Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques de Fès
Département de Mathématiques

Rapport de fin d'étude

Pour l'obtention de la licence en Mathématiques et Applications

Sujet de PFE :

Limites inférieure et supérieure et leurs applications

Encadré par :

- Pr. Ouadghiri Anisse

Réalisé par :

- Eddarif Fatiha

Soutenu le Mardi 16 Juin 2015 devant le jury composé de :

- Pr. Ouadghiri Anisse
- Pr. Sidki Omar
- Pr. Akhmouch Mohammed

Faculté des Sciences et Techniques Fès - Saiss

Adresse: B.P. 2202 - Route d'Imouzzer – Fès

Tel: 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax: 212 (0)5 35 60 82 14

Site web: http:// www.fst-usmba.ac.ma

Année universitaire 2014/2015

Remerciements

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à témoigner ma profonde gratitude à Mr. Ouadghiri Anisse sans qui ce projet n'aurait pas vu le jour. Ce fut un grand honneur de pouvoir accomplir ce travail sous sa direction. J'ai pu bénéficier de ses précieux conseils, de sa disponibilité, de sa gentillesse et de son soutien constant pour mener à bien ce travail. Encore merci !

Mes remerciements vont également aux professeur Sidki Omar, et Akhmouch Mohammed, d'avoir accepté de juger mon modeste travail.

Dédicace

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier de trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit. Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

Mes frères qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Table des matières

Table des matières

Introduction

Les limites supérieure et inférieure sont des notions mathématiques souvent utilisées pour résoudre un certain nombre de problèmes en analyse.

D'abord, dans le premier chapitre on doit définir les limites supérieure et inférieure dans le cas d'une suite réelle, les opérations sur ces limites et le résultat important qui se découle à partir de limites supérieure et inférieure. Et d'après ce résultat on peut toucher l'importance de ces limites pour résoudre le problème de convergence pour une suite réelle.

Ensuite, en deuxième chapitre on s'intéresse principalement à une nouvelle notion, s'appelle la formule d'Hadamard qui est en relation avec la détermination du rayon de convergence d'une série entière et qui se découle à partir de la limite supérieure d'une suite réelle.

Finalement, le troisième et le quatrième chapitre sera comme une partie concernant les limites supérieure et inférieure dans le cas d'une fonction et dans le cas d'une suite d'ensembles.

Chapitre premier

Limite supérieure et inférieure d'une suite réelle

1.1 Généralités sur les suites :

Définitions :

Définition 1 : (une suite réelle)

Une suite réelle (ou numérique) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{u}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{u}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}$$

L'application $\boldsymbol{u}$ est notée par $(\boldsymbol{u}_n)_{n\geq 0}$, et $\boldsymbol{u}_n$ s'appelle le terme général (ou le terme de rang $\boldsymbol{n}$) de la suite. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On considère également des suites $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_n)_{n\geq n_0}$ qui ne sont définies qu'à partir d'un certain rang $\boldsymbol{n}_0$(par exemple la suite de terme général $\boldsymbol{u}_n = \sqrt{\boldsymbol{n}-2}$ n'est définie que pour $\boldsymbol{n} \geq 2$).

Définition 2 : (limite d'une suite)

On dit que la suite $(\boldsymbol{u}_n)_{n\geq 0}$ a pour limite $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $\boldsymbol{n} \geq N$ alors $|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{l}| \leq \boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\boxed{\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad (\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N} \Longrightarrow |\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{l}| \leq \boldsymbol{\varepsilon})}$$

On dit aussi que la suite $(\boldsymbol{u}_n)_{n\geq 0}$ tend vers $\boldsymbol{l}$. Autrement dit : $\boldsymbol{u}_n$ est proche aussi près que l'on veut de $\boldsymbol{l}$, à partir d'un certain rang.

Définition 3 :

Une suite $(\boldsymbol{u}_n)_{n\geq 0}$ est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

On va pouvoir parler de la limite d'une suite, si elle est existe, car il y a unicité de la limite.

1.2 Limites supérieure et inférieure d'une suite : [1]

Soit $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **une suite de réels.**

Considérons la suite d'ensembles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathrm{U_n}$ est définie par :

$$U_n = \{u_m, m \geq n\}.$$

Posons, alors,

$$\underline{u_n} = inf_{n\in\mathbb{N}} U_n \quad \text{et} \quad \overline{u_n} = sup_{n\in\mathbb{N}} U_n \,.$$

Comme les ensembles U_n sont emboités i. e $(U_{n+1} \subset U_n)$:

La suite $(\underline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc admet une limite (éventuellement infinie) sa limite est la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(\overline{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, sa limite est la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2.1 Définitions :

- On appelle limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n\to+\infty} inf\, u_n$ ou $\underline{\lim}\, u_n$ la quantité :
  $\lim_{n\to+\infty} inf\, u_n = sup\left\{\underline{u_n}\,, n \in \mathbb{N}\right\}$ où, $\underline{u_n} = inf\{u_m\,, m \geq n\}$.

- On appelle limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n$ ou $\overline{\lim}\, u_n$ la quantité :
  $\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n = inf\{\overline{u}_n\,, n \in \mathbb{N}\}$ où $\overline{u}_n = sup\{u_m\,, m \geq n\}$.

De façon abrégée on note :

$$\lim_{n\to+\infty} inf\; u_n = sup_{n\in\mathbb{N}} inf_{m\geq n}\, u_m \text{ et}$$

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n = inf_{n\in\mathbb{N}} sup_{m\geq n} u_m.$$

Exemple :

i. $\lim_{n\to+\infty} inf\; \sin(n) = -1$ et $\lim_{n\to+\infty} sup\; \sin(n) = 1$.

ii. $\lim_{n\to+\infty} inf\; \left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} sup\; \left(\frac{\sin n}{n}\right) = 0$.

Remarques :

- On peut voir la limite inférieure comme la plus petite limite d'une suite extraite de la suite (u_n) et la limite supérieure comme la plus grande. Elles peuvent éventuellement être infinies. On peut toujours extraire de (u_n) deux sous suites qui convergent vers ces deux limites. Elles fournissent une caractérisation de la convergence.

Une suite converge si et seulement si sa limite inférieure est égale à sa limite supérieure.

- On peut aussi dire que les limites inférieures et supérieures d'une suite (u_n) à valeurs dans le compact $\overline{\mathbb{R}}$ sont respectivement sa plus petite et sa plus grande valeur d'adhérence.

Définitions :

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Alors, une suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

- Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la valeur l est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l .

On peut caractériser les notions des limites supérieure et inférieure par les propriétés suivantes :

1.2.2 Opérations sur les limites supérieure et inférieure : [2]

Proposition 1 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles bornées, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} inf\, u_n + \lim_{n\to+\infty} inf\, v_n \leq \lim_{n\to+\infty} inf\,(u_n + v_n)\,.$$

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n + \lim_{n\to+\infty} sup\, v_n \geq \lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n + v_n).$$

Preuve :

Pour chaque $k \geq 1$, nous pouvons écrire :

$$inf_{n\geq k} u_n + inf_{n\geq k} v_n \leq u_j + v_j \leq sup_{n\geq k} u_n + sup_{n\geq k} v_n \quad \forall j \geq k$$

La première inégalité implique :

$$inf_{n\geq k} u_n + inf_{n\geq k} v_n \leq inf_{n\geq k}(u_n + v_n)$$

Tandis que la seconde donne :

$$sup_{n\geq k}(u_n + v_n) \leq sup_{n\geq k} u_n + sup_{n\geq k} v_n$$

Et par passage à la limite, nous faisant tendre n vers $+\infty$ et on obtient les deux inégalités

Proposition 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles bornées, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} inf\, u_n \times \lim_{n\to+\infty} inf\, v_n \leq \lim_{n\to+\infty} inf\,(u_n.v_n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n \times \lim_{n\to+\infty} sup\, v_n \geq \lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n.v_n)$$

Preuve :

Pour chaque $k \geq 1$, nous avons :

$$inf_{n\geq k} u_n \times inf_{n\geq k} v_n \leq u_j.v_j \leq sup_{n\geq k} u_n \times sup_{n\geq k} v_n \qquad \forall j \geq k$$

Si $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites à termes positifs, le reste de démonstration se mène comme la démonstration précédente.

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles bornées, tel que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers l. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} sup\, u_n + l$$

$$\lim_{n\to+\infty} inf\,(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} inf\, u_n + l$$

Preuve :

En montrant une double inégalité.

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n + v_n) &\leq \lim_{n\to+\infty} sup\, u_n + \lim_{n\to+\infty} sup\, v_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} sup\, u_n + l\end{aligned}$$

D'autre part, en posant :

$$u_n = (u_n + v_n) + (-v_n)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n &\leq \lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n + v_n) + \lim_{n\to+\infty} sup\,(-v_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n + v_n) - l\end{aligned}$$

Où, $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $(-l)$.

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n + l \leq \lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n + v_n)$$

D'où, l'égalité.

De la même manière on peut prouver la seconde égalité.

Proposition 3 :

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suite réelles bornées, tel que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers $l \geq 0$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n.v_n) = l.\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} inf\,(u_n.v_n) = l.\lim_{n\to+\infty} inf\, u_n$$

Preuve :

Rappelez-vous le fait élémentaire suivant :

Si (s_n) une suite bornée, et (t_n) une suite converge vers 0, alors $(s_n t_n)$ converge vers 0. Cela dans le cas de $l = 0$, donc :

Nous pouvons supposer $l > 0$. Nous avons alors,

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = \lim_{n\to+\infty} (u_n.v_n) + \lim_{n\to+\infty} u_n(v_n - l)$$

Comme $u_n(v_n - l)$ converge vers 0.

Et d'après la proposition 2, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} sup\,(u_n v_n) = \lim_{n\to+\infty} sup\,(l.u_n)$$

Et puisque $l > 0$, alors nous avons $sup_{n\geq k}(l.u_n) = l.sup_{n\geq k}u_n$.

Et de manière similaire, on a :

$$inf_{k\geq 1}(l.sup_{n\geq k}u_n) = l.inf_{k\geq 1}sup_{n\geq k}u_n$$

D'où, $\lim_{n\to+\infty} sup\,(l.u_n) = l.\lim_{n\to+\infty} sup\, u_n$

De la même manière, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} inf\,(u_n.v_n) = l.\lim_{n+\infty} inf\, u_n$$

Proposition 4 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réelles. Alors,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n.$$

Preuve :

Posons :

$$v_n = inf_{k\geq n} u_k \quad \text{Et} \quad w_n = sup_{k\geq n} u_k.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} inf\ u_n = sup_{n\geq 1} v_n \qquad \text{Et} \quad \lim_{n\to+\infty} sup\ u_n = inf_{n\geq 1} w_n.$$

Et pour tout n, ona :

$$v_n \leq w_n.$$

Et, si $n \leq m$

Alors,

$v_n \leq v_m$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Et $w_m \leq w_n$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Donc,

$v_n \leq w_m$, pour deux entiers n et m.

D'où,

Et par passage à la limite, quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} inf\ u_n \leq \lim_{n\to+\infty} sup\ u_n.$$

Proposition 5 :

Soit une suite de réelles $(u_n)_{n\geq 1}$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} inf\ u_n = -\lim_{n\to+\infty} sup(-u_n)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} inf\ u_n &= sup_{n\geq 1} inf_{k\geq n} u_k \\ &= sup_{n\geq 1} inf\{u_k : k \geq n\}\end{aligned}$$

$$= sup_{n\geq 1}(-sup\{-u_k : k \geq n\})$$

$$= -inf_{n\geq 1} sup\{-u_k : k \geq n\}$$

$$= -inf_{n\geq 1} sup_{k\geq n}(-u_k)$$

$$= -\lim_{n\to+\infty} sup(-u_n)$$

Proposition 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réelles, avec $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} sup\ u_n \leq \lim_{n\to+\infty} sup\ v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} inf\ u_n \leq \lim_{n\to+\infty} inf\ v_n$$

Preuve :

En effet,

Pour tout n, $\quad sup_{k\geq n} u_k \leq sup_{k\geq n} v_k$.

Et par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$.

On obtient alors, la première inégalité :

$$\lim_{n\to+\infty} sup\ u_n \leq \lim_{n\to+\infty} sup\ v_n$$

De même façon pour la deuxième inégalité.

Pour tout n, on a : $\quad inf_{k\geq n} u_k \leq inf_{k\geq n} v_k$.

Par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$.

D'où, le résultat.

1.3 Convergence d'une suite réelle : [1]

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Alors,

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si,

$$\lim_{n\to+\infty} inf\ u_n = \lim_{n\to+\infty} sup\ u_n = l$$

Preuve :

Nous le démontrons pour une limite finie.
Rappelons la construction de limite supérieure et limite inférieure comme limites respectivement des suites $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où,

$$\overline{u}_n = sup_{n\in\mathbb{N}}\,\mathrm{U}_n \text{ et } \underline{u}_n = inf_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{U}_n.$$

Avec, $\mathrm{U}_n = \{u_m\,, m \geq n\}$.

CS

Démontrons d'abord la condition suffisante :

Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par les suites $\underline{u}_n$ et $\overline{u}_n$.

$$\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n$$

Et comme la suite $(\underline{u}_n)$ croit ver l et la suite $(\overline{u}_n)$ décroit vers l.

Alors,

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite (d'après le théorème de gendarmes).

CN

Réciproquement, démontrons la condition nécessaire :

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors,

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir du quel tous les ensembles U_n sont inclus dans l'intervalle $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, ce qui implique :

$$l - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq l + \varepsilon$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ il entraine :

$$l = \lim_{n\to+\infty} inf\; u_n = \lim_{n\to+\infty} sup\; u_n$$

D'où, le résultat.

Rappel : (Théorème de Gendarmes)

On considère trois suites de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'à partir d'un certain rang n_0 :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

Avec, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l.$

Alors, $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemple 1 :

On considère (x_n) une suite réelle, bornée et croissante.

Où,

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Et posons :

$$y_n = sup\left\{1 - \frac{1}{k} : k \geq n\right\} = 1$$

$$z_n = inf\left\{1 - \frac{1}{k} : k \geq n\right\} = 1 - \frac{1}{n}$$

Avec, $y_n \searrow 1$ et $z_n \nearrow 1$

Donc, (y_n) et (z_n) deux suites convergent vers la même limite 1.

D'où, la suite (x_n) converge vers 1.

Et, $\lim_{n\to+\infty} inf\, x_n = \lim_{n\to+\infty} sup\, x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

Exemple 2 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée, tel que $x_n = (-1)^{n+1}$.

Et soit,

$$y_n = sup\{(-1)^{k+1} : k \geq n\} = 1 \ \ et \ \ z_n = inf\{(-1)^{k+1} : k \geq n\} = -1$$

Donc,

$$y_n \searrow 1 \ \ et \ \ z_n \nearrow (-1)$$

Alors, (y_n) et (z_n) deux suites convergent vers deux limites différentes.

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, x_n = 1 \ \ et \ \ \lim_{n\to+\infty} inf\, x_n = -1$$

D'où, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente et $\lim_{n\to+\infty} x_n$ n'existe pas.

Chapitre 2

La formule d'Hadamard

2.1 Séries entières : [3]

2.1.1 Définitions :

- On appelle série entière réelle toute série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

  Avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- On appelle série entière complexe toute série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

  Avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $\mathbb{C}$ *et* $z \in \mathbb{C}$.

On s'intéresse principalement aux séries complexes dont on déduira facilement les résultats pour les séries entières réelles.

2.1.2 Le rayon de convergence :

On va prouver dans ce paragraphe l'existence de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

a. Lemme d'Abel :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et, $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors,

$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve :

$(a_n {z_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée,

Donc,

Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ |a_n z_0^n| \leq M.$$

Alors,

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ z \in \mathbb{C}, \quad |a_n z^n| = |a_n||z^n|$$

$$\leq\ |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$$\leq M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

Pour z vérifiant $|z| < |z_0|$, on a $\frac{|z|}{|z_0|} < 1$

$\sum_{n\geq 0}|a_n z^n|$ et $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$, sont deux séries à termes positifs telles que:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad |a_n z^n| \leq \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n.$$

Et comme $\sum_{n\geq 0}\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)^n$ est une série convergente (série géométrique de raison inférieure à 1).

Donc,

Et d'après le théorème de comparaison :

On en déduit que $\sum_{n\geq 0}|a_n z^n|$ converge.

D'où,

$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

b. Définition :

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble de réels positifs r tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

$$\boxed{R = sup\{r \in \overline{\mathbb{R}^+} \text{ / La suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}}$$

c. Proposition :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence, alors :

$$\forall z \in \mathbb{C} \begin{cases} |z| < R \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} a_n z^n \text{, converge absolument} \\ |z| > R \;\; (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée et la série diverge grossièrement} \end{cases}$$

Preuve : (existence)

Soit $E = \{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée** $\}$.

Avec $E \subset \mathbb{R}^+$ et $E \neq \emptyset$ car $0 \in E$.

Si $r \in E$, alors $[0, r] \subset E$.

Donc,

E est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ contenant 0.

Soit $R = sup(E)$.

Si E est un intervalle borné, **alors**, $R \in \mathbb{R}$.

Sinon $R = +\infty$ (**c'est-à-dire** $E = [0, +\infty[$).

Soit $z \in \mathbb{C}$ **tel que** $|z| < R$.
Et soit $r \in \mathbb{R}^+$ **tel que** $|z| < r < R, r \in E$ **donc** $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est bornée.**

Donc,

$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ **converge absolument d'après le lemme d'Abel.**

Soit $z \in \mathbb{C}$ **tel que** $|z| > R$.

Alors,

$|z| \notin E$ (**par définition de R**).

D'où,

$(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas bornée.**

Unicité :

Supposons qu'il existe R_1, R_2, **éléments de** $\overline{\mathbb{R}^+}$ satisfaisant aux conditions de proposition précédente.

Et supposons que $R_1 \neq R_2$ **avec par exemple** $R_1 < R_2$.

Soit maintenant $r \in \mathbb{R}^+$ **tel que** $R_1 < r < R_2$.

On a $r < R_1$ donc,

La série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ converge absolument.

Mais, $r > R_1$ donc,

La série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ **n'est pas bornée.** Contradiction.

D'où,

L'unicité de rayon de convergence d'une série entière $R_1 = R_2$.

Attention : On n'affirme rien quand à la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$.

2.1.3 Domaine de convergence :

a. Définition :

Avec les notations précédentes le disque ouvert
$\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < R\}$ est appelé **le disque (ouvert) de convergence de la série entière de la variable complexe z.**
L'application S définie sur $\mathcal{D}(0, R)$ par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$
est appelée la somme de la série entière.

Remarque :

Soit la série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
Et soit $R \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de cette série.
Alors, le domaine de convergence dans ce cas est l'intervalle
]-R, R [est appelé l'intervalle ouvert de convergence.
L'application S définie sur]-R, R [par S(x)=$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est appelée somme de la série entière.

b. Exemple :

Considérons la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ avec $a_n = 1$.

Alors,

Si $|z| < 1$ la série géométrique est absolument convergente.

Sinon (c'est-à-dire $|z| \geq 1$, donc elle diverge grossièrement.

D'où,

Le rayon de convergence de cette série est R=1, et son domaine de Convergence est $\mathcal{D}_c = \mathcal{D}(0, 1)$.

Remarque :

- Toute série entière possède un rayon de convergence.
- Si $R = +\infty$, le disque ouvert de convergence est le plan complexe.
- Si $R = 0$, alors, le disque ouvert de convergence est vide.

2.1.4 Détermination pratique de rayon de convergence : [3]

a. Critère de d'Alembert :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Si $a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

Alors,

Le rayon de convergence est $R = \frac{1}{l}$.

Avec la convention $\left(\frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0\right)$.

Preuve :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Et $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$.

Si $l \in \mathbb{R}$, d'après la règle de dAlembert pour les séries entières à termes réels positifs, on a:

- Si $l|z| < 1$ $\left(c'\text{est-à-dire } |z| < \frac{1}{l}\right)$, alors $\sum_{n\geq 0}|a_n z^n|$ converge.
- Si $l|z| > 1$ $\left(c'\text{est-à-dire } |z| > \frac{1}{l}\right)$, alors $\sum_{n\geq 0}|a_n z^n|$ diverge.

Donc,

Le rayon de convergence est égal à $\frac{1}{l}$.

Si $l = 0$, alors $l|z| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Donc,

$\sum_{n\geq 0}|a_n z^n|$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (c'est-à-dire $R = +\infty$).

Si maintenant $l = +\infty$, alors $l|z| > l$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Donc,

$\sum_{n\geq 0}|a_n z^n|$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ donc $R = 0$.

b. Critère de Cauchy :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}^+}$.

Alors,

Le rayon de convergence est $R = \frac{1}{l}$.

Avec la convention $(\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0)$.

Preuve :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Et $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$.

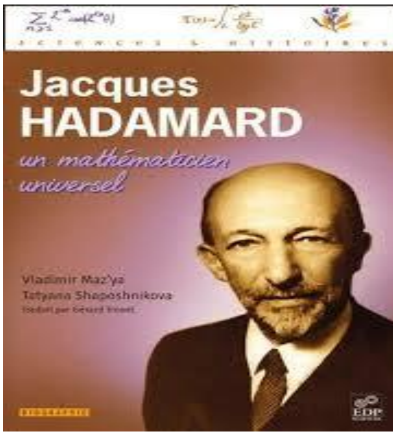
Alors,

La conclusion découle de la règle de Cauchy pour les séries numérique (Avec le même raisonnement que pour la règle de d'Alembert).

Ces deux derniers critères sont en pratique les plus utilisés pour calculer des rayons de convergence. Cependant, il peut arriver que les limites considérées n'existent pas. La formule d'Hadamard donne une manière explicite pour la détermination du rayon de convergence.

2.2 La formule d'Hadamard : [4]

Histoire :



Jacques Salomon Hadamard (né le 8 décembre 1865 à Versailles, mort le 17 octobre 1963 à Paris) est un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres.

En 1906, il devient président de la société Mathématique de France. En 1909, il obtient la chaire de mécanique analytique et mécanique céleste au collège de France. Trois ans plus tard, il succède à Henri Poincaré à l'Académie des sciences et à Camille Jordan à l'école polytechnique. En 1920, il devient également professeur à l'école centrale Paris. Jacques Hadamard fut aussi président d'honneur de l'union rationaliste de France.

En 1940, il fuit l'occupation avec sa famille grâce à Varian Fry et s'installe aux Etats-Unis. Il apprend la mort de son troisième fils en 1944. A la fin de la guerre, il retourne s'installer à Paris. En 1962, la mort de son petit-fils dans un accident de montagne l'affaiblit considérablement. Il meurt l'année suivante à l'âge de 97 ans.

Son résultat le plus célèbre est la preuve obtenue en 1896 du théorème des nombres premiers (démontré indépendamment la même année par Charles-Jean la vallée Poussin). Il a aussi établi la notion de problème bien posé dans le domaine des équations différentielles.

Il a laissé son nom aux matrices de Hadamard utilisées dans la transformée de Hadamard dans le champ d'application est vaste : algorithmes quantiques, traitement du signal, compression de données, etc. Ainsi qu'au développement d'une fonction méromorphe en produit de Hadamard, au produit de Hadamard de deux séries et aux variétés de Hadamard.

2.2.1 Proposition :

Si $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ est bornée, posons :

$$\boldsymbol{l} = \lim_{n\to+\infty} sup\{\sqrt[n]{|a_n|}\} = inf_{n\in\mathbb{N}}\left(sup\left\{\sqrt[p]{|a_p|}\,,\ p \geq n\right\}\right)$$

Sinon, posons $\boldsymbol{l} = +\infty$. Alors on a : $\quad \boldsymbol{R} = \frac{1}{l}$

Preuve :

Supposons que $\boldsymbol{l}$ est fini et positif.

Soit $r < \frac{1}{l}$ ou bien $\frac{1}{r} > l$

Alors, il existe N tel que :

$$sup\left(\sqrt[p]{|a_p|}\,, p \geq N\right) < \frac{1}{r}$$

Ce qui implique,

$$\forall\, p \geq N,\ \sqrt[p]{|a_p| r^p} < 1\ , \qquad |a_p r^p| < 1$$

D'où, la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée et $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$.

Et par conséquent,

$$\frac{1}{l} \leq R$$

Si maintenant $r > \frac{1}{l}$ et soit r' tel que $r > r' > \frac{1}{l}$, alors $l > \frac{1}{r'}$.

Et pour tout n, $sup\left(\sqrt[p]{|a_p|}\ ,\ p \geq n\right)$.

Donc, il existe p_n tel que : $p_n \geq n\ \ et\ \ \sqrt[p_n]{|a_{p_n}|r'^{p_n}} > 1$.

On construire par récurrence une suite (p_k) telle que $p_{k+1} > p_k$ pour tout k et $|a_{p_k}|r'^{p_k} > 1$. On a :

$$|a_{p_k}|r^{p_k} > \left(\frac{r}{r'}\right)^{p_k} |a_{p_k}|r'^{p_k} > \left(\frac{r}{r'}\right)^{p_k} \longrightarrow +\infty$$

Et la suite $(|a_n|r^n)$ n'est pas bornée. Donc, $\frac{1}{l} \geq R$.

2.2.2 La réciproque de la formule d'Hadamard : [5]

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est donné par :

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Preuve :

Soient $r > 0$ tel que $r < R$, et ρ' tel que $r < \rho' < R$. Pour p assez grand, on a l'inégalité :

$$\frac{1}{R} \leq sup_{n\geq p}|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho'}.$$

C'est-à-dire :

$$|a_n| \leq \frac{1}{\rho'^n}$$

Pour n assez grand, ce qui donne :

$$|a_n|r^n \leq \left(\frac{r}{\rho'}\right)^n$$

Pour n assez grand et la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $r < R$.

Soit maintenant $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{R}$. Il existe $\boldsymbol{\rho}' > 0$ tel que $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{\rho}' > R$.

Soit $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\varphi(n)}})$ une suite extraite de $(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}})$ telle que $|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\varphi(n)}}|^{\frac{1}{\varphi(n)}} \longrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{R}}$.

Alors,

$$|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\varphi(n)}}|^{\frac{1}{\varphi(n)}} \geq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\rho}'}$$

Pour $\boldsymbol{n}$ assez grand de sorte que :

$$\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\varphi(n)}}|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\varphi(n)}}| \geq \left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\rho}'}\right)^{\boldsymbol{\varphi(n)}}$$

Pour $\boldsymbol{n}$ assez grand. Ce qui montre que la série $\sum_{\boldsymbol{n}\geq\mathbf{0}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{n}}$ diverge grossièrement pour $|\boldsymbol{z}| > R$.

D'où le résultat.

Chapitre 3 :

Limites supérieure et inférieure pour une fonction

3.1 Définitions : [6]

Soit $f:]a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, et $x_0\in]a,b[$.

$$\lim_{x\to x_0} sup\, f(x) = inf_{\delta>0}\, sup\{f(x): 0<|x-x_0|<\delta\}$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+} sup\{f(x): 0<|x-x_0|<\delta\}$$

De manière similaire, nous avons :

$$\lim_{x\to x_0} inf\, f(x) = sup_{\delta>0}\, inf\{f(x): 0<|x-x_0|<\delta\}$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+} inf\{f(x): 0<|x-x_0|<\delta\}$$

Il est clair que :

$$\lim_{x\to x_0} inf\, f(x) \le \lim_{x\to x_0} sup\; f(x)$$

Alors, les $\lim_{x\to x_0} sup\, f$ et $\lim_{x\to x_0} inf\, f$ sont respectivement appelées la limite supérieure et la limite inférieure de la fonction f.

De façon abrégée on note :

$$\lim_{x\to x_0} sup\, f(x) = \overline{\lim}\, f(x) \text{ et } \lim_{x\to x_0} inf\, f(x) = \underline{\lim}\, f(x)$$

3.2 Opérations sur les limites supérieure et inférieure :

3.2.1 Proposition 1 :

Soit $f,g:]a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0\in]a\,,b[$, alors :

$$\lim_{x\to x_0} inf\; f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\; g(x) \le \lim_{x\to x_0} inf\,\big(f(x)+g(x)\big)$$

Et

$$\lim_{x\to x_0} sup\,\big(f(x)+g(x)\big) \le \lim_{x\to x_0} sup\, f(x) + \lim_{x\to x_0} sup\, g(x)$$

Preuve :

On note que :

$$inf_{x\in]a,b[}\big(f(x)+g(x)\big) \ge inf_{x\in]a,b[} f(x) + inf_{x\in]a,b[} g(x) \qquad (1)$$

$$sup_{x\in]a,b[}\big(f(x)+g(x)\big) \le sup_{x\in]a,b[} f(x) + sup_{x\in]a,b[} g(x) \qquad (2)$$

En effet, pour $x \in]a\,,b[$,

$$f(x) + g(x) \geq inf_{x\in]a,b[}f(x) + inf_{x\in]a,b[}g(x)$$

Ce qui implique (1) et l'inégalité (2) se découle de la même façon.

On prouve d'abord que,

$$\lim_{x\to x_0} inf\ f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\ g(x) \leq \lim_{x\to x_0} inf\ (f(x) + g(x)) \qquad (3)$$

D'après (1), on a :

$$inf_{\delta>0}\{f(x) + g(x): 0 < |x - x_0| < \delta\} \geq inf_{\delta>0}\{f(x): 0 < |x - x_0| < \delta\} + inf_{\delta>0}\{g(x): 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Un passage à la limite lorsque δ tend vers 0, donnent (3).

L'inégalité,

$$\lim_{x\to x_0} sup\ (f(x) + g(x)) \leq \lim_{x\to x_0} sup\ f(x) + \lim_{x\to x_0} sup\ g(x) \qquad (4)$$

Se prouve de la même manière.

3.2.2 Proposition 2 :

Soit $f, g:]a\,,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a\,,b[$, alors :

$$\lim_{x\to x_0} inf\ f(x) \times \lim_{x\to x_0} inf\ g(x) \leq \lim_{x\to x_0} inf\ (f(x).g(x))$$

Et

$$\lim_{x\to x_0} sup\ (f(x).g(x)) \leq \lim_{x\to x_0} sup\ f(x) \times \lim_{x\to x_0} sup\ g(x)$$

Preuve :

On remarque d'abord que :

$$inf_{x\in]a,b[}(f(x).g(x)) \geq inf_{x\in]a,b[}f(x).inf_{x\in]a,b[}g(x)$$

$$sup_{x\in]a,b[}(f(x).g(x)) \leq sup_{x\in]a,b[}f(x).sup_{x\in]a,b[}g(x)$$

Si f et g sont positives sur $]a\,,b[$. Le reste de démonstration se mène de la même manière.

3.2.3 Proposition 3 :

Soit $f, g:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$.

Et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, on a alors :

$$\lim_{x\to x_0} inf\,(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\, g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} sup\,(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} sup\, g(x)$$

Preuve :

Montrant la double inégalité.

D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} inf\,(f(x) + g(x)) &\geq \lim_{x\to x_0} inf\, f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\, g(x) \\ &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\, g(x)\end{aligned}$$

D'autre part, et on pose :

$$g = (f + g) + (-f)$$

Nous avons :

$$\lim_{x\to x_0} inf\, g(x) \geq \lim_{x\to x_0} inf\,(f(x) + g(x)) + \lim_{x\to x_0} inf\,(-f(x))$$

$$= \lim_{x\to x_0} inf\,(f(x) + g(x)) - \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\, g(x) \geq \lim_{x\to x_0} inf\,(f(x) + g(x))$$

D'où, légalité.

$$\lim_{x\to x_0} inf\,(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} inf\, g\,(x)$$

D'une même manière on peut prouver la deuxième égalité.

3.2.4 Proposition 4 :

Soit $f, g:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, soit $x_0 \in]a, b[$ et $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est égale à $l \in \mathbb{R}$alors :

$$\lim_{x \to x_0} inf\big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} inf\ g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} sup\big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} sup\ g(x)$$

Preuve :

Supposons $l > 0$, alors nous avons :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \,.\, g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x)(g(x) - l)$$

Et comme $f(g - l)$ converge vers 0.

Et d'après la proposition précédente, on obtient :

$$\lim_{x \to x_0} sup\big(f(x).g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} sup\big(l.f(x)\big)$$

Et puisque $l > 0$, alors nous avons :

$$sup_{x \to x_0}\big(l.f(x)\big) = l.sup_{x \to x_0} f(x)$$

D'où,

$$\lim_{x \to x_0} sup\big(l.f(x)\big) = l.\lim_{x \to x_0} sup\ f(x)$$

D'une même manière, on peut prouver la seconde égalité.

3.3 Continuité d'une fonction : [7]

3.3.1 Continuité en un point :

Définition 1 :

On dit que la fonction f est continue en un point $x_0 \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

C'est -à-dire f admet une limite en x_0(cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

Cette définition revient à dire :

f **est continue en** $x_0 \Leftrightarrow f$ **admet une limite en** x_0 égale à $f(x_0)$.

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle qui nous occupe, on peut aussi définir les notions de continuité à gauche ou à droite.

Définition 2 :

On dit qu'une fonction f est continue à gauche (respectivement à droite) au point $x_0 \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \qquad x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

respectivement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \qquad x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

3.3.2 Continuité sur un intervalle :

Définition :

On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout point de I.

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon » c'est-à-dire si elle n'a pas de saut.

Prolongement par continuité :

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que la fonction f admet une limite finie en x_0.
  Notons alors $l = \lim\limits_{x_0} f$.
- On définit alors, la fonction $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x \neq x_0 \\ l & si \;\; x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

3.4 Semi-continuité : [8]

En analyse mathématique, la semi-continuité est une propriété des fonctions définies sur un espace topologique et à valeurs dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il s'agit d'une forme faible de la continuité. Intuitivement, une telle fonction f est dite semi-continue supérieurement en x_0 si, lorsque x est proche de x_0, $f(x)$ est soit proche de $f(x_0)$, soit inférieure à $f(x_0)$. De même, pour définir semi-continue inférieurement, on remplace « inférieure à » par « supérieure à » dans la définition précédente

Soit X un espace topologique, x_0 un point de X et f est une fonction de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.

3.4.1 Semi-continuité supérieure :

On dit que f est semi-continue supérieurement en x_0 si l'une de propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que :

$$\forall x \in U, \qquad f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

- Par définition d'une limite supérieure,

La fonction f est semi-continue supérieurement en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} sup_{x \neq x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

La fonction f est dite semi-continue supérieurement si l'une de propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- La fonction f est semi-continue supérieurement en tout point de X.
- Pour tout réel α, l'ensemble $\{x \in X \,/\, f(x) \geq \alpha\}$ est fermé.

3.4.2 Semi-continuité inférieure :

Les notions de semi-continuité inférieure d'une fonction se définissent de manière analogue, par symétrie car elles reviennent aux notions correspondantes de semi-continuité supérieure de la fonction opposée.

On dit que f est semi-continue inférieurement en x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que :

$$\forall x \in U, \qquad f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

- Par définition d'une limite inférieure,

La fonction f est semi-continue inférieurement en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} inf_{x \neq x_0} f(x) \geq f(x_0)$

La fonction f est dite semi-continue inférieurement si l'une de propriétés équivalentes: suivantes est vérifiée

- La fonction f est semi-continue inférieurement en tout point de X.
- Pour tout réel α, l'ensemble $\{x \in X \,/\, f(x) \leq \alpha\}$ est fermé.

3.4.3 Proposition :

Soit $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in X$. Alors,

La fonction f est continue en x_0 si, et seulement si, elle est semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.

Preuve :

CN

Supposons que la fonction f est continue. Alors,

$$\lim_{x\to x_0} inf\ f(x) = \lim_{x\to x_0} sup\ f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Pour tout $x_0 \in X$.

Par conséquent, f est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement.

CS

Supposons maintenant que f est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement.

Donc,

$$\lim_{x\to x_0} sup\ f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0} inf\ f(x)$$

Pour tout $x_0 \in X$.

Et comme, $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$

Alors,

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = \underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$$

D'où,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Par suite,

La fonction f est continue en x_0.

Remarque :

Parfois, on peut avoir des fonctions semi - continue supérieurement et inférieurement au point x_0, mais pas forcement continue en ce point.

Exemple : [10]

Soit l'application $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que $x \longmapsto \sin\frac{1}{x}$.

Avec $A =]0, +\infty[$ et $x \in A$.

Nous avons :

$$\lim_{x\to 0^+} inf\ \sin\frac{1}{x} = -1 \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} sup\ \sin\frac{1}{x} = 1$$

Alors,

La fonction f est semi –continue inférieurement et supérieurement en 0^+.

Mais, elle n'est pas continue en ce point.

Chapitre 4 :

Limites supérieure et inférieure pour une suite d'ensembles

4.1 Définitions : [9]

On considère un ensemble E, et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensemble dans $\mathcal{P}(E)$. Les limites supérieures et inférieures de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement définies par :

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k$$

$$\lim_{n\to+\infty} inf\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n} A_k$$

Noter que :

$$\lim_{n\to+\infty} inf\, A_n \subset \lim_{n\to+\infty} sup\, A_n \qquad (1)$$

En effet,

$$\cap_{k\geq n} A_k \subset A_q \qquad \text{Pour tout } q \geq n$$

On a donc,

$$\cap_{k\geq n} A_k \subset \cup_{q>p} A_q \qquad \text{Pour tout p.}$$

On a alors pour tout n :

$\cap_{k\geq n} A_k \subset \cap_{p\geq 1} \cup_{q>p} A_q = \lim_{n\to+\infty} sup\, A_n$

Finalement,

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \subset \lim_{n\to+\infty} sup\, A_n$$

D'où, (1)

Puis, les règles élémentaires sur les intersections, les réunions et les complémentaires donnent sans difficulté :

$$(\lim_{n\to+\infty} supA_n)^c = \lim_{n\to+\infty} inf\, A_n^c$$

$$(\lim_{n\to+\infty} inf\, A_n)^c = \lim_{n\to+\infty} sup\, A_n^c$$

Remarque :

On peut aussi caractériser la limite supérieure et la limite inférieure par les assertions suivantes : pour tout $x \in E$,

$$x \in \lim_{n\to+\infty} sup\, A_n \Leftrightarrow \forall n\ \exists k \geq n, x \in A_k$$

$$\Leftrightarrow \{n: x \in A_n\} \text{ est infini}$$

$$x \in \lim_{n\to+\infty} inf\, A_n \Leftrightarrow \exists n\ \forall k \geq n,\ x \in A_k$$

$$\Leftrightarrow \{n: x \notin A_n\} \text{ est fini.}$$

4.2 Opérations sur les limites supérieure et inférieure :

i. $\lim_{n\to+\infty} sup(A_n \cap B_n) \subseteq [(\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n) \cap (\lim_{n\to+\infty} sup\, B_n)]$.
ii. $\lim_{n\to+\infty} sup\,(A_n \cup B_n) = [(\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n) \cup (\lim_{n\to+\infty} sup\, B_n)]$.
iii. $[(\lim_{n\to+\infty} inf\, A_n) \cap (\lim_{n\to+\infty} inf\, B_n)] = \lim_{n\to+\infty} inf(A_n \cap B_n)$.
iv. $[(\lim_{n\to+\infty} inf\, A_n) \cup (\lim_{n\to+\infty} inf\, B_n)] \subseteq \lim_{n\to+\infty} inf(A_n \cup B_n)$.

Démonstration :

i. $x \in \lim_{n\to+\infty} sup(A_n \cap B_n) \Leftrightarrow \forall n \geq 1\ \exists k \geq n: x \in A_n \cap B_n$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1\ \exists k \geq n: x \in A_n\ et\ x \in B_n$$

$$\Rightarrow x \in (\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n)\ et\ x \in (\lim_{n\to+\infty} sup\, B_n)$$

$$\Leftrightarrow x \in [(\lim_{n\to+\infty} supA_n) \cap (\lim_{n\to+\infty} supB_n)]$$

ii. $x \in \lim_{n\to+\infty} sup(A_n \cup B_n) \Leftrightarrow \forall n \geq 1\ \exists k \geq n: x \in A_n \cup B_n$

$$\Leftrightarrow \forall n \geq 1\ \exists k \geq n: x \in A_n\ ou\ \ x \in B_n$$
$$\Leftrightarrow x \in (\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n)\ ou\ x \in (\lim_{n\to+\infty} sup\, B_n)$$
$$\Leftrightarrow x \in [(\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n) \cup (\lim_{n\to+\infty} sup\, B_n)]$$

4.3 Convergence d'ensembles :

Proposition :

Une suite d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ converge vers A et on note $A_n \longrightarrow A$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ si, et seulement si,

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n = \lim_{n\to+\infty} inf\, A_n = A$$

Exemple :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensemble tel que, pour tout $k \geq n$ on a :

$$A_k = \left[0, \frac{k}{k+1}\right[$$

Alors, nous avons :

$$inf_{k\geq n} A_k = \left[0, \frac{n}{n+1}\right[$$

$$sup_{k\geq n} A_k = [0, 1[$$

$$\lim_{n\to+\infty} sup\, A_n = [0, 1[$$

$$\lim_{n\to+\infty} inf\, A_n = [0, 1[$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = [0, 1[$$

Conclusion :

Les limites supérieure et inférieure sont des outils mathématiques extrêmement utiles et très facile à saisir.

Les limites supérieure et inférieure nous permettent de réduire les questions au sujet de la convergence d'une suite réelle, « une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, sa limite supérieure est égale à sa limite inférieure ».

Ces deux limites permettent aussi de déterminer pratiquement le rayon de convergence de toute série entière par la formule d'Hadamard qui se découle à partir de la limite supérieure d'une suite réelle.

Ces deux notions nous donnent ainsi la possibilité de déduire un résultat important concernant la continuité d'une fonction, « une fonction est continue au point x_0 si, et seulement si, elle est semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.

Sans oublier l'intérêt de lim sup et lim inf dans le cas d'une suite d'ensembles et qui nous donne un moyen facile de tester la convergence de cette suite.

Bibliographie :

[1] Bernard Ycart, « Suites numériques » (Université Joseph Fourier, Grenoble 8 novembre 2011).

[2] Horia Cornean, « Basic properties of limsup and liminf » (IMF, AAU, 5 February 2014).

[3] S. Duchet, « Séries entières, rayon de convergence et propriétés de la somme » (www.epsilon2000.fr.st).

[4] Université de Bourgogne, Département mathématique, « Séries entières », chapitre 5.

[5] AC_addendum_1, « Séries entières et fonctions analytiques », chapitre 1.

[6] Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, « Problèmes d'analyse II » (L3M1, 2008).

[7] G. Costantini, « Continuité, u-continuité. Applications » (http://bacmaths.net)

[8] Solutions for Math 217 Assignment #8.

[9] Jean-Christophe Breton, « Fondements des probabilités » (Université de Renne, 10 avril 2014).

[10] Frédéric Paulin, « Topologie, analyse et calcul différentiel » (2008 – 2009).