_{\substack{\sum_{j=1}^n |z_j| \leq \Gamma_0 \\ -1 \leq z_j \leq 1}} zc^*x)$$

où  $z = (z_i)_{i=1, \dots, n}$  est un vecteur ligne et  $C^*$  est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les  $c_i^*$ . Pour un  $x \geq 0$  fixé, une déviation qui détériore la fonction objectif est telle que  $z_j \geq 0$  et par conséquent, nous pouvons réécrire le problème de la façon suivante :

$$v(P_{wg}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\bar{c}x + \max_{\substack{\sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} zc^*x)$$

Pour un  $x$  fixé, l'ensemble des solutions réalisables sur les variables  $z$  étant borné et non vide, d'après la théorie de la dualité, nous obtenons :

$$v(P_{wg}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\bar{c}x + \min_{\substack{\lambda u_j \geq c_j^* x_j \quad \forall j=1, \dots, n \\ \lambda, u_j \geq 0}} (\lambda \Gamma_0 + \sum_{j=1}^n u_j))$$

ce qui est équivalent au programme linéaire suivant :

$$(P_{wg}^c) \left\{ \begin{array}{l} \min \bar{c}x + \lambda\Gamma_0 + \sum_{j=1}^n u_j \\ \text{s.c} \\ \lambda + u_j \geq c_j^* x_j \quad \forall j = 1, \dots, n \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ \lambda, u_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

La solution optimale de  $(P_{wg}^c)$  est robuste au sens de Bertsimas et Sim dans la mesure où, même si au plus  $\Gamma_0$  coefficients de la fonction objectif dévient de leur valeur nominale (et atteignent leur plus grande valeur), la valeur de cette solution sera nécessairement inférieure ou égale à  $v(P_{wg}^c)$  : en ce sens,  $v(P_{wg}^c)$  offre une garantie absolue pour un budget  $\Gamma_0$  fixé. De plus, nous avons la relation suivante :

$$v(P_{wg}^c(\Gamma_0)) \leq v(P_{wg}^c(\Gamma_0 + 1))$$

L'approche préconisée par Bertsimas et Sim consiste à se prémunir contre une détérioration éventuelle des paramètres, et donc, à nuancer et généraliser le critère du pire cas. Si l'on souhaite cette fois généraliser le meilleur cas dans le même esprit, on arrive au problème noté  $(P_{bg}^c)$  suivant :

$$v(P_{bg}^c) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\bar{c}x + \min_{\substack{\sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} zc^*x)$$

Ce qui est équivalent au programme quadratique suivant :

$$(P_{bg}^c) \left\{ \begin{array}{l} \min \bar{c}x + zc^*x \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ 0 \leq z_j \leq 1. \end{array} \right.$$

On remarque que si  $\Gamma_0 = n$ , toutes les variables  $z_i$  valent 1 à l'optimum car  $x \geq 0$  et on retrouve le problème du meilleur cas  $(P_{bg}^c)$  facile à résoudre car linéaire. Par contre, pour un  $\Gamma_0 \in ]0, n[$  quelconque le problème devient difficile car il revient à minimiser une fonction quadratique concave.

Globalement, nous pouvons distinguer 3 cas :

- $\Gamma_0 = 0$  correspond à une situation où on s'interdit la prise en compte de l'incertitude, les coefficients des variables sont donc chacun à leur valeur nominale et de façon évidente  $v(P_{wg}^c) = v(P_{bg}^c)$ .

- $\Gamma_0 = n$ , comme on l'a vu précédemment  $v(P_{wg}^c) = v(P_{pirCas}^c)$  et  $v(P_{bg}^c) = v(P_{meilCas}^c)$ .

- $0 < \Gamma_0 < n$  alors nous avons :  $v(P_{meilCas}^c) \leq v(P_{bg}^c) \leq v(P_{wg}^c) \leq v(P_{pirCas}^c)$ .

### 2.3.3.2 L'approche de Bertsimas et Sim pour les second membres des contraintes

Dans le problème  $(P)$ , on suppose maintenant que l'incertitude porte sur les second membres des contraintes, soit  $\bar{b} - b^* \leq b \leq \bar{b} + b^*$ ,  $b^* \geq 0$ .

Pour toute valeur de  $b$ , on suppose que le programme linéaire  $(P)$  admet un optimum borné. Pour modéliser l'incertitude, on introduit les variables  $z_i$  pour chaque contrainte, de la façon suivante :  $b_i = \bar{b}_i + z_i b_i^*$ , avec  $-1 \leq z_j \leq 1$ .

On représente alors l'ensemble des déviations  $z = (z_i)_{i=1, \dots, m}$  par un vecteur colonne de dimension  $m$ , une application directe, du modèle de Bertsimas et Sim, conduit à introduire un paramètre  $\Gamma_i \in [0, 1]$  par contrainte, et à rechercher la pire solution dans ces budgets d'incertitude, compte tenu de la forme des contraintes, le pire cas se réalise lorsqu'on augmente le second membre de chaque contrainte, c'est-à-dire pour  $z_i = \Gamma_i$ , la version robuste du programme linéaire  $(P)$  est donc le programme linéaire  $(P_{ber})$  suivant :

$$(P_{ber}) \left\{ \begin{array}{l} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} + \Gamma b^* \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

On retrouve bien le critère du pire cas lorsque  $\Gamma_i = 1$  pour toutes les contraintes  $i$  et on garde bien la polynomialité du problème initial.

Par contre, en terme de robustesse le modèle est moins intéressant puisqu'il conduit à décider sur la base d'un scénario unique totalement induit par le vecteur  $\Gamma$ .

Puisque le modèle de Bertsimas et Sim permet de gérer l'incertitude portant sur les coefficients de la fonction objectif, mais semble moins pertinent pour gérer l'incertitude sur les second membres des contraintes, on peut donc naturellement travailler sur le dual pour se ramener au cas où l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, nous rappelons que le dual  $(D)$  s'écrit :

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \max b^t y \\ \text{s.c} \\ A^t y \leq c^t \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Comme préconisé dans la section précédente, le critère à appliquer sur le programme dual est celui du meilleur cas généralisé dans lequel  $\Gamma_0$  est un paramètre qui délimite le budget d'incertitude autorisé sur les coefficients de la fonction objectif du programme dual, pour un problème de maximisation, la version duale devient  $(D_{bg}^c)$  :

$$v(D_{bg}^c) = \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} (\bar{b}^t y + \max_{\substack{\sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} z B^* y)$$



où  $B^*$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $b_i^*$ , ce dernier problème est équivalent à :

$$(D_{bg}^c) \left\{ \begin{array}{l} \max \bar{b}^t y + z B^* y \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ A^t y \leq c^t \\ y \geq 0 \\ 0 \leq z_j \leq 1. \end{array} \right.$$

On peut alors décomposer  $(D_{bg}^c)$  différemment et l'écrire comme suit.

$$\max_{\substack{\sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} (\bar{b}^t y + z B^* y)$$

Pour une valeur de  $z$  fixée, notons  $(D_z)$  le programme linéaire :

$$(D_z) \left\{ \begin{array}{l} \max \bar{b}^t y + z^t B^* y \\ \text{s.c} \\ A^t y \leq c^t \\ y \geq 0. \end{array} \right.$$

Le dual de  $(D_z)$ , noté  $(P_z)$ , correspond au problème  $(P)$  initial défini pour le scénario induit par  $z$  :

$$(P_z^b) \left\{ \begin{array}{l} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \geq \bar{b} + z^t B^* \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

Par hypothèse  $(P_z)$  admet un optimum fini et, de part le théorème fort de la dualité, on peut remplacer  $v(D_z)$  par  $v(P_z)$ .  $v(D_{bg}^c)$  devient alors :

$$v(D_{bg}^c) = \max_{\substack{\sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} v(P_z)$$

Le fait de travailler sur le dual et d'appliquer le critère du meilleur cas généralisé ne nous ramène pas à une application directe de Bertsimas et Sim mais nous a permis d'étendre la notion de budget d'incertitude.

Ceci revient à introduire un budget d'incertitude global  $\Gamma_0$  portant sur l'ensemble des second membres et à chercher la valeur du pire optimum dans ce budget, ce nouveau problème a davantage de signification en terme de robustesse et généralise bien le critère du pire cas ainsi que le problème associé à savoir  $(P_w^b)$ . En effet, si  $\Gamma_0 = m$ , la valeur optimale de  $z_i$  vaut 1 pour tout  $i = 1, \dots, m$  et on retrouve exactement le problème  $(P_{pirCas}^b)$ .

Par contre, cette version robuste ne préserve pas la linéarité du problème de départ, et, le problème à résoudre, noté  $(P_{wg}^b)$ , est difficile. Ce problème revient à déterminer le pire optimum du problème  $(P)$  sachant que l'on autorise au plus  $\Gamma_0$  contraintes à dévier de leur valeur nominale (en étant plus restreintes). On constate donc la relation suivante :

$$v(P_{wg}^b) = v(D_{bg}^c)$$

**Exemple 9.** Reprenons le programme linéaire de l'exemple  $P^b$  et considérons trois valeurs pour  $\Gamma_0$  :

- $\Gamma_0 = 2$  : on autorise alors la restriction des 2 contraintes de  $(P)$  et l'on obtient  $(P_{\text{pirCas}}^b)$ , de valeur  $53/3$ .

- $\Gamma_0 = 0$  : on n'autorise aucune déviation sur les contraintes ce qui revient à résoudre le problème nominal de valeur  $22/3$ .

- $\Gamma_0 = 1$  : on autorise la restriction d'une partie des 2 contraintes de  $(P)$  : soit une des deux, soit une fraction de la première et une fraction de la seconde. La version du pire cas généralisé détermine ce qui peut arriver de pire sous cette hypothèse.

Pour résoudre  $(P_{wg}^b)$  avec  $\Gamma_0 = 1$ , il faut donc résoudre le programme suivant :

$$v(P_{wg}^b) = \max_{\substack{z_1+z_2 \leq 1 \\ z_1, z_2 \geq 0}} \min_{\substack{x_1+2x_2 \geq 3+2z_1 \\ x_1-x_2 \geq 1+3z_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}} (4x_1 + x_2)$$

Pour résoudre ce problème, nous passons à sa version duale qui consiste à optimiser :

$$(P_z) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad 3y_1 + y_2 + 2y_1z_1 + 3y_2z_2 \\ \text{s. c} \\ y_1 + y_2 \leq 4 \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ z_1 + z_2 \leq 1 \\ y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

qui admet comme solution optimale :  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 4$ ,  $z_1 = 0$  et  $z_2 = 1$  de valeur  $v(D_{bg}^c) = v(P_{wg}^b) = 16$ .

Dans le primal, cela correspond à la solution  $x_{wg1} = 4$  et  $x_{wg2} = 0$ , cette valeur représente le pire qui puisse arriver pour le problème  $(P)$  initial si l'on envisage au plus "l'équivalent" de 1 contrainte plus restreinte. Du reste, de façon symétrique, le problème robuste  $(P_{wg}^c)$  avec incertitude sur les coefficients de la fonction objectif étant un programme linéaire, on peut écrire directement son dual et on obtient :

$$(D_{bg}^c) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \bar{b}^t y \\ \text{s. c} \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j^* z_j \leq \bar{c}_j \\ \sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ A^t y \leq c^t \\ y_j \geq 0 \\ 0 \leq z_j \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

qui n'est autre que le problème du meilleur cas sur le dual avec incertitude sur les second membres des contraintes pour un budget  $\Gamma_0$  fixé qui correspond cette fois au nombre maximum

de contraintes que l'on s'autorise à relâcher, on a donc la relation :  $v(P_{wg}^c) = v(D_{bg}^b)$ .

En conclusion, il existe des relations de dualité forte entre les versions robustes de (P) et (D) si on prend soin de dualiser le critère de robustesse : pire cas(généralisé) versus meilleur cas (généralisé).

Pour mesurer la robustesse d'une solution, le critère du regret maximum est lui aussi largement utilisé. Beaucoup de résultats ont déjà été obtenus lorsque l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Après les avoir rappelé, nous étudions le cas spécifique des incertitudes sur les second membres des contraintes.

### 2.3.4 Incertitudes portant sur la matrice des contraintes

Dans un programme linéaire, considérer que les incertitudes portent sur les coefficients de la matrice des contraintes revient à considérer que le domaine des solutions réalisables est incertain. La préoccupation de la réalisabilité est donc une considération centrale lors de la recherche de solutions robustes pour ce problème incertain. Nous verrons dans ce qui suit, comment chacune des approches présentées définit une solution robuste et de quelle manière la réalisabilité du problème est prise en compte.

Commençons, tout d'abord, par formaliser le problème. Soit le programme linéaire ( $P^A$ ) s'écrivant sous la forme suivante :

$$(P^A) \begin{cases} \min cx \\ \text{s.c} \\ Ax \leq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

où  $x$  est une matrice colonne de taille  $n$  qui représente les variables du problème. Le coût  $c$  est une matrice ligne de taille  $n$ , la matrice  $A$  des contraintes de taille  $m \times n$  et le second membre  $b$  est une matrice colonne de taille  $m$ . Supposons que l'incertitude porte uniquement sur les coefficients de la matrice des contraintes  $A$  et que le domaine réalisable est non vide, quelle que soit la réalisation de l'incertitude.

L'ensemble d'incertitude adopté pour modéliser les coefficients de la matrice  $A$  est un modèle par intervalles, que nous définissons de la manière suivante : pour tout  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ , le paramètre  $a_{ij}$  appartient à  $[\bar{a}_{ij} - a_{ij}^*, \bar{a}_{ij} + a_{ij}^*]$ , où  $\bar{a}_{ij}$  représente la valeur nominale du coefficient  $a_{ij}$  et  $a_{ij}^*$  (avec  $a_{ij}^* \geq 0$ ) sa déviation maximale. En d'autres termes,

$$a_{ij} = \bar{a}_{ij} + \xi_{ij} a_{ij}^*$$

avec,

$$\xi_{ij} \in [-1, 1].$$

Dans la littérature, il est possible de séparer les approches robustes en deux familles selon le contexte décisionnel auquel appartient le problème ( $P^A$ ) :

Contexte statique : il s'agit de prendre une décision (une solution robuste) avant toute réalisation de l'incertitude de façon irrémédiable. Dans ce contexte, nous présenterons trois approches robustes : l'approche de Soyster (1973)[4], l'approche de Ben-Tal et Nimerovski (1999) et l'approche de Bertsimas et Sim (2004)[3].

Commençons donc par formaliser les trois approches utilisables dans le contexte statique est les suivants :

### 2.3.4.1 Approche de Soyster

L'approche de Soyster (1973) est l'une des premières approches référencées dans la littérature pour la détermination de solutions robustes au problème  $(P^A)$ . Son principe rejoint celui du critère du pire cas décrit précédemment, où la solution doit, pour être qualifiée de robuste, être acceptable (réalisable) quel que soit le scénario qui se réalise.

La version robuste, notée  $(P^A)_{\text{Soyster}}$ , associée au problème  $(P^A)$  selon cette approche s'écrit alors :

$$(P^A)_{\text{Soyster}} \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.c} & \\ & \sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij} + \xi_{ij} a_{ij}^*) x_j \leq b_i \quad \forall \xi_{ij} \in [-1, 1], \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

qui revient à résoudre :

$$(P^A)_{\text{Soyster}} \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.c} & \\ & \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \max_{\xi_{ij} \in [-1, 1]} \{ \xi_{ij} a_{ij}^* x_j \} \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Dans notre cas, puisque les variables  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  sont non négatives, et que les coefficients sont indépendants, la version robuste de  $(P^A)$  selon l'approche de Soyster correspond au programme linéaire suivant :

$$(P^A)_{\text{Soyster}} \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.c} & \\ & \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + a_{ij}^* x_j \leq b_i \quad \forall \xi_{ij} \in [-1, 1] \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

**Remarque 3.** Notons que nous n'avons présenté ici qu'une adaptation des travaux de Soyster à la modélisation des incertitudes par des intervalles. En effet, dans la version d'origine présentée par Soyster (1973), les incertitudes sont modélisées par des ensembles convexes définis sur les colonnes de la matrice  $A$ . C'est à dire que chaque colonne  $A_j$  appartient à un ensemble convexe  $K_j$ , le but étant de calculer des solutions robustes de pire cas.

**Remarque 4.** La complexité des versions robustes associées au problème  $(P^A)$  selon l'approche de Soyster (1973), dépend de la difficulté de calculer un maximum sur le domaine d'incertitude. Dans le cas d'incertitudes modélisées par des intervalles continus ou des polyèdres le problème est polynomial (voir Ben-Tal et Nimerovski (2002)).

**Exemple 10.** *Considérons le programme linéaire incertain  $(P^A)$  suivant :*

$$(P^A) \begin{cases} \max & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} & \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq 120 & (a) \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq 30 & (b) \\ & x_1 \leq 8 & (c) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

où les coefficients de la matrice des contraintes sont décrits par les intervalles continus suivants :  $a_{11} \in [-15, -3]$ ,  $a_{12} \in [15, 25]$ ,  $a_{21} \in [1, 3]$  et  $a_{22} \in [5, 6]$ . Les valeurs nominales de ces coefficients ainsi que les déviations sont respectivement :  $\bar{a}_{11} = -9$ ,  $\bar{a}_{12} = 20$ ,  $\bar{a}_{21} = 2$ ,  $\bar{a}_{22} = 5.5$  et  $a_{11}^* = 6$ ,  $a_{12}^* = 5$ ,  $a_{21}^* = 1$ ,  $a_{22}^* = 0.5$ .

La version robuste selon l'approche de Soyster, notée  $(P^A)_{\text{Soyster}}$ , associée au problème  $(P^A)$  s'écrit :

$$(P^A)_{\text{Soyster}} \begin{cases} \max & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} & \\ & -3x_1 + 25x_2 \leq 120 & (a)_{\text{pir}} \\ & x_1 + 5x_2 \geq 30 & (b)_{\text{pir}} \\ & x_1 \leq 8 & (c) \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

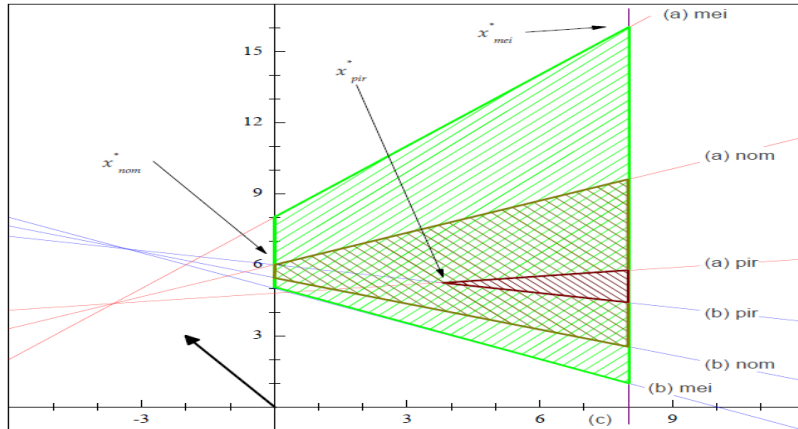
La solution optimale de  $(P^A)_{\text{Soyster}}$  est égale à  $x_{\text{pir}}^* = (3.75, 5.25)$ . Sa valeur est égale à 8.25. Elle correspond à la solution robuste de pire cas pour le problème incertain  $(P^A)$ .

Sur la figure 2.4 est illustrée la variation du domaine des solutions réalisables du problème  $(P^A)$  en fonction des valeurs prises par les coefficients de la matrice  $A$ . Il y est notamment illustré les domaines des solutions réalisables de trois valeurs de scénarios différents, définis comme suit :

- le scénario de pire cas : relatif aux contraintes du problème  $(P^A)_{\text{Soyster}}$ . Le domaine réalisable suivant ce scénario est délimité par les droites  $(a)_{\text{pir}}$  et  $(b)_{\text{pir}}$  et  $(c)$  de la figure 2.4.
- le scénario nominal : correspondant au programme linéaire où tous les coefficients sont égaux aux valeurs nominales. Le domaine réalisable suivant ce scénario est donné par les droites  $(a)_{\text{nom}}$  et  $(b)_{\text{nom}}$ ,  $(c)$  et  $x_1 \geq 0$  de la figure 2.4.
- un troisième scénario, qu'on appellera scénario de meilleur cas : (par opposition au scénario de pire cas), celui où les coefficients prennent les valeurs des intervalles qui forment le plus grand domaine de solutions réalisables possible. Le domaine réalisable suivant ce scénario est donné par les droites  $(a)_{\text{mei}}$  et  $(b)_{\text{mei}}$ ,  $(c)$  et  $x_1 \geq 0$  de la figure 2.4. Ce scénario est peu pertinent en robustesse mais il est considéré ici afin de comparer les différentes solutions.

Les solutions optimales suivant ces trois scénarios sont très différentes (puis qu'elles résultent de domaines réalisables différents) et sont - pris dans cet ordre - des valeurs croissantes. En effet,  $x_{\text{pir}}^* = (3.75, 5.25)$  est de valeur 8.25,  $x_{\text{nom}}^* = (0, 6)$  est de valeur 18 et  $x_{\text{mei}}^* = (8, 16)$  de valeur 32.

L'approche robuste de Soyster (1973) est une approche de pire cas destinée à la détermination d'une solution robuste avant la réalisation de l'incertain. Cette solution est une garantie absolue contre tout scénario pouvant se réaliser, et va être décidée sur la base du scénario le plus défavorable, celui définissant le plus petit domaine réalisable.


 FIGURE 2.4 – Domaine des solutions réalisables du problème ( $P^A$ )

Cependant, ces solutions robustes peuvent être jugées trop pessimistes et sont souvent qualifiées de solutions “conservatisme” dans la littérature. En effet, ne disposant d’aucune information sur la probabilité d’occurrence des scénarios (nous supposons seulement qu’ils sont tous équiprobables), il est clair pour certains décideurs que la décision basée sur le cas le plus défavorable ne sera pas toujours satisfaisante. Son coût peut être inutilement élevée alors qu’il n’y a que peu de chance qu’elle se réalise.

Pour pallier les inconvénients de l’approche de Soyster, de nouvelles approches ont émergé au cours de la dernière décennie. Elles ont permis des avancées importantes en optimisation robuste tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. Les versions robustes selon ces approches font intervenir un paramètre qui permet de contrôler le degré de “conservatisme” de la solution robuste tout en garantissant une forte probabilité de satisfaction des contraintes. La solution robuste recherchée n’est plus réalisable quel que soit le scénario qui se produit, mais le degré de non satisfaction des contraintes est fixé par ce paramètre. S’autorisant cette faible violation des contraintes on s’éloigne des scénarios extrêmes de pire cas, et on fournit au décideur des solutions robustes de meilleure qualité.

Parmi les approches paramétriques existant dans la littérature, deux principales approches peuvent être distinguées : l’approche de Ben-Tal et Nimerovski et l’approche de Bertismas et Sim.

### 2.3.4.2 Approche de Ben-Tal et Nimerovski

L’approche de Ben-Tal et Nimerovski (1999 ; 2000) (parallèlement introduite par El Ghaoui et Lebret (1997) et El Ghaoui et al. (1998)) consiste à chercher des solutions robustes moins conservatives que les solutions de pire cas, et cela en utilisant un domaine d’incertitude qui exclut les valeurs extrêmes des intervalles en autorisant une faible violation des contraintes.

En effet, la modélisation proposée ne situe plus les scénarios sur les extrémités des intervalles, mais sur les bords d’ellipsoïdes inscrits dans les intervalles de variation. Pour ce faire, les auteurs imposent, pour toute contrainte  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$  du programme linéaire incertain ( $P^A$ ), que les déviations maximales sur une même contrainte  $i$  appartiennent à un ellipsoïde défini par :

$$\Xi_i(\Omega_i) = \left\{ \xi_{ij} \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_{ij}^2} \leq \Omega_i; \quad \xi_{ij} \in [-1, 1] \right\}$$

avec  $\Omega_i \geq 0$ , pour tout  $i = 1, \dots, m$ .

Ce modèle d'incertitude est souvent nommé dans littérature par *modèle en ligne*, du fait qu'un paramètre  $\Omega_i$  soit défini pour chaque contrainte  $i$ .

Selon l'approche de Ben-Tal et Nimerovski (1999), la version robuste du problème  $(P^A)$  consiste à se placer dans le pire cas dans le domaine s'écrit  $\Xi_i(\Omega_i)$  et s'écrit :

$$(P^A)_{BenTal} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \max_{\xi_{ij} \in \Xi_i(\Omega_i)} \left\{ \sum_{j=1}^n \xi_{ij} a_{ij}^* x_j \right\} \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

où  $\Omega$  représente le vecteur des paramètres  $(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ . Il est possible de simplifier le problème en employant le lemme suivant.

**Lemme 1** (Babonneau et al. (2010)). *Soit  $p$  un réel (avec  $p > 1$ ), et soit  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .*

*Pour tout vecteur  $d \in \mathbb{R}^n$  et un réel positif  $k$ , nous avons :*

$$\max_{\|\xi\|_p \leq k} \{d^T \xi\} = k \|d\|_q$$

Il découle du Lemme que le problème  $P^A(\Omega)_{BenTal}$  est équivalent à :

$$(P^A)_{BenTal} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Omega_i \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^{*2} x_j^2} \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

qui revient au problème quadratique suivant :

$$(P^A)_{BenTal} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \Omega_i z_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ a_{ij}^{*2} x_j^2 \leq z_i^2 \\ z_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Le problème robuste  $P^A(\Omega)_{BenTal}$  est non linéaire mais de type conique quadratique. Il existe diverses méthodes pour le résoudre que nous ne développerons pas dans ce manuscrit (le lecteur peut se rapporter aux travaux de Ben-Tal et Zibulevsky (1995) par exemple).

La solution du problème  $P^A(\Omega)_{BenTal}$  est robuste tout en étant moins conservative que la solution de pire cas de Soyster. En effet, il est possible de contrôler le risque de non satisfaction des contraintes en modifiant la valeur des paramètres  $\Omega_i$  qui conditionnent le degré de conservatisme des contraintes  $i$ . Plus sa valeur est grande, plus la solution est robuste (proche du pire cas). En supposant que les variables aléatoires  $\xi_j$  sont uniformément distribuées dans  $[-1,1]$ , Ben-Tal et al. (2009) montrent que la probabilité de violation de la contrainte  $i$  ne dépasse pas  $\exp(-\frac{\Omega_i^2}{2})$ . Les auteurs fournissent ainsi un outil fort (qui ne dépend pas de la taille du problème) pour fixer la valeur du paramètre de robustesse  $\Omega_i$  avec peu d'hypothèses sur les incertitudes. Il existe donc un compromis entre la robustesse de la solution, à décider avant la connaissance des incertitudes, et le risque que celle-ci n'appartienne pas au domaine réalisable prévu par le modèle.

**Exemple 11.** Reprenons l'exemple précédent du problème ( $P^A$ ). En posant  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.8$ , la version robuste selon le modèle de BenTal s'écrit sous la forme du programme quadratique :

$$P^A(\Omega)_{BenTal} \left\{ \begin{array}{l} \text{max} \quad -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} \\ \quad -9x_1 + 20x_2 + 0.8z_1 \leq 120 \\ \quad 2x_1 + 5.5x_2 - 0.8z_2 \geq 30 \\ \quad 36x_1^2 + 25x_2^2 - z_1^2 \leq 0 \\ \quad x_1^2 + 0.25x_2^2 - z_2^2 \leq 0 \\ \quad x_1 \leq 8 \\ \quad x_1, x_2, z_1, z_2 \geq 0. \end{array} \right.$$

La solution robuste est  $x_{BenTal}^* = (1.25, 5.43)$  et est de valeur égale à 13.80, qui est meilleure que la valeur de la solution de pire cas de Soyster (qui vaut 8.25).

Il est à noter que, pour les valeurs de  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0.8$  choisies dans cet exemple, la probabilité de violation des contraintes est très élevée (autour de 0.73). Dans cet exemple, la taille de l'instance permet une représentation du domaine des solutions réalisables dans le plan mais est trop faible pour être pertinente en robustesse.

Dans la littérature, plusieurs applications de problèmes réels empruntent la formulation robuste de Ben-Tal et Nimerovski. Citons, à titre d'exemple, Ben-Tal et Nimerovski (2002) qui traitent du problème robuste de conception d'antennes, Goldfarb et Iyengar (2003) qui s'intéressent à la sélection de portefeuilles robuste, et Babonneau et al. (2010) à la planification énergétique et environnementale.

En parallèle, des études théoriques ont été menées pour améliorer le calcul de la probabilité de non satisfaction des contraintes en fonction des paramètres  $\Omega$ . Ainsi, Babonneau et al. (2010) réduisent cette probabilité à  $\exp(-\frac{\Omega_i^2}{1.5})$ . Par ailleurs, ces mêmes auteurs proposent un autre modèle paramétrique, qui a l'avantage de rester linéaire dans sa version robuste en approximant l'ellipsoïde par l'intersection d'une boule de norme infinie et d'une autre boule de norme 1 (modèle non détaillé ici). Enfin, Bertsimas et al. (2004) généralisent l'approche de Ben-Tal et Nimerovski à une modélisation paramétrique suivant une norme quelconque.

### 2.3.4.3 Approche de Bertsimas et Sim

La troisième approche présentée dans ce manuscrit pour le calcul des solutions robustes au problème ( $P^A$ ) est l'approche paramétrique de Bertsimas et Sim (2004).



Cette approche permet aussi de chercher des solutions robustes en évitant le scénario extrêmes de pire cas. Son principe est le suivant : les auteurs stipulent que dans la réalité les paramètres incertains n'atteignent jamais -ou très exceptionnellement- leurs pires valeurs simultanément, et que seule une partie d'entre eux dévie des valeurs nominales. Les auteurs traduisent cette idée par l'introduction de paramètres  $\Gamma_i$  pour chacune des contraintes  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , qui représentent la somme des déviations totales par rapport aux valeurs nominales de tous les coefficients incertains de la même contrainte  $i$ . L'ensemble d'incertitude noté  $\phi_i(\Gamma_i)$  est alors :

$$\phi_i(\Gamma_i) = \left\{ \xi_{ij} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n |\xi_{ij}| \leq \Gamma_i; \quad -1 \leq \xi_{ij} \leq 1 \right\}$$

Tout comme dans l'approche de Ben-Tal et Nimerovski, le modèle d'incertitude utilisé dans cette approche est aussi un modèle en ligne.

La version robuste associée à  $(P^A)$  selon cette approche s'écrit :

$$(P^A(\Gamma))_{BS} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \max_{\xi_{ij} \in \phi_i(\Gamma_i)} \left\{ \sum_{j=1}^n \xi_{ij} a_{ij}^* x_j \right\} \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Ainsi, pour une contrainte  $i$ , la valeur de  $\Gamma_i$  permet de contrôler la déviation totale des paramètres incertains de leur valeur nominale. Notons que  $\Gamma_i$  n'est pas nécessairement un entier mais prend des valeurs dans l'intervalle  $[0, n]$ . Par exemple, si  $\Gamma_i = 0$  aucune déviation n'est autorisée sur les coefficients de la  $i^{\text{eme}}$  contrainte et celle-ci est équivalente à la contrainte nominale. Par contre, si  $\Gamma_i = n$  tous les paramètres sont susceptibles de dévier, et l'on revient à la formulation pire cas de Soyster 2.3.4.1.

Attachons-nous à résoudre le problème  $(P^A(\Gamma))_{BS}$ . Il est possible de simplifier ce dernier en le linéarisant. Il suffit pour cela de remarquer que les variables  $x_j$ , ainsi que les valeurs de  $a_{ij}^*$  sont non négatives. Ceci nous permet dans un premier temps de remarquer que la valeur du

$$\max_{\xi_{ij} \in \phi_i(\Gamma_i)} \{ \xi_{ij} a_{ij}^* x_j \}$$

Pour un vecteur  $x$  fixé est atteinte pour des valeurs non négatives des variables  $\xi_{ij}$ . Ceci a pour conséquence la suppression des valeurs absolues dans la formulation du domaine d'incertitude, qui devient alors :

$$\phi_i(\Gamma_i) = \left\{ \xi_{ij} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n |\xi_{ij}| \leq \Gamma_i; \quad 0 \leq \xi_{ij} \leq 1 \right\}$$

Dans un second temps, en rappelant que le problème incertain admet une solution optimale finie quelles que soient les valeurs des incertitudes sur  $A$ , nous pouvons remplacer le sous-problème de maximisation par son dual dans l'écriture de  $(P^A(\Gamma))_{BS}$ , selon le théorème fort de

dualité. Le problème robuste est alors équivalent au programme linéaire suivant :

$$(P^A(\Gamma))_{BS} \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j + \pi_i \Gamma_i + \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \Gamma_i + \lambda_{ij} \geq a_{ij}^* x_j \\ \pi_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ \lambda_{ij} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

où  $\pi_i, \lambda_{ij}$  correspondent aux variables du problème dual

Les auteurs évaluent le degré de non satisfaction des contraintes à  $\exp(-\frac{\Gamma_i^2}{2n})$  (en supposant que les variables aléatoires  $\xi$  sont uniformément distribuées dans  $[-1, 1]$ ). Nous remarquons qu'étant donné que cette probabilité dépend de la taille du problème (plus précisément, du nombre de coefficients incertains dans une même contrainte), cette approche devient pertinente (apporte un gain significatif par rapport à l'approche de Soyster) quand la valeur de  $n$  est élevée. Par exemple, pour garantir une satisfaction des contraintes avec une probabilité égale à 99, si  $n = 100$  alors doit être supérieur ou égal à 30. Enfin, l'approche de Bertsimas et Sim (2004) a l'avantage de garder la linéarité du problème dans sa version robuste.

En optimisation combinatoire, Bertsimas et Sim (2003) donnent, selon la même approche, les versions robustes de plusieurs problèmes d'optimisation dans les réseaux. Ces versions étant de même complexité que les problèmes associés.

**Exemple 12.** Revenons à l'exemple précédent. Suivant le modèle de Bertsimas et Sim la version robuste associée au problème  $(P^A)$ , notée  $(P^A(\Gamma))_{BS}$ , est la suivante :

$$(P^A(\Gamma))_{BS} \left\{ \begin{array}{l} \max - 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c} \\ - 9x_1 + 20x_2 + \pi_1 + \lambda_{11} + \lambda_{12} \leq 120 \\ 2x_1 + 5.5x_2 - \pi_2 - \lambda_{21} - \lambda_{22} \geq 30 \\ \pi_1 + \lambda_{11} - 6x_1 \geq 0 \\ \pi_1 + \lambda_{12} - 5x_2 \geq 0 \\ \pi_2 + \lambda_{21} - x_2 \geq 0 \\ \pi_2 + \lambda_{22} - 0.5x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 8 \\ x_1, x_2, \pi_1, \pi_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22} \geq 0. \end{array} \right.$$

En choisissant les valeurs de  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ , la solution robuste est  $x_{BS}^* = (1.58, 5.37)$  et est de valeur égale à 12.95, avec  $\pi_1 = 1.59, \pi_2 = 9.47, \lambda_{11} = 0, \lambda_{12} = 1.10, \lambda_{21} = 0, \lambda_{22} = 17.37$ . Il est possible de retrouver le scénario qui correspond à cette solution. En effet, en remarquant que  $\lambda_{12} \geq 0$  et  $\lambda_{22} \geq 0$ , nous déduisons que les contraintes correspondantes dans le problème dual sont saturées (d'après le théorème des écarts complémentaires). Ceci nous permet d'identifier le

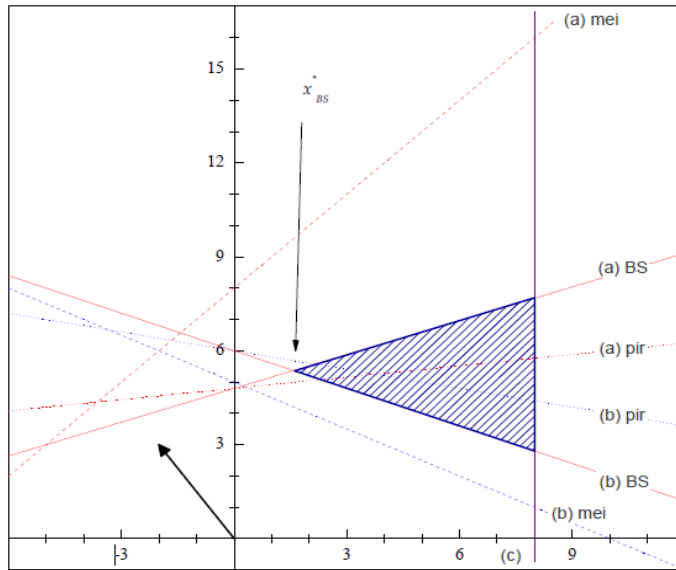


FIGURE 2.5 – Domaine des solutions réalisables du problème  $(P^A(\Gamma))_{BS}$

scénario comme étant égal à  $a_{11} = 9$ ,  $a_{12} = 25$ ,  $a_{21} = 2$  et  $a_{22} = 5$ . Le domaine de solutions réalisables lui correspondant est représenté sur la figure.

Tout comme l'approche de Ben-Tal et Nimerovski, la solution robuste  $x_{BS}^*$  possède une meilleure évaluation que celle obtenue par l'approche pire cas de Soyster. Elle est aussi, pour cet exemple, moins bonne que la solution robuste  $x_{BenTal}^*$ .

Notons enfin que la probabilité de violation des contraintes pour les valeurs de  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$  est assez élevée (elle approche 0.78). Tout comme l'exemple, la taille du problème est ici trop petite pour qu'une étude de robustesse soit pertinente.

## 2.3.5 Application

### 2.3.5.1 Modélisation du problème

le docteur Zaid est chargé d'organiser le planning des infirmières du service de cardiologie de l'hospital ELGHASANI de FES. Une journée de travail dans ce service est divisée en douze tranches horaire de 2 heures chacune. Les besoins de personnel varient d'une tranche horaire à l'autre : par exemple, peu infirmières sont nécessaires pendant la nuit, par contre l'effectif doit être renforcé le matin afin d'assurer les différents soins à apporter aux patients. Le tableau suivant donne les besoins de personnel pour chacune des tranches horaires.

Le problème consiste à trouver le nombre minimal d'infirmières nécessaires pour couvrir tous les besoins, sachant qu'une infirmière travaille huit heures par jour et qu'elle a droit à une pause de deux heures au bout de quatre heures travail.

Tranches horaires	Nombre minimal d'infirmières
06h- 08h	35
08h- 10h	40
10h- 12h	40
12h- 14h	35
14h- 16h	30
16h- 18h	30
18h- 20h	35
20h- 22h	30
22h- 00h	20
00h- 2h	15
2h- 4h	15
04h- 06h	15

les variables du problème sont résumées dans le tableau suivant :

Variable	Description
$x_1$	nombre d'infirmières qui commencent à 06h
$x_2$	nombre d'infirmières qui commencent à 08h
$x_3$	nombre d'infirmières qui commencent à 10h
$x_4$	nombre d'infirmières qui commencent à 12h
$x_5$	nombre d'infirmières qui commencent à 14h
$x_6$	nombre d'infirmières qui commencent à 16h
$x_7$	nombre d'infirmières qui commencent à 18h
$x_8$	nombre d'infirmières qui commencent à 20h
$x_9$	nombre d'infirmières qui commencent à 22h
$x_{10}$	nombre d'infirmières qui commencent à 00h
$x_{11}$	nombre d'infirmières qui commencent à 02h
$x_{12}$	nombre d'infirmières qui commencent à 04h

Le nombre d'infirmières qui travaillent, par exemple, entre 6h et 8h exprimer par l'expression :

$$x_1 + x_9 + x_{10} + x_{12}$$

Ainsi, pour couvrir au maximum les besoins au niveau de la tranche horaire 6h-8h, qui nécessite au minimum 35 infirmières, la contrainte suivante est proposée :

$$x_1 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 35$$

De même pour couvrir au maximum les besoins au niveau de tranche horaire 8h-10h, qui nécessite au minimum 40 infirmières, la contrainte suivante est proposée :

$$x_1 + x_2 + x_{10} + x_{11} \geq 40$$

De même pour couvrir au maximum les besoins au niveau de tranche horaire 10h-12h, qui nécessite au minimum 40 infirmières, la contrainte suivante est proposée :

$$x_2 + x_3 + x_{11} + x_{12} \geq 40$$

De même manière, on peut exprimer les autres contraintes du problème. S'écrit sous la forme d'un programme mathématique linéaire en nombre entiers dans le cas déterministe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{1 \leq i \leq 12} x_i \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 35 \\ x_1 + x_2 + x_{10} + x_{11} \geq 40 \\ x_2 + x_3 + x_{11} + x_{12} \geq 40 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_{12} \geq 35 \\ \vdots \\ x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} \geq 15 \\ x_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, \dots, 12. \end{array} \right.$$

### 2.3.5.2 Résolution

On considère le nombre minimale d'infirmières pour couvrir au maximum ses besoin pur chaque tranche horaire est incertain c'est à dire l'incertitude portant sur les nombres minimal d' infirmières des contraintes :  $b_1 \in \{20, 15\}$ ,  $b_2 \in \{35, 40\}$ ,  $b_3 \in \{30, 20\}$ ,  $b_4 \in \{15, 36\}$ ,  $b_5 \in \{28, 20\}$ ,  $b_6 \in \{20, 40\}$ ,  $b_7 \in \{36, 28\}$ ,  $b_8 \in \{24, 40\}$ ,  $b_9 \in \{8, 18\}$ ,  $b_{10} \in \{15, 10\}$ ,  $b_{11} \in \{10, 15\}$  et  $b_{12} \in \{10, 15\}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{1 \leq i \leq 12} x_i \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq b_1 \\ x_1 + x_2 + x_{10} + x_{11} \geq b_2 \\ x_2 + x_3 + x_{11} + x_{12} \geq b_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_{12} \geq b_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq b_5 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \geq b_6 \\ x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq b_7 \\ x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq b_8 \\ x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq b_9 \\ x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq b_{10} \\ x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} \geq b_{11} \\ x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} \geq b_{12} \\ x_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, \dots, 12. \end{array} \right.$$

d'où la solution robuste qui résiste sur tous les scénarios est le suivant est déterminer par logiciel IBM ILOG CPLEX qui un logiciel de programmation mathématique(l'un des plus utilisés) permettant de résoudre des programmes linéaire avec des variables réelles et/ou entières, ainsi que des programmes quadratique :

Les nombres d'infirmières	10	25	5	21	10	0	10	0	10	0	5	0
Le nombre minimal d'infirmières	96											

Cette solution est obtenue a partir la résolution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{1 \leq i \leq 12} x_i \\ \text{s.c} \\ x_1 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_{10} + x_{11} \geq 40 \\ x_2 + x_3 + x_{11} + x_{12} \geq 30 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_{12} \geq 36 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 28 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 40 \\ x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 28 \\ x_4 + x_5 + x_7 + x_8 \geq 40 \\ x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 18 \\ x_6 + x_7 + x_9 + x_{10} \geq 15 \\ x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} \geq 15 \\ x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} \geq 15 \\ x_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, 2, \dots, 12. \end{array} \right.$$

Dans le cas ou le problème d'infirmières de deux dimension c'est à dire on s'intéresse juste le nombre minimale d'infirmières pour couvrir au maximum les besoins au niveau de la tranche horaire 6h-8h et 8h-10h, on considère de problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + x_2 \\ \text{s.c} \\ x_1 \geq b_1 \\ x_1 + x_2 \geq b_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

où les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  du second membre des contraintes sont incertains et appartiennent dans un ensemble discret suivants :  $b_1 \in \{20, 15\}$ ,  $b_2 \in \{35, 40\}$ ,

Les nombres d'infirmières	0	40
Le nombre minimal d'infirmières	40	

Cette solution est obtenue par la résolution du problème suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + x_2 \\ \text{s.c} \\ x_1 \geq 20 \\ x_1 + x_2 \geq 40 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

La solution robuste de pire cas est égale à  $x_{\text{pireCas}}^* = (40, 0)$  et sa valeur est égale à 40. Elle est obtenue pour le scénario  $b_1 = 20$  et  $b_2 = 40$  définissant le plus petit domaine de solutions réalisables, comme illustré dans figure 2.6 cette solution est optimale quelque soit le scénario.

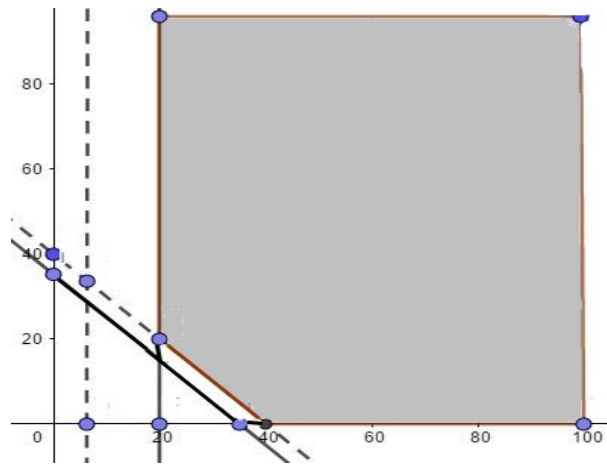


FIGURE 2.6 – La solution du problème d’infirmières

## 2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les principaux résultats bibliographiques relatifs à la prise en compte d’incertitude affectant les coefficients de programmes linéaires. Nous nous sommes limités à la modélisation de ces incertitudes par des intervalles continus. Trois cas ont été distingués : un premier cas où les incertitudes portent sur la fonction objectif, un deuxième cas où elles portent sur la matrice des contraintes, et enfin le cas où les incertitudes concernent uniquement le second membre des contraintes.

Dans le premier cas de figure, nous avons détaillé les résultats de l’application des critères issus de la théorie de la décision. Le contexte de décision dans lequel s’inscrivent la plupart des approches existantes est celui où la décision doit être prise en présence d’incertitude. Le premier critère que nous avons abordé est le critère du pire cas qui vise à se prémunir contre la pire éventualité. Pour la modélisation des incertitudes par intervalles, ce problème est facile. Le critère du pire cas est particulièrement adapté lorsque le décideur est averse au risque, notamment dans les domaines d’application touchant par exemple au nucléaire, à la santé ou à l’environnement. Cependant, la solution robuste de pire cas peut être jugée trop conservatrice (car ne prend aucun risque) et peut se révéler trop coûteuse.

Parmi les autres critères pouvant être appliqués lorsque l’incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif aussi les coefficients de second membre du problème incertain, le critère du regret maximum propose une solution robuste moins conservatrice que la solution de pire cas. Ce critère est utile lorsqu’une prise de risque est acceptable par le décideur et est souvent employé dans le domaine de la finance où les investisseurs souhaitent avoir le moins de regret quand ils prennent leurs décisions.

Dans le deuxième cas où l’incertitude porte sur les coefficients de second membre, nous avons montré la nécessité de distinguer les approches en fonction de la nature des contraintes. En effet, cette étude a montré que les problèmes contenant exclusivement des contraintes d’inégalité sont des problèmes faciles, pour les deux contextes de décision. En revanche, quand le problème admet des contraintes d’égalité, se plaçant dans le premier contexte, il est impossible de déterminer une solution réalisable pour tout scénario qui se présente. Le décideur est contraint de choisir une solution puis de mesurer la violation des contraintes. Néanmoins, quand celui-ci sait mesurer la non satisfaction des contraintes, il peut envisager de suivre un modèle de pénalités permettant de prendre la décision la moins pénalisant. Enfin, concernant le second contexte décisionnel, nous

avons établi que le calcul du pire optimum est un problème NP-difficile quand celui-ci contenait les contraintes d'égalité.

Dans le troisième cas de figure (incertitude portant sur la matrice des contraintes), le domaine réalisable est affecté par l'incertitude. Ainsi, la détermination de solutions robustes sera étroitement liée à la réalisabilité du problème. Nous avons séparé les approches de la littérature selon le contexte décisionnel. Dans le contexte statique, il s'agit de prendre une décision avant que l'incertitude ne se réalise.

La première approche, celle de Soyster, est une approche de pire cas. La solution robuste recherchée est réalisable pour tous les scénarios pouvant se réaliser. Les deux approches de Ben-Tal et al, et celle de Bertsimas et Sim visent à accepter une part de risque, et cela en autorisant une faible violation des contraintes, dans le but de déterminer des solutions robustes moins conservatives que la solution de Soyster.



## Chapitre 3

# Optimisation Floue

### 3.1 Introduction

Les mathématiques du flou, de plus en plus désignées de la théorie du flou, regroupent plusieurs théories qui sont des généralisations ou des extensions de leurs homologues classiques : la théorie des sous-ensembles flous étend celle des ensembles, la logique floue étend la logique binaire, la théorie des quantités floues étend celle des nombres et intervalles, la théorie des possibilités étend celle des probabilités, plus généralement la théorie des mesures floues étend celle de la mesure. elles ont toutes pour objectif de proposer des concepts, des techniques et des méthodes formellement rigoureuses pour recueillir, représenter et traiter des connaissances et des données floues c'est-à-dire contenant de l'imprécision, de l'incertitude ou de la subjectivité ; ces trois facettes principales du flou étant souvent coexistantes. D'autres synonymes, tels que connaissance mal spécifiée, mal décrite, imparfaite, vague, qualitative, linguistique, partielle, incomplète, approximative ou approchée, recouvrent cette même acception du flou.

L'arithmétique floue permet une modélisation et un traitement des quantités numériques imprécises. Elle autorise la conception de modèles analytiques prévisionnels plus fidèles à la réalité.

La théorie des possibilités a été introduite à partir de la théorie des sous-ensembles flous [Zadeh, 1978] pour prendre en compte l'incertitude incluse dans des objets imprécis. Dans ce cas, un événement possible n'interdit pas pour autant à l'événement contraire de l'être également. Ainsi, une mesure de possibilité n'est pas additive mais a un caractère d'ordre [Masson, 1994]. De même une distribution de possibilité peut être interprétée comme la fonction d'appartenance d'un ensemble flou [Mouchaweh, 2002]. Le degré d'appartenance peut être interprété comme une limite supérieure de probabilité [Zimmermann, 1991][26].

De cette manière, la théorie du flou étend la palette des méthodes de modélisation, de prédiction et d'évaluation, tout en simplifiant la formalisation des problèmes complexes.

### 3.2 Les variables et les ensembles flous

La théorie des ensembles flous est une théorie mathématique. Son objectif a été dans un premier temps de modéliser les notions vagues du langage naturel. Un ensemble classique se définit, en général par la frontière abrupte entre deux catégories d'éléments : ceux qui sont dans l'ensemble et qui lui appartiennent et ceux qui sont à l'extérieur et qui appartiennent à son complémentaire. Le concept d'appartenance est modélisé par une fonction  $\chi_A$  appelée fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ , sous-ensemble d'un ensemble de référence  $X$  appelé également référence ou ensemble universel.

La fonction  $\chi_A$  définie sur  $X$  et à ses valeurs dans  $\{0, 1\}$  est telle que  $x \in X$ ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Cette fonction caractéristique  $\chi_A$  (fonction d'appartenance) exprime le fait que pour tout élément de  $X$ , on peut affirmer l'une des assertions suivantes et seulement une seule d'entre les deux :

- cet élément appartient à  $A$ .
- ou bien cet élément n'appartient pas à  $A$  mais à son complémentaire.

Aucune situation intermédiaire ne peut exister.

La théorie des ensembles flous se propose donc de généraliser cette fonction d'appartenance pour des catégories vagues.

### 3.2.1 Variables linguistiques

La description imprécise d'une certaine situation, d'un phénomène ou d'une grandeur physique ne peut se faire que par des expressions relatives ou floues. Ces différentes classes d'expressions floues dites ensembles flous forment ce qu'on appelle des variables linguistiques. Afin de pouvoir traiter numériquement ces variables linguistiques qui sont normalisées généralement sur un intervalle bien déterminé appelé univers de discours, il faut les soumettre à une définition mathématique à base de fonctions d'appartenance qui montrent le degré de vérification de ces variables linguistiques relativement aux différents sous ensembles flous de la même classe.

La figure (FIG.3.1) montre un exemple de variable linguistique associée au concept de température, représentée par les sous ensembles flous où les termes linguistiques sont définis par : froide, moyenne, chaude sur l'univers de discours représenté par les températures comprises dans l'intervalle  $[0^\circ, 70^\circ]$ .

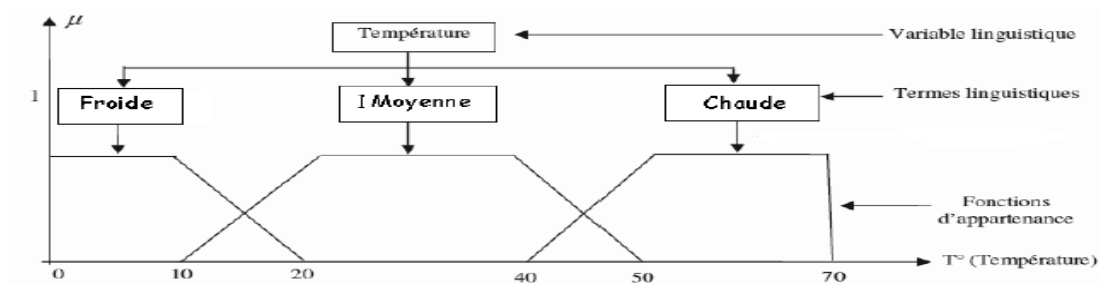


FIGURE 3.1 – Exemple d'ensembles flous pour la variable température

### 3.2.2 Les ensembles flous

La logique floue repose sur la théorie des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques [Zadeh, 1965]. Par abus de langage, suivant les us de la littérature, nous utiliserons indifféremment les termes sous-ensembles flous et ensembles flous. Les ensembles classiques sont également appelés ensembles nets, par opposition à flou, et de même la logique classique est également appelée logique booléenne ou binaire.

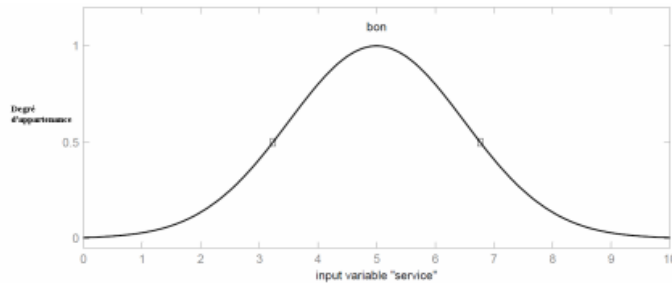


FIGURE 3.2 – Montre la fonction d'appartenance choisie pour caractériser le sous-ensemble 'bon' de la qualité du service.

**Définition 1.** Soit  $X$  un ensemble. Un sous-ensemble flou  $A$  de  $X$  est caractérisé par une **fonction d'appartenance**  $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$

*Note :* cette fonction d'appartenance est l'équivalent de la fonction caractéristique d'un ensemble classique.

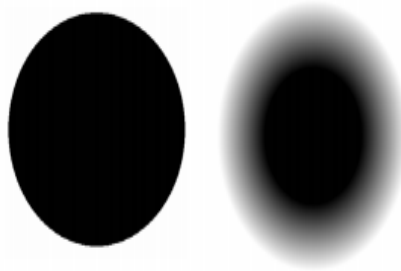


FIGURE 3.3 – Représentation graphique d'un ensemble classique et d'un ensemble flou.

La figure 3.4 compare les deux fonctions d'appartenance correspondant aux ensembles précédents.

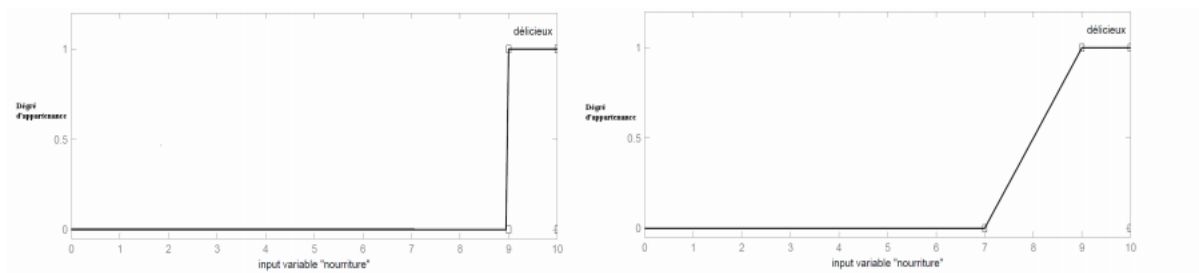


FIGURE 3.4 – Comparaison entre fonction caractéristique d'un ensemble classique et fonction d'appartenance d'un ensemble flou.

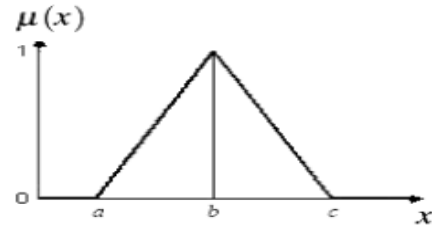
Pour pouvoir définir les caractéristiques des ensembles flous, nous redéfinissons et étendons les caractéristiques usuelles des ensembles classiques.

Soit  $X$  un ensemble,  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$  et  $\mu_A$  la fonction d'appartenance le caractérisant.

En général, la forme des fonctions d'appartenance dépend de l'application et de la grandeur à modéliser et peuvent avoir différentes formes :

• **Fonction triangulaire**

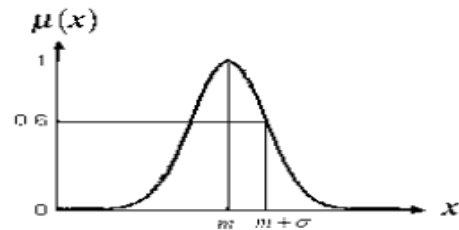
$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{a-b} & \text{si } x \in [a, b] \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{si } x \in [b, c] \end{cases}$$



• **Fonction gaussienne**

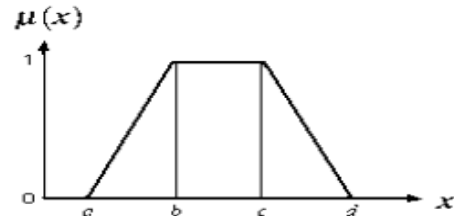
$$\mu(x, m, \sigma) = e^{-\left(\frac{x-m}{2\sigma}\right)^2}$$

$m$  : centre de la gaussienne  
 $\sigma$  : sa largeur



• **Fonction trapézoïdale**

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{a-b} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{c-d} & \text{si } x \in [c, d] \end{cases}$$



Nous définissons quelques propriétés d'un ensemble Flou,

**Définition 2.** Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ , alors le support de  $A$ , noté  $\text{supp}(A)$ , est l'ensemble ordinaire donné par :

$$\text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq 0\}$$

**Définition 3.** Le noyau d'un sous-ensemble flou  $A$  dans un univers du discours  $X$  est le sous-ensemble des éléments de  $X$  pour lesquels la fonction d'appartenance vaut 1. C'est l'ensemble des points qui appartiennent intégralement à :

$$\text{ker}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$$

**Définition 4.** Soit  $A$  un ensemble flou sur  $X$ . La hauteur de  $A$ , notée  $h(A)$ , est définie comme

$$h(A) = \text{Sup}_{x \in X} \mu_A(x)$$

Si  $h(A) = 1$ , alors l'ensemble flou  $A$  est appelé un ensemble flou normal, sinon il est dit subnormal.

**Définition 5.** On appelle coupe de niveau  $\alpha$  ou  $\alpha$ -coupe de l'ensemble flou  $A$  pour une valeur donnée  $\alpha \in [0, 1]$ , le sous-ensemble classique  $A_\alpha$  de  $X$  défini par :

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

Une  $\alpha$ -coupe telle que  $\mu_A(x) \geq \alpha, \forall x \in A_\alpha$  est dite stricte.

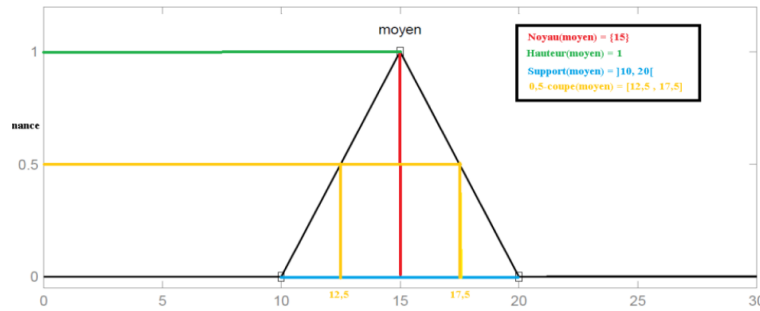


FIGURE 3.5 – Propriétés d'un ensemble flou

### 3.2.3 Opérations sur les ensembles flous

Supposons que  $A$  et  $B$  sont deux ensembles flous définis dans un univers de discours  $X$  par les fonctions d'appartenance  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . On peut définir des opérations telles que l'égalité, l'inclusion, l'intersection, l'union et le complément grâce à des opérations sur les fonctions d'appartenance.

- **Égalité** :  $A$  et  $B$  sont dits égaux, propriété que l'on note  $A = B$ , si leurs fonctions d'appartenance prennent la même valeur en tout point de  $X$  :

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

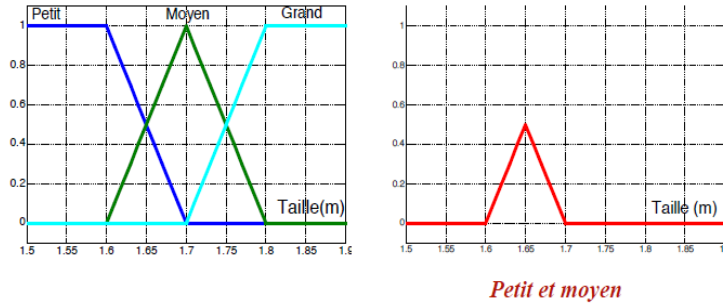
- **Inclusion** :  $A$  est dit inclus dans  $B$ , propriété que l'on note  $A \subseteq B$ , si tout élément  $x$  de  $X$  qui appartient à  $A$  appartient aussi à  $B$  :

$$\forall x \in X \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

- **Intersection** : L'intersection de  $A$  et  $B$ , que l'on note  $A \cap B$ , est l'ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus petit des deux degrés d'appartenance  $\mu_A$  et  $\mu_B$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \mu_{A \cap B}(x) &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \end{aligned}$$

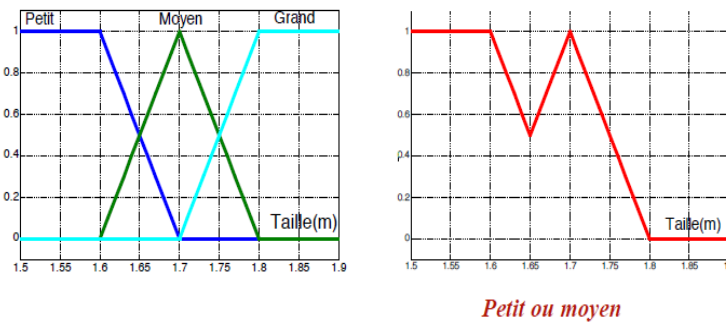
En utilisant le symbole de conjonction  $\wedge$  à la place de  $\min$ . Le « et » logique peut être vu comme une intersection, comme il peut être interprété dans certains cas par une multiplication.



- **Union** : L'union de  $A$  et  $B$ , que l'on note  $A \cup B$ , est l'ensemble flou constitué des éléments de  $X$  affectés du plus grand des deux degrés d'appartenance  $\mu_A$  et  $\mu_B$  :

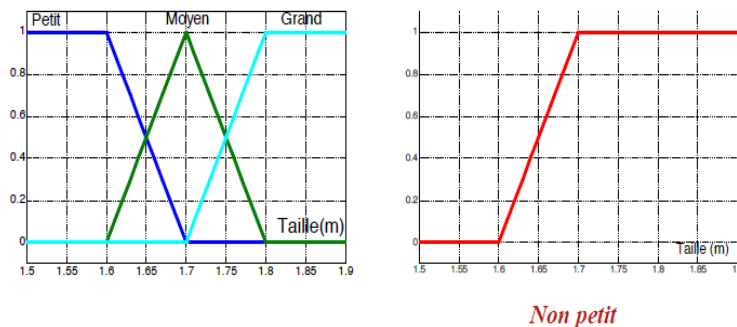
$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \mu_{A \cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \\ &= \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \end{aligned}$$

La notion de réunion rappelle le « ou » logique qui est souvent noté ici  $\vee$ .



- **Complément** : Le complément de  $A$ , que l'on note  $\bar{A}$ , est l'ensemble flou de  $X$  constitué des éléments  $x$  lui appartenant d'autant plus qu'ils appartiennent peu à  $A$  :

$$\forall x \in X \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



Le tableau suivant montre une comparaison entre les deux ensembles d'opérateurs pour le complément (NON), l'intersection (ET) et l'union (OU) utilisés le plus couramment :

Dénomination	Intersection ET : $\mu_{A \cap B}(x)$	Réunion OU : $\mu_{A \cup B}(x)$	Complément NON : $\mu_{\bar{A}}(x)$
Opérateurs de Zadeh MIN/MAX	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$1 - \mu_A(x)$
Probabiliste PROD/PROBOR	$\mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$1 - \mu_A(x)$

### 3.2.4 Les règles floues

Une règle floue  $R$  : **Si**  $x$  est  $A$  **Alors**  $y$  est  $B$  est une relation entre deux propositions floues ayant chacune un rôle particulier. La première ( $x$  est  $A$ ) est appelée prémisse de la règle alors que la seconde ( $y$  est  $B$ ) est la conclusion.

**Exemples :**

- Si Temps est beau ET Moment est DébutMatinée ALORS Moral est haut
- Si Cours est Ennuyeux ET Moment est DébutCours ALORS Moral est bas
- Si Cours est Intéressant ET ChargedeTravail est Importante ALORS Moral est Maussade
- Si .....

Dans le cas des propositions floues élémentaires, la prémisse et la conclusion sont définies à partir de deux variables linguistiques de  $A$  et  $B$  décrivant les connaissances relatives aux univers de discours  $X_A$  et  $X_B$  de manière à prendre en compte l'imprécision relative aux modalités de  $A$  et  $B$ . Une proposition floue élémentaire est souvent insuffisante pour représenter l'ensemble des informations à manipuler. Plusieurs propositions floues peuvent alors être combinées pour enrichir et détailler la représentation.

La relation  $R$  entre la prémisse et la conclusion de la règle est déterminée par une implication floue dont le degré de vérité est défini par une fonction d'appartenance  $\mu_R$  qui dépend du degré de vérité  $\mu_A$  et  $\mu_B$  de chacune des deux propositions élémentaires.

Les implications les plus courantes permettant la détermination de la fonction d'appartenance résultante décrivant la proposition floue  $R$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'implication de Mamdani} : \mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \\ \text{l'implication de Larsen} : \mu_R = \mu_A(x) \times \mu_B(y) \\ x \in X_A, y \in X_B \end{array} \right.$$

### 3.2.5 Description et structure d'une commande par la logique floue

Contrairement aux techniques de réglage classique, le réglage par la logique floue n'utilise pas des formules ou des relations mathématiques bien déterminées ou précises [Zeng et Singh, 1995]. Mais, il manipule des inférences avec plusieurs règles floues à base des opérateurs flous ET, OU, ALORS,...

On peut distinguer trois parties principales constituant la structure d'un régulateur flou :

- Une interface de Fuzzification,
- Un mécanisme D'inférence,
- Et une interface de Défuzzification.

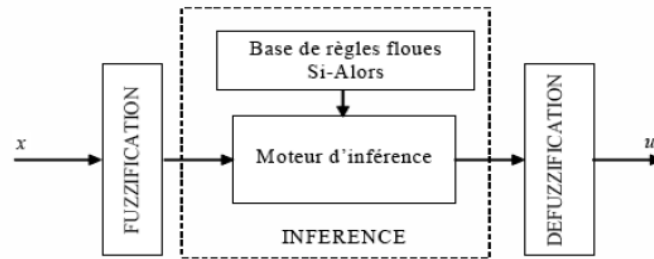


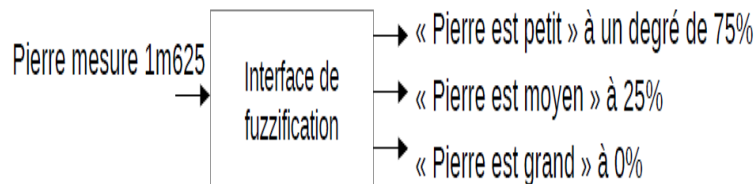
FIGURE 3.6 – Structure interne d'un contrôleur flou.

La figure (Fig.3.6) représente, à titre d'illustration, la structure d'un régulateur flou à une entrée  $x$  et une sortie  $u$ .

#### ► Interface de Fuzzification

La fuzzification proprement dite consiste à définir des fonctions d'appartenance pour les différentes variables linguistiques. Ceci a pour but la conversion d'une grandeur physique en une linguistique. Il s'agit d'une projection de la variable physique sur les ensembles flous caractérisant cette variable. Cette opération permet d'avoir une mesure précise sur le degré d'appartenance de la variable d'entrée à chaque ensemble flou.

D'une autre manière, l'entrée  $x$  varie dans l'univers de discours qui est partagé en un nombre fini d'ensembles flous de telle sorte que dans chaque zone il y ait une situation dominante. Afin de faciliter le traitement numérique et l'utilisation des ces ensembles, on les décrit par les fonctions d'appartenance. Elles admettent comme argument la position de  $x$  dans l'univers de discours, et comme sortie le degré d'appartenance de  $x$  à la situation décrite par la fonction.



#### ► Interface D'inférence floue

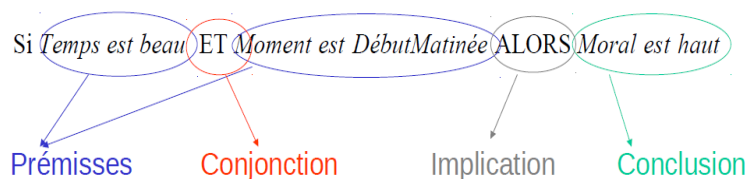
– La base de règles, composé d'un ensemble de relations liant les variables d'entrées aux variables de sorties du système à régler. Chaque relation est composée d'une condition précédée du symbole Si appelée prémisse, et d'une conclusion (action, décision, opération ou commande) précédée du symbole Alors.

– Le moteur d'inférence réalise le traitement numérique des règles d'inférence, décrites par des opérateurs flous, pour obtenir la sortie linguistique ou floue du régulateur.

#### ► Interface de Défuzzification

La transformation d'une information floue en une information déterminée est la défuzzification (concrétisation). Pendant cette étape se fait la déduction de la grandeur de sortie numérique à partir de l'inférence floue. Il s'agit de calculer, à partir des degrés d'appartenance à tous les





ensembles flous des variables d'entrées et des ensembles flous de la variable de sortie, une valeur numérique de la variable de sortie en utilisant un ensemble de règles. Parmi les stratégies de défuzzification, on cite la méthode du centre de gravité, la méthode du maximum et la méthode de la moyenne des maximums.

Ces différentes étapes sont reprises en détail ci-après.

### 3.3 Les trois étapes de construction d'un modèle de logique floue

#### 3.3.1 La fuzzification

Cette première étape consiste à transformer les variables (d'entrée et de sortie) en variables linguistiques :

- Pour chaque variable, on définit dans un premier temps l'univers du discours (i.e. la plage de valeurs que peut prendre la variable).
- La variable est ensuite découpée en catégories appelées variables linguistiques
- Une fonction (allant de 0% à 100%) permettant de définir pour chaque variable son pourcentage de véracité à l'affirmation : « l'observation est dans telle catégorie » est affectée à chaque catégorie

Cette étape est principalement réalisée sur la base d'observations statistiques (ou par apprentissage, supervisé ou non, pour regrouper les valeurs d'une variable en catégories homogènes) ou à dire d'expert. Les graphiques ci-après sont tracés en prenant l'exemple de la taille. Ainsi, dire

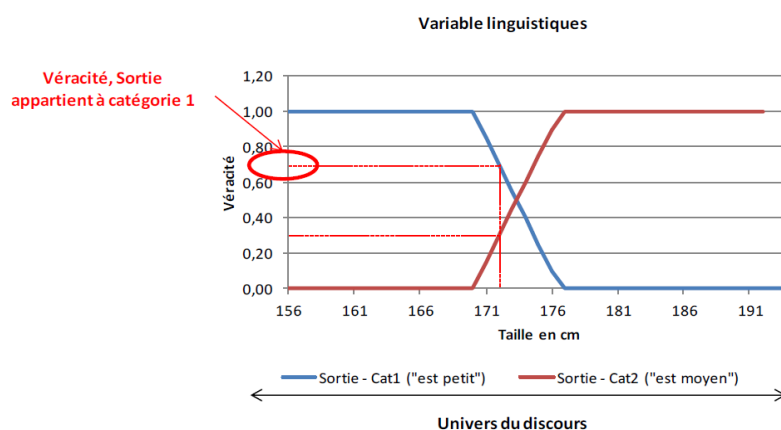


FIGURE 3.7 – Fonction de véracité.

que la sortie est dans la catégorie 1 si la variable en sortie vaut 75% a une véracité de 70% et

une véracité de 30% pour la catégorie 2.

- **Univers du discours** : taille en cm comprise entre 156cm et 194cm
- **Variable linguistique** : nom de la variable de sortie (par exemple la taille)
- **Valeurs linguistiques** : « Cat1 » (petit), « Cat2 » (moyen).

### 3.3.2 L'inférence floue

#### a. Construction d'un ensemble de règle

Sur la base des catégories précédemment réalisées, un ensemble de règles sont construites. Par exemple : « Variable 1 Catégorie 1 et Variable 2 Catégorie 1 ».

Une véracité (le degré d'appartenance) pour chacune des règles est alors calculée. La construction de ces règles, principalement basée sur des « ET », des « OU » et des « ALORS », se traduit mathématiquement de la sorte.

#### b. Matrice de décision

Chaque règle se voit attribuer une réponse au travers d'une matrice de décision.

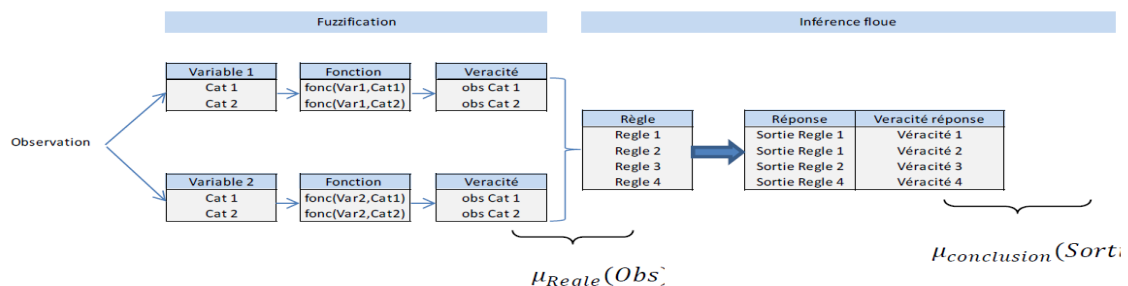
Sortie	Var 2 Cat 1	Var 2 Cat 2
Var 1 Cat1	Cat1	Cat 2
Var 1 Cat2	Cat 2	Cat 1

FIGURE 3.8 – Matrice de décision.

Ceci pouvant se réécrire :

Règle ( $i$ )	Descriptif ( $R_i$ )	Règle de sortie ( $Conclusion_{R_i}$ )
1	Var 1 Cat 1 et Var 2 Cat 1	Sortie Cat1
2	Var 1 Cat 1 et Var 2 Cat 2	Sortie Cat2
3	Var 1 Cat 2 et Var 2 Cat 1	Sortie Cat2
4	Var 1 Cat 2 et Var 2 Cat 2	Sortie Cat1

A cette étape, une observation suit donc le parcours suivant :



#### c. Implication : calcul de la règle d'activation

Il reste à définir une règle d'activation afin d'obtenir une réponse unique. Cette étape s'appelle l'implication. Elle peut être effectuée au travers de deux règles :

Notons  $x_0 = (Var1, Var2)$  les caractéristiques de l'individu.

- **Larsen** :  $\mu'_{conclusion_{R_i}} : y \mapsto \mu_{premise_{R_i}}(x_0) \times \mu_{conclusion_{R_i}}(y)$

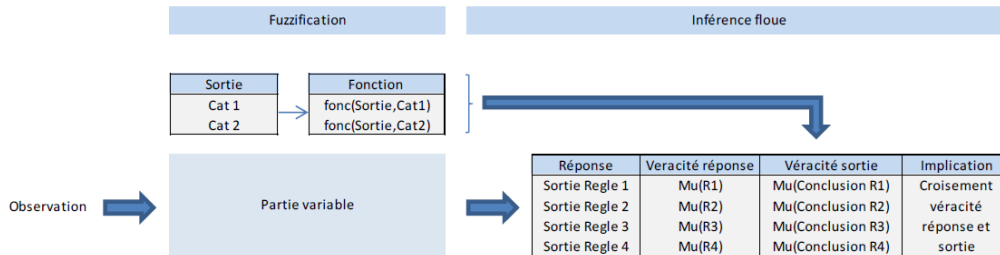
- **Mamdani** :  $\mu'_{conclusion_{R_i}} : y \mapsto \min_y(\mu_{premise_{R_i}}(x_0), \mu_{conclusion_{R_i}}(y))$

Avec :

-  $\mu_{R_i}$  est le degré d'activation de la règle.

- la fonction d'appartenance de l'ensemble flou de sortie en fonction de la règle de décision.

Il conviendra de garder en mémoire que  $\mu_{conclusion_{R_i}}$  est une fonction.



En prenant l'implication de Mamdani et en reprenant le graphique associé à la règle de sortie et en supposant :

Veracité réponse	Valeur de véracité
Véracité 1	70%
Véracité 2	0%
Véracité 3	40%
Véracité 4	0%

On obtient :

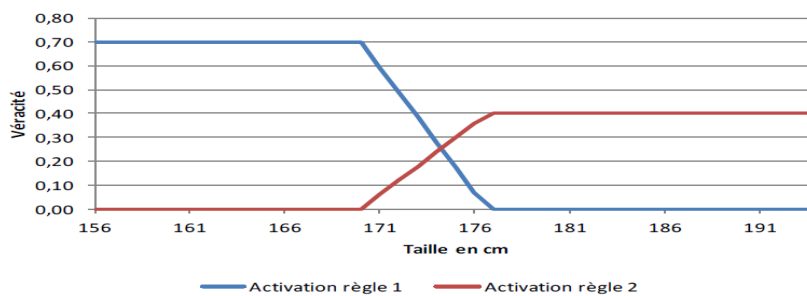


FIGURE 3.9 – Activation.

**Remarque** : L'implication donne naissance à une courbe dans le sens où :

- La variable d'entrée donne naissance à des véracités (en traversant les différentes règles).

- La variable de sortie (associée à chaque règle) est également une fonction de véracité pour chaque modalité.

**d. L'agrégation**

Cette quatrième étape de l'inférence consiste à regrouper toutes les règles. Ce regroupement est donc effectué à base de « Ou » logiques, ce qui se traduit par des « Max ». En reprenant le graphique :

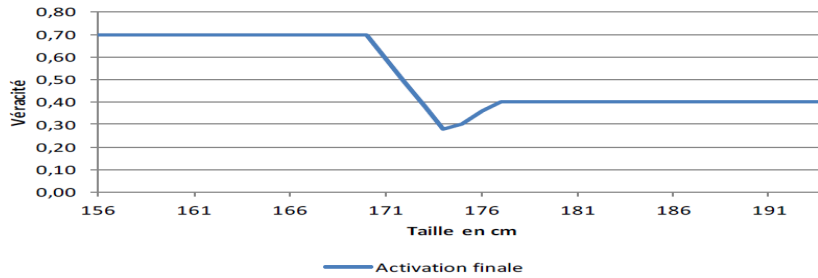


FIGURE 3.10 – Activation finale.

**3.3.3 La défuzzification**

Dernière étape de la logique floue, elle a pour objectif de transformer la courbe d'activation finale obtenue lors de l'étape d'agrégation en une valeur réelle.

Deux méthodes sont alors applicables pour obtenir la valeur retenue de la variable à prédire :

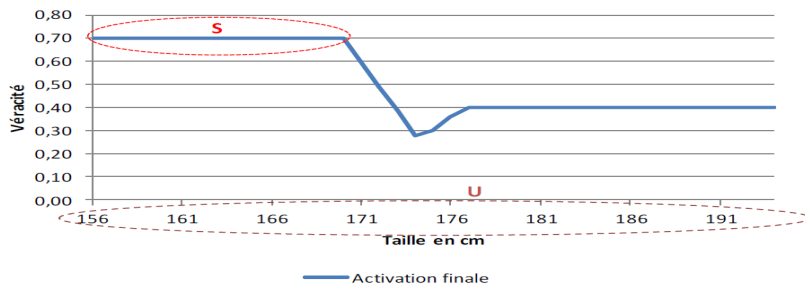
**Méthode de la moyenne des maxima :**

Correspond à la moyenne des valeurs de sortie les plus vraisemblables.

$$MM : Y_{MM} = \frac{\int_S y dy}{\int_S dy}$$

Où :

$$S = \{y_0 \in U \mid \mu(y_0) = \sup_{y \in U} \mu(y)\}$$



**Méthode des centres de gravité :**

Abscisse du centre de gravité de la surface de la courbe de résultats.

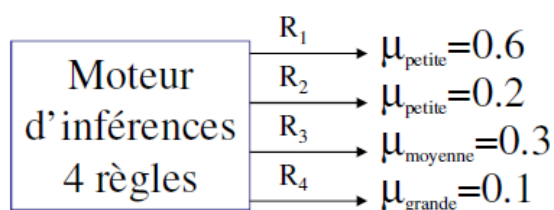
$$COG : Y_{COG} = \frac{\int_U y \mu(y) dy}{\int_U \mu(y) dy}$$

Avec :

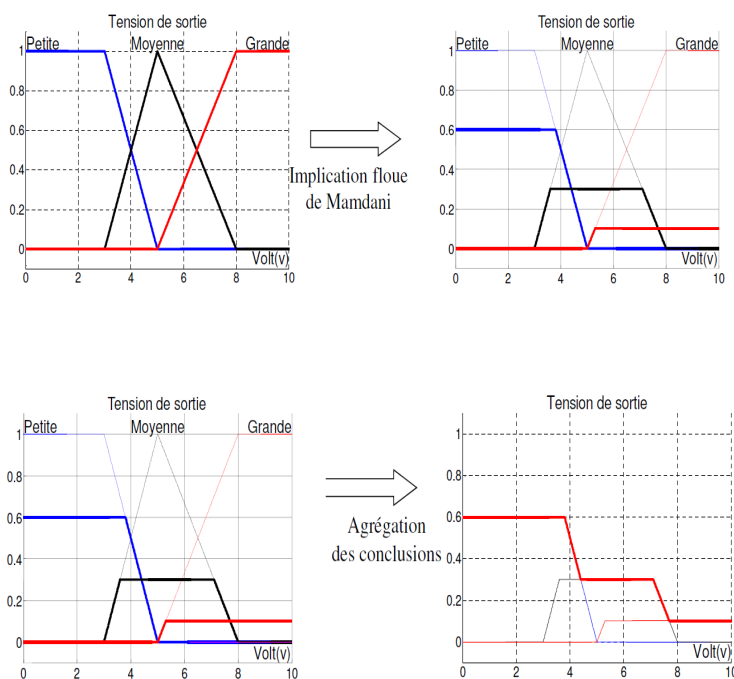
$U$  = Univers du discours = Toutes les valeurs de sorties considérées.

Cette méthode semble préférable (et plus cohérente avec les principes de la logique floue) dans le sens où elle intègre le fait qu'un individu peut appartenir à deux catégories en même temps. On notera l'analogie avec un calcul d'espérance probabiliste (le dénominateur est un facteur de normalisation permettant de prendre en compte le fait que la véracité est supérieure à 100%).

**Exemples 13.** On considère un moteur d'inférence à 4 règles qui fournit pour la sortie de tension  $S_1$ , les résultats suivants :



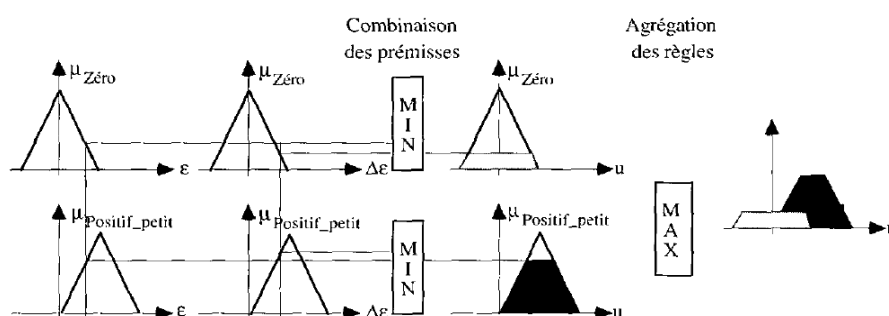
On applique les trois étapes principales dans la théorie floue pour pouvoir définir une tension finale,



Nous avons la fonction d'appartenance d'un ensemble flou qui caractérise le résultat,

Il faut défuzzifier, c'est à dire :

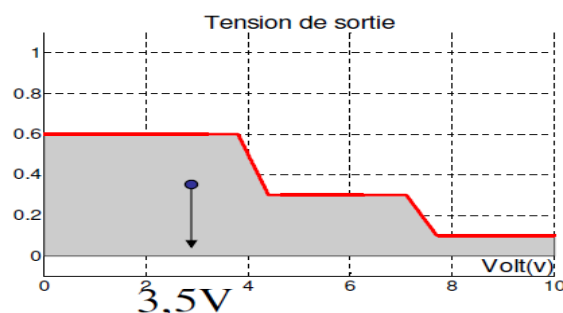
Associer à cette ensemble flou un nombre interprétable par l'utilisateur, l'interface de commande...



### 1. Méthode du centre de gravité (COG)

C'est l'abscisse du centre de gravité de la surface sous la courbe résultat

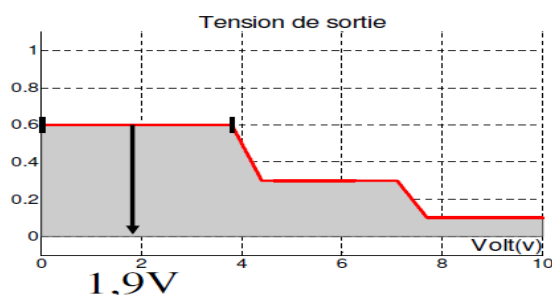
$$\text{Sortie} = \frac{\int_U y \mu(y) dy}{\int_U \mu(y) dy}$$



2. Méthode moyenne des maximums (MM) : C'est la moyenne des valeurs de sorties les plus vraisemblables

$$\text{sortie} = \frac{\int_S y dy}{\int_S dy}$$

Où  $S = \{y_0 \in U \mid \mu(y_0) = \sup_{y \in U} \mu(y)\}$



### Remarque

En commande floue, la défuzzification COG est presque toujours utilisée. Elle prend en compte l'influence de l'ensemble des valeurs proposées par la solution floue.

### 3.4 Optimisation Floue

On parle d'optimisation floue lorsqu'il s'agit de résoudre un problème d'optimisation avec des contraintes et des objectifs flexibles, imprécis ou incertains, en utilisant des ensembles flous. En général, les ensembles flous sont utilisés dans l'optimisation floue de deux façons :

1. Pour représenter l'incertitude dans les fonctions à optimiser (les objectifs).
2. Pour représenter la flexibilité dans les contraintes et les objectifs.

Dans le premier cas, les ensembles flous représentent des formulations générales d'intervalles manipulés à l'aide des règles floues.

Dans le second cas, les ensembles flous sont utilisés pour représenter des degrés de satisfaction des contraintes ou/et des niveaux désirés pour les fonctions objectifs, étant donnée la flexibilité dans la formulation. En effet même si les contraintes et les objectifs sont donnés par des fonctions classiques (déterministes) ils peuvent représenter une certaine flexibilité dont on peut avoir intérêt à tenir compte au cours de l'optimisation.

#### 3.4.1 Résolution de problèmes à objectifs multiples par la logique floue

Le principe d'application de la logique floue à la résolution d'un problème à objectifs multiples est illustré à la Figure suivante :

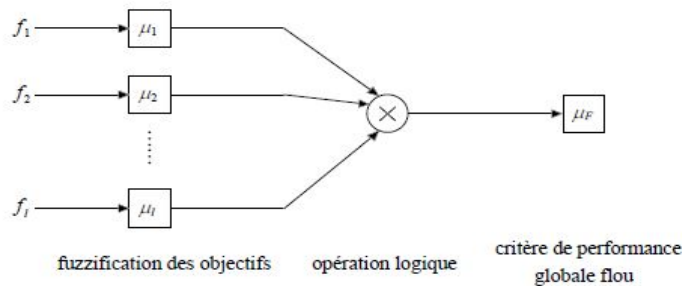


FIGURE 3.11 – Principe de l'optimisation multi-critères par la logique floue.

Chaque objectif  $f_k$  est fuzzifié à l'aide d'une fonction d'appartenance  $\mu_k$  et regroupé dans un indicateur flou  $\mu_F$  caractérisant la performance globale du système. Les fonctions d'appartenance doivent être définies de telle manière qu'elles "tendent" vers 1 lorsque l'objectif correspondant tend à être obtenu.

Par suite, l'ensemble des objectifs est pris en compte dans l'indicateur flou de performance globale, au moyen de l'opérateur d'intersection :

$$\mu_F = \min_{k=1, \dots, l} \{ \mu_k(f_k(x)) \}$$

Le problème d'optimisation à objectifs multiples est ainsi transformé en un problème scalaire équivalent, formulé terme de maximisation, dont la fonction objectif est donnée par  $\mu_F(x)$ . La solution optimale du problème  $x^*$  s'obtient selon :

$$x^* = \max_{x \in I} \mu_F(x) = \max_{x \in I} \min_{k=1, \dots, l} \mu_k(f_k(x))$$

L'approche de l'optimisation multi-critères par la logique floue est bien appropriée lorsque l'on a une idée précise sur les objectifs que l'on souhaite obtenir et sur la tolérance admissible pour chacun d'eux. Par contre, si on cherche à minimiser plusieurs critères simultanément, il n'est pas toujours facile de déterminer a priori l'ordre de grandeur optimal de chaque critère. La définition des fonctions d'appartenance est alors problématique.

### 3.5 Conclusion

Pour résumer le mécanisme de la commande floue, nous pouvons établir le schéma suivant :

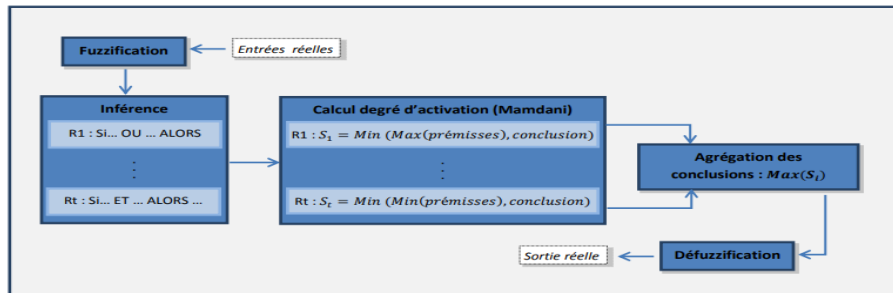


FIGURE 3.12 – Mécanisme de la commande floue.

La commande floue est à ce jour l'un des domaines de la logique floue où il existe le plus de réalisations dans le monde réel. Cette méthode suit toujours le même schéma en trois étapes, à savoir, la fuzzification, l'inférence puis la défuzzification. Le mécanisme d'inférence utilise la plupart du temps l'agrégation de Mamdani, même s'il existe d'autres méthodes telles que la méthode de Larsen.

Cette technique de commande floue est souvent appréciée par les ingénieurs et chercheurs pour sa possible introduction de connaissances linguistiques à son système. Même si cela peut entraîner un manque de stabilité comme nous avons pu le voir lors du choix de la méthode de défuzzification, la commande floue est implicitement robuste parce qu'elle est fondée sur l'expertise humaine. A tout moment, l'expert peut se permettre d'effectuer des modifications que ce soit dans les règles d'inférence ou les méthodes choisies.

Cependant, cette possibilité de pouvoir maîtriser un procédé à comportement complexe avec une conception simple ne garantit pas toujours la cohérence des inférences. En effet, certaines contradictions dans les règles peuvent apparaître. Même si de nombreuses études ont déjà montré l'efficacité de la commande floue, certains chercheurs ont préféré se tourner vers d'autres méthodes d'assimilation des imperfections telles que la régression floue.



# Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la modélisation de l'incertitude des données dans les problèmes d'optimisation. Nous avons présenté les différentes approches utilisées dans la littérature pour prendre en compte l'incertitude. Puis, nous nous sommes focalisés sur les approches a priori et a posteriori et plus précisément sur les approches déterministes comme les approches robustes, l'analyse de sensibilité et des approches flous

En pratique l'application des approches probabilistes et floue est souvent difficile, puisque les connaissances a priori ne permettent pas toujours de déduire les lois de probabilité ou les degrés d'appartenance associés aux données, surtout si le problème posé est traité pour la première, et peut-être unique, fois. Pour cette raison, l'approche robuste et l'analyse de sensibilité sont de plus en plus utilisées pour intégrer l'incertitude dans les problèmes d'optimisation combinatoire.

Il est important de voir la différence entre robustesse et analyse de sensibilité. En effet, dans ce dernier contexte, une solution est déterminée pour un jeu de données fixe (un scénario unique) et une étude a posteriori est réalisée dans le voisinage de cette solution. Par contre, l'optimisation robuste conduit à considérer, a priori, plusieurs scénarios et de rechercher des solutions, qui soient bonnes dans la totalité ou la plupart des scénarios. Dans la construction des modèles robustes, les incertitudes doivent être intégrées au processus de la décision et ne sont pas le résultat d'une analyse a posteriori.

# Bibliographie

- [1] A. El Hilali Alaoui, Y. Benadada, Programation mathématique de la modélisation à la résolution, Édition Kawtar Print-Rabat , 2012. (Cité page 8-17)
- [2] A. Billionnet, "Optimisation directe, de la modélisation à la résolution par des logiciels de programmation mathématique", Dunod, 2007. (Cité page 9.)
- [3] A. Ben-Tal, A. Goryashko, E. Guslitzer, et A. Nimerovski. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, 99 : 351–376, August 2004. (Cité pages 38, 47, 48, 49 et 50.)
- [4] A. L. Soyster. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5) :1154–1157, October 1973. (Cité pages 43-50.)
- [5] A. L. Soyster. Inexact linear programming with generalized resource sets. *European Journal of Operational Research*, 3(4) :316–321, 1979. (Cité page 44.)
- [6] B. Pauwels, Optimisation sans dérivées sous incertitudes appliquée à des simulateurs coûteux, DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE 2016. (Cité pages 21-32.)
- [7] B. Roy, Robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision : une préoccupation multi facette.
- [8] B. Bouchon -Meunier – « La logique floue et ses applications » – ADDISON-WESLEY 1995.
- [9] C. Bazgan, D. Vanderpooten et H. Aissi. Min-max and min-max regret versions of some combinatorial optimization problems : a survey. Université Paris Dauphine, *Annales du LAMSADE*, (7) : 1–32, 2007.
- [10] C. Murat, V. Gabrel, Robustesse et dualité en programmation linéaire, Laboratoire d'analyse et modélisation pour aide à la décision. Université Paris-Dauphine.
- [11] D. Alevra , "Linear optimisation and extensions : problems and solutions", Springer, 2001.
- [12] D. Bertsimas et M. Sim, The price of robustness. *Operations Research* 2004, (Cité pages 38-42).
- [13] D. Werra , T.M. Liebling , J-F. Heche de "Recherche opérationnelle pour ingénieurs 1" Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2013.
- [14] D. Dubois, Henri Prade – « Fuzzy Sets and Systems : Theory and Application » – MATHEMATICS IN SCIENCE AND ENGINEERING 1980, (Cité pages 38-42).
- [15] G. Baillargeon, Programmation linéaire appliqué. édition SMG.
- [16] H. Aissi, Approximation et résolution des versions min-max et min-max regret de problèmes d'optimisation combinatoire, PhD thesis, Université Paris-Dauphine. (Cité pages 20, 25-32, 34-37.)
- [17] H. Dubedout, Optimisation de chaîne logistique et planning de distribution sous incertitude d'approvisionnement. Thèse doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Nantes 2013.

- 
- [18] H. Ouakka, Mémoire de doctorat : Contribution à l'identification et la Commande Floue d'une Classe de Systèmes Non Linéaires 2009. (Cité pages 58-60, 63-65.)
- [19] I. Averbakh. Min max regret solutions for min-max optimization problems with uncertainty, Operations Research Letters 2000. (Cité pages 34-37.)
- [20] I. Averbakh. On the complexity of a class of combinatorial optimization problems with uncertainty, Mathematical Programming 2001. (Cité pages 24.)
- [21] I. Ullah Khan, T. Ahmed, N. M. A Simplified Novel Technique for Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problems Journal of Optimization Theory and Applications. 159, pg 536-546, November 2013. (Cité pages 71-72.)
- [22] K. Shimizu et E. Aiyoshi. Necessary conditions for min-max problems and algorithm by relaxation procedure. IEEE Transaction on Automatic control, Ac-25 :62-66, 1980. (Cité pages 34-37.)
- [23] M. Hladik. Optimal value range in interval linear programming. Fuzzy Optimization and Decision Making, pg 71.
- [24] M. Inuiguchi and M. Sakawa, Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function, European Journal of Operational Research. (Cité pages 22-25, 34-37.)
- [25] N. Remli, Robustesse en programmation linéaire. Thèse doctorat, Université Paris-Dauphine, 2011 ; (Cité pages 32-34 et 43-51.)
- [26] L.A. Zadeh "Probability Theory and Fuzzy Logic", décembre 2002. Disponible sur : [http : //ins.cn.nctu.edu.tw/JAN2003/Probability, 20 Theory, 20and, 20 Fuzzy, 20 Logic. pdf](http://ins.cn.nctu.edu.tw/JAN2003/Probability,20Theory,20and,20Fuzzy,20Logic.pdf), visité le 28 septembre 2004, pg 57.
- [27] R. Kalai. Une nouvelle approche de robustesse : application à quelques problèmes d'optimisation. PhD thesis, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 2006. (Cité pages 69-70.)
- [28] R. Yager Simultaneous solution of fuzzy models : an application to economic equilibrium analysis. Fuzzy Sets and systems 115 339-349, 2000. (Cité pages 69-70.)
- [29] [https : //tel.archives-ouvertes.fr/tel-00139202](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00139202), 2007.