

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS
Algèbre, Homologie et Sécurité de l'information

Présenté par
Hirchaou Nasser

Sous la direction du Pr. **HILALI Abdelmajid**

Thème :

Les graphes triangulés et faiblement triangulés

Soutenu le 21 juin 2012

Devant le Jury :

- *Pr. Ettaouil Mohammed*
- *Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed*
- *Pr. Bekkali Mohamed*
- *Pr. GMIRA Seddik*
- *Pr. Khomsi Mohammed*

Table des matières

Remerciements	3
1 Introduction	4
1.0.1 Avant propos	4
1.0.2 Introduction	6
2 Introduction sur les graphes	7
2.1 Graphes généralités	7
2.1.1 Préliminaires	7
2.2 Graphes orientés	11
2.2.1 généralités	11
2.3 Graphes simples	14
2.3.1 généralités	14
2.4 graphes connexes	17
2.5 Graphes particuliers	19
2.5.1 Arbres	19
3 les graphes triangulés	20
3.1 Ordre d'élimination simplicial	20
3.1.1 séparateur minimal	20
3.1.2 Sommet simplicial	22
3.1.3 Algorithme : <i>Lex – BFS</i>	25
Classe des graphes triangulés	27
3.2 Arbre de cliques	27
3.3 Graphes d'intervalles	30
3.3.1 Ordres consécutifs des graphes d'intervalles	31
4 les graphes faiblement triangulés	33
4.1 Reconnaissance des graphes faiblement triangulés	35
4.1.1 Algorithme	35

Remerciements

J'ai un immense honneur à exprimer mes gratitudes et sentiments les plus respectueux envers Monsieur Abdelmajid El Hilali mon encadrant, professeur au sein du Département de Mathématiques Laboratoire Modélisation et Calcul Scientifique (LMCS), pour sa serviabilité et sa permanente disponibilité. Plus particulièrement, pour l'intérêt qu'il a porté à la réalisation de ce travail.

Je remercie en particulier, mes chers professeurs qui font partie du jury, je remercie infiniment Monsieur Bekkali Mohamed, Monsieur Gmira seddik, Monsieur Ettaouil Mohammed et Monsieur Elhilali Alaoui professeurs au sein de l'FST-FES, je les remercie tous d'avoir accepté être parmi le jury de ma soutenance du projet de fin d'étude.

Je tiens aussi à remercier une 2ème fois mon encadrant Abdelmajid El Hilali pour ses remarques pertinentes et pour le temps qu'il a consacré à la correction de ce rapport, ses bonnes manières et sa bonne qualité d'encadrer.

Je tiens à exprimer ma gratitude également, à tous mes amis au sein et à l'extérieur de l'FST-FES. Je n'oublierai pas de remercier tout le personnel de l'FST-FES qui, durant ces années, ont favorisé une vie heureuse et un milieu très agréable. Je les remercie tous sans exception, administration, scolarité, sécurité... Je vous adresse tous la même parole "merci!".

Chapitre 1

Introduction

1.0.1 Avant propos

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au *XVIII^e* siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (voir la figure ci-dessous de couverture, les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

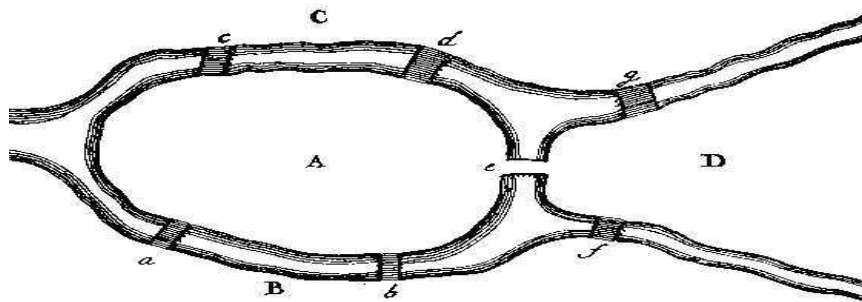
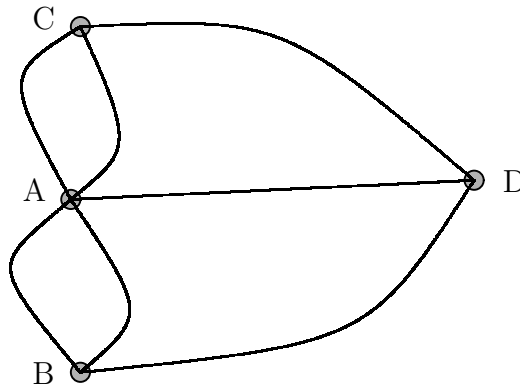


FIGURE 1.1 – La rivière Pregel et l'île de Kneiphof



Graphe associé à l'image précédente

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX^e siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, . . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

La théorie des graphes est un très vaste domaine, en evolution constante tant du point de vue des recherches fondamentales que de celui des applications. Concernant la recherches fondamentales. Elles justifient une recherche importante en algorithmique. L'importances des réseaux de transports et de communications, d'ailleurs de plus en plus des réseaux évolutifs (pour faire fonctionner des utilisateurs à des serveurs de téléphonies mobiles par exemple), explique le fonctionnement des problématiques.

Dans d'autres domaines tels que la chimie, la biologie ou encore les réseaux sociaux des modèle à base de graphe sont utilisé quotidiennement en recherche.

1.0.2 Introduction

Le plan de ce mémoire est organisé en trois chapitre le premier vas êtres consacré pour le rappelle des graphes en générale.

Dans le deuxième chapitre, on a définit la classe des graphes triangulé, on a caractérisé cette classe par l'existence d'ordre d'élimination simplicial, qui a donné lieu d'un algorithme polynomial (lex-BFS).

Dans le dernier chapitre, on a donné un algorithme en $O(n^5)$, qui reconnait le graphe faiblement triangulé.

Chapitre 2

Introduction sur les graphes

2.1 Graphes généralités

2.1.1 Préliminaires

Définition 2.1.1 *Un graphe fini G est la donnée de deux ensembles (finis) S et A et d'une application $\varphi : A \rightarrow S^2$ qui à tout élément $a \in A$ associe $\varphi(a) = (s, s')$. On note $a = ss'$, $n = |S|$ le nombre de sommets de S est l'ordre de G et $p = |A|$ le nombre d'éléments de A est sa taille. Un élément a de A est un arc de G . Un élément s de S est un sommet de G .*

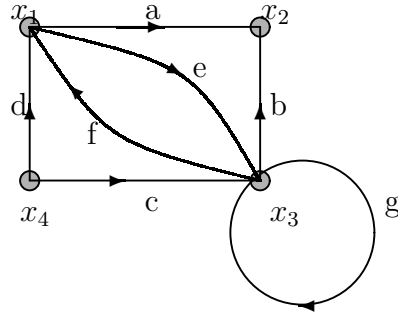
On notera $G = (S, A, \varphi)$ ou $G = (S, A)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

s et s' sont les extrémités de l'arc $a = ss'$, s est l'origine ou l'extrémité initiale de a et s' est l'extrémité terminale (ou finale). Si $s = s'$ on dit que a est une boucle.

Deux arcs sont dits parallèles s'ils ont les mêmes extrémités (initiales et finales).

Un ensemble de k arcs est appelé arc multiple, k est la multiplicité. Un k -graphe est un graphe dans lequel le maximum de multiplicité est k .

Exemple 2.1.2



Dans cet exemple, on a la représentation sagittale d'un graphe d'ordre 4.

★ $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ L'ensemble des sommets de G .

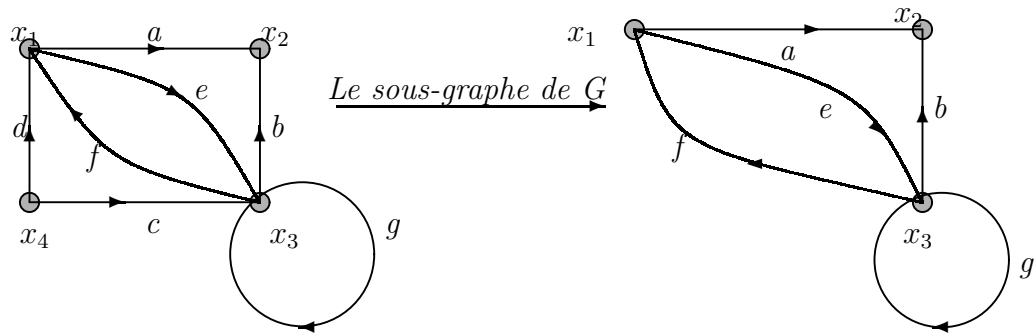
★ $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ L'ensemble des arcs de G .

★ L'arc g est une boucle.

★ L'arc $a = x_1x_2$ son origine est x_1 où l'extrémité initiale et x_2 est l'extrémité terminale (ou finale).

Définition 2.1.3 Dans un graphe $G = (S, A)$, considérons deux sous-ensembles $S' \subset S$ et $A' \subset A$, on dit que $H = (S', A')$ est un sous-graphe de G si pour tout arc a de A' , les extrémités de a sont dans S' .

Exemple 2.1.4



$H = (S', A')$ le sous graphe de G
 $A' = \{a, b, e, f, g\}$
 $S' = \{x_1, x_2, x_3\}$

Définition 2.1.5 Soit $G = (S, A)$ un graphe et $S' \subset S$, on appelle sous-graphe engendré par S' le graphe $H = (S', A')$ où A' est l'ensemble des arcs

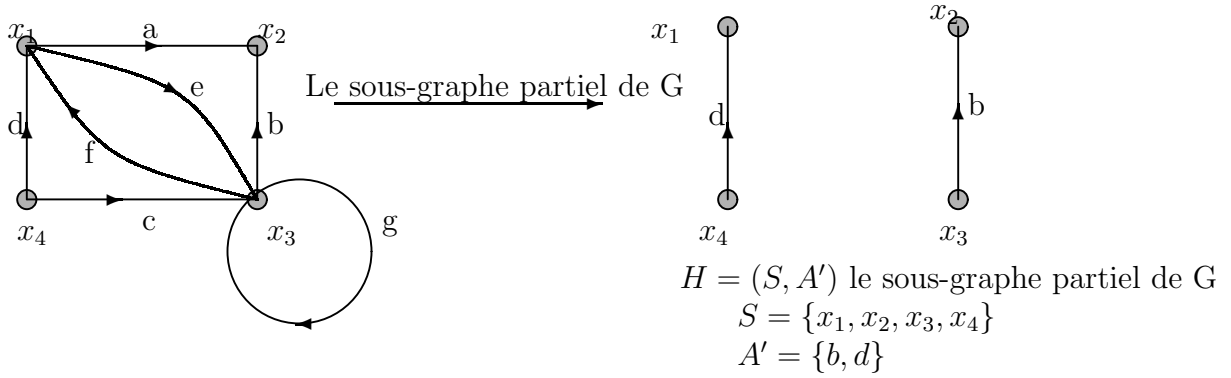
de G ayant leurs extrémités dans S' .

On note $G - s$ le sous-graphe engendré par $S' = S - \{s\}$.

Dans l'exemple précédent le sous-graphe H de G est un sous-graphe engendré.

Définition 2.1.6 Soit $G = (S, A)$ un graphe et $A' \subset A$, on appelle graphe partiel engendré par A' le graphe $H = (S, A')$. On note $G - a$ le graphe partiel engendré par $A' = A - \{a\}$.

Exemple 2.1.7



Définition 2.1.8 Deux arcs a_1 et a_2 sont dis adjacents s'ils ont au moins une extrémité commune. Deux sommets s_1 et s_2 sont dits adjacents (ou voisins) s'il existe un arc a tel que $\varphi(a) = (s, s')$ ou $\varphi(a) = (s', s)$. Un sommet s est un prédécesseur (resp. successeur) d'un sommet s' s'il existe un arc a tel que $\varphi(a) = (s, s')$ (resp. $\varphi(a) = (s', s)$). On note $\Gamma^+(s)$ l'ensemble des successeurs d'un sommet s et $\Gamma^-(s)$ l'ensemble de ses prédécesseurs. L'ensemble $\Gamma(s) = \Gamma^+(s) \cup \Gamma^-(s)$ désigne l'ensemble des voisins de s .

Dans l'exemple 1.2.2

★ les deux arcs a et b sont adjacents car ils ont une extrémité commune x_2 .

★ les deux sommets x_1 et x_2 sont adjacents car ils ont l'arc a en commun.

★ l'ensemble des prédécesseurs de x_1 et x_4 sont donné par :

- $\Gamma^+(x_1) = \{x_2, x_3\}$.
- $\Gamma^+(x_4) = \{x_1, x_3\}$.

★ l'ensemble des successeurs de x_1 et x_4 sont donné par :

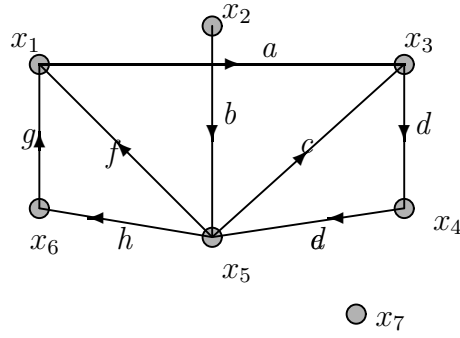
- $\Gamma^-(x_1) = \{x_3, x_4\}$.
- $\Gamma^-(x_4) = \emptyset$.

Définition 2.1.9 Soit $a = ss'$ un arc d'un graphe G . On dit que a est incident à s vers l'extérieur et incident à s' vers l'intérieur. Le nombre d'arcs incidents à s vers l'extérieur est noté $d_G^+(s)$ ou $(d_G^+(s))$ et s'appelle le demi-degré extérieur de s . Par analogie, le demi-degré intérieur de s , noté $d_G^-(s)$ ou $(d_G^-(s))$ est le nombre d'arcs incidents à s vers l'intérieur. Le degré $d_G(s)$ ou $(d_G(s))$ est égal à $d^+(s) + d^-(s)$.

Si $d_G(s)$ est pair (resp. impair) alors le sommet s est dit pair (resp. impair). Si $d_G(s) = 0$ le sommet s est dit isolé, si $d_G(s) = 1$ le sommet s est dit pendant.

Un arc est pendant s'il est incident à un sommet pendant.

Exemple 2.1.10



Dans cet exemple on a que :

- ★ Le demi-degré intérieur de x_5 est donné par $d_G^-(x_5) = 3$.
- ★ Le demi-degré extérieur de x_5 est donné par $d_G^+(x_5) = 2$.
- ★ Le degré de x_7 est nul ($d_G(x_7) = 0$) car il est isolé.
- ★ Le sommet x_2 est pendant car son degré est égal à 1 ($d_G(x_2) = 1$).
- ★ L'arc b est pendant car il est incident à un sommet pendant x_2 .

Remarque 2.1.11 $d^+(s) \geq |\Gamma^+(s)|$ et $d^-(s) \geq |\Gamma^-(s)|$

Théorème 2.1.12 Soit $G = (S, A)$ un graphe de taille p . Alors :

- $\sum_{s \in S} d^+(s) = \sum_{s \in S} d^-(s) = p$ et donc $\sum_{s \in S} d(s) = 2p$.
- le nombre de sommets impairs est pair.

Définition 2.1.13 Un chemin dans un graphe $G = (S, A)$ est une suite alternée finie C de sommets et d'arcs $C = [s_1 a_1 s_2 a_2 \dots s_n]$ ($n \geq 1$) telle que $\varphi(a_i) = (s_i, s_{i+1})$ et on note $C = [s_1 s_2 \dots s_n]$, s_1 est l'extrémité initiale ou origine de C et s_n son extrémité finale. La longueur $l(C)$ du chemin C est égale au nombre d'arcs qu'il comporte (un arc peut éventuellement être répété). Si un arc ne figure plus d'une fois dans le chemin, ce dernier est dit simple. Si aucun sommet ne figure plus d'une fois dans le chemin, ce dernier est dit élémentaire.

Remarque 2.1.14 Un chemin élémentaire est un chemin simple.

Si $C = [s_1]$ c'est le chemin nul par convention.

Définition 2.1.15 Un circuit dans un graphe $G = (S, A)$ est un chemin C de la forme $C = [s_1 a_1 s_2 a_2 \dots s_1]$. De façon analogue on définit un circuit simple et un circuit élémentaire.

Définition 2.1.16 Un sous-chemin d'un chemin $C = [s_1 s_2 \dots s_n]$ est un chemin de la forme $C = [s_i s_{i+1} \dots s_j]$ tel que $1 \leq i \leq j \leq n$.

Définition 2.1.17 La somme de deux chemins $C_1 = [s_1 s_2 \dots s_k]$ et $C_2 = [s_k s_2 \dots s_j]$ est un chemin $C = [s_1 s_2 \dots s_k s_{k+1} \dots s_j]$. On note $C = C_1 + C_2$.

Théorème 2.1.18 De tout chemin $C = [s_1 s_2 \dots s_k]$ de G on peut extraire un chemin élémentaire C' ayant s_1 pour origine et s_n pour extrémité.

2.2 Graphes orientés

2.2.1 généralités

Définition 2.2.1 Un graphe orienté fini $G = (S, A)$ est la donnée d'un ensemble fini non vide de sommets S et d'un ensemble d'arcs $A \subset S \times S$. Si $a = (s, s') \in A$, on dit que a est un arc de s à s' , on note $a = ss'$. Si $s = s'$,

on dit alors que a est une boucle en s . les sommets s et s' sont adjacents si $(s, s') \in A$ ou $(s', s) \in A$. L'ordre du graphe orienté G est par définition est le cardinal $|S|$ de S et sa taille le cardinal $|A|$ de A .

Remarque 2.2.2 Un graphe orienté fini $G = (S, A)$ est donc la donnée d'un ensemble fini non vide de sommets S et d'une relation binaire A définie sur S . Le graphe G sera dit réflexif (resp antiréflexif), symétrique (resp antisymétrique) ou transitif selon que la relation binaire A est réflexive (resp antiréflexive), symétrique (resp antisymétrique) ou transitive.

Définition 2.2.3 Un chemin dans un graphe orienté fini $G = (S, A)$ est une suite alternée finie C de sommets et d'arcs de G , $C = [s_1 a_1 s_2 a_2 \dots s_n]$ telle que $\varphi(a_i) = (s_i, s_{i+1})$. On note $C = [s_1 s_2 \dots s_n]$, s_1 est l'extrémité initiale ou origine de C et s_n son extrémité finale. La longueur $l(C)$ du chemin du chemin C est égale au nombre d'arcs qu'il comporte (un arc peut éventuellement être répété).

Le chemin C est un circuit si $s_1 = s_n$.

Si un arc ne figure plus d'une fois dans le chemin, ce dernier est dit simple. Si aucun sommet ne figure plus d'une fois dans le chemin (sauf peut être s_1 et s_n), ce dernier est alors dit élémentaire. De façon analogue, on définit un circuit simple et un circuit élémentaire.

Pour tout sommet s , on admet le chemin $C = [s]$ de longueur 0, qui est un circuit de s à s .

Une chaîne de s_1 à s_n de longueur $n-1$ est une suite de sommets $[s = s_1 s_2 \dots s' = s_n]$ telle que pour tout $i = 1..n-1$, $(s_i, s_{i+1}) \in A$ ou $(s_{i+1}, s_i) \in A$. La chaîne C est un cycle si $s = s'$. De façon analogue on définit un cycle simple et un cycle élémentaire.

Définition 2.2.4 Dans un graphe orienté $G = (S, A)$, considérons deux sous-ensembles $S' \subset S$ et $A' \subset A$, on dit que $H = (S', A')$ est un sous-graphe de G si pour tout arc a de A' , les extrémités de a sont dans S' .

Définition 2.2.5 Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $S' \subset S$, on appelle sous-graphe engendré par S' le graphe $H = (S', A')$ où A' est l'ensemble des arcs de G ayant leurs extrémités dans S' .

On note $G - s$ le sous-graphe engendré par $S' = S - \{s\}$.

Définition 2.2.6 Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté et $A' \subset A$, on appelle graphe partiel engendré par A' le graphe $H = (S, A')$. On note $G - a$ le graphe partiel engendré par $A' = A - \{a\}$.

Définition 2.2.7 Soit $a = ss'$ un arc d'un graphe orienté G . On dit que a est incident à s vers l'extérieur et incident à s' vers l'intérieur. Le nombre d'arcs incidents à s vers l'extérieur est noté $d_G^+(s)$ ou $(d^+(s))$ et s'appelle le demi-degré extérieur de s . Par analogie, le demi-degré intérieur de s , noté $d_G^-(s)$ ou $(d^-(s))$ est le nombre d'arcs incidents à s vers l'intérieur. Le degré $d_G(s)$ ou $(d(s))$ est égal à $d^+(s) + d^-(s)$.

Si $d(s)$ est pair (resp. impair) alors le sommet s est dit pair (resp. impair). Si $d(s) = 0$ le sommet s est dit isolé, si $d(s) = 1$ le sommet s est dit pendant. Un arc est pendant s'il est incident à un sommet pendant.

Remarque 2.2.8 $d^+(s) = |\Gamma^+(s)| = |\{s' \text{ tel que } (s, s') \in A\}|$ et $d^-(s) = |\Gamma^-(s)| = |\{s' \text{ tel que } (s', s) \in A\}|$.

Définition 2.2.9 Un graphe orienté $G = (S, A)$ est fortement connexe si pour tout couple (s, s') de sommets il existe un chemin de s à s' .

Un graphe orienté $G = (S, A)$ est simplement connexe si pour tout couple (s, s') de sommets il existe une chaîne de s à s' .

S'il existe un chemin joignant deux sommets a et b , on notera $a \rightarrow b$. Si $a \rightarrow b$ et $b \rightarrow a$, on dit alors que a et b sont fortement connexes et on notera $a \leftrightarrow b$.

Si on impose à la relation " $a \leftrightarrow b$ " d'être reflexive, on vérifie aisément que la relation $a \leftrightarrow b$ être fortement connexe est une relation d'équivalence sur S .

Une classe d'équivalence pour $a \leftrightarrow b$ est appelée une composante fortement connexe de G . G est donc fortement connexe s'il admet une seule composante fortement connexe.

Les sommets appartenant à un cycle maximal, i.e., un cycle auquel on ne peut ajouter de nouveaux sommets, constituent une composantes fortement connexe. Autrement dit, un graphe orienté est fortement connexe si et seulement si il existe un circuit passant par chaque sommet de celui-ci.

Définition 2.2.10 La fermeture transitive d'un graphe orienté G est le graphe orienté $\widehat{G} = (S, \widehat{A})$ défini par $(s, s') \in \widehat{A}$ s'il existe un chemin de G de s à s' .

Définition 2.2.11 Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté avec $S = \{s_1, s_2 \dots s_n\}$. La matrice d'adjacence de G est la matrice d'ordre n , $M(G) = (m_{ij})$ dont les lignes et les colonnes sont indexées par S et définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \text{ et } s_j \text{ sont adjacents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3 Graphes simples

2.3.1 généralités

Définition 2.3.1 Étant donné un ensemble fini non vide S muni d'une relation binaire $\mathcal{R}$ antiréflexive et symétrique. On désigne par A l'ensemble des paires de couples de points en relation. On appelle graphe simple la donnée du couple $G = (S, A)$. S est appelé ensemble de sommets du graphe et A est appelé ensemble des arêtes du graphe simple G .

Le graphe simple particulier $G = (S, \emptyset)$ est appelé graphe discret.

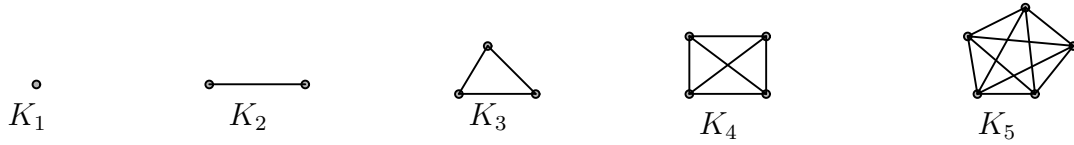
Définition 2.3.2 Le nombre de sommets d'un graphe simple est appelé ordre du graphe, on le note $\text{Ord}(G)$ ou $|G|$. le nombre d'arêtes d'un graphe simple est appelé taille du graphe, on le note $\text{tail}(G)$. On parlera d'un (n, p) -graphe pour désigner un graphe d'ordre n et de taille p .

Définition 2.3.3 On considère un (n, p) -graphe simple $G = (S, A)$. Étant donné une arête $a = s_i s_j \in A$, on dit que s_i et s_j sont les extrémités de a , que a relie s_i à s_j . les sommets s_i et s_j sont alors dits adjacents (ou voisins), on doit aussi qu'ils sont incidents à l'arête a ou que l'arête a est incidente à s_i et s_j . Un sommet qui n'a pas de voisins est dit isolé. Deux arêtes sont adjacentes si elles sont incidentes à même sommet.

Un sommet s manque un sommet s' ($s \neq s'$) s'ils ne sont liés par aucune arête. un sommet manque une arête s'il manque les deux extrémités de l'arête. On dira qu'un sommet voit une arête s'il n'est pas incident à cette arête et s'il est lié à au moins une de ses extrémités par une arête.

On dit que le graphe simple G est complet, et on note K_n , si deux sommets quelconques de G sont adjacents.

Exemple 2.3.4



Définition 2.3.5 A tout (n, p) -graphe simple on associe sa matrice d'adjacence $M(G)$. C'est la matrice carré d'ordre n , $M(G) = (m_{ij})$ dont les lignes et les colonnes sont indexées par S et définie par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \text{ et } s_j \text{ sont adjacents} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.3.6 Étant donné un (n, p) -graphe simple $G = (S, A)$, et $s \in S$, on appelle degré de s et on note $d_G(s)$ le nombre d'arêtes de G incidentes à s .

On dira que le sommet s est pendant si son degré est un.

Le degré d'un sommet isolé est nul.

Définition 2.3.7 $s \in S$ est dit pair si $d_G(s)$ est pair et impair sinon.

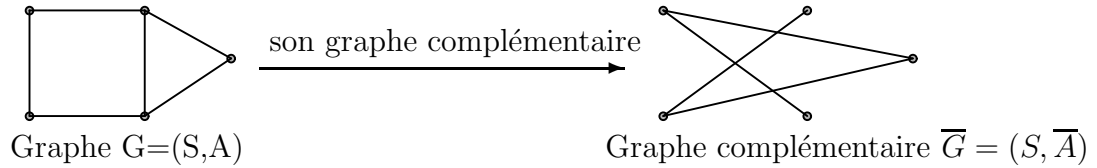
Définition 2.3.8 Soient $G = (S, A)$ un graphe simple et deux sous-ensembles $S' \subseteq S$, $A' \subseteq A$. On dit que $H = (S', A')$ est un sous-graphe de G si pour toute arête a de H les extrémités de a sont dans S' . Si en plus $S = S'$, le graphe $H = (S', A')$ est dit alors sous-graphe partiel de G .

Définition 2.3.9 Soit $G = (S, A)$ un graphe simple et $S' \subseteq S$, on appelle sous-graphe engendré par S' le graphe $H = (S', A')$ où A' est l'ensemble des arêtes de G ayant leurs extrémités dans S' . On note $G - \{s\}$ le sous-graphe engendré par $S - \{s\}$.

Définition 2.3.10 Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. Si s et s' sont deux sommets non adjacents de G . On définit le graphe $G + a$ en ajoutant l'arête $a = ss'$ au graphe G . $G + a = (S, A')$ où $A' = A \cup \{a\}$.

Définition 2.3.11 Soit $G = (S, A)$ un (n, p) -graphe simple et $K_n = (S, A')$ le graphe complet dont l'ensemble des sommets est S . On appelle complémentaire de G , le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$ où $\overline{A} = A' \setminus A$.

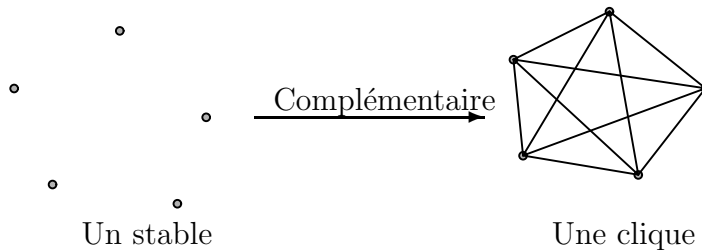
Exemple 2.3.12



Définition 2.3.13 Soient $G = (S, A)$ graphe simple et C une partie de S . On dira que C est une clique de G si le graphe $G[C]$ engendré par C est un graphe complet. On dira que C est une clique maximale de G si C est une clique et si le graphe $G[B]$ n'est pas complet chaque fois que C est strictement contenue dans B .

Une partie I de S est dite stable ou indépendante si le graphe complémentaire du graphe engendré par I est complet.

Exemple 2.3.14



Définition 2.3.15 On appelle chemin une suite finie de sommets $(s_1 \dots s_m)$ ($m \geq 2$) telle que pour tout $1 \leq i \leq m-1$, $s_i s_{i+1} \in A$. On notera $C = [s_1 \dots s_m]$ ou $C = (s_1 \dots s_m)$. L'entier $m-1$ s'appelle la longueur du chemin. Les sommets s_1 et s_m sont appelés les extrémités du chemin.

Un cycle de longueur $m-1$ est un chemin $\mu = (s_1 \dots s_m)$ tel que $s_1 = s_m$, étant entendu qu'un cycle est défini modulo l'équivalence $(s_1, \dots, s_m) \cong (s_i, \dots, y_{i-1})$.

On convient qu'on chaque sommet s on a un cycle de longueur 0.

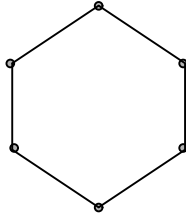
Un chemin de longueur strictement supérieur à un dont toutes les arêtes sont distinctes est dit simple.

Un chemin de longueur strictement supérieur à un dont tous les sommets (sauf éventuellement s_1 et s_m) sont distincts est dit élémentaire.

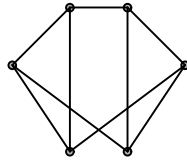
Un cycle élémentaire est un chemin élémentaire fermé ayant au moins trois arêtes (seuls les sommets d'extrémité sont identiques).

Les arêtes de G de la forme $s_i s_j$ avec $|i - j| > 1$ sont appelées les cordes du chemin. Lorsque le cycle n'a pas de corde, on parle de cycle sans corde.

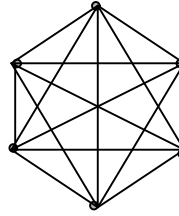
On appelle trou tout graphe T ayant au moins quatre sommets et dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former un cycle sans corde de T . Un graphe est un antitrou si son graphe complémentaire est un trou. On note par C_n (resp. $\overline{C}_n$) un trou (resp., antitrou) avec n sommets (voir figure 1). Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.



C_6



$\overline{C}_6$



K_6

2.4 graphes connexes

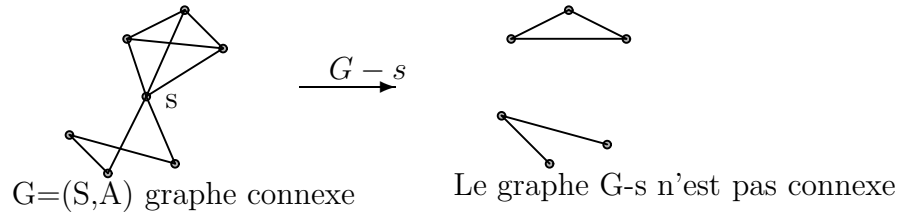
Définition 2.4.1 Deux sommets s, s' d'un graphe simple $G = (S, A)$ sont connectés s'ils sont liés par un chemin, ce que l'on notera $x \sim y$. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur S . Une classe d'équivalence pour $\sim$ est une composante connexe de G . Le graphe simple G est dit connexe si $X \setminus \sim$ contient une seule classe d'équivalence, i.e., G possède une seule composante connexe. Autrement dit, pour toute paire de sommets, il existe un chemin les joignant. On supposera de plus que $G = (\{s\}, \emptyset)$ est connexe.

Remarque 2.4.2 Dans un graphe simple qui n'est pas connexe on peut aussi définir la distance entre deux sommets quelconques s et s' en posant :

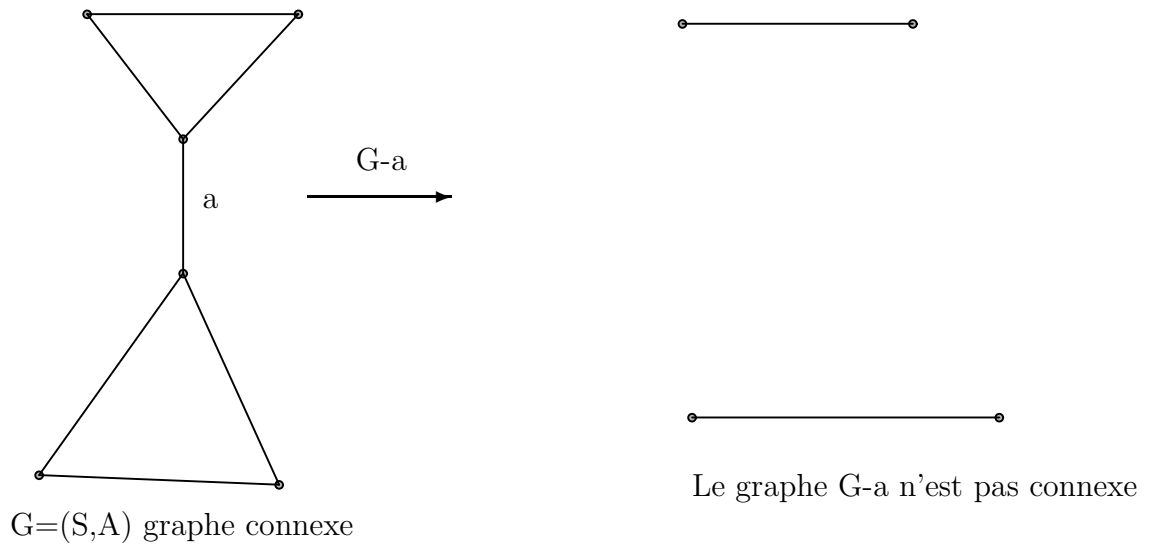
$$d(s, s') = \begin{cases} \infty & \text{s'il n'existe pas de chemin entre } s \text{ et } s'; \\ \min\{l(C) \mid C \text{ est un chemin de } s \text{ à } s'\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.4.3 Soit $G = (S, A)$ un graphe simple connexe (d'ordre ≥ 2). Un sommet s est un point d'articulation de G si $G - s$ est non connexe. Une arête est un pont de G si $G - a$ est non connexe.

Exemple 2.4.4 de sommet s d'articulation



Exemple 2.4.5 d'arc a est un pont



Théorème 2.4.6 Un sommet s d'un graphe simple connexe G est un point d'articulation de G si et seulement si il existe deux sommets s' et s'' distincts de s tels que s appartient à chaque chemin élémentaire reliant s' et s''

Théorème 2.4.7 Soit a une arête de G . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

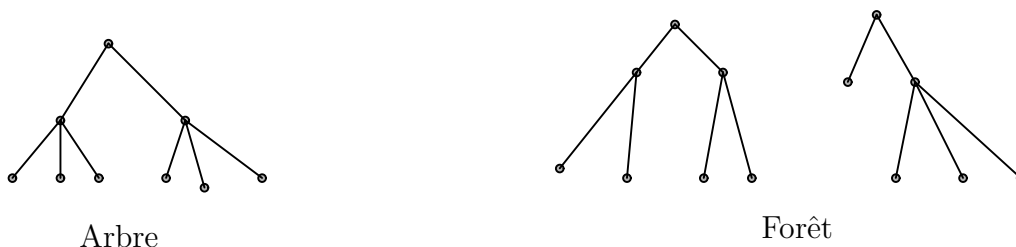
- i) a est un pont.
- ii) a n'appartient à aucun cycle élémentaire de G .
- iii) Il existe deux sommets s' et s'' de G tels que a appartient à tout chemin élémentaire reliant s' et s'' .

2.5 Graphes particuliers

2.5.1 Arbres

Définition 2.5.1 On appelle arbre tout graphe simple connexe sans cycle.
On appelle forêt tout graphe simple sans cycle.

Exemple 2.5.2



Remarque 2.5.3 Tout sous-graphe engendré d'un arbre est un arbre.

Lemme 2.5.4 Tout arbre d'ordre $n \geq 2$ possède au moins deux sommets pendants.

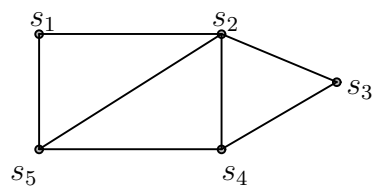
Proposition 2.5.5 Soit $G = (S, A)$ un (n, p) graphe-simple. les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) G est un arbre.
- ii) Il existe une unique chemin élémentaire joignant deux sommets quelconques de G .
- iii) G est connexe et $n = p + 1$
- iv) G est acyclique et si on joint tout couple de sommets non adjacents par une arête a , alors $G + a$ possède exactement un seul cycle.
- v) G est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe.

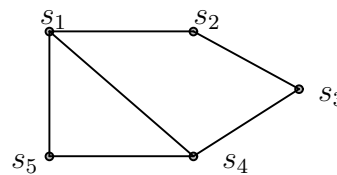
Chapitre 3

les graphes triangulés

Définition 3.0.6 *Un graphe $G=(S,A)$ est triangulé si tout cycle de longueur ≥ 4 admet une corde.*



Graphe triangulé



Graphe n'est pas triangulé
contient un cycle de longueur 4
 $\mu = (s_1, s_2, s_3, s_4)$

Le premier enseignement issu de la définition des graphes triangulés est que cette classe est une classe héréditaire ; c'est ce qu'affirme le lemme suivant :

Lemme 3.0.7 *Tout sous-graphe engendré d'un graphe triangulé est triangulé.*

Preuve: En effet, la suppression d'un quelconque ensemble de sommets S de G ne peut en aucun cas créer de cycle sans corde.

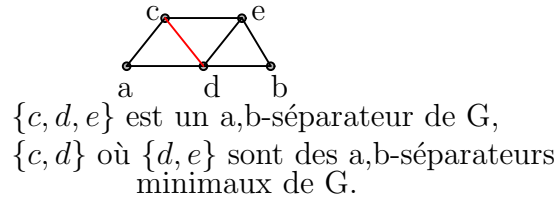
3.1 Ordre d'élimination simplicial

3.1.1 séparateur minimal

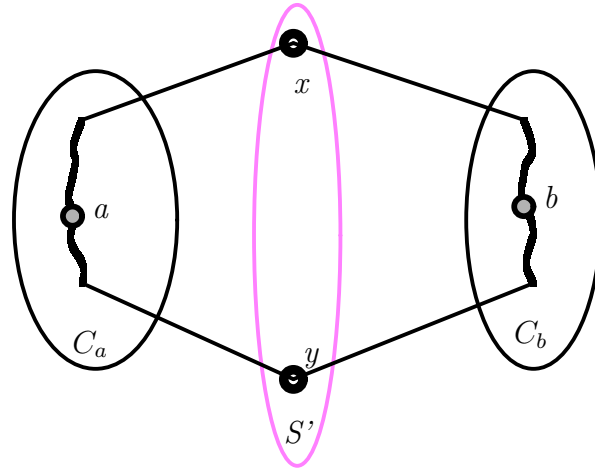
Définition 3.1.1 *Le sous-ensemble de sommets $S' \subset S$ est un **séparateur** de G s'il existe deux sommets a et b non adjacents dans G et non connectés*

dans $G[S \setminus S']$. On dit alors aussi que c'est un a, b -séparateur (voir l'exemple 4.1.2). Si S minimal pour l'inclusion parmi tous les séparateurs de G , c'est un **séparateur minimal** de G .

Exemple 3.1.2



Propriété 3.1.3 Dans tout graphe triangulé G , tout séparateur minimal de G est une clique.



Tout séparateur minimal S' d'un graphe triangulé est une clique : s'il n'y avait pas d'arête entre x et y , le graphe aurait un cycle de longueur $k \geq 4$.

Preuve: Soit S' un séparateur minimal de G , alors il existe deux sommets a et b tels que S' est un a, b -séparateur de G . On appelle C_a (respectivement C_b) la composante connexe de $G[S \setminus S']$ contenant a (respectivement b).

Soient deux sommets x et y dans S' , supposons par l'absurde qu'ils ne sont pas adjacents.

Considérons alors le plus petit cycle de G contenant x, y , au moins un sommet de C_a et au moins un sommet de C_b . Comme S' est minimal, x est

adjacent d'un sommet de C_a et d'un sommet de C_b . De même, y est adjacent d'un sommet de C_a et d'un sommet de C_b , comme illustré dans l'exemple précédent. Et aucun sommet de C_a n'est adjacent d'un sommet de C_b donc un tel cycle existe a une longueur supérieure ou égale à 4 (il doit passer successivement par x , C_a , y et C_b).

Or G est un graphe triangulé donc ce cycle contient une corde, l'arête (x, y) (par minimalité du cycle et puisqu'un sommet de C_a ne peut être adjacent d'un sommet de C_b) : contradiction ! $\diamond$

Cette propriété est utile pour la démonstration des lemmes suivants, qui permettent d'aboutir au théorème 3.1.8 de caractérisation des graphes triangulés à l'aide du parcours LexBFS.

LexBFS signifie la recherche en profondeur.

3.1.2 Sommet simplicial

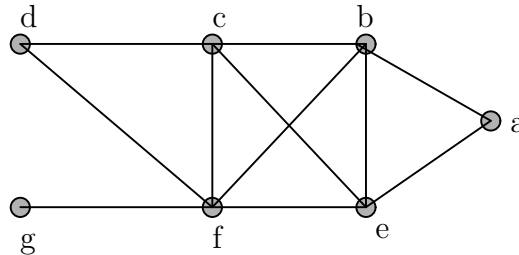
Définition 3.1.4 Soit $G=(S,A)$ un graphe simple, on dira que s est simplicial si son voisinage $N_G(s)$ est une clique.

où $N_G(s)$ est l'ensemble des voisins de s dans G .

Définition 3.1.5 Soit $G=(S,A)$ un graphe simple dont les sommets sont numéroté $s_1, \dots, s_n$, on note l'ensemble S_i par $\{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$ et le graphe G_i par $G[s_i, \dots, s_n]$.

On dira que $\sigma = [s_1, \dots, s_i, \dots, s_n]$ est un ordre d'élimination simplicial de G , si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$, le sommet s_i est simplicial dans le graphe $G_i = G[s_i, \dots, s_n]$

Exemple 3.1.6



$\sigma = [a, g, e, d, b, f, c]$ est un ordre d'élimination simplicial

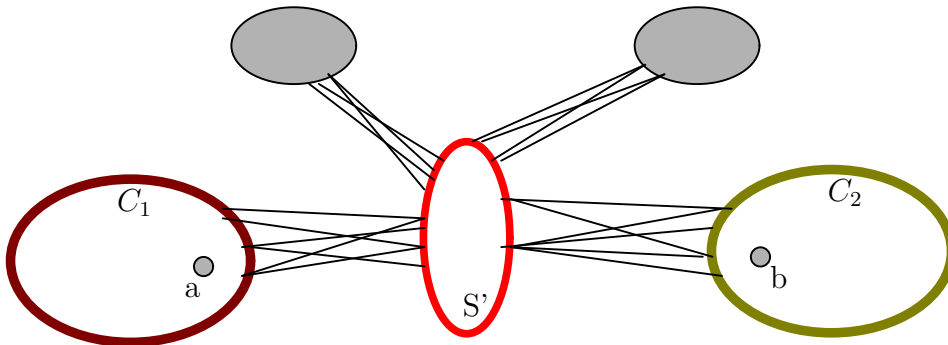
Dirac, en 1961 a montré la propriété fondamentale de l'existence de l'ordre d'élimination simplicial dans les graphes triangulés.

Lemme 3.1.7 *Tout graphe triangulé $G=(S,A)$ possède un sommet simplicial. Si G n'est pas complet, alors il possède au moins deux sommets simpliciaux non-adjacents.*

Preuve: Soit un graphe triangulé $G = (S, A)$, on procède par induction sur $n = |A|$ pour prouver la propriété suivante qui est plus forte que le lemme : tout graphe triangulé possède au moins un sommet simplicial, et si ce n'est pas une clique alors il en possède au moins deux non adjacents.

L'initialisation étant triviale pour $n = 1$, supposons que tout graphe triangulé à moins de n sommets en possède un simplicial, et démontrons que G ayant n sommets en a un aussi.

Si G est une clique, alors tout sommet est simplicial. Si ce n'est pas le cas, alors il possède deux sommets non adjacents a et b . Soit S un a,b -séparateur minimal de G . $G[S \setminus S']$ a un certain nombre de composantes connexes (voir le figure ci-dessous), appelons C_1 (respectivement C_2) l'ensemble des sommets de celle qui contient a (respectivement b). Montrons que C_1 contient un sommet simplicial (on procède de même pour C_2).



Les deux composantes connexes C_1 et C_2 contenant respectivement a et b séparées par un a,b -séparateur minimal S' de G contiennent chacune un sommet simplicial.

Soit $G[C_1 \cap S']$ est une clique. Alors a est simplicial dans $G[C_1 \cap S']$. Or tous les voisins de a appartiennent à $G[C_1 \cap S']$, donc a est simplicial dans G .

Soit $G[C_1 \cap S']$ n'est pas une clique. Comme b n'appartient pas à $C_1 \cap S'$

S' , $G[C_1 \subset S']$ a moins de n sommets, donc on applique l'hypothèse de récurrence : $G[C_1 \subset S']$ a deux sommets simpliciaux non adjacents qu'on appelle x et y . Trois cas se présentent alors :

★ soit $x \in C_1$, alors tous ses voisins sont dans $C_1 \subset S'$, donc x est aussi simplicial dans G .

★ soit $y \in C_1$, alors de même y est simplicial dans G .

★ soit $x \in S'$ et $y \in S'$, x et y ne sont pas adjacents, mais S' est un séparateur minimal d'un graphe triangulé donc ce devrait être une clique d'après la propriété 3.1.3 : contradiction !

Finalement, dans tous les cas, on a montré que C_1 et C_2 contiennent chacun au moins un sommet simplicial pour G , ce qui conclut la démonstration. $\diamond$

Fulkerson et Gross, en 1965, ont caractérisé les graphes triangulés de la manière suivante :

Théorème 3.1.8 *Un graphe $G=(S,A)$ est triangulé si et seulement s'il admet un ordre d'élimination simplicial.*

Preuve: $\implies$) cette implication découle de l'application récursive du lemme précédent : Dans un graphe triangulé, on trouve un sommet simplicial, on le supprime, le graphe obtenu reste un graphe triangulé.....

($\impliedby$ Si un graphe n'est pas triangulé, alors il possède un cycle de plus de 3 sommets sans corde, et aucune sommet de ce cycle ne peut être éliminé simplicialement. $\diamond$

C'est toujours cette caractérisation(existence d'un ordre d'élimination simplicial) qui a mené à l'algorithme linéaire de reconnaissance des graphes triangulé donner par Rose, Tarjan et Leuker en 1976. Il construit un ordre d'élimination simplicial à l'envers : il détermine d'abord le dernier sommet x_n de l'ordre et termine par le premier sommet x_1 . Pour comprendre ce fonctionnement, nous devons utiliser un peu finement les conséquences de la propriété de Dirac (lemme).

Lemme 3.1.9 *Soit $G=(S,A)$ un graphe triangulé. Pour tout sommet s de G , il existe un ordre d'élimination simplicial σ terminant par s .*

Preuve: Soit γ un ordre d'élimination simplicial de G et $\gamma(x)=i$. A partir de γ nous allons construire un ordre d'élimination σ telque $\sigma(n)=x$:

★ Si G est graphe complet, il suffit d'échanger x et $\gamma(n)$ pour obtenir l'ordre d'élimination simplicial σ

★ Si $i=n$ alors $\sigma = \gamma$. Supposons que $i \neq n$. Alors pour tout $1 \preceq i \prec n$, prenons $\sigma(j) = \gamma(j)$. Par hypothèse x est simplicial dans le sous graphe G_i . Or le lemme 3.1.7(Dirac) montre qu'il existe dans G_i un sommet simplicial $y \neq x$. Donc on peut choisir $\sigma(i) = y$.

★ Si y n'est pas voisin de x dans G_i , le voisinage de x reste inchangé et reste donc une clique. Sinon y à été supprimé du voisinage de x . mais tout sous graphe d'une clique est une clique. Donc x rest simplicial dans G_{i+1} . $\diamond$

Donc pour tout $i \preceq k \preceq n$, nous pouvons appliquer l'argument précédent. Ceci montre que σ peut être construit telque $\sigma(n) = x$.

On peut donc imaginer un algorithme de reconnaissance des graphes trianfgulés qui commence par choisir le dernier sommet de l'ordre d'élimination simplicial. Il faut juste trouver une règle qui autorise à poursuivre cette stratégie à chaque étape sur le sous graphe induit par les sommets non numérotés. C'est ce que fait Lex-BFS.

Les sommets sont numérotés dans l'ordre inverse de leur visite. Chaque sommet x possède une marque, $\text{marque}(x)$, qui correspond à la liste ordonnée de ses voisins numérotés. A chaque fois qu'un nouveau sommet x est numéroté, son numéro est ajouté à la fin $\text{marque}(y)$ pour tout voisin non numéroté y de x . Le nouveau choisi est toujours un sommet ayant une marque maximum dans l'ordre lexicographique.

3.1.3 Algorithme : *Lex - BFS*

Algorithme : Lex-BFS

Donnée : Un graphe $G=(S,A)$.

Résultat : Un ordre σ des sommets de G

1 Etape : Pour chaque sommet $x \in S$ faire :

$\text{marque}(x) \leftarrow \emptyset$

2 Etape : Pour $i=n$ à 1 faire :

2-1) choisir un sommet x non numéroté de marque maximum dans l'ordre lexicographique ;

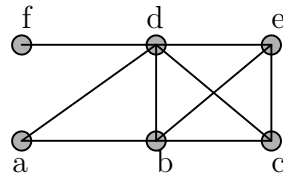
$$\sigma(i) \leftarrow x$$

2-2) Pour chaque voisin non numéroté y de x faire :

$$\text{marque}(y) \leftarrow \text{marque}(y) \cup \{i\}$$

Théorème 3.1.10 *Lex-BFS calcule un ordre d'élimination simplicial si et seulement si le graphe G est triangulé. Sa complexité est $\mathcal{O}(n+m)$, où $n = |n|$ et $m = |A|$.*

Exemple 3.1.11



Un graphe triangulé G

σ	6	5	4	3	2	1
a	$\emptyset$	6	6 . 5	6 . 5	●6 . 5	
b	$\emptyset$	●6				
c	$\emptyset$	6	●6 . 5			
d	● $\emptyset$					
e	$\emptyset$	6	6 . 5	●6 . 5 . 4		
f	$\emptyset$	6	6	6	6	●6

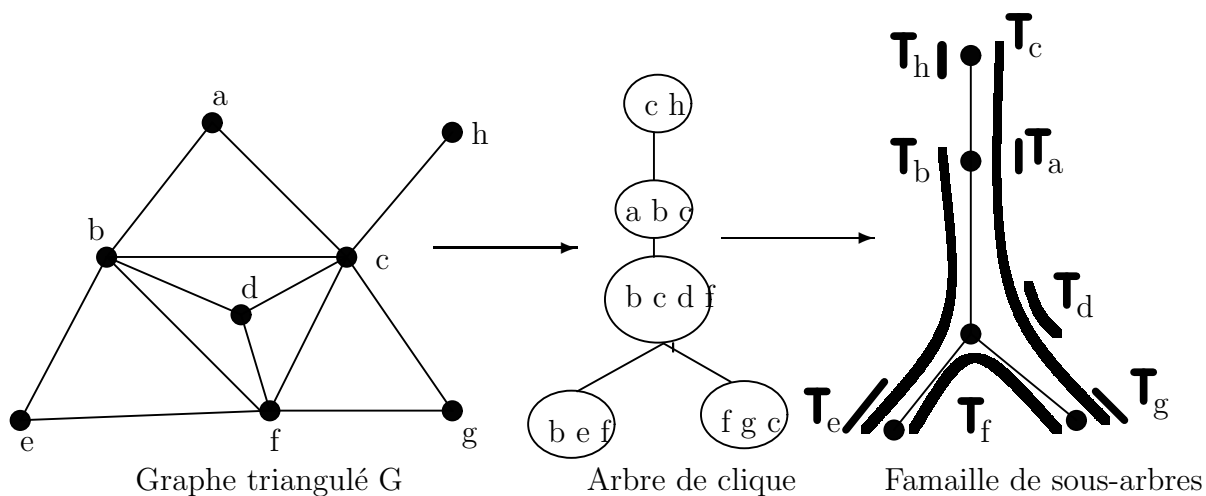
Un graphe triangulé G et la table d'état des marques de chaque sommet aux différentes étapes de Lex-BFS. L'ordre obtenu est $\sigma=[f,a,e,c,b,d]$ (il est calculé à l'envers). Nous pouvons vérifier que σ est un ordre d'élimination simplicial : par exemple e est simplicial dans le sous graphe $G[e,c,b,d]$.

Classe des graphes triangulés

3.2 Arbre de cliques

Définition 3.2.1 *Un arbre de cliques maximales d'un graphe triangulé G est un arbre H dont les noeuds sont les cliques maximales, les arêtes sont les séparateurs minimaux, et sur lequel chaque sommet de G correspond à un sous-arbre (induit par l'ensemble des noeuds de l'arbre étiquetés par une clique maximale qui contient ce sommet).*

Exemple 3.2.2



dans cet exemple on a un graphe triangulé G , son arbre de cliques maximales, et la famille de *sous-arbres* de cet arbre, dont G est le graphe d'intersection de la famille de *sous-arbres* de cet arbre. Chaque arête de l'arbre de cliques maximales peut être étiquetée par un séparateur minimale de G , l'ensemble des sommets communs aux deux cliques reliées par l'arête.

Lemme 3.2.3 *Les arbres de cliques sont les modèles d'intersections minimaux des graphes triangulés.*

Preuve: Soit G un graphe triangulé et un modèle d'intersection de G en *sous - arbres* d'un arbre T . Pour un noeud u de T , on note $V(u)$ l'ensemble des sommets de G dont le *sous - arbre* contient u . Les *sous - arbres* d'un arbre ont la propriété (une famille de *sous - arbre* qui s'intersectent deux à deux sur les sommets). est telle qu'il existe un sommet commun à tous les arbres de la famille. Cela implique que pour toute clique maximale K de G , il existe un noeud u de T tel que $V(u) = K$. De plus, si pour deux noeuds distincts u et v de T on a $V(u) \subseteq V(v)$, alors, nécessairement, tous les sommets de $V(u)$ sont présents dans tous les $V(p)$ où p est un noeud de T sur le chemin entre u et v . En particulier, en notant q le voisin de u se trouvant sur le chemin de u à v , on a $V(u) \subseteq V(q)$. Par conséquent, tous les sommets u tels que $V(u)$ n'est pas une clique maximale de G ont leur ensemble associé $V(u)$ inclus dans celui d'un de leurs voisins. Or, lorsque u et v sont deux noeuds voisins dans T tels que $V(u) \subseteq V(v)$, en supprimant u de T et en attribuant ses voisins, autres que v , à v , on obtient encore un modèle d'intersection de G . En répétant cette opération pour toutes les cliques non maximales, on obtient un arbre de cliques de G . Les arbres de cliques d'un graphe triangulé sont donc ses modèles d'intersections minimaux en *sous - arbres* d'un arbre.

Propriété 3.2.4 *Soit $G=(S,A)$ un graphe triangulé alors chaque ensemble d'articulation minimal est une clique.*

Preuve: Il est évident qu'on assimile une clique, c'est à dire un graphe simple complet à l'ensemble de ses sommets tous reliés deux à deux par une unique arête.

Soit A un ensemble d'articulation minimal de G triangulé.

Par définition, A est un ensemble (de cardinalité minimum) de sommets dont la suppression augmente le nombre de connexité du graphe G . La suppression des sommets de A dans G crée plusieurs composantes connexes. Chaque

sommet de A est adjacent à chacune de ces composantes connexes sinon ne serait pas de cardinalité minimale.

Soient deux sommets a et b de A . On détermine la plus courte chaîne $\mu[a, c_1, c_2, \dots, c_p, b]$ avec $\forall 1 \preceq i \preceq p, c_i \in C$ allant de a à b avec tous les autres sommets dans une même composante connexe C . On détermine de même une chaîne $\mu'[b, c'_1, c'_2, \dots, c'_k, a]$ avec $\forall 1 \preceq i \preceq k, c'_i \in C$ allant de b à a avec une autre composante connexe C' . Le cycle $\mu + \mu'$ ne possède aucune des cordes suivantes :

- $[a, c_i]$ pour $i \neq 1$, $[c_i, c_j]$ pour $i \neq j$, $[c_i, c_j]$ pour $i \neq p$ sinon μ ne serait pas la plus courte chaîne ...
- $[b, c'_i]$ pour $i \neq 2$, $[c'_i, c'_j]$ pour $i \neq j$, $[c'_i, b]$ pour $i \neq k$ sinon μ' ne serait pas la plus courte chaîne ...
- $[c_i, c'_j] \forall 1 \preceq i \preceq p, \forall 1 \preceq j \preceq k$, car C et C' sont deux composantes connexes distinctes de G_{X-A} .

Cependant est triangulé donc il existe une corde qui ne peut être que $[a, b]$. Par conséquent, les sommets de A sont tous voisins deux à deux et A est une clique (engendre une clique).

Théorème 3.2.5 (*Caractérisation des graphes triangulés [Dir61, FG69, Gav74]*).

Soit $G=(S, A)$ un graphe. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- i) G triangulé.*
- ii) G admet un schéma d'élimination simpliciale.*
- iii) G admet un arbre de cliques maximales.*
- iv) G est le graphe d'intersection d'une famille de sous-arbres d'un arbre.*

Preuve: $i) \iff ii)$: voir le théorème 3.1.8

$iii) \implies iv)$: G est le graphe d'intersection d'une famille (H_i) de sous-arbres de l'arbre de cliques maximales, chaque sous-arbre T_i recouvrant les noeuds de l'arbre dont l'étiquette contient le noeud i , comme montré en exemple 3.2.2

(arbre de clique) et (sa famille de *sous-arbres*).

$iv) \implies iii)$: voir le lemme 3.2.3.

$iv) \iff i)$: On considère un arbre de base T . Soit un cycle induit $t_1 \dots t_k$. $t_i \cap t_{i+1} \neq \emptyset \implies \exists x_i$ sommet de T commun aux deux. t_i contient un chemin de x_{i-1} à x_i .

Si $k > 3$, t_i n'intersecte pas t_j dès que $|i - j| > 1$. On a alors un cycle dans T , contradiction.

3.3 Graphes d'intervalles

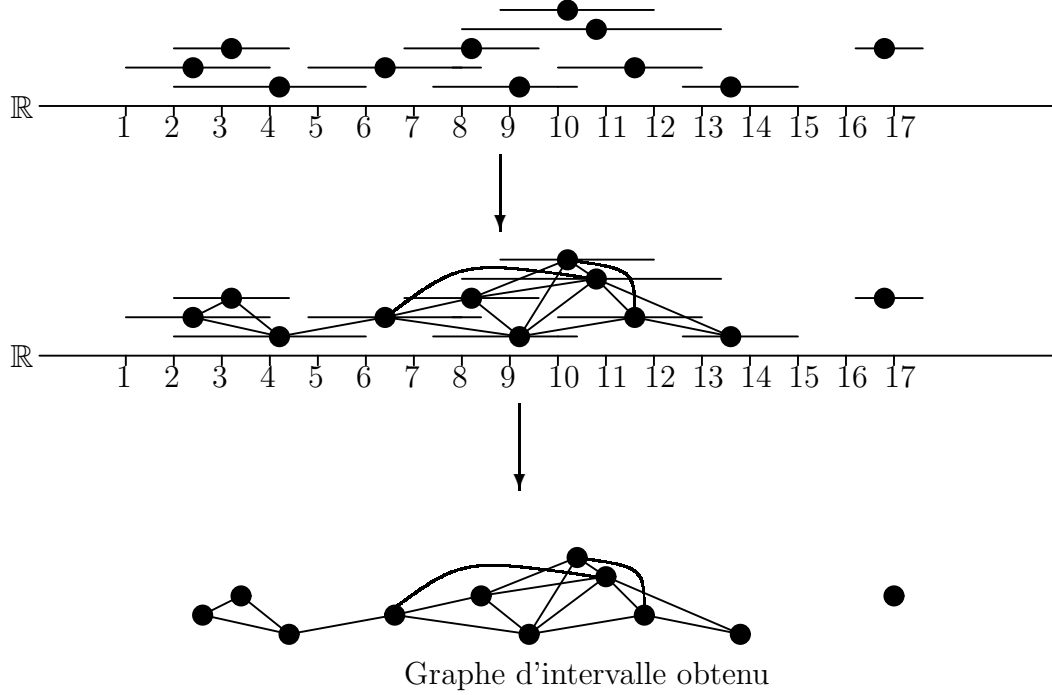
Les graphes d'intervalles sont les graphes d'intersection d'intervalles de la droite des réels. Un modèle d'intervalles d'un graphe $G = (S, A)$ est un ensemble I d'intervalles de la droite réelle accompagné d'une bijection entre les sommets de G et les éléments de I telle que deux sommets de G sont adjacents si et seulement si leurs intervalles correspondants s'intersectent. Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement si il admet un modèle d'intervalles (voir l'exemple 1.15). La classe des graphes d'intervalles reste inchangée si on exige que les intervalles des modèles soient fermés et aient des bornes entières, c'est encore la même si on demande que les intervalles soient ouverts et aient des bornes entières. Dorénavant, on utilisera que des modèles dont les intervalles sont fermés et les bornes entières, sauf sur les dessins pour des raisons de clarté.

Les graphes d'intervalles admettent plusieurs caractérisations très esthétiques. montre qu'ils sont exactement les graphes triangulés sans triplet astéroïdal pour ces définitions). Une autre caractérisation a voir par la suite.

Définition 3.3.1 *Un graphe $G = (S, A)$ est un graphe d'intervalles s'il est graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles de réels, c'est à dire qu'il existe un ensemble d'intervalles $\{I_i \subset \mathbb{R}\}$, $1 \preceq i \preceq n$, appelé réalisateur (ou réalisation) de G tel que :*

$$\forall i \neq j \in [1, n]; (v_i, v_j) \in A \iff I_i \cap I_j \neq \emptyset.$$

Exemple 3.3.2



Théorème 3.3.3 Soit $G=(S,A)$ un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes.

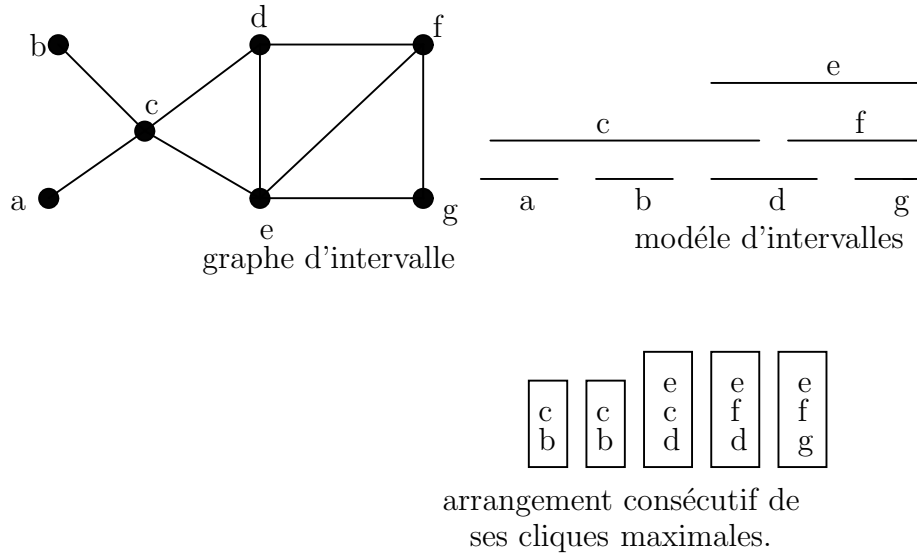
- i) G est un graphe d'intervalles.
- ii) G ne contient pas de C_4 (4-cycle sans corde) et son complémentaire G est un graphe de comparabilité.
- iii) Les cliques maximales de G peuvent être ordonnées linéairement de sorte que, pour tout sommet x de G , les cliques maximales contenant x apparaissent consécutivement.

3.3.1 Ordres consécutifs des graphes d'intervalles

Un ordre sur les cliques maximales satisfaisant la propriété iii) du théorème 4.3.3 est appelé un ordre consécutif. Soit k le nombre de cliques maximales

d'un graphe d'intervalles G . En numérotant les cliques maximales avec leur rang dans un ordre consécutif σ et en attribuant à chaque sommet x de G l'intervalle de σ des cliques contenant x on obtient un modèle de G (voir l'exemple *ci-dessous*).

Exemple 3.3.4



Proposition 3.3.5 *Les graphes d'intervalles sont des graphes triangulés*

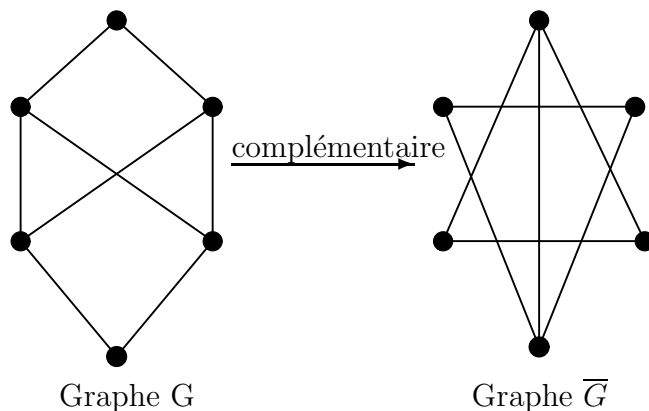
Preuve: Soit $G=(S,A)$ un graphe un graphe représentatif d'intervalles. Si le cycle $\mu = [x_1, x_2, \dots, x_p, x_1]$ n'admet pas de corde, alors les sommets de ce cycle représentent des intervalles I_k tels que I_{k-2} et I_k ne se chevauchent pas. Donc les extrémités sont strictement ordonnées mais alors l'intervalle I_1 ne peut pas chevaucher l'intervalle I_p et il ne peut pas exister d'arête $[x_p, x_1]$ pour fermer le cycle. Par conséquent, le graphe est triangulé. $\diamond$

Chapitre 4

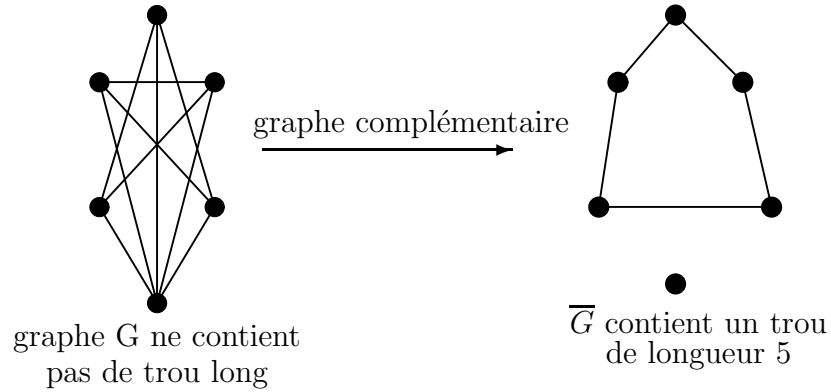
les graphes faiblement triangulés

VaseK Chvatal et Rayan Hayward ont défini la notion de graphe faiblement triangulé. Un graphe est faiblement triangulé si et seulement si ne contient ni de trou long (c'est-à-dire de longueur au moins 5) ni antitrou long (c'est-à-dire le graphe complémentaire $\overline{G}$ ne contient pas de cycle de longueur au moins 5).

Exemple 4.0.6



Le graphe G est graphe faiblement triangulé car :
ni le graphe G ni $\overline{G}$ ne contient de
trou long



Théorème 4.0.7 *Un graphe $G=(S,A)$ est faiblement triangulé si et seulement si pour tout sous-graphe H de G on a ou bien :*

- i) H est une clique.*
- ii) H possède une étoile d'articulation.*

Définition 4.0.8 *On dit que $\{x,y\}$ est une 2-paire de G si tout chemin reliant x à y de longueur 2.*

Propriété 4.0.9 *$\{x,y\}$ est une 2-paire d'un graphe G si et seulement si x et y sont dans deux composantes connexes distinctes de $G[S \setminus N_G(x) \cap N_G(y)]$*

Théorème 4.0.10 *$G=(S,A)$ est faiblement triangulé si et seulement si tout sous-graphe induit de G différent d'une clique possède une 2-paire*

Notation 1 *Soit C un chemin dans un graphe G , on note par $S(C)$ l'ensemble des sommets du chemin C .*

Théorème 4.0.11 *Soit $G=(S,A)$ un graphe faiblement triangulé qui n'est pas une clique. Alors G possède une 2-paire.*

Preuve: Si G est une réunion disjointe d'au moins deux cliques alors tout paire de sommets non-adjacents forme une 2-paire. Sinon, on considère un

ensemble intéressante maximal T . D'après le lemme 4.6 cité en [20], il n'y a pas de chemin sortant pour $C(T)$. Par hypothèse de récurrence, on trouve une 2-paire $\{u,v\}$ de $G[C(T)]$. Mais $\{u,v\}$ est aussi une 2-paire de G , puisque tout chemin entre x et y passant par T est de longueur 2 et puisque il n'y a pas de chemin sortant de $C(T)$. ◇

On rappelle qu'un long trou dans un graphe est un cycle induit de taille au moins 5.

Lemme 4.0.12 *Soit $G=(S,A)$ un graphe simple et H un long trou de G de taille minimale. soit C un plus court chemin de s_1 vers s_2 passant par s_3 de H , qui ne contient ni les voisin de s_3 , ni voisin commun de s_1 et s_2 . Alors $\{s_2\} \cup S(C)$ induit un long trou de G de taille minimale*

Preuve: Facile

4.1 Reconnaissance des graphes faiblement triangulés

4.1.1 Algorithme

Algorithme :

ENTRÉE : Si G possède un long trou, alors l'algorithme retourne un long trou de G de taille minimale. Sinon, il retourne " pas de long trou".

SORTIE : Un ordre σ des sommets de G

CALCUL :

- Considérer tout les triplets (s_1, s_2, s_3) de G . Pour chaque d'eux calculer le plus court chemin C de s_1 vers s_2 (le plus court chemin calculer par l'algorithme 1.5 [20] parmi les sommets de $S \setminus N_G(s_2) \cup (N_G(s_1) \cap N_G(s_3))$). Si $\{s_2\} \cup S(C)$ induit un trou de G , de taille inférieure à un éventuel trou

rencontré, alors stocker ce trou en mémoire.

- Une fois tout les triplets énumérés, retourner l'éventuel trou de taille minimale. S'il y'en a pas retourner " pas de trou".

COMPLEXITÉ : $O(n^5)$

Remarque 4.1.1 *Pour reconnaître les graphe faiblement triangulé il suffit d'appliquer cet algorithme sur le graphe G et sur son complémentaire $\overline{G}$.*

Bibliographie

- [3] Bornsztejn Pierre, Cours-Théorie des graphes, Stage olympique de Saint-Malo, Samedi 2 août 2003.
- [4] R. Brightwell and W. T. Trotter, Comparability Graphs, Interval Graphs and Interval Orders, May 23, 2006.
- [5] Habib Michel, Cours d'algorithmique des graphes du MPRI, Rédigé par Philippe Gambette, 23 janvier 2009.
- [6] Habib Michel, Graphes triangulés, M1 Algo Avancé 2011.
- [7] Hatat Florian, Graphes parfaits, 18 mai 2007
- [8] Houria HABLAL, les graphes k-Super Triangulés, mémoire de magister en Recherche Opérationnelle, Génie Mathématiques.
- [9] Chapelle Mathieu, Domination généralisée sur quelques classes de graphes, Mémoire de stage Master-2 Recherche,-Modélisation par le Logiciel, Metz, le 4 juillet 2008.
- [10] Crespelle Christophe, Représentations dynamiques de graphes, Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, 28 septembre 2007.
- [11] faflis Merzak, mémoire Magister, Recherche opérationnelle et Optimisation, Quelques sous-classe des graphes B_1 -orientables.
- [2] Lévêque Benjamin, coloration de graphes Structures et Algorithmes, Recherche Opérationnelle, combinatoire et Optimisation, 2007.

- [12] Lopez Pierre et LAAS-CNRS, Cours de GRAPHERS, 2 avril 2008.
- [13] Maquin Didier, Eléments de Théorie des Graphes, Version provisoire du 3 mai 2003.
- [14] Montgolfier Fabien, Algorithmique de graphes " Graphes triangulés", Université Paris 7-LIAFA, MPRI 23 sept 2008.
- [1] Panhaleux Adrien, Recherche de cycles dans les graphes, 20 mai 2007.
- [15] Pelle Stéphane, GEOMATIQUE LA THÉORIE DES GRAPHERS.
- [16] Rayan B.Hayward, Generating Weakly triangulated Graphs, July 2, 1993.
- [17] Rayan B.Hayward, Jeremy Spinrad, R.Sritharan, Weakly chordal Graph Algorithms via Handles.
- [18] Rayan B.Hayward, Meyniel Weakly triangulated Graph *II* : A theorem of Dirac.
- [19] TODINCA Ioan, Décompositions arborescentes de graphes : calcul, approximations, heuristiques, 2006.
- [20] Trogtignon Nicolas, Recherche opérationnelle, combinatoire et Optimisation, Graphes parfaits : Structure et algorithme, 2004.