

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des sciences et Techniques de Fes
Département de Mathématiques

Master Mathématiques et Applications

Option : Homologie, Algèbre et Sécurité de l'Information.

Théorème de Riemann-Roch

Présenté par : DAHMOUNI Mohammed

Encadré par : Pr GMIRA Seddik

Année Universitaire : 2011/2012

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----------|
| Dédicace | 4 |
| Remerciements | 5 |
| Résumé | 6 |
| Introduction | 7 |
| 1 Surface de Riemann | 9 |
| 1.1 Surface de Riemann | 9 |
| 1.2 Exemples de surfaces de Riemann | 10 |
| 1.2.1 Shpère de Riemann | 10 |
| 1.2.2 Tore complexe | 10 |
| 1.2.3 Bouteille de Klein | 11 |
| 1.2.4 Bande de Möbius | 12 |
| 1.3 Transformation de Möbius et Genre | 13 |
| 1.3.1 Transformation de Möbius | 13 |
| 1.3.2 Genre | 13 |
| 1.4 Fonctions holomorphes méromorphes sur des surface de Riemann | 14 |
| 1.4.1 Fonction holomorphe , degré en un point | 14 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.4.2 | Fonctions méromorphes | 17 |
| 2 | Revêtements | 19 |
| 2.1 | Définition et propriétés des revêtements | 19 |
| 3 | 1-Formes holomorphes méromorphes, Diviseurs sur des surfaces de Riemann | 26 |
| 3.1 | 1-Formes holomorphes, méromorphes, Résidu | 26 |
| 3.1.1 | 1-Formes holomorphes, méromorphes | 26 |
| 3.1.2 | Résidu en un point | 27 |
| 3.2 | Diviseurs | 29 |
| 3.2.1 | Diviseurs, Diviseurs canoniques et Diviseurs principaux | 29 |
| 4 | Théorème de Riemann-Roch | 35 |
| 4.1 | Théorème de Riemann-Roch | 35 |
| 4.2 | Applications | 38 |

DÉDICACE

Je dédie ce travail à Ma mère, mes sœurs, et mes frères, pour toute l'affection et l'amour dont ils nous entourent malgré leur lourde responsabilité. Rien ne pourrait compenser leurs sacrifices sauf les sentiments d'autosatisfaction et le bonheur de voir les efforts compensés par notre réussite.

REMERCIEMENTS

Avant tout je remercie Allah qui m'a donné le pouvoir et la patience pour terminer ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon encadrant le professeur GMIRA Seddik pour ses remarques pertinentes et pour le temps qu'il a consacré à la correction de ce rapport, ses bonnes manières et sa bonne qualité d'encadrer.

Je remercie également tous les membres du jury qui ont bien voulu examiner ce travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude également, à tous mes amis au sein et à l'extérieur de l'FST-FES. Je n'oublierai pas de remercier tout le personnel de l'FST-FES qui, durant ces années, ont favorisé une vie heureuse et un milieu très agréable. Je les remercie tous sans exception, administration, scolarité, sécurité... Je vous adresse tous la même parole "merci!".

RÉSUMÉ

Dans ce rapport nous nous sommes intéressés au théorème de Riemann-Roch, qui permet entre autres de mettre en relation un invariant topologique et un invariant algébrique sur une surface de Riemann. Nous avons commencé à rappeler des notions générales sur les surfaces de Riemann, ensuite nous avons étudié les 1-formes méromorphes sur les surfaces de Riemann. Pour aboutir à notre but nous avons utilisé les diviseurs (groupes libre) sur une surface de Riemann pour rendre simple la recherche des fonctions holomorphes sur notre surface, possédant au départ un nombre donné de pôles

INTRODUCTION

Le sujet de notre occupation est le théorème de Riemann-Roch. Notre motivation est basée sur l'importance de ce théorème qui est un résultat de la géométrie algébrique. A l'origine ce théorème énonce l'existence de fonctions méromorphes sur une surfaces de Riemann X , sous la contrainte de pôles de multiplicité imposée en certains points. Par exemple sous sa forme faible, le théorème énonce que pour m points donnés, l'espace de fonctions méromorphes sur X ayant au plus un pôle du premier ordre en ces points, holomorphe ailleurs est de dimension finie plus grande que $m - g + 1$ où g est le genre de la surface X .

Nous avons partagé notre travail en quatre parties. La première est un survol rapide sur la notion de surfaces de Riemann, en rappelant au passage des propriétés inhérentes aux structures de telles surfaces, plus particulièrement aux surfaces de Riemann compactes.

Quant à la deuxième partie, elle est consacrée à une substance de la théorie des 1-formes méromorphes sur une surface de Riemann.

Dans la troisième partie notre intérêt est porté sur les diviseurs, vus comme groupes libres sur X . Cette notion importante nous permet de mieux cerner les 1-formes méromorphes, grâce à un formalisme algébrique simple.

Enfin dans la dernière partie, une démonstration du théorème de Riemann-Roch a été explicitée entièrement. Ensuite quelques exemples, comme applications du théorème de Riemann-Roch.

1.1 Surface de Riemann

Définition 1.1.1 (*Atlas holomorphe*) Soit X un espace topologique connexe séparé. Un atlas holomorphe pour X est une famille d'homéomorphismes $(\phi_i : U_i \rightarrow O_i)_{i \in I}$ où :

1. U_i est un ouvert de X
2. O_i est un ouvert de \mathbb{C}
3. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

tells que pour tous i et j dans I avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

l'homéomorphisme, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe sur $\phi_j(U_i \cap U_j)$ (1)

Les éléments d'un atlas sont appelés des cartes et les domaines de ces fonctions sont appelées des ouverts de cartes. On écrira parfois (U, ϕ) pour exprimer une carte . Deux cartes sont appelés compatibles si elles satisfont la propriété (1)

Définition 1.1.2 (*surface de Riemann*) : Une surface de Riemann est un espace topologique connexe séparé muni d'un atlas holomorphe .

Exemple 1.1.1

1- Un ouvert connexe d'une surface de Riemann est aussi une surface de Riemann.

2- \mathbb{C} est une surface de Riemann

1.2 Exemples de surfaces de Riemann

Les exemples suivants fournissent une représentation plus concrète de la structure des surfaces de Riemann. Ils ont également constitué une occasion pour exposer la relation entre l'étude des surfaces de Riemann et celle de l'analyse complexe.

1.2.1 Sphère de Riemann

Définition 1.2.1 (sphère de Riemann) : la sphère de Riemann est l'ensemble $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

avec les voisinages $U_0 = \mathbb{C}$ et $U_\infty = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ et les cartes correspondantes données par

$$\phi_0(z) = z \text{ et } \phi_\infty(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

la sphère de Riemann est souvent notée \mathbb{P}^1 .

\mathbb{P}^1 est une surface de Riemann.

1.2.2 Tore complexe

Définition 1.2.2 (Tore) soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, linéairement indépendants sur \mathbb{R} . Et soit

$$\Gamma = \{n\omega_1 + m\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Topologiquement le tore défini comme $T = \mathbb{C}/\Gamma$. Avec la structure de la topologie quotient.



FIGURE 1.1 – Sphère de Riemann

le Tore T est une surface de Riemann.

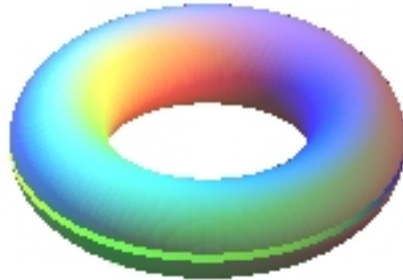


FIGURE 1.2 – Tore complexe T .

1.2.3 Bouteille de Klein

Définition 1.2.3 (*Bouteille de Klein*) On considère la relation d'équivalence \mathcal{R} sur \mathbb{R}^2 engendrée par

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \text{ et } (x, y) \sim (-x, y + 1).$$

La Bouteille de Klein est le quotient \mathbb{R}^2/\mathcal{R} , muni de la topologie quotient.

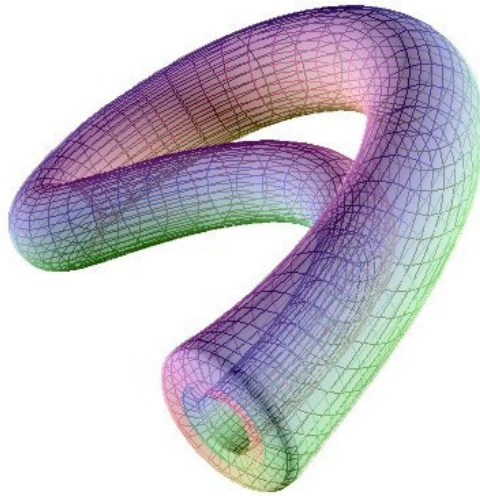


FIGURE 1.3 – Bouteille de Klein

1.2.4 Bande de Möbius

on peut définir la bande de Möbius comme l'ensemble quotient de l'ensemble $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ par la relation d'équivalence définie par :

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ si et seulement si } \exists k \in \mathbb{Z}; (x', y') = (x + k, (-1)^k y).$$

muni de la topologie quotient.

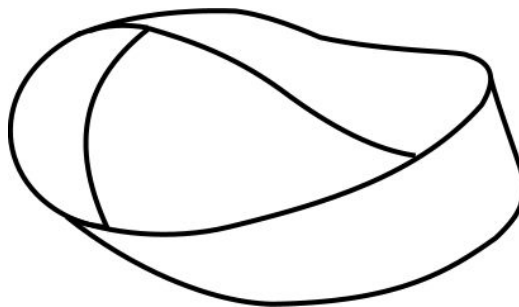


FIGURE 1.4 – la bande de Möbius

1.3 Transformation de Möbius et Genre

1.3.1 Transformation de Möbius

Définition 1.3.1 (*Transformation de Möbius*) La Transformation de Möbius est une application f de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ définie par $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$.

telle que $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

1.3.2 Genre

Définition 1.3.2 (*Genre*) : Le genre d'une surface connexe est le nombre maximum de courbes fermées simples sans points communs que l'on peut tracer à l'intérieur de cette surface sans la déconnecter (c'est-à-dire que le complémentaire de ces courbes reste connexe).

concrètement, si l'on considère que la surface est en papier, le genre est le nombre maximal de découpages fermés que l'on peut effectuer sans que la surface ne soit séparée en plusieurs morceaux. Cette notion est topologique : deux surfaces n'ayant pas le même genre ne sont pas homéomorphes.



FIGURE 1.5 – la sphère est de genre 0 : toute courbe fermée simple la déconnecte

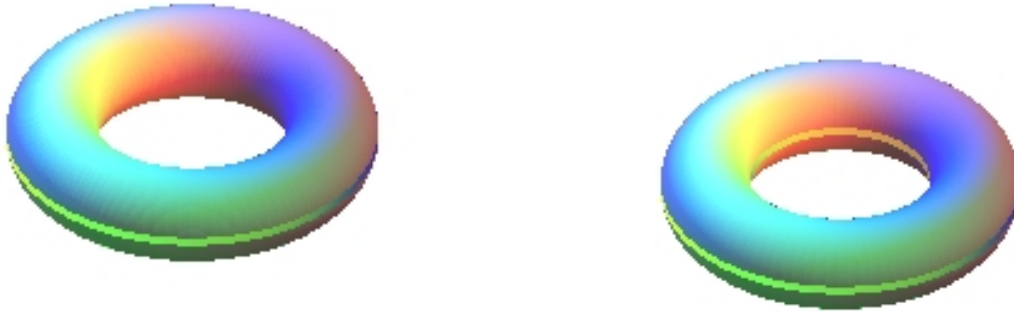


FIGURE 1.6 – tandis que le tore T est de genre 1 : une courbe peut le laisser connexe, mais deux courbes sans point commun le déconnectent.

1.4 Fonctions holomorphes méromorphes sur des surface de Riemann

Dans cette partie on vas étudier les morphismes entre les surfaces de Riemann.

1.4.1 Fonction holomorphe , degré en un point

Définition 1.4.1 (*Fonction holomorphe*) Soient X et Y deux surfaces de Riemann. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est holomorphe si pour toutes cartes (U, ϕ) de X et (V, ψ) de Y l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est holomorphe sur $\phi(U \cap f^{-1}(V))$.

Notation : Pour un ouvert U de X on notera $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes de U dans \mathbb{C} .

Théorème 1.4.1 (*Application ouverte*) Soient X et Y deux surfaces de Riemann, si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction holomorphe non constante, alors f est une application ouverte .

Preuve : Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction holomorphe non constante, et soient $\phi : U_1 \rightarrow V_1$ et $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ deux cartes respectivement sur X et Y . Alors, $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une fonction

holomorphe dans le sens habituel sur $\phi(U_1 \cap f^{-1}(U_2))$ (car f est holomorphe), comme ϕ et ψ sont des bijections, f est non constante, alors g est non constante, et donc g est ouverte, cela implique que $f|_{U_1} = \psi^{-1} \circ g \circ \phi$ est ouverte comme composé de applications ouvertes. Ainsi f est ouverte sur le domaine de n'importe quelle carte de X . Cela implique que f est ouverte sur l'union de domaines des cartes sur X . Donc f est ouverte sur X .

Proposition 1.4.1 : *Soit X une surface de Riemann compacte. Si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, alors f est une constante.*

Preuve : Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, et supposons que f n'est pas constante, cela entraîne que f est ouverte, donc $f(X)$ est un ouvert, or f est continue et que X est compact, alors $f(X)$ est également compact, ainsi que $f(X)$ est fermé, car \mathbb{C} séparé. Par conséquent $f(X)$ est à la fois ouvert et fermé.

Comme \mathbb{C} est connexe, alors $f(X) = \mathbb{C}$, ainsi \mathbb{C} est compact, ceci est contradictoire. Donc f est constante.

Proposition 1.4.2 : *Si $f : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe non constante entre surfaces de Riemann, alors on a :*

(i) Pour $p \in X$ il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et des uniformisantes φ en p et ψ en $f(p)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, soit $\psi \circ f = \varphi^d$, l'entier d ne dépend que de f et de p , et s'appelle le degré de f en p on a : $\deg_p(f) = 1$ si et seulement si $Df(p) \neq 0$ où $Df(p) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(0)$.

(ii) Pour tout $q \in Y \setminus \{f(p)\}$ assez proche de $f(p)$. on a $\text{card}(f^{-1}(\{q\}) \cap U) = \deg_p(f)$.

(iii) L'ensemble $R(f) = \{p \in X / \deg_p(f) \geq 2\} = \{p \in X / Df(p) = 0\}$ est discrète et fermé. De façon équivalente, il est localement fini, c'est-à-dire rencontre tout compact en un ensemble fini, ses points sont appelés points de ramification ou point critiques. Son image $C(f) = f(R(f)) \subset Y$ est appelé l'ensemble des valeurs critiques.

Preuve : (i) Soient φ et ψ_0 des uniformisantes en p et en $f(p)$ alors $g = \psi_0 \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une fonction holomorphe définie au voisinage de 0 et telle que $g(0) = 0$, donc soit :

(1) g est identiquement nulle. Soit

(2) il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $g(z) = z^d h(z)$ avec h holomorphe et $h(0) \neq 0$.

Dans le cas (1) f est localement constante en p et dans le cas (2) f n'est pas constante dans aucun ouvert contenu dans U .

Soit E l'ensemble des points vérifiant le cas (1) c'est un ouvert, et si $y \in \overline{E}$. tout voisinage de y contient un ouvert où f est égale à $f(p)$ donc y ne vérifie pas le cas (2) donc $y \in E$, donc E fermé . Par connexité, $E = \emptyset$ ou X et dans le second cas f est constante. Comme f n'est pas constante. $E = \emptyset$ est donc toujours dans le cas (2), la fonction holomorphe h , qui est non nulle en 0, a une racine d'ième holomorphe k au voisinage de 0, donc on a : $g(z) = G(z)^d$, ou $G(z) = zk(z)$ est holomorphe. De plus $G'(0) = k(0) \neq 0$, donc G est localement bilomorphisme, donc $\psi = G^{-1} \circ \psi_0$ est une uniformisante en $f(p)$ finalement, on a $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^d$, donc d à la propriété annoncée. Pour montrer que d est unique, on observe que c'est le plus petit entier tel que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(d)}(0) \neq 0$, et que cette propriété est indépendante des choix des uniformisantes φ et ψ . En particulier $d = 1$ si et seulement si $(\psi \circ f \circ \psi^{-1})'(0) \neq 0$.

(ii) ces propriétés sont évidentes. Pour l'application $z \mapsto z^d$ au voisinage de 0, donc elles sont vraies pour f .

(iii) Si $p \in R(f)$ et U voisinage sur lequel on a $\psi \circ f = \varphi^d$, on a $R(f) \cap U = \{p\}$ puisque la dérivée de z^d est non nulle hors de 0 donc $R(f)$ est discrète. De plus la caractérisation $Df(p) = 0$ montre qu'il est fermé.

Corollaire 1.4.1 : *une application holomorphe injective entre surface de Riemann, est un bi-holomorphe sur son image.*

Preuve : En effet : la propriété (ii) implique que degré est 1 en tout point donc f est partout biholomorphiquement à $z \mapsto z$

1.4.2 Fonctions méromorphes

Définition 1.4.2 (*Pôle*) *Si f est une fonction holomorphe sur $U \setminus \{p\}$, où U est un ouvert d'une surface de Riemann, et s'il existe une uniformisante φ en p telle que $f(z) = \sum_{n \geq k_p} a_n z^n$, pour un entier $k_p < 0$ avec $a_{k_p} \neq 0$ on dit que p est un pôle d'ordre k_p de f .*

Définition 1.4.3 (*fonction méromorphe*) : *Soit X une surface de Riemann, une fonction méromorphe sur X est une fonction holomorphe f définie sur $X \setminus P$ où P est un sous ensemble localement fini, et qui a un pôle au voisinage de chaque point de P .*

Proposition 1.4.3 : *Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des fonctions méromorphes, et l'ensemble des fonctions holomorphes de X dans $\overline{\mathbb{C}}$.*

Preuve : Soit l'ensemble P comme dans la définition précédente et Soit $f : X \setminus P \rightarrow \mathbb{C}$ une application méromorphe, on considère, $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ un prolongement de f par ∞ sur P . Pour prouver que \tilde{f} est holomorphe, il suffit de le faire près de $p \in P$. soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$ une uniformisante en p , avec U assez petit pour que $U \cap P = \{p\}$. Par hypothèse on a $f \circ \varphi^{-1}(z) = z^{-d}h(z)$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. h holomorphe sur $\varphi(U) \setminus \{0\}$, et $h(0) \neq 0$, quitte à diminuer U on peut supposé que h ne s'annule pas. Utilisant la carte φ_∞ défini sur U_1 , il vient $\varphi_\infty \circ \tilde{f}(z) = \frac{z^d}{h(z)}$ sur $\varphi(U)$ donc \tilde{f} est holomorphe près de p .

Réciproquement, si $h : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une application holomorphe qui n'est pas constamment égale à ∞ , $P = h^{-1}(\{\infty\})$ est discrète et fermé et $f|_{X \setminus P}$ est holomorphe, sa restriction à valeurs dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\}$ donc est une fonction holomorphe. De plus si $h(p) = \infty$ et $w = \frac{1}{z}$ est la carte standard centrée en ∞ , il existe une carte φ centrée en p telle que $w \circ h = \varphi^d$, soit $h \circ \varphi^{-1}(z) = z^{-d}$ si $z \neq 0$ donc f est holomorphe.

2.1 Définition et propriétés des revêtements

Définition 2.1.1 (*Revêtement*) soit Y un espace topologique, Un revêtement de Y est la donnée d'un espace topologique X et d'une application continue $p : X \rightarrow Y$ ayant la propriété de trivialisatation locale suivante. Pour tout point y de Y , il existe un voisinage V de y dans Y , un espace discret non vide F et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times F$ tels que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi} & V \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{proj} \\ & & V \end{array}$$

commute.

On appelle Y la base, X l'espace total, F la fibre du revêtement et Φ une trivialisat on locale du revêtement au dessus de V .

Exemple 2.1.1 *Le revêtement trivial est la projection $Y \times F \rightarrow Y$, où F est un espace discret.*

La propriété de trivialisat on locale est ici globale.

Proposition 2.1.1 *l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ est un revêtement.*

preuve : C'est bien une application continue ; montrons qu'elle vérifie la propriété de trivialisat on locale. Soit y un point de $\mathbb{C} - \{0\}$ et soit V un disque de centre y contenu dans $\mathbb{C} - \{0\}$. Sur un tel disque, il existe une détermination continue du logarithme, c'est- -dire une fonction continue $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\exp g(z) = z$ pour tout z dans V (Voir [6]). Toutes les autres déterminations du logarithme sur V diff rent de g par un multiple entier de $2i\pi$. Donc tout élément de $\exp^{-1}(V)$ diffère de $g(\exp t)$ par un multiple entier de $2i\pi$. On peut donc définir $\Phi : \exp^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{Z}$ par $\Phi(t) = (e^t, \frac{g(e^t) - t}{2i\pi})$ C'est une application continue, elle fait commuter le diagramme et son inverse :

$$V \times \mathbb{Z} \longrightarrow \exp^{-1}(V)$$

$$(z, k) \longrightarrow g(z) - 2i\pi k$$

une application continue, elle aussi. Donc Φ est bien l'homéomorphisme cherché.

Remarque : Le revêtement exponentiel n'est pas globalement trivial, puisque \mathbb{C} est connexe.

Proposition 2.1.2 *f est un revêtement si et seulement si, pour tout point y de Y , admet un*

voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$; soit une union disjointe non vide d'ouverts U_i de X tels que $f|_{U_i}$ soit un homéomorphisme.

preuve : si f est un revêtement, alors pour tout $y \in Y$, notons V un voisinage trivialisant de y et h une trivialisatation locale de f au-dessus de V . On pose $I = F$ et $U_i = h^{-1}(V \times \{i\})$ pour tout i dans I , l'application f vérifie la propriété demandée.

Réciproquement : si I et U_i comme dans l'énoncé existent, alors notons D l'ensemble I muni de la topologie discrète et considérons l'application

$$g : f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i \longrightarrow V \times I$$

$$x \longmapsto (f(x), i) \text{ si } x \in U_i$$

On vérifie que g est un homéomorphisme. donc g est une trivialisatation locale de f au-dessus de V .

Proposition 2.1.3 *Un revêtement est une application surjective et ouverte.*

preuve En effet : la surjectivité est claire. Soit U un ouvert de X et $x \in U$, soit $y \in f(U)$ et $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in D} U_d$. alors il existe $d \in D$ tel que $x \in U_d$, alors $f(U \cap U_d) = f|_{U \cap U_d}(U \cap U_d)$ est ouvert de Y contenant y et inclus dans $f(U)$.

Définition 2.1.2 (*fibre*) : Pour chaque $y \in Y$, on appelle fibre au dessus de y du revêtement $f : X \rightarrow Y$; l'ensemble $f^{-1}(y)$. Si V est un ouvert trivialisant contenant y alors la fibre $f^{-1}(y)$ est en bijection avec l'ensemble discrète F .

Proposition 2.1.4 : Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement. Si Y connexe. Alors les fibres sont toutes en bijection. En particulier, elles ont le même cardinal si le revêtement est localement fini.

preuve : Pour F espace discret, notons B_F le sous-ensemble de Y des points y tel que la fibre est en bijection avec F . L'ensemble B_F est ouvert : si $y \in B_F$, tout ouvert trivialisant contenant y est inclus dans B_F . L'ensemble B_F est fermé. En effet soit $y \in \overline{B_F}$. Si U est un ouvert trivialisant contenant y , U coupe B_F . Les fibres au-dessus des points de U , en particulier $f^{-1}(y)$, sont en bijection avec F .

Conclusion : si Y est connexe, alors B_F est vide ou égal à Y .

Proposition 2.1.5 : Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local, supposons X soit séparé : si f propre et Y connexe, alors f est un revêtement fini.

preuve : l'application f est ouverte, car c'est un homéomorphisme local, et fermé car propre. comme Y est connexe on a donc $f(X) = Y$. Donc f est surjective. pour tout y dans Y , la fibre $f^{-1}(y)$ est un compact car f est propre. Elle est aussi discrète, car f étant un homéomorphisme local, pour tout $x \in f^{-1}(y)$, il existe U_x un voisinage ouvert de x tel que $U_x \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Elle est donc fini. Soit U_x pour $x \in f^{-1}(y)$ comme ci-dessus. Comme f est fermé, $V = Y - f(E -$

$$\bigsqcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x) \text{ est un voisinage ouvert de } y \text{ tel que } f^{-1}(V) \subset \bigsqcup_{x \in f^{-1}(y)} U_x.$$

Donc $f^{-1}(V) = \bigsqcup_{x \in f^{-1}(y)} f^{-1}(V) \cap U_x$, et la restriction de f à $f^{-1}(y) \cap U_x$ est un homéomorphisme.

Proposition 2.1.6 : Soit f une application holomorphe non constante d'une surface de Rie-

mann compacte X vers une surface de Riemann Y , alors :

(1) $\forall y \in Y$, la fibre de y est un ensemble fini.

(2) le nombre de points de ramifications sur X est fini, si $S \subset Y$ est un ensemble qui contient les images de tous les points de ramification de X , alors la restriction de $f : X \setminus f^{-1}(S) \rightarrow Y \setminus S$ est un revêtement.

(3) si le degré de ce revêtement est égal à n , et $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$, alors $\sum_{i=1}^k e_i = n$, où e_i est l'indice de ramification de x_i .

preuve : (1) $f^{-1}(y)$ ne peut pas avoir un point d'accumulation x_0 dans X (autrement, f serait constante dans un voisinage de x_0 et alors partout (Voir [3])). Donc $f^{-1}(y)$ est discrète et puisque X est un compact, alors $f^{-1}(y)$ est finie.

(2) Du point de vue de la représentation locale, un point de ramification est un zéro d'une dérivée de f . Par le même raisonnement, les zéros de la dérivée ne peuvent pas avoir un point d'accumulation (autrement, la dérivée, sera nulle partout, et f sera constante). Alors cet ensemble est encore discret et fini.

Pour prouver que cette restriction de f à $X \setminus f^{-1}(S)$ est un revêtement on peut utiliser la proposition précédent, avec $X' = X \setminus f^{-1}(S)$ et $Y' = Y \setminus S$, car X est compact.

(3) On peut trouver des voisinages U_i , pour chaque x_i tel que la représentation locale de f dans U_i , se comporte comme z^{e_i} , puisque, pour tout point y' s'approche suffisamment de y , on a $f^{-1}(y') \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$, l'égalité $\sum_{i=1}^k e_i = n$ est prouvée du fait que tous les points $y' \neq y$ s'approchent suffisamment de y ont n image réciproque.

Proposition 2.1.7 : *le nombre de zéros est égal au nombre de pôles pour n'importe quelle fonction méromorphe non constante sur une surface de Riemann X compacte.*

Preuve : Soit f une fonction méromorphe, à f On peut associer une application holomorphe \tilde{f} définie sur X à valeur dans $\overline{\mathbb{C}}$, d'après la proposition précédente, on peut associer à \tilde{f} un revêtement de X à $\overline{\mathbb{C}}$ dont le degré est égal à $|f^{-1}(y)|$ pour tout $y \in \overline{\mathbb{C}}$ compté avec des multiplicités (indices de ramification), en particulier pour $y = 0$ et $y = \infty$. Donc le nombre de zéros de f compté avec leurs multiplicités est égal au nombre de pôles de f compté avec leurs multiplicités.

Définition 2.1.3 (*Triangulation*). *On appelle triangle une image homéomorphe d'un simplexe élémentaire $T \subset \mathbb{R}^2$. Une triangulation d'une surface X est un recouvrement de X par un nombre fini de triangles tels que l'intersection de deux triangles distincts est soit une arête, soit un sommet, soit vide.*

Définition 2.1.4 (*Caractéristique d'Euler*). *Étant donnée une surface triangulée X , on définit sa caractéristique d'Euler $\chi(X)$ comme le nombre entier obtenu en effectuant l'opération :*
 $\chi(X) := V - E + F$, où V, E et F sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et faces.

- Il est bien connu que la Caractéristique d'Euler est une invariante topologique, et dans ce cas, ne dépend pas de la triangulation, et que $\chi(X) = 2 - 2g$ (Voir [10]) où g désigne le genre de la surface de Riemann X .

Théorème 2.1.1 (*formule de Riemann Harwitz*) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante entre deux surfaces de Riemann compactes, Si $\deg f = n$, le genre de X est noté g_X , et celui de Y est égal g_Y , et f est ramifié en m points sur X avec l'indices de ramification, e_1, \dots, e_m alors :

$$2 - 2g(X) = n(2 - 2g(Y)) - \sum_{i=1}^m (e_i - 1)$$

Preuve : On va trianguler la surface Y de façon que les points de branchement soient parmi les sommets de la triangulation. Donc f peut être vue comme un revêtement ramifié de X sur Y . Si V, E et F sont respectivement le nombre de sommets, arrêtes et faces de la triangulation sur Y , si on considère l'image réciproque de notre triangulation, on va obtenir une triangulation sur X , de nombre d'arrêtes $E' = nE$, de nombre de faces $F' = nF$ et le nombre de sommets $V' = nV - \sum_{i=1}^m (e_i - 1)$ (puisque pour un seul point de branchement i correspondra e_i points réguliers).

Il en résulte donc que :

$$2 - 2g(X) = V' - E' + F' = nV - \sum_{i=1}^m (e_i - 1) - nE + nF = n(2 - g(Y)) - \sum_{i=1}^m (e_i - 1).$$

CHAPITRE 3

1-FORMES HOLOMORPHES MÉROMORPHES, DIVISEURS SUR DES SURFACES DE RIEMANN

3.1 1-Formes holomorphes, méromorphes, Résidu

3.1.1 1-Formes holomorphes, méromorphes

Définition 3.1.1 (*1-forme holomorphe*) Une 1-forme holomorphe sur une surface de Riemann X est une forme différentielle complexe de degré 1 sur X qui s'écrit localement $\omega = f dz$ où f est une fonction holomorphe de coordonnée locale z .

Définition 3.1.2 (*1-forme méromorphe*) Une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann X est une forme différentielle complexe de degré 1 sur X , holomorphe sur $X \setminus P$, où $P \subset X$, un sous-ensemble discret de X , tel que chaque point p de P possède un voisinage U , sur lequel la restriction de ω peut s'écrire comme $f \omega'$, où f est une fonction méromorphe sur U , ayant un pôle en p , et ω' est une 1-forme holomorphe sur U .

Autrement dit en tout point $z \in U$ on a l'expression locale $\omega = f dz$ où f est méromorphe. Si ω est non nulle, on peut définir le degré $\deg_p(\omega) = \deg_p(f)$, qui est indépendant de l'uniformisante.

Proposition 3.1.1 *Si ω_1 et ω_2 sont deux 1-formes méromorphes sur une surface de Riemann compacte, alors il existe une fonction méromorphe f telle que $\omega_1 = f\omega_2$.*

Preuve : Si dans certain voisinage $U \subset X$ nous 1-formes peuvent s'écrire comme $\omega_1 = f_1 dz$, $\omega_2 = f_2 dz$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions méromorphes sur U avec Z comme coordonnée locale.

On considère $\frac{f_1}{f_2}$ sur U .

Si $V \subset X$ est un autre voisinage sur lequel $\omega_1 = g_1 d\omega$, $\omega_2 = g_2 d\omega$, alors sur $U \cap V$ on a :

$$g_1 = f_1 \frac{dz}{d\omega} \text{ et } g_2 = f_2 \frac{dz}{d\omega} \text{ donc } \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}.$$

Il s'en suit que $f = \frac{f_1}{f_2}$ est bien définie et $\omega_1 = f\omega_2$.

3.1.2 Résidu en un point

Définition 3.1.3 (Résidu) *Soit ω une 1-forme méromorphe, tel que localement : $\omega = f(z)dz$,*

où f est une fonction méromorphe sur un voisinage de z , noté $\text{Res}_z(\omega) = a_{-1}$, où $\sum_{n \geq -k} a_n z^n$ est

le développement de Laurent de f sur une couronne au tour de zéro.

Théorème 3.1.1 (Théorème des résidus) *La somme de tous les résidus pour une 1-forme ω sur tout surface de Riemann compacte X est nulle.*

Preuve : Soient a_1, \dots, a_n les pôles du 1-forme ω . On peut prendre pour chaque a_i un petit disque D_i , qui ne contient aucun autre pôle que a_i .

sur l'ensemble $X' = X \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{int}(D_i)$, notre 1-forme est holomorphe et fermée. Donc par le théorème de Stokes on a :

$$\sum_i \int_{\partial D_i} \omega = \int_{\partial X'} \omega = \int_{X'} d\omega = 0$$

Définition 3.1.4 (*Partie principale*) la partie principale en $z = a$ d'une fonction $f(z) =$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$ est la partie de la série de Laurent constitué par les termes de degré négative (*i.e* : $\sum_{k=-\infty}^{k=-1} a_k(z-a)^k$ est la partie de f en a).

Proposition 3.1.2 (*Réciproque du théorème des résidu*) Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ est un ensemble de points sur une surface de Riemann compacte X , $\{f_1, \dots, f_n\}$ un ensemble de parties principales.

Alors les condition suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une fonction méromorphe f ayant une partie principale f_i en un seul point a_i ,

et n'a que des pôles aux points $\{a_1, \dots, a_n\}$.

(2) $\sum_{i=1}^n \text{Res}_{a_i} f_i \omega = 0$, pour tous les 1-formes holomorphes sur notre surface de Riemann.

Preuve

(1) \Rightarrow (2) : Si une telle fonction méromorphe f existe, alors : pour tout 1-forme holomorphe

ω , nous avons $\sum_{i=1}^n \text{Res}_{a_i} f \omega = 0$ (d'après le théorème des résidus).

Maintenant, f n'a que des pôles au points $\{a_1, \dots, a_n\}$ et la partie principale de f au point a_i est égale à f_i . Donc le résidu de f au point a_i est le coefficient du terme z_{-1} de la série de Laurent de f_i . Tenant compte du fait que ω est une 1-forme holomorphe, et ainsi de multiplier

par ω , les puissances des séries de Laurent augmentent et ne décroissent jamais, on a alors :

$$\text{Res}_{a_i} f\omega = \text{Res}_{a_i} f_i\omega \text{ et donc } \sum_{i=1}^n \text{Res}_{a_i} f_i\omega = 0.$$

(2) \Rightarrow (1) est acquise par la dualité de Serre (Voir [7]).

3.2 Diviseurs

3.2.1 Diviseurs, Diviseurs canoniques et Diviseurs principaux

Définition 3.2.1 (*Diviseur*) Un diviseur sur une surface de Riemann X est une somme formelle

$$D = \sum_p n_p p \text{ où } n_p \in \mathbb{Z} \text{ et } \text{Supp}(D) = \{p \in X \mid n_p \neq 0\} \text{ (support de } D) \text{ est localement fini. On}$$

notera $n_p = \text{deg}_p(D)$, le degré de D en p

Remarque : Les diviseurs sont les éléments du groupe \mathbb{Z}^X . Donc si on a deux diviseurs $D_1 =$

$$\sum_p n_p p \text{ et } D_2 = \sum_p m_p p \text{ on peut définir : } D_1 + D_2 = \sum_p (n_p + m_p) p.$$

Et nous pouvons également comparer les diviseurs $D_1 \leq D_2$ si et seulement si $n_p \leq m_p$ pour tout p .

Définition 3.2.2 (*Degré d'un diviseur*) Si $D = \sum_p n_p p$ est un diviseur, alors le degré de D est

$$\text{la somme } \text{deg}(D) = \sum_p n_p.$$

Remarque : Le degré est un homomorphisme de groupe abélien des diviseurs dans le groupe

$$\text{abélien } \mathbb{Z} \text{ car : } \text{deg}(D_1 + D_2) = \text{deg}(D_1) + \text{deg}(D_2), .$$

Définition 3.2.3 (*L'ordre d'une fonction méromorphe*) Si f est une fonction méromorphe sur

une surface de Riemann X , et p un point de X , on définit l'ordre de f en p comme suite :

$$\text{ord}_p(f) = \begin{cases} k, & f \text{ possède un zéro de multiplicité } k \text{ en } p \\ -k, & f \text{ possède un pôle de multiplicité } k \text{ en } p \end{cases}$$

Pour toute fonction méromorphe f sur une surface de Riemann compacte, il correspond un diviseur $\sum_p \text{ord}_p(f)p$, sur l'ensemble des points où la fonction f a des zéros et des pôles.

Définition 3.2.4 (*Diviseur principal*) le diviseur $\sum_p \text{ord}_p(f)p$ est désignée par (f) et appelé le diviseur principal pour f .

Il est clair que $(f \cdot g) = (f) + (g)$ et $(f/g) = (f) - (g)$.

Lemme 3.2.1 : Si f est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte X , alors $\text{deg}((f)) = 0$.

Preuve : Si f est une fonction méromorphe sur une surface compacte X , on a le nombre de zéros et égal au nombre des pôles, donc par définition de (f) on a $\text{deg}((f)) = 0$.

Définition 3.2.5 Si ω est une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann X , et p un point de X , nous définissons l'ordre de ω par $\text{ord}_p(\omega) = \text{ord}_p(f)$, où f est une représentation locale de ω au point p

Définition 3.2.6 (*Diviseur canonique*) Le diviseur $\sum_p \text{ord}_p(\omega)p$ est appelé le diviseur canonique de la 1-forme méromorphe ω .

Il est évident que $(f \cdot \omega) = (f) + (\omega)$ ce qui entraîne que $\text{deg}((f\omega)) = \text{deg}((f)) + \text{deg}((\omega)) = \text{deg}((\omega))$.

Remarque : Puisque, tout 1-forme méromorphe peut être représentée par une autre 1-forme méromorphe multiplié par une fonction méromorphe, on voit que tous les diviseurs canoniques ont le même degré.

Lemme 3.2.2 : *Si ω est une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann compacte X , alors, $\deg((\omega)) = -\chi$, où χ est la caractéristique d'Euler de X .*

Preuve : Il suffit d'après la remarque précédente de prendre la 1-forme df où f est une fonction méromorphe non constante sur la surface de Riemann X . (Théorème d'existence de Riemann).

On va considérer f comme une application holomorphe de X dans $\overline{\mathbb{C}}$.

On peut supposer qu'il n'y a pas de points de ramification dans $f^{-1}(\infty)$.

Sinon on fait une "rotation" sur la sphère de Riemann (en utilisant une certaine transformation de Möbius) et on combine entre f , la "rotation" et son inverse.

Soit n le degré du revêtement f , e_1, \dots, e_m les indices de ramifications. La fonction f a exactement n pôles simples, et l'ordre de chaque pôle vaut 2 pour la 1-forme df (Car : $d(1/z) = -1/z^2$). De l'autre côté les zéros de df sont des points de ramification de f , et si e est l'indice en un certain point, alors df a un zéro d'ordre $e - 1$ en ce même point.

Alors, df a n pôles d'ordre 2 et m zéros d'ordre $e_1 - 1, \dots, e_m - 1$. Il en résulte donc que :

$$\deg(df) = \sum_{i=1}^m (e_i - 1) - 2n = -\chi, \text{ (par la formule de Riemann-Hurwitz).}$$

Définition 3.2.7 *Soit D est un diviseur. On définit*

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}^{(1)}(X); (f) + D \geq 0\}.$$

où $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ est l'espace des fonction méromorphe.

$$I(D) = \{\omega \text{ 1-forme méromorphe sur } X; \omega \geq D\}$$

Remarque : Il est clair que $L(D)$ et $I(D)$ sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels.

Notation : Notons

$$l(D) = \dim_{\mathbb{C}} L(D)$$

$$i(D) = \dim_{\mathbb{C}} I(D)$$

Corollaire 3.2.1 Si $\deg(D) < 0$ alors $l(D) = 0$.

Preuve : Comme toutes fonctions méromorphes satisfait $\deg((f)) = 0$ on voit donc que $L(D) = \emptyset$

(il n'existe pas de fonction f telle que $(f) + D \geq 0$, autrement dit on aurait $\deg(D) = \deg((f)) + \deg(D) = \deg((f) + D) \geq 0$.) Donc $l(D) = 0$.

Corollaire 3.2.2 Si le diviseur D est nul ($D=0$), alors $l(D) = 1$.

Preuve : En effet, l'espace des fonctions méromorphes f telles que $(f) \geq 0$ est tout simplement l'espace de toutes les fonctions holomorphes. Donc $L(D)$ est l'espace des constantes. Qui est isomorphe à \mathbb{C} .

Lemme 3.2.3 : L'espace $I(D)$ est isomorphe à l'espace $L(K - D)$ où K est un diviseur canonique. L'espace $I(K - D)$ est isomorphe à $L(D)$.

Preuve : On montre d'abord que $L(K - D)$ est isomorphe à $L(D)$ On suppose que $k = (\omega)$ où ω 1-forme méromorphe.

Si f est une fonction méromorphe, alors : $(f) + D = (f\omega) - (\omega) + D = (f\omega) - (K - D)$.

Alors, $f \in L(D) = \{g | (g) + D \geq 0\}$ si et seulement si $f\omega \in I(K - D) = \{\beta | (\beta) \geq K - D\}$.

Donc on a une application : $(L(D) \rightarrow I(K - D))$ donnée par $f \mapsto f\omega$.

Puisque tout 1-forme méromorphe dans $I(K - D)$ peut être présentée par $f\omega$ pour une certaine fonction méromorphe, donc de manière similaire l'application inverse $I(K - D) \rightarrow L(D)$.

Si l'on substitue $K - D$ à la place de D , on obtient un isomorphisme entre $I(D)$ et $L(K - D)$.

Lemme 3.2.4 : *L'espace $L(K)$ est isomorphe à l'espace $L(K - D)$ où K est un diviseur canonique. Est isomorphe à l'espace de toutes les 1-formes holomorphes sur une surface de Riemann.*

Preuve : D'après le lemme précédent $L(K)$ est isomorphe à $I(K - K) = I(0) = \{\omega | (\omega) \geq 0\}$, qui est l'espace de toutes les 1-formes holomorphes, il s'en suit donc : par le lemme précédent et le théorème d'existence de Riemann, il en résulte que $l(K) = \dim(L(K)) = g$.

Définition 3.2.8 *Deux diviseurs D_1 et D_2 sur une surface de Riemann sont dits linéairement équivalents s'il existe une fonction méromorphe f définie sur la même surface de tels que $D_2 = D_1 + (f)$.*

Lemme 3.2.5 : *Si D_1 et D_2 sont linéairement équivalents, alors $\deg D_1 = \deg D_2$.*

Preuve : Si $D_2 = D_1 + (f)$, alors $\deg(D_2) = \deg(D_1 + (f)) = \deg(D_1) + \deg((f)) = \deg(D_1)$, puisque $\deg((f)) = 0$.

Lemme 3.2.6 : *Si D_1 et D_2 sont linéairement équivalents, l'espace $L(D_1)$ est isomorphe à $L(D_2)$, et l'espace $I(D_1)$ est isomorphe à $I(D_2)$.*

Preuve : Supposons $D_2 = D_1 + (f)$ pour une certaine fonction méromorphe f . Si g est g est autre fonction méromorphe, avec $g \in L(D_2)$, alors $(fg) + D_1 = (f) + (g) + D_1 = (g) + D_1 + (f) = (g) + D_2$. Il s'en suit que $(g) + D_2 \geq 0$ si et seulement si $(fg) + D_1 \geq 0$. Donc on a une application $L(D_2) \rightarrow L(D_1)$. Puisque, f est une fonction méromorphe, son inverse f^{-1} est aussi une fonction méromorphe, à l'aide de laquelle on obtient l'inverse de $L(D_2) \mapsto L(D_1)$. Il est clair que la linéarité est acquise, alors on a un isomorphisme entre $L(D_1)$ et $L(D_2)$. (De manière similaire on montre que $I(D_1)$ est isomorphe à $I(D_1)$).

CHAPITRE 4

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH

4.1 Théorème de Riemann-Roch

Théorème 4.1.1 (*Théorème de Riemann-Roch*) Si D est un diviseur sur une surface de Riemann compacte de genre g , alors $l(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g$.

Preuve : La démonstration se fait en trois étapes :

Premier étape : $\deg(D)$. Soit $D = \sum_{i=1}^n m_i a_i$, avec $D \geq 0$.

Posons V l'ensemble de tous les uples f_1, \dots, f_n de parties principales de la forme

$$f_i = \frac{c_{m_i}}{z^{m_i}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z}$$

On définit une application $\Phi : L(D) \longrightarrow V$ qui envoie $f \in L(D)$ vers les parties principales de f aux points a_i .

Puisque $D \geq 0$, alors si f est méromorphe avec $(f) \geq -D$ ceci implique que le noyau n'a pas de parties principale c'est-à-dire que f est holomorphe et, Donc $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = 1$.

Posons maintenant $W = \text{Im}(F)$, alors :

$$l(D) = \dim(\text{Ker}(\Phi)) + \dim(\text{Im}(\Phi)) = 1 + \dim(W).$$

Comme W est un ensemble de parties principales f_i , d'une certain $f \in L(D)$. D'après (la réciproque du théorème de résidus), une telle fonction f existe si et seulement si pour toute une

1-formes holomorphe ω sur notre surface de Riemann on a $\sum_{i=1}^{i=n} \text{Res}_{a_i} f_i \omega = 0$.

Maintenant pour toute une 1-forme holomorphe ω on considère l'application linéaire $\lambda_\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\{f_1, \dots, f_n\} \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} \text{Res}_{a_i} f_i \omega.$$

On a, $W = \bigcap_{\omega} \text{Ker}(\lambda_\omega)$. Il en résulte donc que :

$$\dim(W) = \dim(\bigcap_{\omega} \text{Ker}(\lambda_\omega)) = \dim(V) - \dim(\lambda_\omega).$$

Il rest maintenant à calculer $\dim(\lambda_\omega)$. $\dim \lambda_\omega \leq g$, puisque le nombre des 1-forme holomorphe ω indépendantes sur la surface est égal à g .

Deuxième étape : D est quelconque.

On va montrer d'abord que

$$l(D) - i(D) \geq 1 + \deg(D) - g$$

Soit $a \in X$. Il est évident que $\deg(D - a) = \deg(D) - 1$. Alors il n'est pas difficile de montrer que si l'inégalité est satisfaite pour un diviseur D , elle est aussi satisfaite pour le diviseur $D - a$.

En soustrayant de D quelques points $a \in X$, et intervenant compte de l'égalité prouvée dans la première étape, il suffit d'abord de montrer

$$l(D - a) - i(D - a) \geq (l(D) - i(D)) - 1.$$

Il est évident que

$$l(D) \geq l(D - a) \geq l(D) - 1.$$

et

$$i(D) + 1 \geq i(D - a) \geq i(D).$$

Il s'en suit donc que

$$l(D - a) - i(D - a) \geq l(D) - i(D) - 2.$$

En fait, on peut montrer que cette inégalité est stricte le cas $(l(D - a) - i(D - a) = l(D) - i(D) - 2)$

est impossible, donc on a bien

$$l(D - a) - i(D - a) \geq (l(D) - i(D)) - 1 = 1 + \deg(D - a) - g.$$

Ceci implique pour tout diviseur on a :

$$l(D) - i(D) \geq \deg(D) + 1 - g$$

Enfin, dans la dernière partie de la preuve, pour obtenir l'égalité désirée, il suffit de substituer

$K - D$ à D dans l'inégalité prouvée avant. Puisque $l(K - D) = i(D)$.

$$l(K - D) - i(K - D) \geq \deg(K - D) + 1 - g$$

$$i(D) - l(D) \geq \deg(K - D) + 1 - g$$

$$i(D) - l(D) \geq \deg K - \deg(D) + 1 - g$$

Puisque $\deg K = \deg(\omega) = -\chi = 2 - 2g$, on a donc :

$$i(D) - l(D) \geq 2g - 2 - \deg(D) + 1 - g = g - 1 - \deg(D)$$

$$l(D) - i(D) \leq \deg(D) + 1 - g$$

et ceci termine la preuve de la deuxième inégalité demandée.

4.2 Applications

Il y a beaucoup d'implications du théorème de Riemann-Roch.

Première implication :

Il existe exactement g 1-formes holomorphes sur une surface de Riemann de genre g .

En effet, si $D = 0$, le théorème de Riemann-Roch donne :

$$l(0) - i(0) = \deg(0) + 1 - g.$$

Mais $l(0) = 1$, $\deg(0) = 0$ et $i(0) = l(K)$, où K est un diviseur canonique. Comme on sait que

$L(K)$ est isomorphe à l'espace

$$I(0) = \{\omega \mid (\omega) \geq 0\}.$$

Donc la formule donne :

$$1 - i(0) = 0 + 1 - g.$$

On conclut que $i(0)$ est égal à la dimension de l'espace

$$I(0) = \{\omega \mid (\omega) \geq 0\}.$$

Dixième implication :

Si $D = K$ (diviseur canonique), on obtient

$$l(K) - i(K) \leq \deg(K) + 1 - g$$

Puisque $l(K) = i(0) = g$, et $i(K) = l(0) = 1$, on a alors :

$$g - 1 = \deg(K) + 1 - g.$$

Il en résulte alors la même formule déjà prouvée avant

$$\deg(K) = 2g - 2 = -\chi(X)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Duval Julien, SURFACES DE RIEMANN, 2009.
- [2] Frédéric Paulin, Topologie algébrique élémentaire, Cours de première année de mastère, École Normale Supérieure, 2009-2010.
- [3] Forster, Lectures on Riemann surfaces, Grad. Texts in Math. 81, Springer 1981.
- [4] Fulton William, Algebraic Curves. Mathematics Lecture Note Series, W.A. Benjamin, 1974, available at <http://www.math.lsa.umich.edu/wfulton/CurveBook.pdf>
- [5] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris, 1971.
- [6] Michèle Audin, Topologie Revêtements et groupe fondamental Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
- [7] Rick Miranda, Algebraic Curves and Riemann Surfaces (Graduate Studies in Mathematics, Vol 5), American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [8] Pierre Dèbes, REVETEMENTS TOPOLOGIQUES, 2001.

[9] Marc SAGE, Combinatoire des nombres de Hurwitz, 15 septembre 2007.

[10] VALERIYA TALOVIKOVA, RIEMANNROCH THEOREM.