



**Licence Sciences et Techniques (LST)**

## **CALCUL SCIENTIFIQUE ET APPLICATIONS**

### **Mémoire de fin d'étude**

*Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques*

**Titre**

### **Etude de Rentabilité et Simulation Numérique**

*Présenté par*

◆ **TELMANI Nassira**

*Encadré par*

◆ **M. EL KHOMSSI FST**

*Co encadré par*

◆ **Mme .BENAICHA FST**

**Soutenu Le 14 Juin 2014 devant le jury composé de**

- **K.BENAICHA**
- **M.ELKHOMSSI**
- **F.EZZAKI**

**Année Universitaire 2013 / 2014**

# SOMMAIRE

Remerciement .....	3
Introduction/résumé .....	4
Chapitre 1 : Analyse des Coûts	
1- Qu'est-ce que la microéconomie ? .....	5
1.1-Définition de la microéconomie .....	5
1.2- Les thèmes de la micro-économie.....	5
1.3 L'étude de la microéconomie : quel intérêt ?.....	5
2- Etude des structures des activités génératrices de revenus.....	6
2.1-Définition des AGR.....	6
2.2- Analyse des coûts relatifs à un AGR .....	6
2.2.1- Le coût de production .....	7
2.2.2- Le coût des ressources humaines.....	7
2.2.3- Le coût flottant .....	7
2.2.4- Le gain flottant.....	7
2.2.5- Le coût total .....	7
3-Analyse de la rentabilité.....	8
3.1-Définition de la rentabilité .....	8
3.2-La variation du rendement en fonction du coût total.....	11
3.3-La variation du rendement en fonction du prix de vente.....	12
Chapitre 2 : Décision d'investissement	
1-La notion	
d'investissement .....	15
1.1-Définition de l'investissement .....	15
1.2-Les données d'un projet d'investissement.....	15
2- les critères de sélection d'un projet d'investissement.....	17
2.1- La valeur actuelle nette.....	17
2.1.1- L'actualisation.....	17
2.2- L'indice de profitabilité .....	18
2.3- <i>Le délai de récupération du capital investi.....</i>	<i>18</i>
2.4- <i>Le Taux de Rentabilité Interne (TRI) .....</i>	<i>18</i>
3- <i>Les limites d'application des critères de sélection des projets.....</i>	<i>19</i>
3.1- <i>Les limites du TRI.....</i>	<i>19</i>

3.1.1- Problème relatif au calcul du TRI .....	19
3.2- La contradiction entre les critères d'évaluation .....	19
3.2.1-Exemple.....	19
3.3- la VAN globale $VAN_G$ ou intégrée $VAN_I$ .....	19
3.4- Le TRI globale $TRI_G$ .....	20
3.5- Cohérence es des critères $VAN_G$ et $TIR_G$ .....	21
3.6-Application de ces deux notions.....	22

### Chapitre 3 : Calcul Numérique et Interprétation

1-Introduction.....	24
2- Définition du taux de rentabilité interne de l'investissement éducatif ...	24
2.1 -Taux de rentabilité interne sur une année.....	24
2.2 -Taux de rentabilité interne sur plusieurs années.....	32
4- conclusion .....	37
5-bibliographe.....	38

## Remerciement

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à non encadrent *Monsieur EL KHOMSSI Mohammed* sa patient, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je désire aussi remercier Madame *CHAI BI Ghizlane* qui m'a beaucoup aidé pour réaliser ce travail, et qui n'a jamais cessé de me donner des conseils, En plus elle était comme un soutien morale pour moi.

Et enfin, je voudrais remercier également *Madame EZZAKI, Madame Benaïcha*, d'avoir accepté de juger mon projet de fin d'étude.

## **Introduction/résumé :**

Ce travail représente une étude numérique de la suite des travaux de la thèse de Majda FIKRI et de sujet de Ghizlane CHAIBI IL constitue de trois chapitres :

- Analyse des coûts
- Décision d investissement
- Analyse numérique et interprétation

Dans le premier chapitre, après rappel de la notion de microéconomie nous avons donne les écritures des multiples coûts nécessaires pour définir la rentabilité.

Nous avons contribué par l'étude de la variation numérique de la fonction rentabilité, rendement le 3 ème graphe montre qu'il existe un point d'équilibre obtenu tel qu'il existe  $p_v^* = C_t^*$  vérifie  $\rho(p_v) = \rho(C_t)$ .

Dans le second chapitre nous avons étudié la question de sélectionner un projet d'investissement, nous avons montre qu'il existe des situations contradictoire selon les critères voir page 21

Dans le chapitre 3 nous avons fait une étude numérique qui nous a aidés à conjoncture quelque résultats numériques de ce chapitre.

# Chapitre 1 : Analyse des Coûts

## 1. Qu'est-ce que la microéconomie ?

### 1.1. Définition :

La microéconomie étudie comment les agents économiques – pris individuellement – prennent leurs décisions de production ou de consommation, elle s'intéresse aux relations qui existent entre celles-ci. Ces décisions individuelles, ainsi que leurs interrelations se répercutent au niveau macroéconomique, dans ce sens que les agrégats macroéconomiques ne sont rien d'autre que des sommes de grandeurs microéconomiques : on peut à juste titre, considérer la microéconomie comme l'étude des arbres et la macroéconomie comme l'étude de la forêt.

La microéconomie s'attache à l'étude de l'interaction entre les acheteurs et les vendeurs, mais aussi aux facteurs qui influencent leurs choix.

La micro-économie se concentre en particulier sur l'offre et la demande, la détermination des prix et le rendement de marchés spécifiques.

### 1.2. Les thèmes de la micro-économie ?

La Microéconomie traite du:

-Comportement des agents économiques

•

Consommation :

Comment choisir ce qu'on achète ?

•

Production :

Comment choisir ce qu'on produit ?

-Marché: l'interaction entre consommateurs et producteurs

-Echanges : détermination d'un équilibre partiel, ou général, après échanges entre agents économiques

-La base de l'analyse macroéconomique

### 1.3. L'étude de la microéconomie : quel intérêt ?

L'étude de la micro-économie est un concept utilisé par tous comme aide à la décision en production et en consommation

En effet :

-Pour une firme elle aide à déterminer :

- Perception et demande des consommateurs pour un nouveau produit
- Coût de production
- Stratégie de pricing
- Décisions organisationnelles

-Pour un gouvernement elle aide à :

- Définir des normes anti-pollution
- Evaluer des impacts sur les producteurs et les consommateurs
- Evaluer du bénéfice global

Notre étude va toucher un coté de ce vaste monde qui sont les activités génératrices de revenu comme structure microéconomique

## **2. Etude des structures des activités génératrice de revenus**

### **1.1.Définition AGR**

Une AGR est une activité qui consiste à produire des biens ou des services et/ou à transformer des produits en vue de les vendre. A la différence des projets d'infrastructures sociales de base (piste rurale, école, dar taliba, eau potable, etc.), qui sont des biens publics dont la communauté bénéficie et qui ne génèrent pas de revenus directement, l'AGR ne bénéficie, en premier lieu, qu'à ceux qui la mettent en œuvre, ses promoteurs. Ces activités tirent leurs revenus du marché et obéissent donc à la loi de l'offre et de la demande.

Les AGR, en tant qu'activités économiques obéissant aux lois du marché, doivent être rentables et pérennes quel que soit leur lieu d'exercice (milieu rural ou urbain).

### **2.2. Analyse des couts relatifs à un AGR**

#### **2.2.1 Le coût de production**

Le coût de production d'une entreprise ou d'une administration est la somme des dépenses réalisées pour produire des biens ou services.

$$\text{Coût de production} = \text{coût d'achat} + \text{coût de fabrication}$$

Le coût de fabrication : le coût de main d'œuvre, machines, ...

#### **2.2.2 Le coût de ressources humaines**

Soit  $C_h$  :le coût de ressources humaines

t :le nombre d' heures de travail

s: le salaire d'une heure de travail

Alors le coût de ressources humaines ou le coût du salaire est défini comme étant le nombre des heures travaillées multiplié par le salaire d'une heure de travail dans l'AGR :

$$C_h = t \times s$$

Notons qu'il existe une différence entre les heures salariées et les heures travaillées.

- Les heures **salariées** sont les heures pour lesquelles le salarié reçoit un salaire.
- Les heures **travaillées** sont les heures pendant lesquelles le salarié est au travail.

Par exemple les heures correspondant aux jours de congés payés et aux jours fériés, chômés sont des heures salariées (payées) car le salarié reçoit un salaire pour ces heures, mais ce ne sont pas des heures travaillées.

Si, en tant qu'employeur, vous souhaitez calculer des prix de revient (par exemple pour élaborer des prix de vente), il convient de partir du coût total des heures travaillées et non du coût total des heures salariées. En effet, vos clients payent les heures effectivement travaillées.

### 2.2.3. Le coût flottant

Le coût flottant est la valeur obtenue à partir de la somme de tous les coûts possibles engendrés par un risque

$$C_f = \sum_{j=1}^J \varepsilon_j C_{f_j}$$

avec

$C_{f_j}$  : Le coût imprévisible engendré par un risque j

J : le nombre total des coûts imprévisibles pour l'AGR ou la micro-entreprise

$\varepsilon_j$  : prennent des valeurs dans  $\{0,1\}$  et exprime la probabilité d'avoir le risque j.

### 1.1.4 Le gain flottant

On appelle le gain flottant la valeur obtenue à partir de la somme de tous les gains possibles engendrés par une chance ou une opportunité

$$G_f = \sum_{j=1}^J \lambda_j G_f^j$$

avec

$G_f^j$  : Le gain imprévisible engendré par une chance ou une opportunité  $j$

$J$  : le nombre total des gains imprévisibles pour l'AGR ou la micro-entreprise

$\lambda_j$  : a des valeurs dans  $\{0,1\}$

### 2.2.5. Le coût total

Le coût total est une fonction dont l'argument est la production  $Q$  tel que :

$$C_T = C(Q)$$

D'une manière plus simple le coût total de production  $C_T$  est la somme totale que la firme doit déboursier pour produire.

Pour une activité génératrice de revenue  $c$ 'est la quantité exprimée par :

$$C_T = C_p + C_h + C_f$$

## 3. Analyse de la rentabilité

### 3.1. La définition de rentabilité

La **rentabilité** est définie comme le rapport entre les revenus obtenus ou prévus et les ressources employées pour l'obtenir. La notion s'applique notamment aux entreprises mais aussi à tout autre investissement.

Soit  $C_T$  : le cout de production

$P_v$  : le pris de vente

$G_f$  : le gain flottant

Le coefficient de rentabilité est la valeur donnée par :



$$\rho = R(C_T, P_v) = 1 - \frac{C_T}{P_v}$$

le gain de production c'est la quantité défini par :

$$G = P_v - C_T + G_f$$

Pour savoir si un AGR a un gain ou non on fait l'étude soit à l'aide du coefficient de rentabilité ou à l'aide du gain de production

En effet  $G = P_v - C_T + G_f$

En absence des gains flottant la formule de gain devient :

$$G = P_v - C_T$$

Donc le coefficient de rentabilité devient :

$$\rho = \frac{G}{P_v}$$

On essayant de rassembler toutes les informations suivantes dans le tableau suivant :

Les variables des entrées	Les variables des sorties
<ul style="list-style-type: none"><li>• Nombres des membres actifs</li><li>• Nombres des tâches</li><li>• Nombres des opérations</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Coûts de production</li><li>• Coûts des ressources humaines</li><li>• Coefficient de rentabilité</li></ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>• Coût de chaque opération</li> <li>• Temps de réalisation d un cycle de production /vente</li> <li>• Salaire d une heure de travail</li> <li>• Cout total</li> <li>• Le prix de vente</li> <li>• Estimation de gain engendré par des chances</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Les couts flottants</li> <li>• Le gain dans un AGR</li> <li>• Le gain individu Le gain réel Le prix de vente réel</li> </ul>
---	---

L'intérêt de ce tableau est de permettre d'écrire les relations entre les entrées et les sorties

En effet à partir de données de ce tableau nous avons les définitions suivantes :

-Le coût de production  $C_p$  fourni dans l AGR comportant les N opérations de coût  $C_k$  est :

$$C_p = \sum_{k=1}^N C_k$$

-Le coût des ressources humaines  $C_h$  :

$$C_h = t.s$$

Avec

t le temps de réalisation d un cycle de production/ vente et s le salaire d une heure de travail

-Coefficient de rentabilité :

$$\rho = R(C_T, P_v) = 1 - \frac{C_T}{P_v}$$

-Les couts flottants :

$$C_f = C_T - (C_p + C_h)$$

-Le gain réaliser par un AGR est :

$$G = P_v - C_T + G_f$$

-Le gain pour un individu :

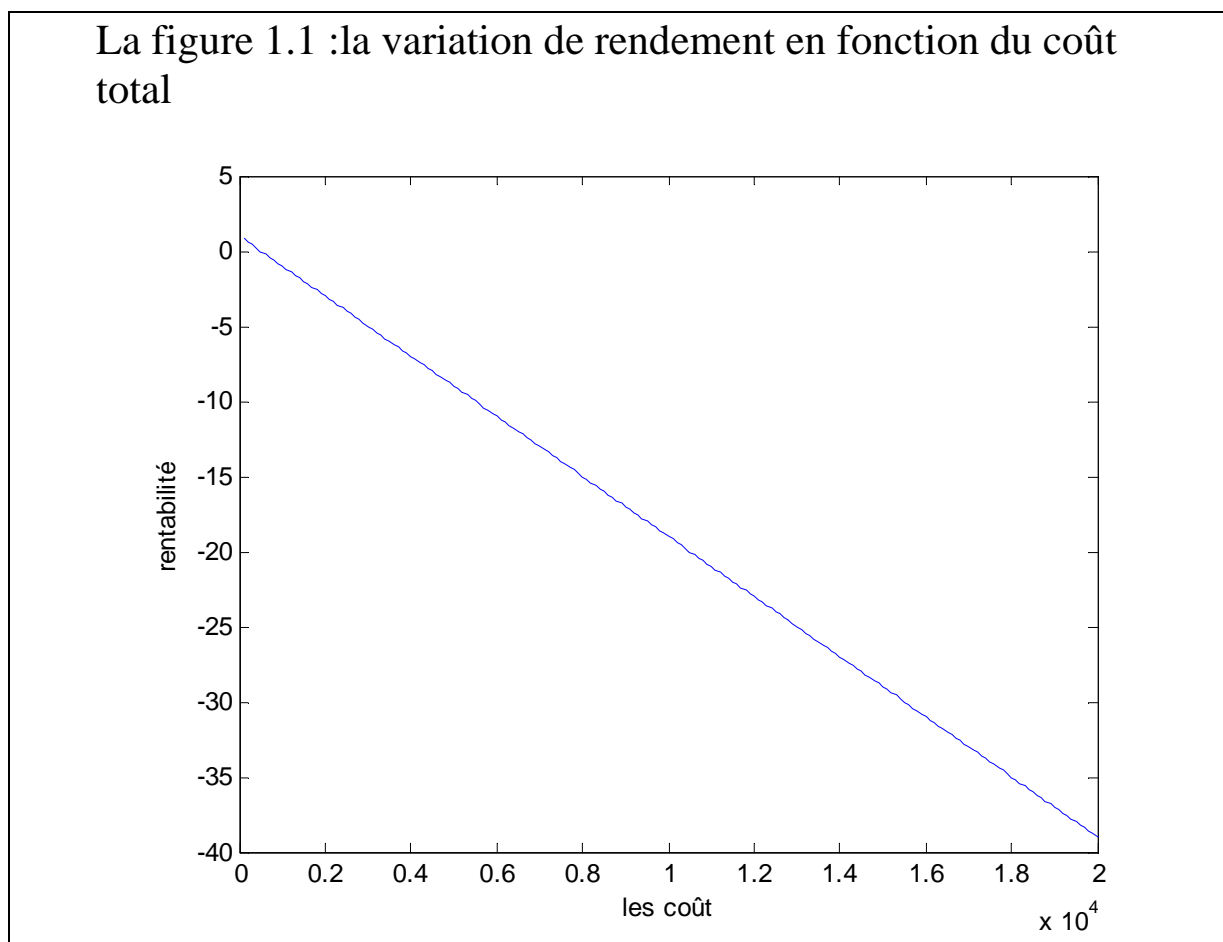
$$G_e = \frac{G}{n}$$

n : nombre des membres des AGR

### 3.2. La variation de rendement en fonction de coût total

On fixe la valeur du prix de vente  $P_v$  et on fait changer le coût total  $C_T$ , on trace la variation de rendement en fonction de coût total.

La figure ci-dessous indique cette variation.



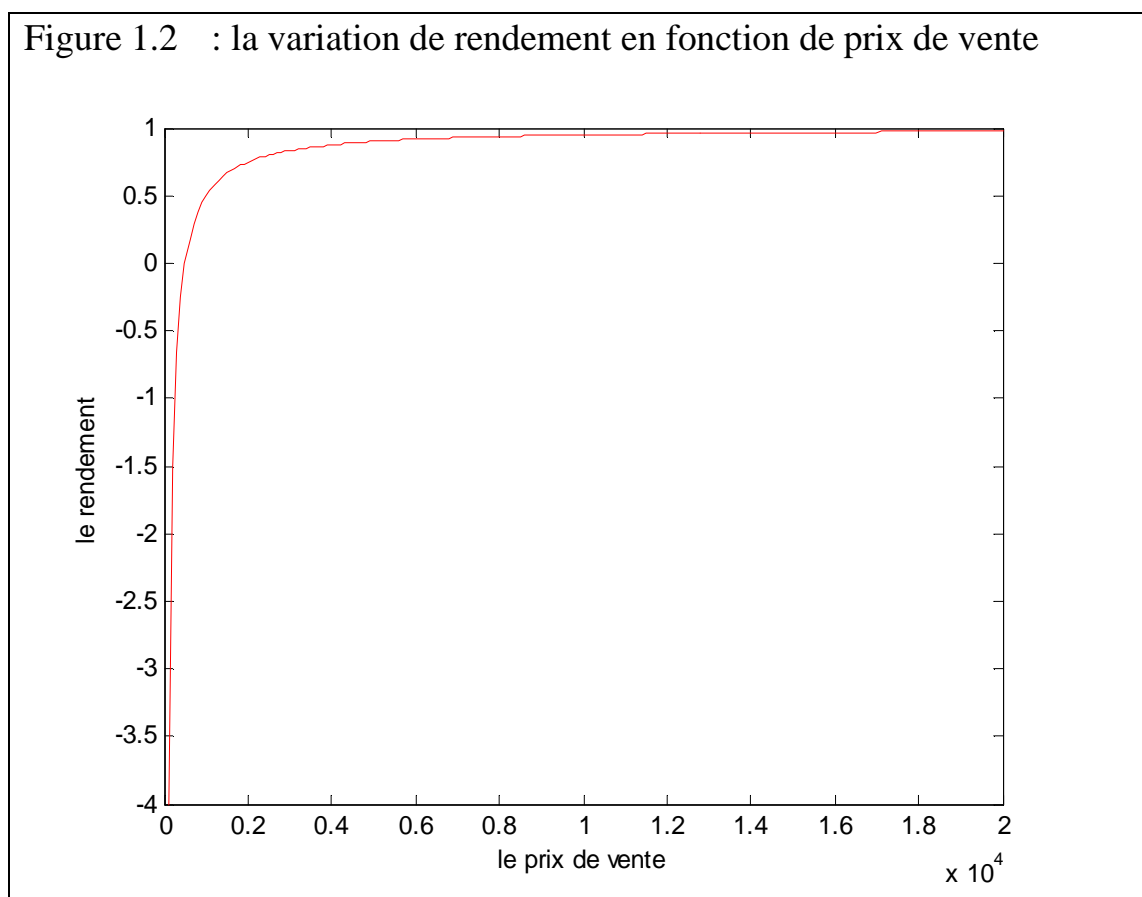
D'après le graphe, on voit que la rentabilité diminue quand le coût augmente, donc pour que l'AGR soit rentable il faut choisir des valeurs inférieures à un certain  $\alpha$  tel que  $\rho(\alpha) = 0$ . Ce qui est logique d'après la formule de rentabilité :

$$\rho = 1 - \frac{C_T}{P} = f(C_T)$$

Elle correspond à une équation d'une droite dont la pente est négative.

### 3.3-La variation de rendement en fonction de prix de vente

On fixe la valeur du coût total et on fait changer le prix de vente  $P_v$  et on trace la variation de rendement en fonction du prix de vente.

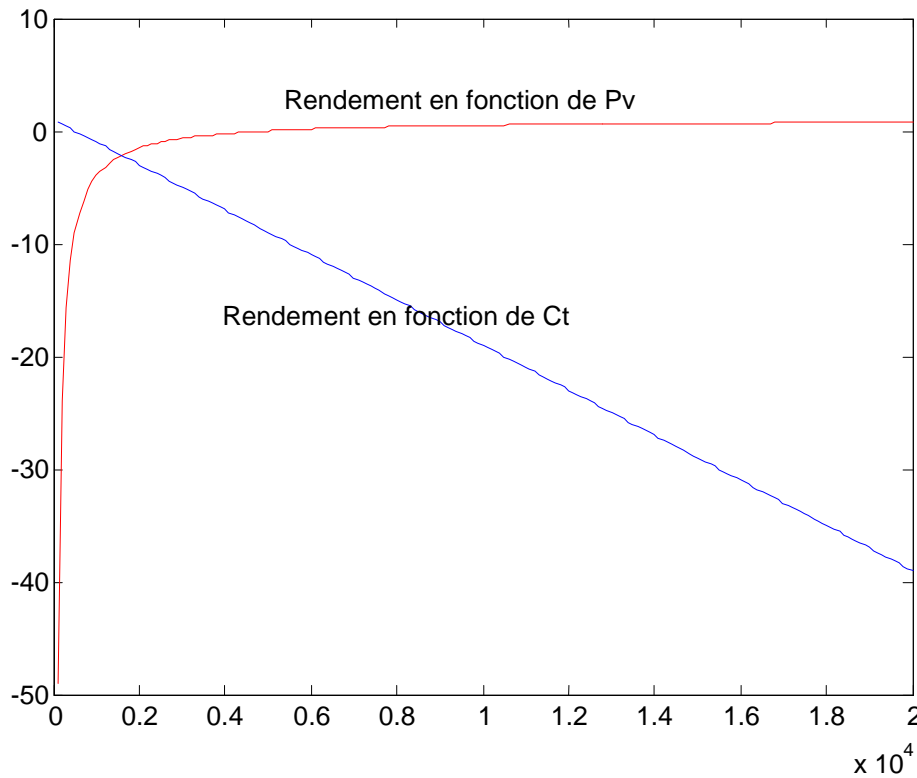


D'après la figure on voit que lorsque le prix de vente augmente la rentabilité augmente aussi

Au début, on observe une augmentation rapide de rentabilité même avec une petite augmentation de prix jusqu'à atteindre la valeur 1

Si on trace ces deux courbes dans le même graphe on aura la figure suivante :

La figure 1.3 : la variation de rendement en fonction de prix de vent et le cout



On voit clairement que les deux courbes se coupent en un point x

$$\rho = 1 - \frac{C_T}{P_v}$$

si  $C_T$  fixe alors  $\rho = f(P_v) = 1 - \frac{\alpha}{P_v}$

si  $P_v = \beta$  fixe alors  $\rho = g(C_T) = 1 - \frac{C_T}{\beta}$

$$f(x) = g(x)$$

$$x = \sqrt{\beta \alpha}$$

Donc pour qu'un AGR soit rentable il faut que les coûts total  $C_T < \sqrt{\beta\alpha}$  ou les prix de vente  $P_v > \sqrt{\beta\alpha}$

## Chapitre 2: la Décision d'Investissement

### 1. Notion de l'investissement

#### 1.1. Définition de l'investissement

Au sens de la comptabilité, l'investissement est une acquisition d'entreprise qui inscrit à son actif. Financièrement, investir c'est mettre en œuvre aujourd'hui des moyens financiers pour, au travers des activités de production et de vente, générer des ressources financières sur plusieurs périodes ultérieures.

L'idée est que le placement de liquidités dans un projet dans un premier temps procurera à l'investisseur un retour de liquidités dans un deuxième temps. Ceci sous entend que les gains futurs seront plus importants que les capitaux investis dans le projet.

#### 1.2. Les données d'un projet d'investissement

##### - la capitale investie

C'est la dépense qui doit supporter l'entreprise pour réaliser le projet.

Le capital investi comprend le coût d'achat du matériel et l'augmentation du besoin de financement de l'exploitation qui découle de la réalisation du projet .

##### - La durée de vie d'un projet

La durée de vie du projet est la durée de vie économique de l'investissement, c'est à dire la période pendant laquelle l'investissement à réaliser permettra d'obtenir les revenus financiers.

Si la durée de vie du projet est difficile à prévoir, on lui substitue la durée d'amortissement de l'équipement principal du projet , par exemple, pour déterminer la durée du projet d'atelier de couture, on doit se référer à la durée de vie technique de l'équipement principal (la machine à coudre).

##### - Flux de trésorerie généré par le projet

L'entreprise attend d'un projet d'investissement :

- Soit qu'il apporte des rentrées nettes d'argent (recettes-dépenses) ;
- Soit qu'il permette de réaliser des économies au niveau de certains coûts d'exploitation.

Ces rentrées des fonds des économies sont désignées par le cash flow qui est la différence

entre les recettes imputables au projet et les dépenses imputables au projet.

$$CF=RIP -DTP$$

Dans la mesure où on admet qu'il y a identité entre recette et chiffre d'affaires d'une part et entre dépenses et charges décaissables d'autre part on déduit que :

$$CF=Ca-Cd$$

Avec

Ca : chiffre d'affaires

Cd : charges décaissables

### **-la valeur résiduelle et la récupération du BFRE**

#### ***- La valeur résiduelle***

*La valeur résiduelle est la valeur probable de négociation ou la valeur vénale, à la fin de la durée de vie économique des différents éléments investis lors de la réalisation du projet. Cette valeur résiduelle viendra ainsi en augmentation des flux financiers attendus au cours de la période d'exploitation du projet*

#### ***- La récupération du BFRE***

En fin de projet, les stocks sont liquides, les créances clients sont recouvrées et les dettes fournisseurs réglées.

On considère donc que les besoins en fond de roulement (BFR initial +BFR complémentaires) sont récupérés.

Le BFR est la liquidité dont l'entreprise a besoin simplement pour faire rouler son activité

En effet l'entreprise doit commencer à payer ses fournisseurs et certains frais généraux (par ex le loyer) avant même de commencer sa production.

## **2. les critères de sélection d'un projet d'investissement**

Tout projet nécessite la mobilisation des fonds et ceci est considéré comme un coût d'investissement. Un investisseur qui engage ce coût, doit avoir sa contre partie c'est-à-dire le profit après la réalisation de son investissement. C'est pourquoi avant de prendre telle décision d'investir, il faut faire une étude approfondie qui nous assure que réellement le projet est rentable. Pour en faire, on fait recours au critère de sélection d'un projet.



Ces critères sont : La valeur actuelle nette ; le taux de rendement interne ; la durée de récupération et l'indice de profitabilité.

## 2.1. La valeur actuelle nette

### 2.1.1 L'actualisation

Évalue un projet revient à comparer le capital investi à l'ensemble des cash-flows liés au projet à condition que cette comparaison fasse à la même date, en générale à la date 0 ce qu'on appelle l'actualisation

-La valeur actuelle nette ou revenue actualisé, bénéfice actualisé ou encore le goodwill de l'investissement c'est la différence des cash-flows actualisé sur la durée de vie du projet et les capitaux investis.

$$VAN = \sum_{t=1}^n CF_t (1 + t)^{-t} - I_0$$

Lorsque les flux attendus sont considérés constant avec le temps on aura :

$$VAN = \frac{CF}{t} \left( 1 - \frac{1}{(1+t)^n} \right) - I_0$$

Si la VAN est strictement positive ( $VAN > 0$ ) l'investissement est accepté et cette VAN signifie que le projet est rentable ; car si  $VAN > 0$  alors :

$$\sum Revenus > Capital$$

$$CF > I$$

Donc tous les capitaux investis sont récupérés par les flux de revenu de l'investissement.

Si VAN est nulle ( $VAN = 0$ ) ici on peut exécuter le projet ou non tout dépend de la nature de l'environnement du projet c.-à-d si le but de cet investissement est social

## 2.2. L'indice de profitabilité

L'indice de profitabilité (ou indice de rentabilité ou encore rendement d'une unité monétaire investi) est défini comme le quotient des cash flow actualisés par le montant du capital investi

$$IP = \frac{\sum_{i=1}^n CF_i(1+t)^{-i}}{I}$$

Si nous avons  $IP > 1$ , alors  $\sum_{i=1}^n CF_i(1+t)^{-i} > I$  ce qui donne :

$$\sum Revenus > Capital$$

Donc, pour qu'un projet soit acceptable il faut que l'indice de profitabilité soit supérieur à 1.

### ***2.3. Le délai de récupération du capital investi***

Le délai de récupération du capital investi noté DRCI est le nombre d'année nécessaires pour reconstituer le capital investi.

Le DRCI indique à quel moment les gains réalisés auront permis de rembourser les coûts de projet ; il est défini par la formule suivante :

$$\sum_{i=1}^{DRCI} CF_i(1+t)^{-i} = I$$

On choisit parmi les projets exposés celui qui a un délai de récupération plus court

### ***2.4. Le Taux de Rentabilité Interne (TRI)***

*Le taux de rendement interne est le taux d'actualisation pour le quel la valeur actuelle nette est nulle. Autrement dit, c'est le taux qui rend égaux le montant de l'investissement et le cash flow induits par le même investissement :*

$$VAN=0$$

*TRI est la solution de l'équation :*

$$\sum_{i=1}^n CF_i(1+TRI)^{-i} - I = 0$$

*Si  $TRI < t$  alors*

$$\sum_{i=1}^n CF_i(1+TRI)^{-i} - I > \sum_{i=1}^n CF_i(1+t)^{-i} - I$$

$$\text{Or } \sum_{i=1}^n CF_i (1 + TRI)^{-i} - I_0 = 0$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n CF_i (1 + t)^{-i} - I_0 < 0$$

Par conséquent, tout projet dont TRI est inférieur au taux d'actualisation est rejetable

### **3. Les limites d'application des critères de sélection des projets**

Chacun des critères possède ses spécificités et ses caractéristiques propres.

Ils ne donnent donc pas le même classement selon les projets d'investissement .

#### **3.1. Les limite du TRI**

L'équation permettant de trouver le TRI est une équation de degré n, avec n le nombre d années de la durée de vie du projet, cette équation peuvent avoir une infinité de solution ou aucune solution

#### **3.2 La contradiction entre les critères d'évaluation**

Comme on a déjà vu le choix d un projet lie aux critères de sélection d un projet

d'investissement donc est ce que ces critères sont identiques ? C'est à dire si on choisit un projet en basant sur la VAN on aura le même résultat si on se base sur TRI

##### **3.2.1. Exemple**

Considérons les deux projets de même montant  $I_0=200000$  et de même durée ( $n=4$  ans) avec un taux d'actualisation  $i=10\%$

année	Cash-flow	
	A	B
1	100 000	10 000

2	100 000	50 000
3	100 000	100 000
4	100 000	300 000

On obtient les résultats suivants :

	A	B
VAN	116 990	130 446
TRI	34,9%	27,57%

D'après le tableau selon les critères VAN on choisit le projet B

Mais si on se base sur le critère TRI on choisit le projet A.

Donc les deux critères aboutissent à des classements contradictoires

Ce type de problème peut être résolu en distinguant le coût de capital  $k$  du taux de rendement d'un investissement  $r$ .

#### 4.3. La VAN globale $VAN_G$ ou intégrée $VAN_I$

La  $VAN_I$  est la différence entre la valeur actuelle de la valeur acquise des cash-flows et le montant d'investissement

$$VAN_I = A(1 + t)^{-n} - I_0$$

Avec  $A$  la valeur acquise des cash-flows

En effet

$$VAN = -I_0 + \frac{a_1}{(1+k)} + \frac{a_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+k)^n}$$

$$\Rightarrow VAN(1+k)^n = -I_0(1+k)^n + a_1(1+k)^{n-1} + \dots + a_n$$

Expression du gain financier évalué à la date  $n$

Cette expression n est valable que si k est égale à r si r est différent de k l expression doit être modifiées et devient :

A la date n

$$VAN(1+k)^n = -I_0(1+k)^n + a_1(1+r)^{n-1} + a_2(1+r)^{n-2} \dots + a_n$$

Et à la date 0

$$VAN = -I_0 + a_1 \frac{(1+r)^{n-1}}{(1+k)^n} + a_2 \frac{(1+r)^{n-2}}{(1+k)^n} + \dots + \frac{a_n}{(1+k)^n}$$

$$= -I_0 + \frac{a_1(1+r)^{n-1} + a_2(1+r)^{n-2} + \dots + a_n}{(1+k)^n}$$

$$= -I_0 + \frac{A}{(1+k)^n} = VAN_G$$

On retient le projet si  $VAN_t \geq 0$

### 3.4. Le TRI globale $TRI_G$

Le  $TRI_G$  est la valeur de t qui annule la valeur actuelle nette globale

$$(1 + TRI_G)^n = \frac{A}{I_0}$$

On rejette tout projet dont le  $TRI_G$  inférieur au coût moyen du capital

### 3.5. Cohérence des critères $VAN_G$ et $TIR_G$

En effet

$$VAN_G = -I_0 + \frac{a_1(1+r)^{n-1} + a_2(1+r)^{n-2} + \dots + a_n}{(1+k)^n}$$

$$VAN_G = -I_0 + \frac{A}{(1+k)^n}$$

$$\text{Avec } A = a_1(1+r)^{n-1} + a_2(1+r)^{n-2} + \dots + a_n$$

$A$  est indépendant de  $k$  est appelé 'le facteur d'accumulation'

Or

La valeur actualisée nette globale  $VAN_G$  est une fonction décroissante de  $k$

Le taux de rentabilité interne global ( $TRI_G = t$ ) tq :

$$(1+t)^n = \frac{A}{I_0}$$

Donc

$VAN_G > 0 \Leftrightarrow TRI_G > k$  Projet est adopté

$VAN_G < 0 \Leftrightarrow TRI_G < k$  Projet est rejeté

La cohérence de ces deux critères.

### **Démonstration**

$$VAN_G(A) = -I_0 + \frac{A}{(1+k)^n}$$

$$TRI_G(A) = t_A \Rightarrow (1+t_A)^n = \frac{A}{I_0}$$

$$VAN_G(B) = -I_0 + \frac{B}{(1+k)^n}$$

$$TRI_G(B) = t_B \Rightarrow (1 + t_B)^n = \frac{B}{I_0}$$

Or la fonction  $f(k) = (1 + k)^n$  est croissante de  $k$

Le projet qui a la plus forte facture d'accumulation aura donc à la fois la plus forte valeur actuelle nette globale et le plus fort taux de rentabilité interne.

### 3.6. Application de ces deux notions

On reprend l'exemple précédent avec  $r=12\%$  et  $k=10\%$

VAN globale de A :

$$100000(1,12^3 + 1,12^2 + 1,12 + 1) = 477932,8$$

$$VAN_I = 477932,8 \times 1,1^{-4} - 200\,000 = 126\,434$$

TRI globale de A :

$$(1 + t)^4 = \frac{477\,932,8}{200\,000} = 2,38$$

$$t = 24,33\%$$

VAN globale de B :

Valeur acquise des cash-flows

$$10\,000 * 1,405 + (50\,000 * 1,254) + (100\,000 * 1,12) + 300\,000 = 488\,750$$

$$VAN_I = 488\,750 * 0,6830 - 200\,000 = 133\,835$$

TRI globale de B :

$$(1 + t)^4 = \frac{488\,750}{200\,000} = 2,44$$

$$t = 25,03\%$$

*Donc les deux critères conduisent à la même conclusion : garder le projet B*

## Chapitre 3 : Calcul Numérique et Interprétation

### *1. introduction*

Dans le chapitre 2 nous nous sommes intéressés à l'investissement et aux critères de sélection d'un projet, nous avons également étudié la possibilité d'investissement.

Dans ce chapitre on prend l'éducation comme un projet d'investissement en considérant l'éducation comme un capital au sens économique

### **2 .Définition du taux de rentabilité interne de l'investissement éducatif**

#### **2.1 Taux de rentabilité interne sur une année**

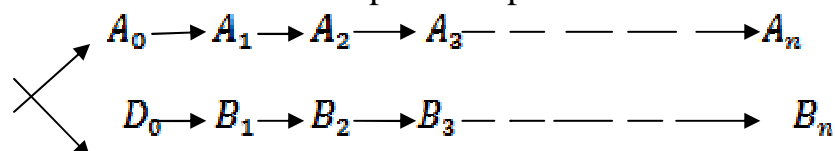
Imaginons un étudiant qui vient d'obtenir son DEUG et qui s'interroge sur l'opportunité de poursuivre ses études une année supplémentaire pour obtenir sa licence.

S'il interrompt ses études au niveau DEUG il obtiendra un flux de revenu évalué à  $A_0$  l'année suivant le DEUG,  $A_1$  la deuxième année après DEUG, .....  $A_n$  la  $n$ ème année, s'il poursuit ses études une année supplémentaire, il subira pendant cette année



des coûts évalués à la somme des coûts directs et indirects  $D_0$  et du coût d'opportunités correspondant aux salaires perdus pendant cette année d'étude, l'année suivante dans la mesure où il s'arrête au niveau licence, il obtiendra un flux de revenu évalué à  $B_1$  la première année (au lieu  $A_1$  s'il s'était limité à la licence)  $B_2$  la deuxième année etc.....

Le schéma suivant illustre le parcours possible



L'expression de la valeur actuelle nette s'écrit :

$$VAN = \sum_{i=1}^n \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} - C_0$$

$$C_0 = D_0 + A_0 : \text{Le coût d'investissement}$$

$$B_i - A_i : \text{Cash-flow}$$

Le taux de rendement interne sur une année c'est le  $r$  tel que :

$$VAN = 0$$

$$\sum_{i=1}^T \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} - C_0 = 0$$

$$(1+r)^T VAN = \sum_{i=1}^T \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} \times (1+r)^T - C_0 (1+r)^T$$

$$= (B_1 - A_1)$$

$$(1+r)^{T-1} + (B_2 - A_2)(1+r)^{T-2} +$$

$$\dots + (B_T -$$

$$A_T) - C_0 (1+r)^T$$

On multiplie les deux côtés par  $\frac{-1}{C_0}$  on aura

$$-\frac{(1+r)^T}{C_0} VAN =$$

$$(1+r)^T - \left[ \frac{(B_1 - A_1)}{C_0} (1+r)^{T-1} +$$

$$\frac{(B_2 - A_2)}{C_0} (1+r)^{T-2} + \dots + \frac{(B_T - A_T)}{C_0} \right]$$

$$r)^{T-2} + \dots + \frac{(B_T - A_T)}{C_0}]$$

Posant :

$$x = 1 + r$$

$$a_i = \frac{B_T - A_T - i}{C_0}$$

on obtiendra le polynôme suivant

$$p(x) = x^T - \sum_{i=0}^{T-1} a_i x^i$$

Trouver  $r_0$  équivaut à trouver la solution de  $p(x) = 0$

Cherchons à l'aide de Matlab  $x \in ]1, 2[$  solution de  $p(x) = 0$ , par l'algorithme suivant :

```

t=input ('le nombre des ans');
a0=input ('entre la valeur initiale de la premier personne
qui travaille:');
i_a=input ('entre la valeur de taux par lequel le salaire de la
lère personne augmente: ');
b_0=input ('entre la valeur initiale de la deuxième personne
qui travaille');
i_b=input ('entre la valeur de taux par lequel le salaire de la
2emme personne augmente: ');
D_0=input ('les dépenses d études: ');
For i=1:t+1
    A(i)=a0*((1+i_a)^(i-1));
End
A
('Le salaire de la 2 emme personne')
B(1)=0;
For i=2:t+1
    B(i)=b0*((1+i_b)^(i-2));
End
B
C=A(1) +D0;
%p est un polynôme
S=A-B
P=s. /c
p(1)=1

p1=polyval (p, 1)
p2=polyval (p, 2)
r=roots(p)
x= [1:0.001:2]
z=polyval (p, x)
Plot(x, z, 'r-')

```

Pour les données concrètes illustrées sur le tableau suivant, nous essayons de comparer la rentabilité de l'année de licence pour les quatre filières  
 Les données sont résumées dans le tableau suivant :

	DEUG	LICENCE			
		Filière 1	Filière 2	Filière 3	Filière 4
Dépense	20 000	40 000	80 000	120 000	80 000

Revenus	5 000	6 000	6 000	6 000	10 000
taux	0,8%	1%	1,2%	1,3%	1%

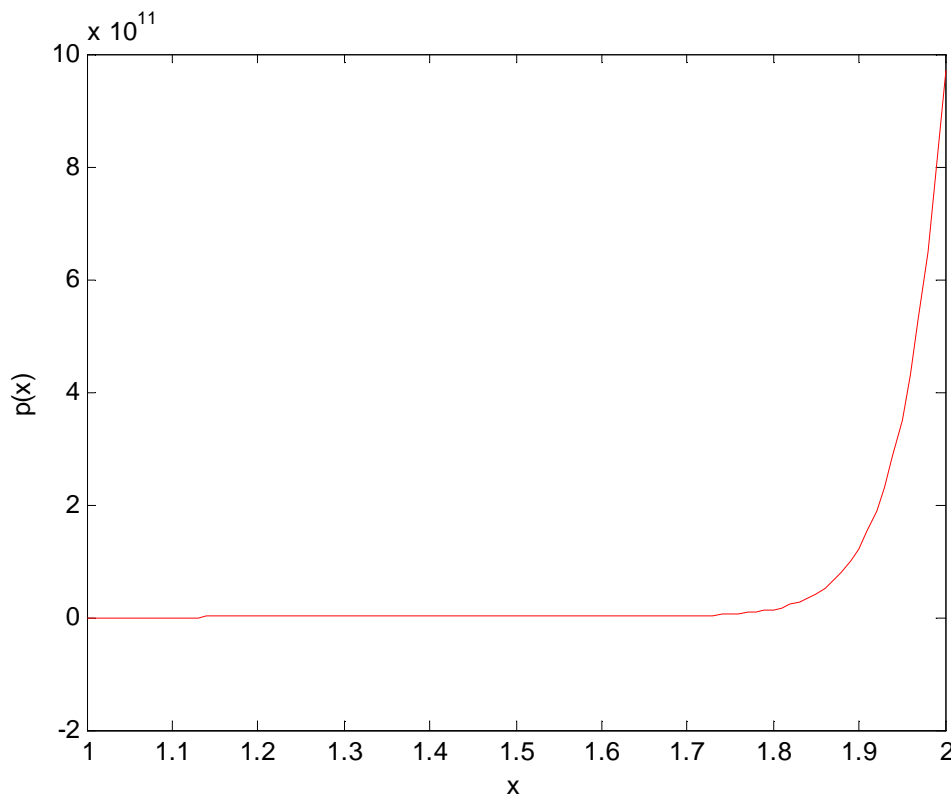
### -la filière 1

Cherchons la rentabilité de la filière 1 pour cela nous traçons la courbe de p avec :

$$A_i = A_0(1 + i_a)^i$$

$$B_i = B_0(1 + i_b)^i$$

La figure suivante représente la variation de p en fonction de x



Nous  
avons  
d'après  
les  
calculs

$p(1)$

=-5,81

$$p(2) = 9,07 \cdot 10^{11}$$

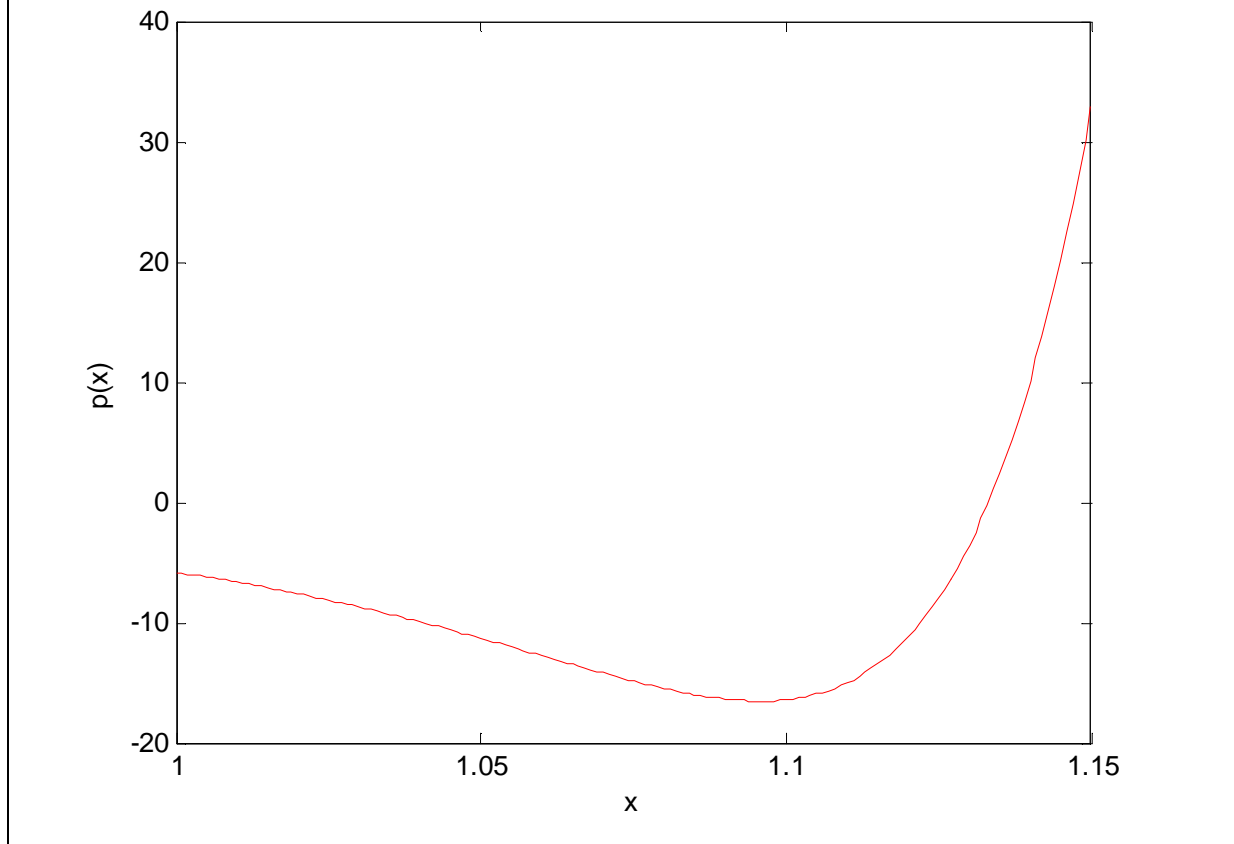
$$x_0 = 1,133$$

La courbe ne montre pas clairement le zéro de p

elle ressemble stationner dans l'intervalle **[1; 1,8]** et cela revient à l'échelle.

Si nous traçons la courbe au voisinage de la solution nous obtenons le graphe suivant :

figure 2 : la variation de p au voisinage de la solution



Ce graphe nous montre clairement le zéros de p

Pour  $x < x_0$   $p(x) < 0 \Rightarrow r < r_0 = 0,13$  la valeur actuelle nette

$VAN = p(r) \times -(1+r)^{-T} C_0$  donc  $VAN > 0$  par conséquent le système est rentable.

On voit que p(x) décroît après il croit, comme VAN et p(x) varie d'une manière opposée donc VAN croit jusqu'à atteindre une valeur maximale puis elle décroît.

Remarquons que pour  $x > x_0$

$p(x) > 0$  donc  $VAN < 0$  le système n'est plus rentable

### - La filière 2

Pour la deuxième filière de la licence on a :

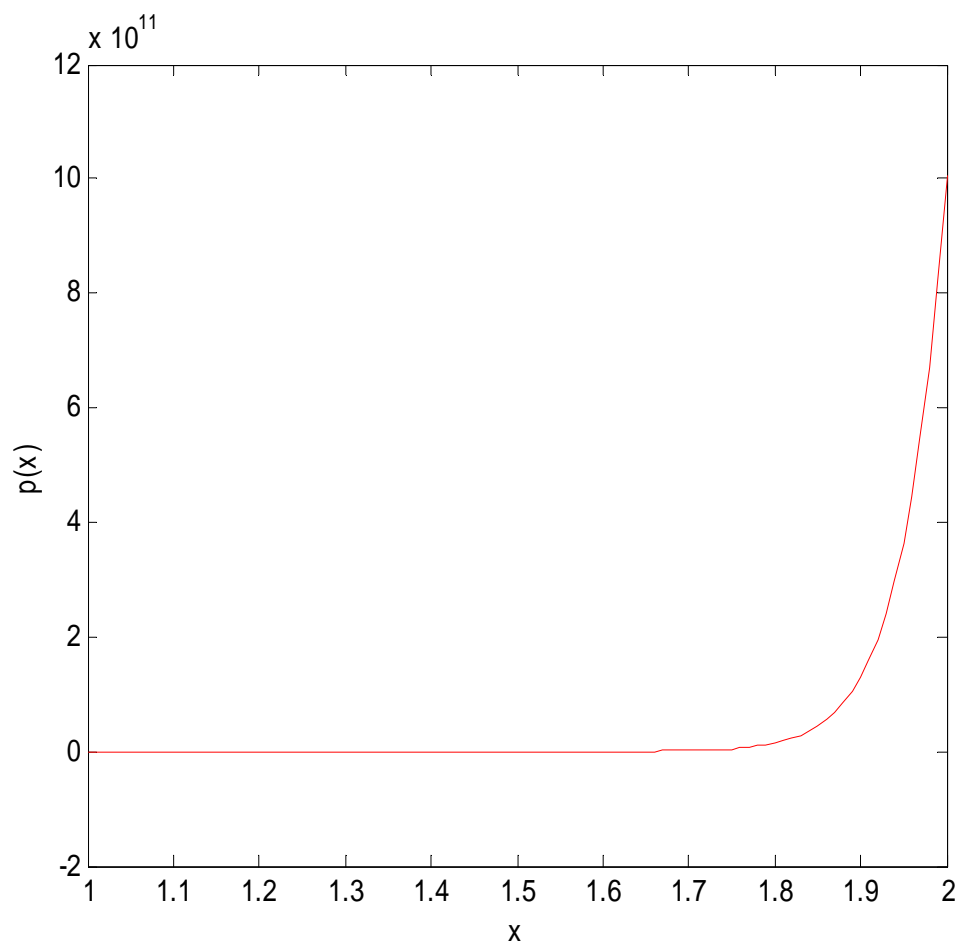
$$A_i = A_0(1 + i_a)^i$$

$$A_i = 5000 * 12(1 + 0,8\%)^i$$

$$B_i = B_0(1 + i_b)^i$$

$$B_i = 6000 * 12(1 + 1,2\%)^i$$

On trace la variation de p en fonction de x, la figure suivante nous donne cette variation :



pour ce graphe on a :

$$p(1) = -4,93$$

$$p(2) = 1,00610^{12}$$

$$x_0 = 1,107$$

Pour  $x < x_0$

$p(x) < 0 \Rightarrow r < r_0 = 0,107$  et la valeur actuelle nette VAN > 0 le système rentable

$p(x)$  devient positif et lorsque,  $x \rightarrow 2, (r \rightarrow 1)$  les cash flow actualiser deviennent très petite ils tend vers 0 par conséquent VAN tend vers  $-I_0$

On répète la même procédure pour les autres deux filières

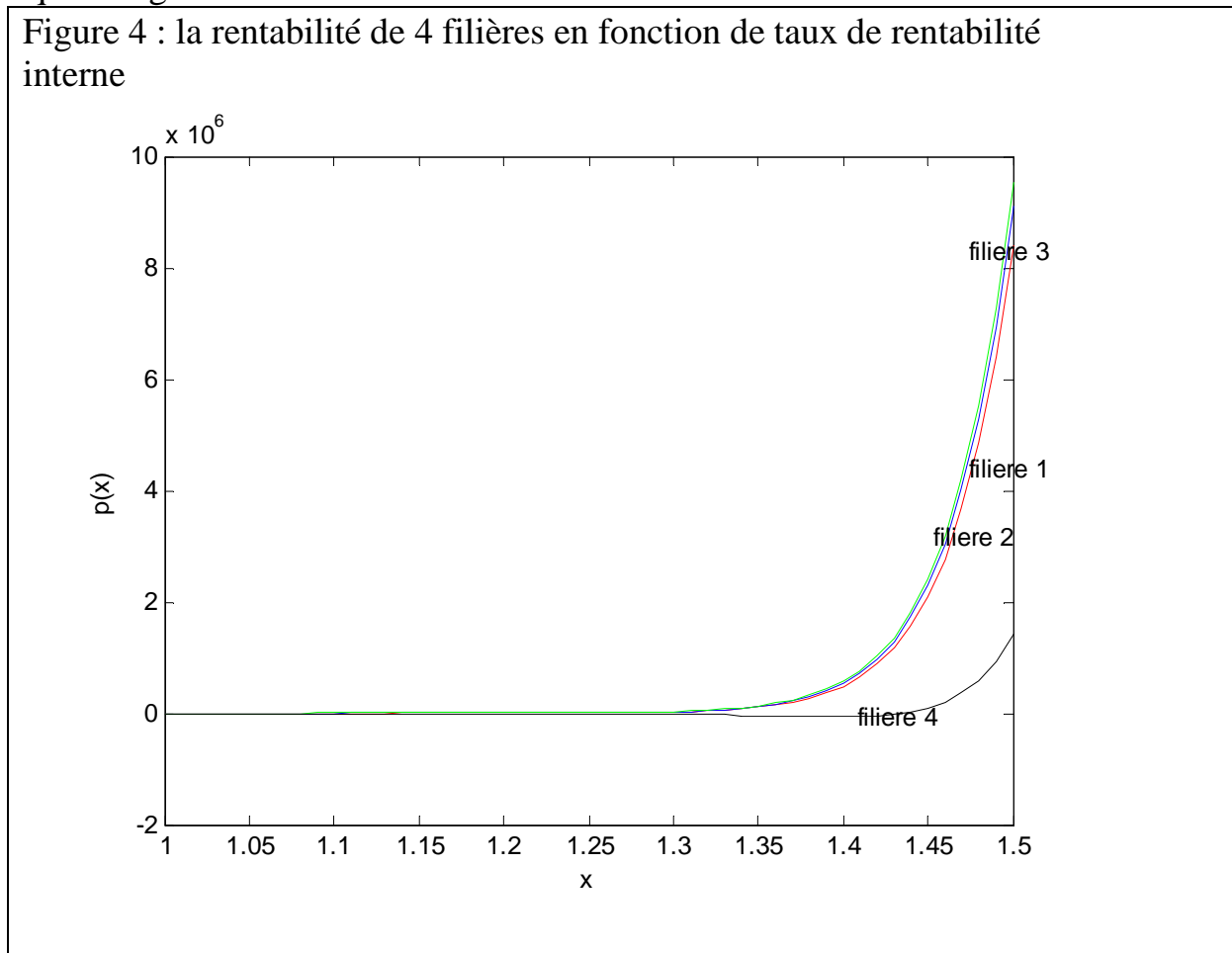
Le tableau suivant résume le résultat obtenu :

Esperance de vie	Les filières de la licence			
	F1	F2	F3	F4
20	0,1161	0,0816	0,0938	0,3468
30	0,1296	0,1011	0,0947	0,3471
40	0,1332	0,1073	0,0953	0,3472

50	0,1342	0,1096	0,0956	0,3472
60	0,1346	0,1104	0,0958	0,3472
90	0,1347	0,1110	0,0960	0,3472
100	0,1347	0,1110	0,0960	0,3472

On remarque que  $r_0$  de la filière 4 est plus grande a tous les  $r_0$  des autres filières donc la filière 4 est plus rentable que les autres

Si on trace la rentabilité de ces trois filières dans le même graphe on observe que le graphe de la filière 3 est au dessus de tous les graphes des autres filières, comme l'indique la figure suivante :



On constate d après le graphe que

$$\forall i, j \quad VAN_{F_i}(r) \cong VAN_{F_j}(r) \text{ pour tout } r \leq r'$$

Mais des que  $r > r'$  il y a un phénomène de bifurcation

Partir de  $r'$  ( $r > r'$ ) la variation des filières ( $F_1, F_2, F_3$ ) par rapport a r est fortement croissante et les 3 courbes sont presque confondu alors que la courbe de  $F_4$  s'écarte avec une variation lente par rapport a la variation d'autres filières on peut poser que :

$$\max VAN_4 - \max_{1 \leq i \leq 3} VAN_i > 0$$

Cela revient au salaire de la filière 4 qui est très élevé par rapport à celui des autres filières

D'autre part on observe que le taux de rentabilité interne de chaque filière s'augmente avec le temps mais à un certain moment il devient constant ce qui nous pousse à poser la question suivante.

**Existe-il un  $t^*$  à partir duquel la rentabilité demeure constante ?**

## 2.2. Taux de rentabilité interne sur plusieurs années

On a calculé le taux de rentabilité pour une année de l'étude c est un cas particulier

Essayons d'abord de généraliser ce résultat à N ans d'étude

Soit  $A_i$  le flux de revenus de personnes qui interrompt les études à un certain niveau

$B_i$  les flux de revenus après N ans d'études

$D_i$  les couts de ces N ans d'études.

La formule de la valeur actuelle nette devient :

$$VAN = \sum_{i=N+1}^T \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} - \sum_{i=1}^N \frac{A_i + D_i}{(1+r)^i}$$

Le taux de rentabilité par définition c est le  $r_0$  tel que :

$$VAN=0$$

$$\sum_{i=N+1}^T \frac{B_i - A_i}{(1+r)^i} - \sum_{i=1}^N \frac{A_i + D_i}{(1+r)^i} = 0$$

On pose  $y = \frac{1}{1+r}$  on obtient un polynôme p défini par :

$$p(y) = \sum_{i=N+1}^T (B_i - A_i) y^i - \sum_{i=1}^N (A_i + D_i) y^i$$

Le taux de rentabilité interne comme on a déjà cité c'est le  $r_0 \in ]0, 1[$  tel que  $VAN=0$

et aussi c est le  $y_0 \in ]\frac{1}{2}, 1[$  tel que  $p(y) = 0$

D'après les études  $p(y)$  admet une solution unique sur l'intervalle  $]\frac{1}{2}, 1[$

On essaye de calculer la rentabilité pour 2 ans supplémentaires d'études

On cherche la rentabilité du DEUG par rapport au baccalauréat

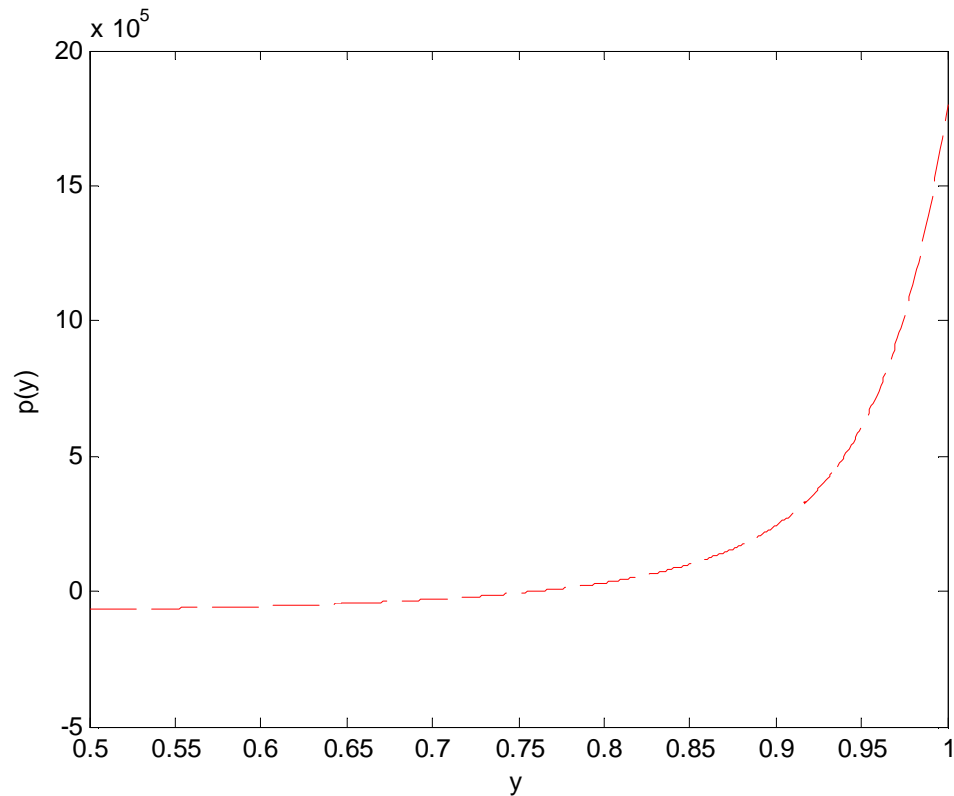
Les données sont résumées dans le tableau suivant :

	BAC	DEUG
Les dépenses		40 000
Le salaire annule	36 000	60 000
Le taux	1%	0.8%

d'augmentation de salaire		
------------------------------	--	--

A l'aide de Matlab on cherche  $y_0$  solution de  $p(y) = 0$  dans l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ . la figure suivante donne la variation de  $p$  en fonction de  $y$

Figure 2.1 : variation de  $p$  en fonction de  $y$



*D'après les calculs on a :*

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = -6,61 \cdot 10^4$$

$$P(1) = 1,8 \cdot 10^6$$

$$y_0 = 0,7595$$

$$y = \frac{1}{1+r}$$



$$\frac{dr}{dy} = -\frac{1}{y^2} < 0$$

La même remarque qu'on a déjà fait pour une année d'étude on voit pas ce qui se passe entre  $[0,5 ; 0,8]$  c'est pourquoi nous essayons de tracer la graphe dans cet intervalle.

Donc pour  $y < y_0$ ,  $p(y) < 0$  par conséquent  $r > r_0 = 0,3166$  le système n'est plus rentable.

Et pour  $y > y_0$ ,  $p(y) > 0 \Rightarrow r < r_0 = 0,3166$  le système est rentable.

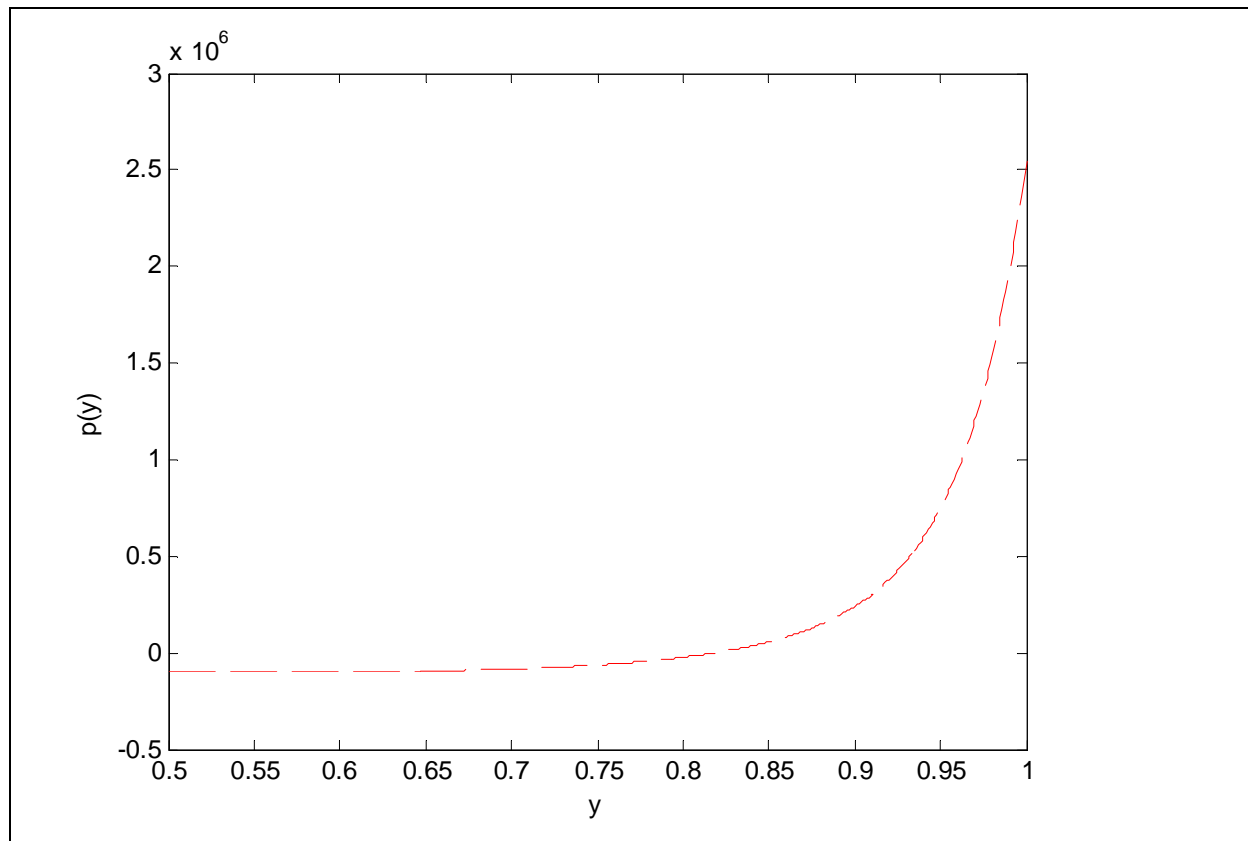
Maintenant on traite le cas où  $N=3$  en faisant une comparaison entre revenus du BAC et la licence des données sont rassemblés dans le tableau suivant :

	BAC	Licence
Les dépenses annuelles		80000
Les revenus	3000	6000
Le taux d augmentation	1%	1,2%

L'implémentation sur Matlab donne la variation de

$p(y) = \sum_{i=N+1}^T (B_i - A_i) y^i - \sum_{i=1}^N (A_i + D_i) y^i$  en fonction de  $y$  sur intervalle  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  comme l'indique la figure suivante :

Figure 2.3 : la variation de  $p$  en fonction pour 3 ans d'études



$$p\left(\frac{1}{2}\right) = -9,81 \cdot 10^4$$

$$p(1) = 2,54 \cdot 10^6$$

$$y_0 = 0,8858$$

Le système est rentable pour les  $y > y_0 \Rightarrow r < \frac{1}{y_0} - 1 = 0,2214$

Et il n'est pas rentable pour le cas inverse c'est à dire pour  $r > 0,2214$

## La conclusion :

Dans ce travail de nature modélisation mathématique de quelques notions d'économie ; j'ai bien appris les techniques de faire une recherche bibliographique sur un thème précis qui lie les connaissances mathématiques avec un domaine très important, celui de l'économie

En suite, nous avons fait une étude basée sur de calcul numérique via Matlab, ce qui nous a permis de penser à une conjoncture de façon numérique deux idées à savoir :

- 1- La variation de VAN en fonction du taux d'actualisation atteint un maximum ce qui permet de dire qu'il existe  $r^*$  un voisinage  $VAN^*$  tel que :  $VAN(r) < VAN(r^*)$  pour tout  $r \neq r^*$

2- Le second résultat de calcul numérique est qu'il existe  $r'$  paramètres de bifurcation au sens que au voisinage de cette valeur les  $VAN_{F_i}(r)$  se distinguent en deux classes ; une classe est presque identique puisque la différence entre les salaires est négligeable et une classe dominante. Ce résultat nous le formulons de la façon suivante :

$$VAN_1 = VAN_2 = VAN_3, \forall r \geq r' \text{ mais } VAN_4 > VAN_i \forall i \{1,2,3\}$$

Ce qui explique le rôle du salaire dans chaque filière

Une remarque numérique qui reste à expliquer d'une façon mathématique est qu'il existe une espérance de vie  $T^*$  à partir de laquelle il n'y a pas d'influence sur VAN c.-à-d. :

$$VAN(T1)=VAN(T2) \quad , \forall T1 > T^* \text{ et } T2 > T^*$$

## BIBLIOGRAPHIE

---

[FIKRI] : Majda FIKRI ; "planification des ressources humaines : modélisation et résolution par les Méta heuristique-Proposition d'un Indice Semi Flou de Pauvreté", 2011, P : 159

[Richard] : Jean RICHARD, "les critères de choix d investissement ", chapitre : 4, université Paris Dauphine

[GARDES] : Nathalie GARDES "la décision d investissement", chapitre 2

[GRAVOT] : pierre GRAVOT,"capital humain et demande de formation initial"