Faculté des Sciences et Techniques - FES
Mathématique Appliquée

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Par

Anass Echcherki
Encadré par
Pr. Mohammed Elkhomssi

Méthodes Numériques pour la Résolution de l'équation de la chaleur non linéaire : Cas de Supraconductivité

Soutenue le 18 juin 2015 devant les Jurys :

Pr Mohammed EL KHOMSSI :	Docteur Au Faculté Des Sciences et thechniques -FES-
Pr Abdelmajid HILALI :	Docteur Au Faculté Des Sciences et thechniques -FES-
Pr Mohamed BELLAHMAR :	Docteur Au Faculté Des Sciences et thechniques -FES-

2014 - 2015

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pas être réalisé sans le soutien et l'encouragement de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire Monsieur Mohammed El KHOMSSI, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, pour m'avoir encadré, je tiens à le remercier pour toute sa disponibilité, sa rigueur scientifique, ses précieux conseils.

Mes vifs remerciements s'adressent aux professeurs Abdelmajid HILALI, EL KHOMSSI Mohammed et Mohammed BELAHMER d'avoir accepté à ce jury.

Je ne passerai pas cette occasion sans remercier tous les professeurs de la FST de Fès et particulièrement les professeurs du département des mathématiques.

Je voudrais exprimer mes sincères remerciements à tous mes amis.

Je tiens à remercier Ma famille pour m'avoir toujours encouragée dans mes démarches, je remercie tout spécialement ma mère pour la confiance qu'elle m'a accordée. Mes remerciements chaleureux s'adressent à mes sœurs et mes frères pour leur intérêt à ce que je fais.

Table des matières

I Étude théorique **6**

1 Rappel de quelques notions de méthodes analytiques et numériques liées à la résolution des problèmes de l' équation de la chaleur **7**
1.1 modélisation du problème de l'équation de la chaleur 7
1.2 Méthodes analytiques[1] 9
1.3 L'argument de l'énergie (Energy Arguments) 11

2 Méthodes Numériques (Numerical Methods)[5] **16**
2.1 Techniques numériques sur la base de la différence finie 16
2.1.1 Les conditions 17
2.1.2 Les schémas obtenus sous forme matricielle itérative 18
2.2 Consistance et stabilité 21
2.2.1 Étude de la consistance 22
2.2.2 Stabilité 23
2.3 Convergence 28
2.3.1 Étude de la convergence de la solution du schéma explicite 28
2.3.2 Étude de la convergence de la solution du schéma implicite 28

3 Étude numérique d'un problème non linéaire modélisant l'état thermique d'un supraconducteur[1],[2] **29**
3.1 Écriture du modèles : 29
3.2 Schéma numérique adapté à notre problème 30
3.2.1 Cas dynamique 31
3.2.2 cas stationnaire : 33
3.3 Le principe du maximum. 34
3.3.1 L'équation de la chaleur linéaire : 36
3.3.2 L'équation de la chaleur non-linéaire : 40
3.3.3 Équation de la chaleur-diffusion 41

II Étude numérique **44**

4 Résolution de l'équation de la chaleur **45**
4.1 L'équation de la chaleur linéaire 45
4.1.1 programmation de la solution analytique 45
4.1.2 programmation de la solution numérique 46
4.1.3 Comparaison des deux solution 48
4.2 Equation de la chaleur-diffusion : 50
4.3 Équation Modélisant l'état Thermique D'un supraconducteur : 52

Introduction

De nombreuses disciplines de la physique consistent à décrire des phénomènes de transport, de la chaleur et d'induction. Pour décrire de tels phénomènes, il parait tout à fait naturel de vouloir décrire l'évolution de certaines grandeurs physiques dans le temps ainsi que dans l'espace.

Comme elles impliquent plusieurs paramètres, les équations différentielles font intervenir des dérivées partielles par rapport à chacun des paramètres

D'où le terme « Partial Differential Equation » dont les initiales sont « PDE ».

Il existe un indéterminé de champs d'application des EDPs :

1. **la mécanique des fluides** : les EDPs sont censées décrire le mouvement des fluides, liquides et gaz visqueux, exemple : les équations de naviers-Stokes : la résolution de ses équations constitue l'un des problèmes millénaire. Voir [4],[8]

2. **la mécanique des structures** : appelée également la déformation des matériaux, se base principalement sur la résolution des équations de la résistance des matériaux. Voir [5],[11]

3. **l'électromagnétisme** : les équations de maxwell, l'équation de poisson, l'équation de Boltzmann, l'équation de helmotz. Voir [10]

4. **la gravitation** : décrit les champs gravitationnelles (équation de la relativité générale d'Einstein). Voir [7]

5. **la mécanique quantique** : (l'équation de Hamilton) et l'équation de Schrödinger. Voir [10].

6. **la biologie** : décrit l'évolution d'une population d'individus (équations de diffusion et de réaction). Voir [3]

Après avoir modélisé un problème physique (un problème visible) on obtient un problème invisible (une équation mathématique : équation aux dérivées partielles par exemple), mais les EDPs sont généralement très complexes à résoudre, où elles possèdent des solutions pour des cas particuliers, mais les phénomènes aléatoires de la nature conduit à des équations non linéaire ce qui donne une complexité au modèle mathématique étudier.

Le principe de la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer un système complexe en un objet ou un opérateur simple en laissant les aspects principaux de l'original, ce qu'on appelle une résolution numérique.

Dans ce mémoire nous nous concentrerons sur les EDPs paraboliques et on va traiter un exemple type de ces équations " équation de la chaleur ". Dans le premier chapitre on va présenter une méthode puissante pour la résolution de l'équation de la chaleur linéaire, et on va voir aussi comment contrôler la solution analytique d'un problème linaire ou non-linéaire sans la connaitre explicitement, dans le deuxième chapitre on va discrétiser l'équation de la chaleur par la méthode de différences finies, et on va trouver une approximation de la solution en des points du domaine de définition sur lequel on applique un maillage, dans le troisième chapitre on va définir qu'est ce qu'un Supraconducteur et on va écrire le schéma numérique associé au problème, et on va essayer de démontrer quelque propriété de stabilité on se basant sur une méthode qui garantie la stabilité. Au dernier chapitre on va assurer notre travail par des exemples et la comparaison entre les courbes des solutions.
Dans tout mon travail je vais être claire aux démonstrations ainsi que dans mes explications.

Première partie

Étude théorique

Chapitre 1

Rappel de quelques notions de méthodes analytiques et numériques liées à la résolution des problèmes de l' équation de la chaleur

1.1 modélisation du problème de l'équation de la chaleur

Équation de la chaleur (The heat equation) :cas d'une dimension

Diffusion de la chaleur le long d'une barre métallique : Une barre métallique de longueur L a comme paramètres sa masse volumique ρ ,sa conductivité thermique λ et son coefficient de chaleur massique C,l'une des extrémités de la barre est reliée à une source de température T_a,et l'autre à une source de température T_b.
soit $T(x,t)$ la température de la barre au point d'abscisse x au temps t ,l'équation de la chaleur est l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C}\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}$$

Modélisation du problème

Nous allons raisonner sur une petite tranche de la barre d'épaisseur Δx (de section S) et situé à la position x.
Une extrémité est initialement à la température $T(x)$, l'autre à la température $T(x+\Delta x)$.
sur ce petit élément de la barre on va avoir une certaine quantité de chaleur qui va entrer appelée Q_{in} et une chaleur qui va sortir notée Q_{out} .
Maintenant on peut évaluer la chaleur qui entre et la chaleur qui sort à partir de la loi de Fourrier :

$$\frac{\partial Qin(x,t)}{\partial t} = -\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial Qout(x,t)}{\partial t} = -\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x,t) \tag{1.2}$$

D'après les deux équations

$$\partial Qin(x,t) = -\lambda S\partial t\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \tag{1.3}$$

$$\partial Qout(x,t) = -\lambda S\partial t\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x,t) \tag{1.4}$$

On constate que ces quantités de chaleur sont différentes puisqu'on évalue la température à des coordonnées différentes.
Et ce qui est intéressant c'est d'évaluer la différence entre la chaleur qui entre et la chaleur qui sort pour un temps fixé :

$$\begin{aligned} dQ &= dQ_{in} - dQ_{out} \\ &= -\lambda S \partial t \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) + \lambda S \partial t \frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x, t) \\ &= \lambda S dt \left[\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \right] \end{aligned} \tag{1.5}$$

un développement limité d'ordre 1 au point $x + \Delta x$ donne :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) + \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) + R_2(\Delta x) \tag{1.6}$$

avec :

$$R_2(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

on introduit dans l'équation (1.5) le développement trouvé en (1.6) :

$$\begin{aligned} dQ &\simeq \lambda S \partial t \left[\cancel{\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)} + \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)} \right] \\ &\simeq \lambda S \partial t \Delta x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

cette chaleur sert à chauffer un petit morceau de masse élémentaire dm :

$$dQ = C dT dm$$

Or $\quad dm = \rho dV = \rho S \Delta x$ donc on a :

$$dQ = \rho C S \Delta x dT \tag{1.8}$$

d'après (1.7) et (1.8) on peut faire le bilan thermique suivant :

$$\begin{aligned} C \rho \cancel{S} \cancel{\Delta x} dT &= \lambda \cancel{S} dt \cancel{\Delta x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ C \rho dT &= \lambda dt \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\rho C} \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Généralement on préfère noté le relation (1.9) de la manière suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathscr{D} \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} \quad \text{avec} \quad \mathscr{D} = \frac{\lambda}{\rho C}$$

l'équation de la chaleur (1D) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathscr{D} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \mathscr{P}(x,t) & \text{sur } \Omega \times [0, \infty[\\ u(x,0) = \phi(x) & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[\end{cases} \tag{1.10}$$

on peut étendre l'équation de la chaleur sur des dimensions quelconques
soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \mathscr{P} & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Il s'agit d'une équation d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace (l'ordre est celui des dérivées partielles les plus élevées).on dira que cette équation est parabolique.

Remarque : le choix des espaces compatibles avec le problème dépasse le programme de la licence.

1. **Notion de problème bien posé au sens de HADAMARD** Voir [12]

Le mathématicien Jaques HADAMARD a donné une définition d'un bon modèle mathématique en parlant de problème bien posé, HADAMARD pensait que les modèles mathématiques issus de phénomène physique devrait avoir les propriétés suivantes :la solution existe, la solution est unique et la solution dépend continuellement des données.
On peut l'énoncer mathématiquement :

Définition 1. *soit $(E, \|.\|_E)$ et $(E', \|.\|_{E'})$ deux e.v.n et F une application de E dans $\mathscr{V}$ (ouvert de E')*
on dira que le problème

$$\textit{trouver } u \in E \ tq \ F(u) = d \tag{1.12}$$

est bien posé au sens de HADAMARD si :

i : $\forall\ d \in \mathscr{V}$ (1.12) admet une et une seule solution

ii : cette solution dépend d'une façon continue de la donnée d

c'est à dire : si

$$d^n \xrightarrow[n\to\infty]{} d \ dans \ E' \implies u^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$$

si F est linéaire la continué se traduit par :

$$\exists C \ tq : \|F(u)\|_{E'} \leq C\|u\|_E$$

Remarque Pour le cas linéaire la continuité sur $E \iff$ la continuité en 0 [11]

1.2 Méthodes analytiques[1]

1. **Rappel :**
   Avant de commencer la résolution par la méthode analytique on suppose que $\mathscr{P} \equiv \theta$.
   Donc le problème c' est chercher une solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$u_t = \mathscr{D} u_{xx} \text{ pour } x \in \Omega =]0,1[\text{ et } t \in [0, \infty[\tag{1.13}$$

   sujet aux conditions limites :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

   et la condition initiales :

$$u(x,0) = u_0(x)$$

   on va résoudre cette équation par la méthode de séparation des variables :

2. **Méthodes de séparation des variables :** (separation of variables)
L'astuce c'est commencer par voir si la solution peut s'écrire comme le produit d'une fonction qui dépend de x et une fonction qui dépend de t , telle que :

$$u(x,t) = f(t)g(x) \tag{1.14}$$

on ne suppose pas que toute solution de l'équation semble à (1.14)car ce n'est pas vrai. Ce qui va ce passer c'est qu'on peut exprimer toute solution sous une forme factorisée .
On a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{dt}g \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathscr{D} f \frac{d^2 g}{dx^2} \tag{1.15}$$

alors :

$$\frac{df}{dt}g = \mathscr{D} f \frac{d^2 g}{dx^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f}\frac{df}{dt} = \frac{\mathscr{D}}{g}\frac{d^2 g}{dx^2}$$

Le terme à gauche de cette équation dépend seulement de t, et le terme à droite dépend seulement de x ; d'où le nom séparation de variables. Il se peut que x et t varient indépendamment entre eux, la seul possibilité c'est que les deux termes soient égaux à la même constante on l'appel α.
donc :

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dt} = \alpha$$

et

$$\frac{\mathscr{D}}{g}\frac{d^2 g}{dx^2} = \alpha$$

telle que α un nombre quelconque :
si $\alpha > 0$:

$$f(t) = Ce^{\alpha t} \text{ et } g(x) = A\sinh(\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}}}x) + B\cosh(\sqrt{\frac{\alpha}{\mathscr{D}}}x)$$

si $\alpha < 0$:

$$f(t) = Ce^{\alpha t} \text{ et } g(x) = A\sin(\sqrt{\frac{-\alpha}{\mathscr{D}}}x) + B\cos(\sqrt{\frac{-\alpha}{\mathscr{D}}}x)$$

si $\alpha = 0$:

$$f(t) = C \text{ et } g(x) = Ax + B$$

or on a :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 = f(t)g(0) = f(t)g(1)$$

$\implies g(0) = g(1) = 0$ pour que ce soit vrai, il faut que α soit positive $\alpha < 0$.

donc $g(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ avec $k^2 = \frac{\alpha}{\mathscr{D}}$ et $f(t) = Ce^{\mathscr{D}k^2 t}$.

condition initiale $g(0) \implies B = 0$; $g(1) = A\sin(k) = 0$
$\implies \sin(k) = 0 \implies k = \pi n$ on la note $K_n = \pi n$
donc

$$g_n(x) = A_n \sin K_n x \text{ et } f_n(t) = C_n e^{-\mathscr{D}(K_n)^2 t}$$

Finalement on obtient les solutions suivantes :

$$u_n(x,t) = f_n(t)g_n(x) = D_n \sin(xK_n)e^{-\mathscr{D}(K_n)^2 t} \text{ avec } D_n = C_n \times B_n$$

donc la solution générale s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(xK_n)e^{-\mathscr{D}(K_n)^2 t} \end{aligned} \tag{1.16}$$

déterminons D_n ,on a :

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} D_n sin(xK_n)$$

donc on obtient un développement en série de Fourier[13] de u_0 et on a :

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} D_n sin(xK_n)$$

donc

$$D_n = 2\int_0^1 u_0(x)\sin(xK_n)dx$$

enfin on trouve

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^1 u_0(s)\sin(sK_n)ds\Big)\sin(xK_n)e^{-\mathscr{D}(K_n)^2 t}$$

Dans cette sous section on a étudié une méthode nommée séparation de variables, qui nous a permis de trouver une formule de la solution du problème (1.13). Cependant il est souvent possible d'obtenir certaines propriétés de la solution d'une équation différentielle sans connaitre la solution en détail. De telles techniques sont importantes dans l'analyse des problèmes non linéaire. Une représentation analytique de la solution est généralement impossible de tirer. dans la sous section suivante nous allons voir comment obtenir une propriété sans connaitre la solution analytique.

1.3 L'argument de l'énergie (Energy Arguments)

soit $u = u(x,t)$ une fonction qui résout :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\quad , \quad t > 0 \tag{1.17}$$

sujet aux conditions limites :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \tag{1.18}$$

et la condition initiale suivante :

$$u(x,t) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\tag{1.19}$$

Tout au long de cette section , nous supposons que $u = u(x,t)$ est une fonction qui satisfait les hypothèses suivantes :

- u , $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C([0,1] \times [0,\infty[)$
- u satisfait (1.17),(1.18) et (1.19),

pour tout $t > 0$ posons :

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)dx$$

Nous allons maintenant examiner comment $E(t)$, qui est une variable scalaire, évolue dans le temps.

$$E'(t) \equiv \frac{d}{dt}\int_0^1 u^2(x,t)dx$$

pour les fonctions régulières u on peut échanger la dérivée avec l'intégrale [1] pour tout $t > 0$

$$E'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}u^2(x,t) \tag{1.20}$$

$$E'(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx = 2[u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)]_0^1 - 2\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x}u(x,t))^2 dx = -2\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x}u(x,t))^2 dx \leq 0$$

donc, E est une fonction décroissante,(i.e).

$$E(t) \leq E(0)$$

Nous résumons ci-dessus le résultat comme suit :

Théorème 1. *si u est une solution de (1.17)-(1.19) telle que u,u_t [2],$u_{xx} \in C([0,1] \times [0,\infty[)$ alors :*

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \leq \int_0^1 f^2(x)dx \tag{1.21}$$

Une inégalité de la forme (1.21) est souvent appelée résultat de stabilité (stability estimate) car il donne une idée sur la taille de la solution qui est limitée par la taille de la donnée initiale f
De plus on en déduit que si $f \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$ alors $u \in \mathbb{L}^2(]0,1[)$.

- Cas général du résultat de stabilité pour l'équation de la chaleur.
  Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \mathscr{P} & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases}$$

1. voir cours d'intégration
2. $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ et ainsi de suite

avec $\mathscr{P} \equiv 0$ "sans source de chaleur"

lemme 1. *pour tout* $u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *on a :*

$$\forall t > 0 \quad , \|u(t)\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

.

Preuve puisque

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u) = 0$$

on multiple par u et on intègre sur Ω :

$$u\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(u)u = \int_\Omega u\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_\Omega \Delta(u)udx = \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}u^2dx - \int_\Omega \Delta(u)udx = 0$$

par la formule de Green [3] et en intégrant par partie on a :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2dx - \left(-\int_\Omega \nabla(u)\nabla(u)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}udS\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2dx + \int_\Omega |\nabla(u)|^2dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}udS}_{=0} = 0$$

on trouve :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u^2dx = -\int_\Omega |\nabla(u)|^2dx \leq 0$$

donc pour $t > 0$ on a : $\int_\Omega u^2(x,t)dx \leq \int_\Omega u^2(x,0)dx$

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx \leq \int_\Omega u^2(x,0)dx \implies \int_\Omega u^2(x,t)dx \leq \int_\Omega u_0^2dx$$

d'où le lemme.
c-à-d

$$u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega) \implies u(,t) \in \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Unicité
Si on a une perturbation de la fonction initiale (condition initiale) cela entraine une perturbation de la solution. En effet s'il existe deux solutions $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$ de (1.17)-(1.19) qui ont comme fonctions initiales f_1 et f_2. posons $w = u_1 - u_2$ donc ;

$$w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad \text{et} \quad w(x,0) = f_1 - f_2.$$

Par ailleurs,

$$w_t = (u_1)_t - (u_2)_t = (u_1)_{xx} - (u_2)_{xx} = w_{xx}$$

par conséquent w est une solution de (1.17)-(1.19) avec la fonction initiale $f_1 - f_2$ donc d'après 1.21 nous obtenons :

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)^2(x,t)dx = \int_0^1 w^2(x,t)dx \leq \int_0^1 (f_1 - f_2)^2(x)dx$$

donc on peut conclure de si $f_1 = f_2$ on trouve $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ Par conséquent, pour chaque fonction initiale, il y a, au plus, une solution au problème (1.17)-(1.19).

3. on note par $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \times n$ ou n est le vecteur normale unité

corollaire 1. *soit u_1,u_2 deux solutions de (1.17)-(1.19) de la forme décrite dans le théorème (1) satisfait l'estimation de la stabilité (1.21) En particulier, pour chaque fonction initiale f il y a au plus une solution.*

Au début de cette section, nous avons réclamé que les propriétés de l'énergie peuvent également être utilisées pour des problèmes non linéaires puisque ces propriétés ne reposent pas sur la représentation analytique de la solution.
Afin d'illustrer cela, considérons à la place de l'équation de la chaleur, le problème non linéaire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\quad , \quad t > 0$$

sujet aux conditions limites :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \tag{1.22}$$

et la condition initiale suivante :

$$u(x,t) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\tag{1.23}$$

à cause de l'apparence de terme non linéaire u^3, ce n'est pas possible d'appliquer la méthode de séparation de variables pour ce problème. Cependant comme précédant posons

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)dx$$

on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_0^1 u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx \\ &= 2\int_0^1 u(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - u^3(x,t)\right)dx \\ &= -2\int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x}u(x,t))^2 dx - 2\int_0^1 u^4(x,t)dx \leq 0 \end{aligned}$$

donc, même si le problème est non linéaire quelque soit u une solution du problème il vérifie :

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx \leq \int_0^1 f^2(x)dx \tag{1.24}$$

Cette estimation de l'énergie ne signifie, cependant, pas directement la stabilité de la manière que nous avons observée dans le cas linéaire.
Idée [4]
On peut démontrer cette propriété de stabilité pour le problème généralisé de L'équation de la chaleur non linéaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{N} a_k u^k \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\quad , \quad t > 0 \text{ et } a_k > 0$$

sujet aux conditions limites :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \tag{1.25}$$

4. De Monsieur M.ELKHOMSSI

et la condition initiale suivante :

$$u(x,t) = f(x) \quad \text{pour} \quad x \in]0,1[\tag{1.26}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
E'(t) &= 2\int_0^1 u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx \\
&= 2\int_0^1 u(x,t)\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum_{k=0}^{N} a_k u^k\Big]dx \\
&= 2\int_0^1 u(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx - 2\sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^1 u^{k+1}(x,t)dx \\
&= -2\int_0^1 \Big(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\Big)^2 dx - 2\sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^1 u^{k+1}(x,t)dx
\end{aligned}$$

en déduit de ce qui précède que $E'(t)$ s'écrit de la façon :

$$E'(t) = -2\int_\Omega |\Delta u|^2 dx - 2\sum_{k=0}^{N} a_k \int_\Omega u^{k+1}(x,t)dx$$

Or si k est impaire donc $k+1$ est paire.
Ce qui implique que si $k+1$ est paire alors $E'(t) \leq 0$ et par conséquent $E(t) \leq E(0)$
Nous avons prolonger le résultat pour le cas d'un polynôme à coefficient positif et puissance impaire.

Dans les chapitres précédents nous avons tiré une méthode d'analyse très puissante pour la résolution de l'équation de la chaleur. En utilisant des techniques simples, nous avons pu trouver une formule explicite pour la solution de l'équation de la chaleur. En étudiant ces solutions analytiques, nous pouvons apprendre beaucoup de choses sur le comportement qualitatif de son modèle. cet aperçu qualitatif sera également utile dans la compréhension des équations de plus en plus compliquées. Dans cette section, nous allons tourné notre attention vers les méthodes numériques de résolution des équations paraboliques [5].

5. en particulier l'équation de la chaleur

Chapitre 2

Méthodes Numériques (Numerical Methods)[5]

Nous allons voir plusieurs schémas numériques basés sur la méthode de différences finies pour la résolution de l'équation de la chaleur, mais tout d'abord rappelons cette méthode ainsi que certaines notations que nous utilisons par la suite.

2.1 Techniques numériques sur la base de la différence finie

- **méthode de différences finies :**
  Le principe de cette méthode consiste à approximer les dérivées des équations de la physique par le taux de croissance, elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18eme siècle (Euler, Taylor, Leibnitz ...). Soit $u(x,t)$ une fonction de l'espace $\mathbb{R}^n$ et du temps, par définition, on a :

  $$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n, t) - u(x,t)}{\Delta x_i}$$

  si Δx_i est petit ,un développement de Taylor de $u(x+\Delta x_i e_i, t)$ [1] au voisinage de x_i donne :

  $$u(x + \Delta x_i e_i, t) = u(x,t) + \Delta x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) + O\big(\Delta^2 x_i\big).$$

  Donc on trouve une approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)$:

  $$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) = \frac{u(x + \Delta x_i e_i, t) - u(x,t)}{\Delta x_i} - O\big(\Delta x_i\big).$$

  Lorsque Δx_i tend vers 0, l'erreur de troncature $O\big(\Delta x_i\big)$tend vers 0.

- **notation indicielle - cas de dimension 1**
  On note u_i la valeur de $u(x)$ au point x_i c-à-d $u_i = u(x_i)$. De même pour la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x})_{x=x_i} = \frac{\partial u}{\partial x})_i$. donc $\frac{\partial u}{\partial x})_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} + O\big(\Delta x\big)$. Ce schéma est appelé "décentré en avant" ou "upwind", on a de même un schéma d'ordre 1 appelé "décentré arrière" qu'on peut la trouvé de la façon suivante :

  $$\begin{aligned} u(x-h) &= u(x) - h\frac{\partial u}{\partial x} + O\big(h^2\big) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(x) - u(x-h)}{h} - O\big(h\big) \end{aligned} \tag{2.1}$$

1. on note par e_i un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

en notation indicielle on a $\frac{\partial u}{\partial x})_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} - O\big(\Delta x\big)$ telle que $\Delta x = h$.
L'ordre de la méthode est la puissance de Δx avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéro.
cherchons un schéma d'ordre supérieur :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i + O\big(\Delta x^3\big) \tag{2.2}$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i - O\big(\Delta x^3\big) \tag{2.3}$$

(2.2)-(2.3) donne $u_{i+1} - u_{i-1} = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x})_i + 2O\big(\Delta x^3\big)$
ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux "centré" pour approximer la dérivée première de u :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O\big(\Delta x^2\big).$$

donc pour obtenir des ordres supérieurs,il faut utiliser plusieurs nœuds de x_i, le nombre de points nécessaire à l'écriture s'appelle le **stencil**.

- **Approximation des dérivées d'ordre supérieur**
  Le principe est identique et repose sur le développement de Taylor au voisinage de x_i, par exemple pour construire un schéma d'approximation de la dérivée seconde de u :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)_i + O\big(\Delta x^4\big) \tag{2.4}$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\Big)_i + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big)_i + O\big(\Delta x^4\big) \tag{2.5}$$

  de (2.4)+(2.5) on en déduit :$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + O\big(\Delta x^2\big)$

- **Généralisation de la notation indicielle :**
  Dans le cas $1D$ l'évolution d'une grandeur $u(x,t)$ en fonction de l'espace et du temps, le domaine de définition de u est composé en k nœuds x_i reparti, on note la valeur u_i^n la valeur discrète de $u(x,t)$ au point x_i et t^n. (t^n désigne une notation d'indice pas une puissance).
  Dans le cas $2D$ on notera par $u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t^n)$ la valeur discrète de la grandeur $u(x,y,t)$ aux nœuds x_i,y_j et t^n. Dans le cas $3D$ on note $u_{i,j,k}^n = u(x_i, y_j, z_k, t^n)$. et ainsi de suite [2].

2.1.1 Les conditions

Rappelons tout d'abord l'équation de la chaleur qu'on veux résoudre numériquement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}$$

conditions initiales

$$u(x,0) = f(x)$$

les différents types de conditions limites

a. **Conditions limites de Neumann (Neumann boundary conditions)**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g_1(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = g_1(t)$$

2. Dans le cadre de la physique, l'étude numérique ne dépasse pas ce qu'on a signaler

b. **Conditions limites de Dirichlet (Dirichlet boundary conditions)**

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$u(1,t) = g_2(t)$$

c. **Conditions limites mixé (Mixte boundary conditions)**

$$u(0,t) = g_1(t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = g_2(t)$$

nous allons traiter et faire la résolution avec un problème de condition limite de Dirichlet : on considère l'équation en $1D$ en espace avec $\Omega =]0,1[$ trouver $u = u(x,t)$ pour $(x,t) \in]0,1[\times]0,T[$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +\tilde{f} & \text{dans} \quad \mathbf{Q_T} =]0,1[\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ u(0,t) = \alpha \quad u(1,t) = \eta & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}$$

avec $\gamma > 0$ et α,η sont des constantes données. On suppose que le problème admet une unique solution $u \in C^2(\overline{\mathbf{Q}_T})$.

2.1.2 Les schémas obtenus sous forme matricielle itérative

a. **Schéma d'Euler explicite $\Big($Forward time centred space$\Big)$** Voir [1] :
discrétisation du domaine : pour deux entiers M et N, on discrétise de façon uniforme les intervalles de l'espace $\overline{\Omega} = [0,1]$ et de temps $[0,T]$ en introduisant les points $x_j = jh \quad ,j = 0,1,\ldots,M+1, \quad t^n = n\Delta t \quad n = 0,\ldots,N$. où h est le pas de discrétisation en espace donnée par $h = \frac{1}{M+1}$ et Δt le pas de discrétisation en temps avec $\Delta t = \frac{T}{N}$, donc les poins (x_j, t^n) pour$j = 0,\ldots,M+1$ et $n = 0,\ldots,N$ définissent un maillage du domaine spatiotemporel $\overline{\mathbf{Q}_T}$ et on appellera nœuds de maillage (Grid spacing). Voir figure 2.1.
On cherche alors une approximation $u_j^n = u(x_j, t^n)$ de la solution exacte en discrétisant la dérivée en espace par un schéma centré au temps t^n et la dérivée en temps par un schéma décentré avant ce qui donne :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \gamma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \tilde{f}_j^n$$

telle que $\tilde{f}_j^n = \tilde{f}(x_j, t^n)$, ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= \frac{\Delta t \gamma}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \Delta t \tilde{f}_j^n \\ u_j^{n+1} &= \frac{\Delta t \gamma}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + u_j^n + \Delta t \tilde{f}_j^n \\ u_j^{n+1} &= \frac{\Delta t \gamma}{h^2} u_{j+1}^n + (1 - 2\frac{\Delta t \gamma}{h^2}) u_j^n + \frac{\Delta t \gamma}{h^2} u_{j-1}^n + \Delta t \tilde{f}_j^n \end{aligned}$$

donc le problème s'écrit comme :

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \beta u_{j+1}^n + (1-2\beta) u_j^n + \beta u_{j-1}^n + \Delta t \tilde{f}_j^n \quad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,M \\ u_0^n = \alpha \\ u_{M+1}^n = \eta \\ u_j^0 = u_0(x_j) \end{cases}$$

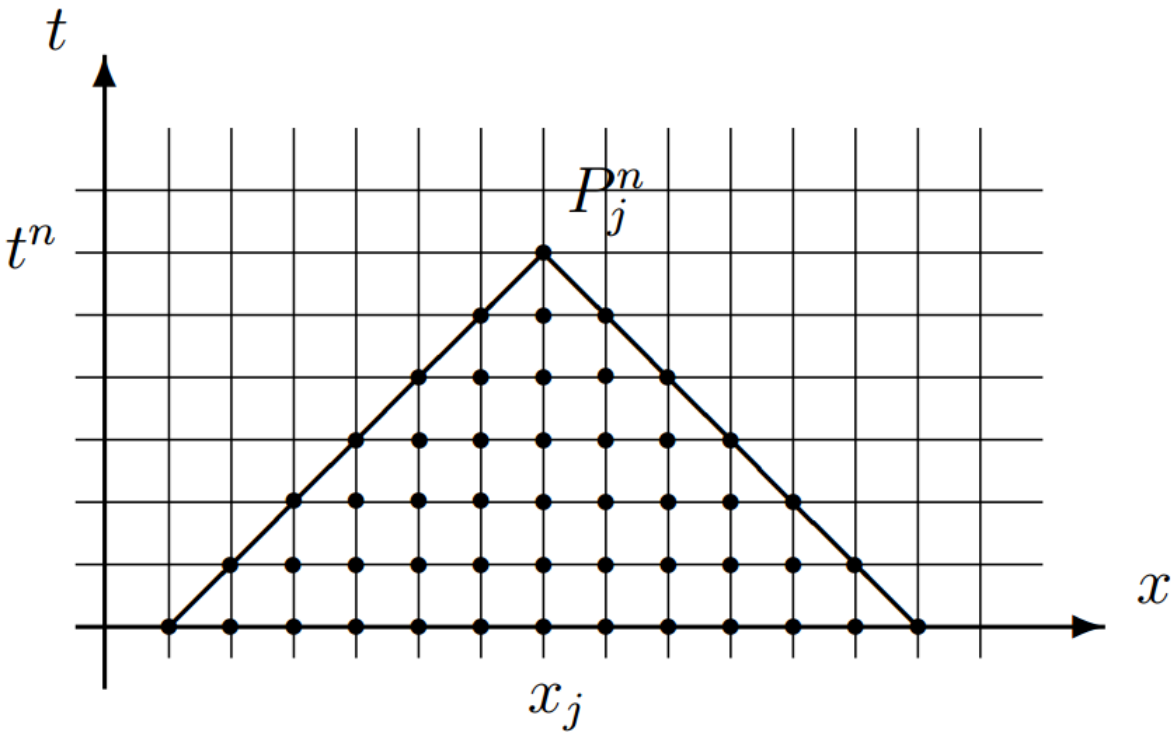


FIGURE 2.1 – Cône de dépendance numérique du schéma d'Euler explicite

avec $\beta = \frac{\Delta t \gamma}{h^2}$.
le schéma est explicite dans la mesure où on calcule u_j^{n+1} directement à partir de u_j^n on peut écrire le problème approché sous la forme matricielle en regroupant les inconnus dans un vecteur $\mathbf{u}^n = (u_1^n, \ldots, u_M^n)^t$.
Le problème approché s'écrit ; via le schéma itératif suivant :

$$\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbb{I}_d - \beta A)\mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{f}^n + \beta \mathbf{b} \tag{2.6}$$

avec $\mathbf{f}^n = (f_1^n, f_2^n, \ldots, f_M^n)^t$,$\mathbf{b} = (\alpha, 0, \ldots, 0, \eta)^t \in \mathbb{R}^M$et :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a.**Schéma d'Euler implicite**

Lorsqu'on fait l'approximation sur la dérivée au point (x_j, t^{n+1}), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^{n+1}) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big)_j^{n+1} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^{n+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

donc le schéma s'écrit comme :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \gamma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \tilde{f}_j^{n+1}$$

le problème consiste alors de trouver u_j^n pour $j = 0 \ldots M+1$ et $n = 0 \ldots N$ telle que :

$$-\beta u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\beta) u_j^{n+1} - \beta u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + \Delta t \tilde{f}_j^{n+1}$$

avec $u_0^n = \alpha$, $u_{M+1}^n = \eta$ et $u_j^0 = u_0(x_j)$

donc le système équivalent (sous forme matricielle) est :

$$\mathbb{M}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \tilde{\mathbf{f}^n} + \beta b \tag{2.7}$$

avec $\mathbf{u}^n = (u_1^n \dots u_M^n)^t$ et $\mathbb{M} = (\mathbb{I}_d + \beta A)$ $\beta = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Telle que $\mathbb{M}$ est une matrice strictement diagonale dominante donc définie positive on peut effectuer la décomposition de CHOLESKY.

c.**Le schema de CRANK-Nicholson**

ce shema s'ecrit :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2}\Big(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}\Big) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_j^n + \tilde{f}_j^{n+1})$$

$$\Longrightarrow \quad \tfrac{-\beta}{2}u_{j+1}^{n+1} + (1-\beta)u_j^{n+1} - \tfrac{\beta}{2}u_{j-1}^{n+1} = \tfrac{\beta}{2}u_{j+1}^n + (1-\beta)u_j^n + \tfrac{\beta}{2}u_{j-1}^n + \tfrac{\Delta t}{2}(\tilde{f}_j^n + \tilde{f}_j^{n+1})$$

avec $u_0^n = \alpha, \quad u_{M+1}^n = \eta \quad et \quad u_j^0 = u_0(x_j)$
ce qui permet d'obtenir sous forme matricielle :

$$(\mathbb{I}_d + \frac{\beta}{2}A)\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbb{I}_d - \frac{\beta}{2}A)\mathbf{u}^n + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{f}^{n+1} + \tilde{f}^n) + \beta b \tag{2.8}$$

$(\mathbb{I}_d + \frac{\beta}{2}A)$ est symétrique définie positive.

d.Θ **-schéma**

il s'agit d'une généralisation des schémas précédents. Avec $0 \leq \theta \leq 1$
c'est une combinaison convexe des schémas précédents :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \gamma\Big(\theta\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\Big) = \theta\tilde{f_j^n} + (1-\theta)\tilde{f_j^{n+1}}$$

sous la forme matricielle :

$$\Big(\mathbb{I}_d + \theta\beta A\Big)\mathbf{u}^{n+1} = \Big(\mathbb{I}_d - (1-\theta)\beta A\Big)\mathbf{u}^n + \Delta t\Big(\theta\tilde{f}^n + (1-\theta)\tilde{f}^{n+1}\Big) + \beta b$$

si $\theta = 0$ $\Longrightarrow$ Euler explicite. 2.6
si $\theta = 1$ $\Longrightarrow$ Euler Implicite. 2.7
si $\theta = \frac{1}{2}$ $\Longrightarrow$ crank-nilson. 2.8

maintenant on va voir un schéma généraliser basée sur la méthode de différences finie pour la résolution de l'équation de la chaleur pour le cas de dimension 2 en espace :

e. θ**-schéma pour l'équation de la chaleur en 2D**

On cherche une fonction $u : \Omega\times]0,T[\to \mathbb{R}$ avec $\Omega = [a,b]\times[c,d]$ telle que

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma\Delta u = f(x,y,t) & \text{pour} \quad (x,y,t) \in \Omega\times]0,T[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) & \text{pour } (x,y) \in \Omega \end{cases}$$

pour cela on considère la discrétisation de Ω en introduisant les points $P_{i,j} = (x_i, y_j)$ avec $x_i = a + ih_x, i = 0,\dots,m+1$ et $y_j = c + jh_y, j = 0,\dots,l+1$. Les pas de discrétisation en espace dans les directions x et y sont donnés respectivement par $h_x = \frac{b-a}{m+1}$ et $h_y = \frac{d-c}{l+1}$. Il s'agit des pas régulières

On cherche alors une approximation $\{\ u_{i,j}^n\ \}$ de la solution exacte u de (P) au point $P_{i,j}$ et à l'instant $t^n = n\Delta t$, c'est à dire $u_{i,j}^n \simeq u(x_i, y_j, t^n)$. Pour déterminer $u_{i,j}^n$, on utilise le θ-schéma suivant

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \gamma\Big(\theta\Delta_{h_x,h_y}u_{i,j}^{n+1} + (1-\theta)\Delta_{h_x,h_y}u_{i,j}^n\Big) = \theta f_{i,j}^{n+1} + (1-\theta)f_{i,j}^n$$

où $0 \leq \theta \leq 1$ et Δ_{h_x,h_y} designe le schema a 5 points du Laplacien. Comme pour le cas 1D, on a les cas particuliers suivants.

$$\begin{aligned}\theta = 0 &\rightarrow \text{Euler explicite}\\ \theta = 1 &\rightarrow \text{Euler implicite}\\ \theta = 1/2 &\rightarrow \text{Crank-nilson}\end{aligned}$$

on regroupent les inconnues dans le vecteur $\mathbf{u}^n = (u^n_{1,1}, u^n_{2,1}, \ldots, u^n_{m,1}, u^n_{1,2}, \ldots, u^n_{m,2}, \ldots, u^n_{1,l}, \ldots, u^n_{m,l})^t \in \mathbb{R}^{ml}$, c'est à dire qu'on ordonne les noeuds du maillage de la gauche vers la droite et de bas en haut. Sous forme matricielle, le θ-schema s'ecrit de la facon suivante

$$(\mathbb{I}_d + \theta\Delta t M)\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbb{I}_d - (1-\theta)\Delta t M)\mathbf{u}^n + \Delta t(\theta\mathbf{f}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{f}^n)$$

où la matrice carrée M d'ordre ml est une matrice tridiagonale par blocs donnée par

$$M = \begin{pmatrix} D_m & E_m & & 0 \\ E_m & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & E_m \\ 0 & & E_m & D_m \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

les matrices carrée D_m et E_m d'ordre m sont donnée par

$$D_m = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & & 0 \\ d_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & d_2 \\ 0 & & d_2 & d_1 \end{pmatrix}, E_m = -\frac{\gamma}{h_y^2}\mathbb{I}_m \tag{2.10}$$

avec $d_1 = 2\gamma\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)$ et $d_2 = -\frac{\gamma}{h_x^2}$. La matrice $\mathbb{I}_m$ représente la matrice identité d'ordre m.
remarque si $h_x = h_y$ alors $d_1 = 4\gamma/h_x^2$, $d_2 = -d_1/4$ et

$$D_m = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & & 0 \\ -1/4 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1/4 \\ 0 & & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

2.2 Consistance et stabilité

Pour étudier la convergence de la solution numérique u_i^n du schéma aux différences finies vers la solution exacte $u(x,t)$ on peut soit essayer d'étudier directement la convergence, ce qui peut être compliqué et pas toujours possible, soit utiliser La consistance et la stabilité d'un schéma. Car ils sont en général beaucoup plus facile à étudier que sa convergence.
Définissons tout d'abord ce que c'est la consistance

Définition 2. *un schéma aux différences finies est consistant à l'équation exacte si l'EDF tends vers l'EDP lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace tendent vers zéro indépendamment.*
Pour formaliser cette approche, notons $u(x,t)$ la solution de l'EDP, ie $u(x,t)$ verifie exactement l'équation $EDP[u] = 0$, et u_i^j la solution de l'EDF, i.e.u_i^j vérifie exactement l'equation

$EDF[u] = 0$. Nous allons calculer la différence E_t entre l'EDP et l'EDF aux nœuds du maillage et pour la solution exacte u :

$$E_t = EDF[u(x_i, t^n)] - EDP[u]_{(i\Delta x, n\Delta t)}$$

Cette différence est l'erreur de troncature du schéma aux différences finies, et corresponds donc à l'erreur commise lorsque l'on remplace la solution approchée u_i^n par la solution exacte aux noeuds du maillage $u(i\Delta x, n\Delta t)$ dans l'équation aux différences EDF.
Le schéma EDF est dit consistant à l'équation EDP si cette erreur de troncature tends vers zéro lorsque le pas de discrétisation en temps Δt et le pas de discrétisation en espace Δx tendent vers zéro indépendamment.

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta t \to 0} E_t = 0$$

2.2.1 Étude de la consistance

a **Schéma Explicite**
On note $L_{h,\Delta t}$ l'operateur aux differences finie associé au probleme approché :

$$L_{h,\Delta t} u(x,t) = \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} - \gamma \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

et on note l'operateur de la chaleur

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

On obtient pour une fonction $u \in C^{4,2}$, de classe C^4 en x et de classe C^2 en temps.

$$\begin{aligned} E_t = (L_{h,\Delta t} u - Lu)(x,t) &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial t} u(x, \tilde{t}) + \gamma \frac{h^2}{12} u(\tilde{x}, t) \\ &= O(\Delta t + h^2) \xrightarrow[\Delta x \to 0, \Delta t \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

donc le schéma Explicite est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace. La consistance caractérise la façon dont l'équation aux différences finies (EDF) approche l'équation aux dérivées partielles (EDP).
On peut généraliser cet aspect pour un problème en cas générale mais les calculs devient très compliqué est difficile.

b **Schéma Implicite**
Pour une fonction u régulière[3] ie $u \in C^{4,2}$

$$E_t = (L_{h,\Delta t} u - Lu)(x,t) = O(\Delta t + h^2) \xrightarrow[\Delta x \to 0, \Delta t \to 0]{} 0.$$

Donc le schéma est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

c **Schéma Crank-Nicholson**
Pour ce schéma On a

$$L_{h,\Delta t} u\Big(x, t + \frac{\Delta t}{2}\Big) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\gamma}{2}\Big(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}\Big)$$

et

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

3. Dans le cadre de la physique on suppose que la régularité est satisfaite pour programmer

et on a $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$ (approximation centré)

et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t+\Delta t)\right) + O(\Delta t^2)$

$\Longrightarrow \quad (L_{h,\Delta t}u - Lu)\left(x, t+\frac{\Delta t}{2}\right) = O(\Delta t^2 + h^2) \xrightarrow[\Delta x\to 0, \Delta t\to 0]{} 0$

donc le schéma est consistant d'ordre 2 en temps et en espace, il s'agit donc d'un schéma précis en temps.

d **θ-Schéma**

si $\theta \neq \frac{1}{2}$ l'erreur de consistance est en $O(\Delta t + h^2)$

si $\theta = \frac{1}{2}$ l'erreur de consistance est en $O(\Delta t^2 + h^2)$

maintenant on vas parler sur la stabilité du schéma

2.2.2 Stabilité

il y a plusieurs notions de stabilité.Critère de Van Neumann-Fourrier et stabilité au sens d'une norme.

- **Critère de Van Neumann-Fourrier**
  dans ce critère, on ne prend pas en compte les effets de bords de la discrétisations (conditions limites) et on analyse seulement l'équation ceci revient à considérer le problème non plus dans un intervalle borné mais dans $\mathbb{R}$ tout entier et ignorer les conditions limites. On prend $f = 0$
  Donc on cherche une solution sous la forme particulière suivante avec $\xi \in \mathbb{R}$.

$$u_j^n = \xi^n e^{ik\pi jh} \text{ pour } k \text{ fixé. puisque } |u_j^n| = |\xi|^n \tag{2.12}$$

  ce critère impose la condition $|\xi| \leq 1$ affin que la solution approchée soit bornée.ξs'appelle facteur d'amplification. (Amplification Factor).

- **Critère de stabilité au sens des norme.**

  Définition 3. *un schéma aux différences finies est dit* ***stable*** *pour la norme* $\| \quad \|$, *s'il existe une constante* K *telle que*

$$\|u^n\| \leq K\|u^0\| \textit{ pour tout } n \geq 0 \tag{2.13}$$

  quelle que soit la donnée initiale u^0. *Avec* $u^n = (u_j^n)_{0\leq j\leq M}$.

  Si (2.13) n'a lieu que pour des pas Δt *et* Δx *restreints à certaines inégalités, on dit que le schéma est* ***conditionnellement stable*** •
  introduisons les normes $\mathbb{L}^\infty$ et $\mathbb{L}^2$ discrètes suivantes. Pour $v \in \mathbb{R}^M$ on note

$$\|v\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\leq i\leq M} |v_i|$$

$$\|v\|_{2,h} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{M} h|u_i^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h}\|v\|_2$$

a. **Étude de stabilité du schéma explicite**

§ Critère de Van Neumann-Fourrier
en remplaçons (2.12) dans le schéma qu'on a trouvé :

$$\begin{aligned}
\xi^{n+1}e^{ik\pi jh} &= \beta\xi^n e^{ik\pi(j+1)h} + (1-2\beta)\xi^n e^{ik\pi jh} + \beta\xi^n e^{ik\pi(j-1)h} \\
\xi &= \beta e^{ik\pi h} + (1-2\beta) + \beta e^{-ik\pi h} \\
&= 2\beta\cos(k\pi h) + (1-2\beta) \\
&= 1 + 2\beta\big(\cos(k\pi h) - 1\big)
\end{aligned}$$

or on a $\cos x - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2}) \quad \Longrightarrow \xi = 1 - 4\beta\sin^2(\frac{k\pi h}{2})$ La condition de stabilité de van Neumann et que $|\xi| \leq 1$ c'est à dire [4]

$$-1 \leq 1 - 4\beta\sin^2(\frac{k\pi h}{2}) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad 4\beta\sin^2(\frac{k\pi h}{2}) \leq 2$$

cette inégalité est vérifiée si $4\beta \leq 2$ alors on peut dire

$$\beta \leq \frac{1}{2} \iff \gamma\frac{\Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2} \tag{2.14}$$

donc le schéma est stable si (2.14) est vérifiée, on remarque que la stabilité au sens de (VNF) relie le temps au pas d'espace. Cela nous rappel le lien entre le temps et l'espace dans la mécanique quantique mais dans un contexte probabiliste principe d'Heisenberg $\Delta t\Delta x \geq k_0$

§ stabilité $\mathbb{L}^\infty$ et $\mathbb{L}^2$ du schéma explicite.
en vas travailler dans le cas où ($\alpha = \eta = 0$) alors on a le résultats suivantes $\forall n = 0, \ldots, N$: si $\beta \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&i) \qquad \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + T\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)} \\
&ii) \qquad \|u^n\|_{2,h} \leq \|u^0\|_{2,h} + T\max_n \|f^n\|_{2,h}
\end{aligned}$$

Preuve :
i) On a d'abord d'après la notation matricielle :

$$\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbb{I}_d - \beta A)\mathbf{u}^n + \Delta\mathbf{f}^n + \beta\mathbf{b}$$

avec $\alpha = \eta = 0$ on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{n+1} &= M\mathbf{u}^n + \Delta\mathbf{f}^n \text{ avec} \quad M = \mathbb{I}_d - \beta A \\
\|\mathbf{u}^{n+1}\|_\infty &= \|M\mathbf{u}^n + \Delta\mathbf{f}^n\|_\infty \\
&\leq \|M\|_\infty\|\mathbf{u}^n\|_\infty + \Delta t\|\mathbf{f}^n\|_\infty
\end{aligned}$$

Et on a

$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq M}\sum_{j=1}^{M}|m_{ij}| = |1-2\beta| + |2\beta|$$

Or on a

$$\beta \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \|M\|_\infty = 1 - 2\beta + 2\beta = 1$$

4. le contrôle du pas de l'espace $\Longrightarrow$ contrôle du temps.

on en déduit que

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty + \Delta t\|\mathbf{f}^n\|_\infty \tag{2.15}$$

On sommant sur n, on obtient le résultat.

De meme pour *ii)*, avec la norme euclidienne $\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^M v_i^2\right)^{1/2}$, on a

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\|_2 \leq \|M\|_2\|\mathbf{u}^n\|_2 + \Delta t\|\mathbf{f}^n\|_2$$

La matrice M étant symétrique, on a $\|M\| = \rho(M) = \max_k |\lambda_k|$ où λ_k désigne les valeures propres de M. voir [15] On a,

$$\lambda_k = 1 - 4\beta\sin^2(\frac{k\pi}{2(M+1)}) \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, M.$$

Par consequent, on voit que λ_k est exactement le facteur d'amplification ξ du critère de Von Neumann.Ainsi,avec $\beta \leq \frac{1}{2}$. On a $|\lambda_k| \leq 1$ et donc $\|M\|_2 \leq 1$. En sommant sur n et en passant à la norme $\|.\|_{2,h}$, on obtient le résultat.

b. **Étude de stabilité du schéma implicite**

§ Critère de Van Neumann-Fourrier

Avec $f = 0$, on cherche une solution sous la forme particulière suivante :

$$u_j^n = \xi^n e^{ik\pi jh} \qquad , k \quad \text{fixé}$$

La condition de stabilité du critère de Van Neumann-Fourrier s'écrit $|\xi| \leq 1$ donc on a :

$$-\beta\xi e^{ik\pi h} + (1+2\beta)\xi - \beta\xi e^{-i\pi kh} = 1$$

$$\Longrightarrow \qquad \xi\Big(1 + 2\beta\big(1 - \cos(k\pi h)\big)\Big) = 1$$

ce qui donne

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\beta\sin^2(\frac{k\pi h}{2})}$$

Or $0 \leq \xi \leq 1$ donc le schéma implicite est inconditionnellement stable au sens de Van Neumann.

§ stabilité $\mathbb{L}^\infty$ et $\mathbb{L}^2$ du schéma implicite.

Dans la cas de conditions aux limites homogènes ($\alpha = \eta = 0$) on a les estimations suivant pour tout $n = 0, \ldots, N$,

$$i) \qquad \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + T\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)}$$

$$ii) \qquad \|u^n\|_{2,h} \leq \|u^0\|_{2,h} + T\max_n \|f^n\|_{2,h}$$

Preuve :

i) $\alpha = \eta = 0$ on a

$$\begin{aligned} (1+2\beta)|u_j^{n+1}| &\leq \beta(|u_{j+1}^{n+1}| + |u_{j-1}^{n+1}|) + u_j^n + \Delta t|f_j^{n+1}| \\ (1+2\beta)|u_j^{n+1}| &\leq 2\beta\|u^{n+1}\|_\infty + \|u^n\|\infty + \Delta t\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)} \\ \Longrightarrow \qquad \|u^{n+1}\| &\leq \|u^n\|\infty + \Delta t\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

d'après (2.16) et en sommant sur n en trouvent le résultat. On peut dire donc, que le schéma est inconditionnellement stable pour la norme infini.

ii) $\alpha = \eta = 0$, d'après le schéma matricielle on a

$$\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbb{I}_d + \beta A)^{-1}\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{f}^n$$

posons $M = (\mathbb{I}_d + \beta A)$ on trouve

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|M^{-1}\|_2 \big(\|u^n\|_2 + \Delta t \|f^n\|_2\big)$$

Or $\|M^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_k(\mu_k)}$ où μ_k sont les valeurs propres de M donc on a

$$\mu_k = 1 + \beta\lambda_k \qquad \text{telle que} \qquad \lambda_k = 4\sin^2\Big(\frac{k\pi}{2(M+1)}\Big).$$

on en déduit que $\mu_k \geq 1$ $\qquad \|M^{-1}\|_2 \leq 1$.
c'est à dire :

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|u^n\|_2 + \Delta t \|f^n\|_2$$

D'ou le résultat.

c. **Étude de stabilité du schéma Crank-Nilcholson**

§ Critère de Van Neumann-Fourrier

On remplaçons $u_j^n = \xi^n e^{jk\pi ih}$ dans le schéma :

$-\frac{\beta}{2}\xi^{n+1}e^{(j+1)k\pi ih} + (1+\beta)\xi^{n+1}e^{jk\pi ih} - \frac{\beta}{2}\xi^{n+1}e^{(j-1)k\pi ih} = \frac{\beta}{2}\xi^n e^{(j+1)k\pi ih} + (1-\beta)\xi^n e^{jk\pi ih} + \frac{\beta}{2}\xi^n e^{(j-1)k\pi ih}$

$$-\frac{\beta}{2}\xi e^{k\pi ih} + (1+\beta)\xi - \frac{\beta}{2}\xi e^{-k\pi ih} = \frac{\beta}{2}e^{k\pi ih} + (1+\beta) - \frac{\beta}{2}e^{-k\pi ih}$$

$$\Longrightarrow \qquad \xi = \frac{1 - 2\beta\sin^2(\frac{k\pi h}{2})}{1 + 2\beta\sin^2(\frac{k\pi h}{2})} \tag{2.17}$$

Or $|\xi| \leq 1$ donc le schéma Crank-Nilcholson est inconditionnellement stable au sens de Van-Neumann.

§ stabilité $\mathbb{L}^\infty$ et $\mathbb{L}^2$ du schéma Crank-Nilcholson

Dans le cas de conditions aux limites nulle, on a les estimations suivantes $\forall n = 0, \ldots, N$

i) si $\beta \leq 1$ $\quad \|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty + T\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)}$

ii) $\quad \|u^n\|_{2,h} \leq \|u^0\|_{2,h} + T\max_n \|f^n\|_{2,h}$

Démonstration :
i) $\alpha = \eta = 0$ on a

$$(1+\beta)u_j^{n+1} = \frac{\beta}{2}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + \frac{\beta}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1-\beta)u_j^n + \frac{\Delta t}{2}(f_j^n + f_j^{n+1})$$

$$(1+\beta)\|u^{n+1}\|_\infty \leq \beta\|u^{n+1}\|_\infty + (\beta + |1-\beta|)\|u^n\|_\infty + \Delta t\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)}$$

Or $\beta \leq 1$ donc $\beta + |1+\beta| = 1$ ce qui donne

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty + \Delta t\|f\|_{\mathbb{L}^\infty(Q_T)} \tag{2.18}$$

d'où le résultat.

ii) avant de commencer la démonstration nous avons besoin de quelques résultats d'algèbre :

lemme 2. .

1. *soit M_1 et M_2 deux matrices qui commutent et M_1 inversibles, alors M_1^{-1} et M_2 commutent.*
2. *soit M_1 et M_2 deux matrices symétriques qui commutent, alors $M_1 \times M_2$ est symétrique.*
3. *soit M une matrice carrée symétrique, semi-définie positive.$\forall \alpha \geq 0 \quad \mathbb{I}_d + \alpha M$ est inversible et $B = (\mathbb{I}_d + \alpha M)^{-1}(\mathbb{I}_d - \alpha M)$ est symétrique avec $\rho(B) \leq 1$.*

Preuve du lemme 2

1. On a $M_1 M_2 = M_2 M_1 \quad \Longrightarrow \quad M_2 = M_1^{-1} M_2 M_1 \quad \Longrightarrow \quad M_2 M_1^{-1} = M_1^{-1} M_2$

2. on a $(M_1 M_2)^t = M_2^t M_1^t \underbrace{=}_{symtrique} = M_2 M_1 \underbrace{=}_{comutent} M_1 M_2$

3. Montrons d'abord que $\mathbb{I}_d + \alpha M$ est inversible :

soit X telle que $(\mathbb{I}_d + \alpha M)X = 0$ donc on a $MX = \frac{-1}{\alpha} X$

si $\alpha = 0 \implies X = 0$

pour $\alpha > 0$ on a $(MX, X) = (\frac{-1}{\alpha} X, X) = \frac{-1}{\alpha}(X, X) = \frac{-1}{\alpha}\|X\|^2 \geq 0$ car M est semi-définie positive $\implies \quad X = 0$
établissons a présent la propriété sur la matrice B. Les matrices $\mathbb{I}_d + \alpha M$ et $\mathbb{I}_d - \alpha M$ commutent donc d'après 1 et 2 B est symétrique. En notant $C = \mathbb{I}_d + \alpha M$, on a $B = C^{-1}(2\mathbb{I}_d - C) = 2C^{-1} - \mathbb{I}_d$. Les valeurs propres de B sont $\lambda_k = \frac{2}{1+\alpha\mu_k} - 1$ où μ_k sont les v.p. de M. La matrice M étant semi-définie positive, on a $\mu_k \geq 0$. Par ailleurs, $\rho(B) = \max_k |\lambda_k|$ et $|\lambda_k| = \frac{|1-\alpha\mu_k|}{1+\alpha\mu_k} \leq 1$, $\forall k$, donc $\rho(B) \leq 1$.

Étudions à présent la stabilité $\mathbb{L}^2$ du schéma de Crank-Nicholson. Avec $\alpha = \eta = 0$, le système linéaire s'écrit

$$u^{n+1} = Bu^n + \frac{\Delta t}{2}\Big(\mathbb{I}_d + \frac{\beta}{2}A\Big)^{-1}(f^n + f^{n+1}) \text{ avec } B = \Big(\mathbb{I}_d + \frac{\beta}{2}A\Big)^{-1}\Big(\mathbb{I}_d - \frac{\beta}{2}A\Big).$$

On en déduit que

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|B\|_2 \|u^n\|_2 + \frac{\Delta t}{2}\|(\mathbb{I}_d + \frac{\beta}{2}A)^{-1}\|_2(\|f^n\|_2 + \|f^{n+1}\|_2).$$

D'après la propriété 3 du lemme 2, B est symétrique et $\|B\|_2 = \rho(B) \leq 1$.

Notons maintenant $C = (\mathbb{I}_d + \frac{\beta}{2}A)^{-1}$. On a $\|C\|_2 = \rho(C)$ car C est symétrique et les v.p.

de C sont données par $\gamma_k = \frac{1}{1+\frac{\beta}{2}\mu_k}$ où μ_k sont les v.p. de A. Puisque $\mu_k > 0$, on a $\gamma_k < 0$ et par conséquent $\|C\|_2 \leq 1$. On obtient

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq \|u^n\|_2 + \Delta t \max_n \|f^n\|_2.$$

On conclue en passant à la norme $\|.\|_{2,h}$ et en sommant sur n.

conclusion. Le schéma Crank-Nicholson est un schéma précis en temps (ordre 2) qui est inconditionnellement $\mathbb{L}^2$-stable mais qui est $\mathbb{L}^\infty$-stable sous la condition $\beta \leq 1$

d. **Étude de stabilité du θ-schéma**

1. pour $0 \leq \theta \leq 1/2$ le schéma est $\mathbb{L}^2$-stable si $\beta \leq \frac{1}{2-4\theta}$.

2. pour $1/2 \leq \theta \leq 1$ le schéma est inconditionnellement $\mathbb{L}^2$-stable.

3. pour $1 \leq \theta \leq 1$ le schéma est $\mathbb{L}^\infty$-stable si $\beta \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$.

2.3 Convergence

On générale pour étudier la convergence d'un schéma numérique il suffit d'étudier la consistance et la stabilité car cela implique la convergence du schéma. On va voir comment on peut démontrer à la main :

2.3.1 Étude de la convergence de la solution du schéma explicite

On pose $e_j^n = u(jh, n\Delta t) - u_j^n$ en supposant que la solution exacte u est régulière, l'erreur de consistance pour $j = 1, \ldots, M$.

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\Delta t} = \gamma \frac{e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n}{h^2} + O(\Delta t + h^2)$$

avec $e_0^n = \alpha - \alpha = 0$ et $e_{M+1}^n = \eta - \eta = 0$ donc on obtient sous forme matricielle

$$e^{n+1} = Me^n + \Delta t O(\Delta t + h^2)$$

par la même démonstration que la stabilité on obtient si $\beta \leq \frac{1}{2}$

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + TO(\Delta t + h^2) \tag{2.19}$$

puisque $e^0 = 0$ on a $\|e^n\|_\infty = O(\Delta t + h^2) \xrightarrow[\Delta x \to 0, \Delta t \to 0]{} 0$
d'où la convergence du schéma explicite d'Euler.

conclusion Le schéma d'Euler explicite est simple mais il y a une condition de stabilité à respecter, ce qui limite de temps pour un pas h donné.

2.3.2 Étude de la convergence de la solution du schéma implicite

On vérifie facilement que

$$\|e^n\|_\infty = O(\Delta t + h^2) \xrightarrow[\Delta x \to 0, \Delta t \to 0]{} 0.$$

Sans condition sur le pas de temps et d'espace.

Chapitre 3

Étude numérique d'un problème non linéaire modélisant l'état thermique d'un supraconducteur[1],[2]

La supraconductivité (ou supraconduction) est un phénomène caractérisé par l'absence de résistance électrique et l'expulsion du champ magnétique — l'effet Meissner [1] — à l'intérieur de certains matériaux dits supraconducteurs. La supraconductivité découverte historiquement en premier, et que l'on nomme communément supraconductivité conventionnelle, se manifeste à des températures très basses, proches du zéro absolu [2]. $(273,15 \quad C)$. La supraconductivité permettrait notamment de transporter de l'électricité sans perte d'énergie. Ses applications potentielles sont donc stratégiques.

Dans les supraconducteurs conventionnels, des interactions complexes se produisent entre les atomes et les électrons libres et conduisent à l'apparition de paires liées d'électrons, appelées paires de Cooper. L'explication de la supraconductivité est intimement liée aux caractéristiques quantiques de la matière. Alors que les électrons sont des fermions, ces paires d'électrons se comportent COMME des bosons, de spin égal à 0, et sont « condensées » dans un seul état quantique, sous la forme d'un superfluide de paires de Cooper.

3.1 Écriture du modèles :

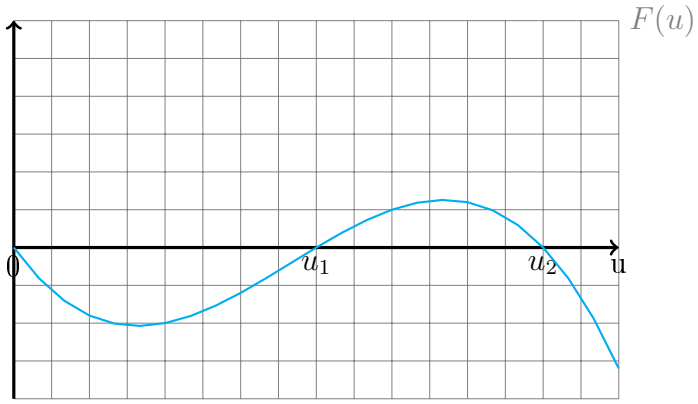
L'équation aux dérivées partielles modélisant la diffusion de la chaleur dans un supraconducteur s'écrit généralement comme
soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ On a :

$$\begin{cases} c(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(k(u)\nabla u) = F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

F doit être dans une classe de fonctions qui assure a nous l'existence et l'unicité de la solution qui sont :

1. L'effet Meissner fait référence au phénomène d'exclusion totale de toute induction magnétique de l'intérieur d'un supraconducteur quand il est porté à une température inférieure à sa température critique. Il a été découvert par Walther Meissner et Robert Ochsenfeld en 1933 et est souvent appelé diamagnétisme parfait ou l'effet Meissner-Ochsenfeld.
2. Le zéro absolu est la température la plus basse qui puisse exister.

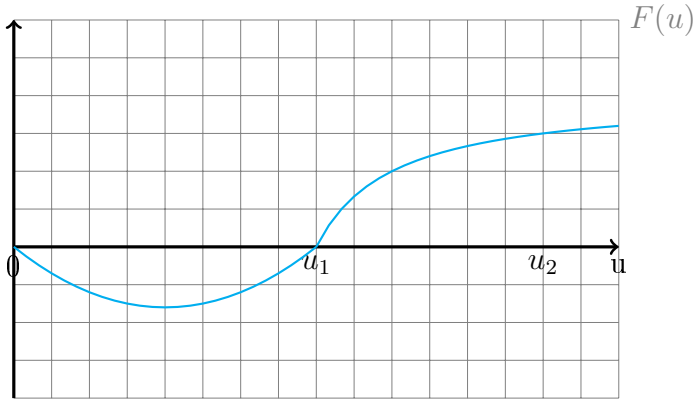
- F est un polynôme de 3eme degré telle que $\quad F(u) = au(u-u_1)(u-u_2)$.



- F est définie par :

$$F(u) = \begin{cases} au(u-u_1) = F_1(u) & \text{sur} \quad]0, u_2] \\ \\ b\frac{u+\alpha}{u+\beta} = F_2(u) & \text{sur } [u_2, +\infty[\end{cases}$$

avec $\lim_{u\to+\infty} F(u) = b$, $F_1(u_2) = F_2(u_2)$ et $F_1^{'}(u_2) = F_2^{'}(u_2)$.



il existe d'autre classe de fonction mais nous allons se limiter d'une seul classe que nous avons cité.

3.2 Schéma numérique adapté à notre problème .

Considérons l'équation de réaction-diffusion suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u) & x \in]0,1[\quad , t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{3.2}$$

soit F un polynôme de 2eme degré a 2 racines telle que $F(u) = u(u-a)$ avec a connu (valeur) on appelle se problème le problème de Fisher (Fisher problem) avec deux zero. Donc l'équation s'écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(u-a) & x \in]0,1[\quad , t \in]0,T[\\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

3.2.1 Cas dynamique

• schéma pour l'équation de Fisher par la méthode de différences finies

Soit u_j^n l'approximation de $u(x_j, t^n)$ donc on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + u_j^n(u_j^n - a) \quad j = 1, \dots, N \\
u_j^{n+1} - u_j^n &= \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^n - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n + \Delta t u_j^n (u_j^n - a) \\
u_j^{n+1} &= r u_{j+1}^n + (1-2r) u_j^n + r u_{j-1}^n + \Delta t u_j^n (u_j^n - a)
\end{aligned}$$

avec $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$ et $u_j^0 = u_0(x_j)$

Donc le schéma s'écrit comme

$$\begin{cases}
u_j^{n+1} = r u_{j+1}^n + (1-2r) u_j^n + r u_{j-1}^n + \Delta t u_j^n (u_j^n - a) & \\
u_0^n = u_{N+1}^n = 0 & \forall n = 0, \dots, M \\
u_j^0 = u_0(x_j) & \forall j = 0, \dots, N
\end{cases}$$

Soit à résoudre numériquement l'équation de la chaleur-diffusion suivant :

$$\begin{cases}
c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ii}\frac{\partial u}{\partial x_i}) = \lambda F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\
u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0
\end{cases} \tag{3.3}$$

certaines résultat démontre l'existence et l'unicité pour certaines classe de fonction F ce qui assure le travaille numérique qu'on va faire.
Premièrement on travaille dans une dimension de l'espace et une dimension de temps, donc le problème devient :

$$(P1) : \begin{cases}
c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) = \lambda F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\
u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0
\end{cases}$$

procédant par la méthode de différence finie pour la résolution numérique, premièrement nous discrétisons en temps la dérivée par rapport au temps, ensuite on va approximer la dérivée seconde par rapport à l'espace :

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + O(\Delta t^2) \tag{3.4}$$

$$\frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + O(\Delta t) \tag{3.5}$$

donc

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} \simeq c_j^n \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad \text{telle que} \quad c(x_j, t^n) = c_j^n$$

posons $v = k(u)\frac{\partial u}{\partial x}$.
on a

$$v(x + \frac{\Delta x}{2}, t) = v(x,t) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + \frac{\Delta x^2}{8}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + O\big((\frac{\Delta x}{2})^3\big) \tag{3.6}$$

$$v(x - \frac{\Delta x}{2}, t) = v(x,t) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + \frac{\Delta x^2}{8}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) - O\big((\frac{\Delta x}{2})^3\big) \tag{3.7}$$

(3.6)-(3.7) $\Longrightarrow$ $\quad v(x+\frac{\Delta x}{2},t)-v(x-\frac{\Delta x}{2},t)=\Delta x\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)+O(\frac{\Delta x^3}{4})$

cela implique que

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)=\frac{v(x+\frac{\Delta x}{2},t)-v(x-\frac{\Delta x}{2},t)}{\Delta x}-O(\frac{\Delta x^2}{4})$$

Or on a

$$\begin{aligned}v(x+\frac{\Delta x}{2},t)&=v(x,t)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)+O(\frac{\Delta x^2}{4})\\&=k\big(u(x,t)\big)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{\Delta x}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(k(u(x,t))\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\big)\Big)+O(\Delta x^2)\\&=k\big(u(x,t)\big)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{\Delta x}{2}\Big(\frac{\partial k\big(u(x,t)\big)}{\partial x}\times\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big)+O(\Delta x^2)\end{aligned}$$

donc d'après ce qui précède

$v(x+\frac{\Delta x}{2},t)=k\big(u(x,t)\big)\Big(\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\Big)+\frac{\cancel{\Delta x}}{2}\Big(\frac{k\big(u(x+\Delta x,t)\big)-k\big(u(x,t)\big)}{\cancel{\Delta x}}\times\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\Big)+O(\Delta x^2)$

enfin on trouve

$$\begin{aligned}v(x+\frac{\Delta x}{2},t)&=\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\times\Big(k(u(x,t))+\frac{1}{2}\big(k(u(x+\Delta x,t))-k(u(x,t))\big)\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big(k(u(x,t))+k(u(x+\Delta x,t))\Big)\times\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}\end{aligned}$$

Procédant par la même procédure pour $v(x-\frac{\Delta x}{2},t)$ on a :

$$v(x-\frac{\Delta x}{2},t)=v(x,t)-\frac{\Delta x}{2}\Big(\frac{\partial k\big(u(x,t)\big)}{\partial x}\times\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big)+O(\Delta x^2) \tag{3.8}$$

$$=k\big(u(x,t)\big)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)-\frac{\Delta x}{2}\Big(\frac{\partial k\big(u(x,t)\big)}{\partial x}\times\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big)+O(\Delta x^2) \tag{3.9}$$

$v(x-\frac{\Delta x}{2},t)=k\big(u(x,t)\big)\Big(\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}\Big)+\frac{\cancel{\Delta x}}{2}\Big(\frac{k\big(u(x,t)\big)-k\big(u(x-\Delta x,t)\big)}{\cancel{\Delta x}}\times\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}\Big)+O(\Delta x^2)$

donc $v(x-\frac{\Delta x}{2},t)=\frac{1}{2}\Big(k(u(x,t))+k(u(x-\Delta x,t))\Big)\times\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x}+O(\Delta x^2)$ en notation indicielle :

$$+\qquad v^n_{j+\frac{1}{2}}=k^n_{j+\frac{1}{2}}\times\frac{u^n_{j+1}-u^n_j}{\Delta x}\qquad\text{avec}\qquad k^n_{j+\frac{1}{2}}=\big(k(u^n_{j+1})+k(u^n_j)\big)/2$$

$$+\qquad v^n_{j-\frac{1}{2}}=k^n_{j-\frac{1}{2}}\times\frac{u^n_j-u^n_{j-1}}{\Delta x}\qquad\text{avec}\qquad k^n_{j-\frac{1}{2}}=\big(k(u^n_j)+k(u^n_{j-1})\big)/2$$

Et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\big)\simeq\frac{k^n_{j+\frac{1}{2}}(u^n_{j+1}-u^n_j)-k^n_{j-\frac{1}{2}}(u^n_j-u^n_{j-1})}{\Delta x^2}$$

Donc le schéma numérique équivalent à $(P1)$ est :

$$\begin{cases}c^n_j\frac{u^{n+1}_j-u^n_j}{\Delta t}-\frac{k^n_{j+\frac{1}{2}}(u^n_{j+1}-u^n_j)-k^n_{j-\frac{1}{2}}(u^n_j-u^n_{j-1})}{\Delta x^2}=\lambda F(u^n_j)+P^n_j\qquad\forall j\in\Omega_j,\forall n\in\{1,\dots,M\}\\u^n_0=u^n_{N+1}=0\qquad\forall n=0,\dots,M\\u^0_j=u_0(x_j)\qquad\forall j=0,\dots,N\end{cases}$$

Dans le cas stationnaire il existe une autre méthode s'appelle transformation de Kirchoff :

3.2.2 cas stationnaire :

Rappelons le problème à résoudre numériquement

$$(P1) : \begin{cases} c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) = \lambda F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases}$$

puisque $c(x,t) \neq 0$ donc on peut écrire le problème sous la forme suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) = F_c(u) + P_c(x,t)$$

avec $F_c(u) = \frac{F(u)}{c(x,t)}$, $P_c(x,t) = \frac{P(x,t)}{P_c(x,t)}$.

Posons

$$v(x,t) = \int_0^{u(x,t)} k(s)ds = \tilde{K}\mathbf{o}u(x,t)$$

$\Longrightarrow$ $u(x,t) = \tilde{K}^{-1}\mathbf{o}v(x,t) = \tilde{K}^{-1}\big(v(x,t)\big)$ donc appliquons les résultat que nous avons trouver

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x}(u(x,t))o\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \\ &= k(u(x,t))o\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial}\big(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\big) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$$

de même : $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial \tilde{K}^{-1}}{\partial t}(v(x,t))o\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)$

et $F_c(u) = \frac{F(u)}{c(x,t)} = \frac{F\big(\tilde{K}^{-1}(v(x,t))\big)}{c(x,t)}$

donc le problème $(P1)$ devient

$$(\tilde{P1}) : \begin{cases} \frac{\partial \tilde{K}^{-1}}{\partial t}(v(x,t))o\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) - \frac{1}{c(x,t)}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = F_c\big(\tilde{K}^{-1}(v(x,t))\big) + P(x,t) \\ \tilde{K}^{-1}(v(x,t)) = 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{K}^{-1}(v(x,0)) = u_0(x) \qquad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

la force de cette transformé c'est que lorsque le problème est stationnaire (ie :$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = 0$ donc le problème devient

$$(\tilde{P}_s) : \begin{cases} -\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = F_c\big(\tilde{K}^{-1}(v(x,t))\big) + P(x,t) \\ \tilde{K}^{-1}(v(x,t)) = 0 \qquad \text{sur} \qquad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{K}^{-1}(v(x,0)) = u_0(x) \qquad \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Facile à résoudre numériquement. Abordons maintenant le problème à 2 dimension,le problème s'écrit comme :

$$(P_2) \begin{cases} c(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ii}\frac{\partial u}{\partial x_i}) = F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Omega \\ u(x,y,t) = 0 \qquad \forall (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10}$$

avec $y = x_2$, nous pouvons écrire le problème d'une façon équivalent :

$$(P_2) : \begin{cases} c(x,y,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k_1(u)\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k_2(u)\frac{\partial u}{\partial y}) = \lambda F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases}$$

commençons par traiter le cas où on a $c(x,y,t) = 1$ et $k_i \equiv I_d \quad \forall i \in \{1,2\}$ c-à-d on a

$$(P_{2,1,I_d}) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda F(u) + P \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases}$$

Notons $u(x_i, y_j, t^n) = u^n_{i,j}$, l'approximation standard de la dérivée nous donnent

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1}_{j,k} - u^n_{j,k}}{\Delta t}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u^n_{j-1,k} - 2u^n_{j,k} + u^n_{j+1,k}}{\Delta x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u^n_{j,k-1} - 2u^n_{j,k} + u^n_{j,k+1}}{\Delta y^2}$$

On remplaçons dans le problème $(P_{2,1,I_d})$ on trouve :

$$\frac{u^{n+1}_{j,k} - u^n_{j,k}}{\Delta t} - \frac{u^n_{j-1,k} - 2u^n_{j,k} + u^n_{j+1,k}}{\Delta x^2} - \frac{u^n_{j,k-1} - 2u^n_{j,k} + u^n_{j,k+1}}{\Delta y^2} = \lambda F(u^n_{j,k}) + P^n_{j,k}$$

$$\Longrightarrow \qquad u^{n+1}_{j,k} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u^n_{j-1,k} - 2u^n_{j,k} + u^n_{j+1,k}) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2}(u^n_{j,k-1} - 2u^n_{j,k} + u^n_{j,k+1}) + \lambda \Delta t F(u^n_{j,k}) + \Delta t P^n_{j,k} \tag{3.11}$$

revenons a notre problème :

$$\begin{cases} c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_{ii}\frac{\partial u}{\partial x_i}) = \lambda F(u) + P(x,t) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases} \tag{3.12}$$

d'une façon identique qu'avec le problème en une dimension

$$+ \qquad \frac{\partial}{\partial x}\big(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\big) \simeq \Big(k^n_{j+\frac{1}{2},k}(u^n_{j+1,k} - u^n_{j,k}) - k^n_{j-\frac{1}{2},k}(u^n_{j,k} - u^n_{j-1,k})\Big)/\Delta x^2$$

$$+ \qquad \frac{\partial}{\partial y}\big(k(u)\frac{\partial u}{\partial y}\big) \simeq \Big(k^n_{j,k+\frac{1}{2}}(u^n_{j,k+1} - u^n_{j,k}) - k^n_{j,k-\frac{1}{2}}(u^n_{j,k} - u^n_{j,k-1})\Big)/\Delta y^2$$

$$+ \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1}_{j,k} - u^n_{j,k}}{\Delta t}$$

Donc le problème ne change pas lorsqu'on change la dimension spatiale, ce qui change c'est la stabilité du schéma. Pour parler de stabilité de ces schémas, nous allons aborder un principe qui assure la stabilité qui s'appelle principe de maximum.

3.3 Le principe du maximum.

Commençons tout d'abord (avant d'aborder l'équation de la chaleur-diffusion) avec un problème d'un seul variable suivant : avec deux points limites :

$$u''(x) + a(x)u'(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \in]0,1[$$

telle que a est une fonction donnée et u est connue au points $x = 0$ et $x = 1$ pour ce problème, nous allons démontrer que la solution ne peut pas dépasser les points limites.
L'idée de base vient des propriétés élémentaire de fonction en analyse : si on a un maximum local en x_0 d'une fonction $v(x)$, on a $v'(x_0) = 0$ et $v''(x_0) \leq 0$. Voir figure 3.1
Nous allons utiliser cette propriété pour une fonction régulière pour démontrer le principe de

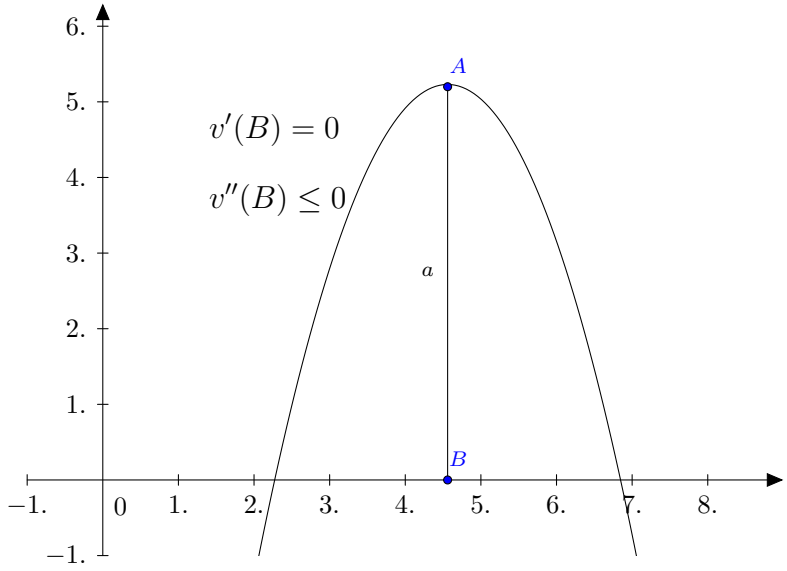


FIGURE 3.1 – courbe admet un maximum local au point B

maximum pour la solution de deux valeurs limites, pour faire ça :
soit $v \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ une fonction qui satisfait l'inégalité suivantes :

$$v''(x) + a(x)v(x) > 0 \qquad x \in]0,1[\tag{3.13}$$

telle que a est une fonction continue sur $[0,1]$, supposons que v a un maximum local en un point x_0 à l'intérieur (ie : $x \in]0,1[$) donc on a

$$v'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad v''(x_0) \leq 0 \tag{3.14}$$

donc d'après (3.14) on trouve que

$$v''(x) + a(x)v(x) \leq 0$$

qui est en contradiction avec (3.13), et par conséquent une fonction v qui satisfait (3.13) ne peut pas avoir un maximum local sur l'intervalle $]0,1[$ donc on peut énoncer le résultat :

lemme 3. *soit $v \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ une fonction qui satisfait (3.13), telle que $a \in C([0,1])$ alors*

$$v(x) \leq V \qquad \forall x \in [0,1]$$

telle que $V = \max(v(0), v(1))$.

C'est une bonne résultat mais c'est pas exactement ce qu'on cherche, notre but c'est remplacer l'inégalité (3.13) par une égalité et on trouvons le même résultat, pour ça soit

$$u''(x) + a(x)u'(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \in]0,1[\tag{3.15}$$

les points limites sont $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$
telle que u_0 et u_1 sont des constantes donnée et $a = a(x)$ est une fonction sur $[0,1]$, on veut

démontrer que si $u \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ est une solution du problème ci-dessous alors u ne peut pas dépasser $\max(u_0, u_1)$ sur $]0,1[$ on va faire ça par construction d'une suite de fonction $v_\epsilon = v_\epsilon(x)$ qui satisfait (3.13) et converge vers u quand ϵ tend vers 0, pour ça soit $c = \sup_{x\in[0,1]} |a(x)|$, on définit

$$v_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon e^{(1+c)x}$$

pour $\epsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} v_\epsilon''(x) + a(x)v_\epsilon'(x) &= u''(x) + \epsilon(1+c)^2 e^{(1+c)x} + a(x)u'(x) + \epsilon(1+c)e^{(1+c)x} \\ &= \epsilon(1+c)(1+c+a(x))e^{(1+c)x} \end{aligned}$$

donc $$v_\epsilon''(x) + a(x)v_\epsilon'(x) > 0$$

$\forall \epsilon > 0$ d'après le lemme 3 on a $\quad v_\epsilon(x) \leq \max(v_\epsilon(0), v_\epsilon(1))$
or on a

$$\begin{aligned} u(x) &= v_\epsilon(x) - \epsilon e^{(1+c)x} \\ &\leq v_\epsilon(x) \\ &\leq \max(v_\epsilon(0), v_\epsilon(1)) \\ &= \max(u_0 + \epsilon, u_1 + \epsilon e^{1+c}) \end{aligned}$$

lorsque $\epsilon \to 0$ on trouve :

$$u(x) \leq \max(u(0), u(1)) \tag{3.16}$$

maintenant posons $w(x) = -u(x)$ donc on a

$$w''(x) + a(x)w'(x) = 0$$

et d'après (3.16) $\quad w(x) \leq \max(w(0), w(1))$ c'est à dire

$$-v(x) \leq \max(-u_0, -u_1) = -\min(u_0, u_1)$$

$\Longrightarrow \quad u(x) \geq \min(u_0, u_1)$
donc on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 2. *supposant que $u \in C^2(]0,1[) \cap C([0,1])$ est une solution de (3.15) donc u satisfait*

$$\min(u_0, u_1) \leq u(x) \leq \max(u_0, u_1) \qquad \forall x \in [0,1].$$

3.3.1 L'équation de la chaleur linéaire :

- ***cas continue.***
  Dans le paragraphe précédant, nous avons vu que le principe de maximum a été dérivé des propriétés élémentaire des fonctions simple, dans ce paragraphe nous allons utiliser exactement la même technique pour obtenir le principe du maximum pour l'équation de la chaleur linéaire. Nous allons démontrer que la valeur maximale de la solution ne peut pas être atteint à l'intérieur du domaine ; la valeur maximale doit être atteint au conditions initiales ou au un des conditions limites.

  Notre but c'est obtenir le principe du maximum pour la solution de l'équation :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\quad , t \in]0,T] \\ u(0,t) = u_l(t), u(1,t) = u_r(t) & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On définit R le rectangle au plan (x,t) donné par

$$R = \{(x,t) : x \in [0,1], t \in [0,T]\}$$

et soit $v = v(x,t)$ une fonction qui satisfait l'inégalité

$$\frac{\partial v}{\partial t} < \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T] \tag{3.17}$$

si v est une fonction régulier et continue sur le compact R avec $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ sont continue sur $]0,1[$ et $0 < t \leq T$ nous allons démontrer que v ne peut pas avoir un maximum à l'intérieur de R, en d'autre terme il vas être sur :

$$B = \{(x,t) : x = 0, 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) : t = 0, 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,t) : x = 1, 0 \leq t \leq T\}$$

nous allons démontrer le principe du maximum par assumer que v admet un maximum à l'intérieur de R (par absurde) et obtenir une condition une contradiction.
Supposons que (x_0, t_0) est un point maximum de v a l'intérieur de R ie $x_0 \in]0,1[$ et $t_0 \in]0,T[$ donc

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,t_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0) \geq \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0)$$

se qui contredit l'hypothèse (3.17) et par conséquent, on peut pas avoir un maximum à l'intérieur pour les fonctions qui vérifie (3.17).
Donc on peut énoncer le résultat
lemme 4. *Soit v une fonction telle que $v \in C(R)$ avec $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \in C(]0,1[\times]0,T])$ qui satisfait (3.17) donc on a*

$$v(x,t) < V \quad \forall x \in [0,1], \quad t \in [0,T]$$

avec $\quad V = \sup_{(x,t)\in B} v(x,t)$.
soit u une solution de (P) avec u continue sur R et $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ sont des fonctions continue pour $x \in]0,1[, \quad t \in]0,T]$ on définit

$$\begin{aligned} v^\epsilon(x,t) &= u(x,t) + \epsilon x^2 \\ \frac{\partial v^\epsilon(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 0 \\ \frac{\partial v^\epsilon(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x^2}(x,t) - 2\epsilon \end{aligned}$$

on en déduit que $\frac{\partial v^\epsilon(x,t)}{\partial t} < \frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x^2}(x,t)$, donc d'après lemme 4 on a $v^\epsilon(x,t) \leq V^\epsilon$ or on a

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v^\epsilon(x,t) - \epsilon x^2 \\ &\leq v^\epsilon(x,t) \\ &\leq V^\epsilon \\ &= \sup_{(x,t)\in B} (f(x) + \epsilon x^2, u_l(t), u_r(t) + \epsilon) \end{aligned}$$

$\epsilon \to 0$ on trouve $\quad u(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in B}(f(x), u_l(t), u_r(t))$ d'où le résultat suivant :
Théorème 3. *soit u une fonction telle que $u \in C(R)$ avec $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(]0,1[\times]0,T])$, une solution de (P), alors u satisfait le principe du maximum ie :*

$$\inf_{(x,t)\in B}(f(x), u_l(t), u_r(t)) \leq u(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in B}(f(x), u_l(t), u_r(t))$$

Stabilité Le principe du maximum pour les E.D.P est un outils très fort pour obtenir l'unicité et la stabilité du solution exacte ou approché (on peut aussi appliqué le principe du maximum pour les schémas il s'appelle le principe du maximum discret, Discret maximum principle) pour voir ça :
soit u la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,1[\quad , t \in]0,T] \\ u(0,t) = u_l(t), u(1,t) = u_r(t) & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = f(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

et $\bar{u}$ une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} & x \in]0,1[\quad , t \in]0,T] \\ \bar{u}(0,t) = \bar{u}_l(t), \bar{u}(1,t) = \bar{u}_r(t) & \forall t \in [0,T] \\ \bar{u}(x,0) = \bar{f}(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

notons e la différence entre ces deux solutions, $e = u - \bar{u}$ donc e est une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} & x \in]0,1[\quad , t \in]0,T] \\ e(0,t) = \Delta u_l(t), e(1,t) = \Delta u_r(t) & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = \Delta f(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

avec $\Delta u_l(t) = u_l(t) - \bar{u}_l(t)$, $\Delta u_r(t) = u_r(t) - \bar{u}_r(t)$ et $\Delta f(x) = f(x) - \bar{f}(x)$. D'après le théorème 3 nous obtenons :

$$\inf_{(x,t)\in B} (\Delta f(x), \Delta u_l(t), \Delta u_r(t)) \leq e(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in B} (\Delta f(x), \Delta u_l(t), \Delta u_r(t))$$

donc le problème (P) a au plus une solution.

- ***Cas Discret*** .
  principe du maximum discret pour les schémas de l'équation de la chaleur .

1. **Schéma Explicite** faisons une récapitulation des notations de bases, soit v_j^m l'approximation de la solution exacte v au point (x_j, t^m). On note $x_j = j\Delta x$ telle que $\Delta = 1/(N+1)$ pour $N \geq 1$ et $t^m = m\Delta t$ avec $\Delta t > 0$.
   Le schéma explicite est

$$v_j^{m+1} = rv_{j-1}^m + (1-2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, \qquad j = 1, \ldots, N$$

   avec $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$
   les conditions limites

$$v_0^m = u_l(t_m), \quad v_{N+1}^m = v_r(t_m), \quad et \quad v_j^0 = f(x_j)$$

   notre but est de démontrer que la solution discrète satisfait le principe du maximum comme dans le cas continue.
   Notons tout d'abord

$$R_\Delta = \{(x_j, t^m), \quad x_j \in [0,1] \quad et \quad t^m \in [0,T]\}$$

   $B_\Delta = \{(x_j, t^m) : x_j = 0, 0 \leq t^m \leq T\} \cup \{(x_j, t^m) : t^m = 0, 0 \leq x_j \leq 1\} \cup \{(x_j, t^m) : x_j = 1, 0 \leq t^m \leq T\}$.
   et nonons aussi

$$V^- = \min_{(x_j,t^k)\in B_\Delta} (f(x_j), u_l(t^k), u_r(t^k))$$

et

$$V^+ = \max_{(x_j,t^k)\in B_\Delta} (f(x_j), u_l(t^k), u_r(t^k))$$

On veut montrer que $v_j^m \leq V^+ \quad$ pour $\quad j = 0, \ldots, N$;
par récurrence,
pour $m = 0$ on a $v_j^0 = f(x_j) \leq V^+$ donc la relation est vrai pour $m = 0$.
Supposons que $v_j^m \leq V^+$, on a

$$v_j^{m+1} = rv_{j-1}^m + (1-2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, \qquad j = 1, \ldots, N$$

donc (si $1 - 2r \geq 0$) on a

$$v_j^{m+1} \leq rV^+ + (1-2r)V^+ + rV^+ = V^+$$

d'où le résultat si $\big($condition de stabilité $r \leq 1/2\big)$
nous retrouvons la même conditions de stabilité que les autres méthodes.Donc le principe du maximum nous garantie la stabilité de la solution.

2. **schéma implicite** : utilisons les même notations que le schéma explicite, nous rappelons que le schéma implicite s'écrit de la façon suivante

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{v_{j+1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2} \quad \text{pour } j = 1, \ldots, N, \quad m \geq 0$$

la condition initiale et la condition aux limites sont

$$v_0^m = u_l(t^m) \quad \text{et} \quad v_{N+1}^m = u_r(t^m), \quad m \geq 0$$

et

$$v_j^0 = f(x_j) \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, N.$$

On veut démontrer que le schéma implicite vérifie le principe du maximum discret c'est à dire en veut montrer

$$v_i^k \leq V^+ = \max_{(x_j,t^k)\in B_\Delta} (f(x_j), u_l(t^k), u_r(t^k))$$

on a d'après le schéma implicite

$$(1+2r)v_j^{m+1} = v_j^m + r(v_{j-1}^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}), \qquad j = 1, \ldots, N, \quad m \geq 0$$

nous rappelons que $r = \Delta t/\Delta x^2$. On considère un temps fixé t^m et supposons que $v_j^m \leq V^+$ pour $j = 0, \ldots, N+1$. Donc

$$(1+2r)v_j^{m+1} \leq V^+ + 2r \max_{i=0,\ldots,N+1} v_i^{m+1}$$

alors

$$(1+2r) \max_{i=0,\ldots,N+1} v_i^{m+1} \leq V^+ + 2r \max_{i=0,\ldots,N+1} v_i^{m+1}$$

et par conséquent

$$\max_{i=0,\ldots,N+1} v_i^{m+1} \leq V^+$$

d'où le résultat.

Théorème 4. *soit v_j^m la solution de l'equation de la chaleur obtenue par le schéma implicite donc*

$$V^- \leq v_j^m \leq V^+$$

pour tout $(x_j, t^m) \in R_\Delta$

3.3.2 L'équation de la chaleur non-linéaire :

On considère le problème suivant :

$$(P_{non})\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\big(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\big)=0 & x\in]0,1[\quad,t\in]0,T]\\ u(0,t)=u_l(t),u(1,t)=u_r(t) & \forall t\in[0,T]\\ u(x,0)=f(x) & \forall x\in[0,1]\end{cases}$$

à partir de considération physique, il est raisonnable de assumer que la fonction $k=k(u)$ est une fonction strictement positive, plus précisément nous supposons qu'il existe deux constante k_0 et K_0 telle que

$$0<k_0\leq k(u)\leq K_0 \qquad \forall u$$

dans ce paragraphe on va démontrer que la solution de (P_{non}) satisfait le principe du maximum comme le cas linéaire.
C'est important de noter que ce problème n'a pas de solution explicite il y'a pas de technique à appliquer et il y'a pas en générale une technique pour résoudre l'équation de la chaleur non linéaire explicitement.
Mais les méthodes numériques fonctionnera encore, on va démontrer que la solution numérique générer par le schéma explicite satisfait le principe du maximum discret.

- ***Cas continue.***
  supposons que $u=u(x,t)$ est une solution de (P_{non}) on définit

$$v^\epsilon(x,t)=u(x,t)-\epsilon t$$

pour $\epsilon>0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=k(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+k'(u)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\\ \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}&=k(v^\epsilon+\epsilon t)\frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x^2}+k'(v^\epsilon+\epsilon t)\Big(\frac{\partial v^\epsilon}{\partial x}\Big)^2-\epsilon\\ \Longrightarrow\quad \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}&<k(v^\epsilon+\epsilon t)\frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x^2}+k'(v^\epsilon+\epsilon t)\Big(\frac{\partial v^\epsilon}{\partial x}\Big)^2\quad(\epsilon>0).\end{aligned}$$

supposons que v^ϵ a un maximum local à l'intérieur de R $(\overset{o}{R})$ donc

$$0=\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(x_0,t_0)=\frac{\partial v^\epsilon}{\partial x}(x_0,t_0)\geq\frac{\partial^2 v^\epsilon}{\partial x^2}(x_0,t_0).$$

mais on a $k(v^\epsilon+\epsilon t)\geq k_0>0$ donc c'est absurde.
Et par conséquent il y'a pas de maximum local en $\overset{o}{R}$ et on a

$$\begin{aligned}v^\epsilon(x,t)&\leq\sup_{(x,t)\in B}v^\epsilon(x,t)\\ \Longrightarrow\qquad u(x,t)-\epsilon t&\leq\sup_{(x,t)\in B}\big(f(x),u_l(t)-\epsilon t,u_r(t)-\epsilon t\big)\end{aligned}$$

$\epsilon\to 0$ on trouve

$$u(x,t)\leq\sup_{(x,t)\in B}\big(f(x),u_l(t),u_r(t)\big)\qquad\forall(x,t)\in R \tag{3.18}$$

donc en peut énoncer le résultat suivant

Théorème 5. *supposons que* $u \in C(R)$, *avec* $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(]0,1[\times]0,T])$, *est une solution de* (P_{non}). *Alors* u *vérifie le principe du maximum*

$$\inf_{(x,t)\in B}(f(x), u_l(t), u_r(t)) \leq u(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in B}(f(x), u_l(t), u_r(t))$$

pour tout $(x,t) \in R$

- ***Cas discret*** On considère le schéma explicite obtenue par la méthode de différence finie

$$v_j^{m+1} = rk_{j-\frac{1}{2}}^m v_{j-1}^m + \big(1 - r(k_{j-\frac{1}{2}}^m + k_{j+\frac{1}{2}}^m)\big)v_j^m + rk_{j+\frac{1}{2}}^m v_{j+1}^m \tag{3.19}$$

pour $j = 1, \ldots, N, \quad m \geq 0$. Comme précédemment on note par $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ et

$$k_{j+\frac{1}{2}}^m = \frac{1}{2}\big(k(v_j^m) + k(v_{j+1}^m)\big)$$

nous rappelons la définition de V^+ et V^-,

$$V^- = \min_{(x_j,t^k)\in B_\Delta}(f(x_j), u_l(t^k), u_r(t^k))$$

et

$$V^+ = \max_{(x_j,t^k)\in B_\Delta}(f(x_j), u_l(t^k), u_r(t^k))$$

Théorème 6. *supposons que le pas de discrétisation* Δt *et* Δx *satisfait la condition de stabilité* $K_0\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$, *et soit* v_j^m *l'approximation numérique de la solution de* (P_{non}) *trouver par le schéma numérique. alors*

$$V^- \leq v_j^m \leq V^+$$

pour tout $(x_j, t^m) \in R_\Delta$.
Preuve : supposons que $v_j^m \leq V^+$ pour $j = 1, \ldots, N$.on a

$$v_j^{m+1} \leq rk_{j-\frac{1}{2}}^m V^+ + \big(1 - r(k_{j-\frac{1}{2}}^m + k_{j+\frac{1}{2}}^m)\big)V^+ + rk_{j+\frac{1}{2}}^m V^+$$

on a obtenue ça de fait que $\big(1 - r(k_{j-\frac{1}{2}}^m + k_{j+\frac{1}{2}}^m)\big) \geq 0$
donc

$$v_j^{m+1} \leq V^+$$

d'où le résultat.

3.3.3 Équation de la chaleur-diffusion

Maintenant on va aborder un problème non linéaire de deuxième espèce.
Soit le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u) & \text{où} \quad F(u) = au^2 + bu + c \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

Théorème 7. *hypothèse : on suppose que* $a \leq 0$, $c \geq 0$ *et* $b \leq -(a+c)$.
on suppose que $0 \leq f(x) \leq 1$ *avec la condition de stabilité* $r \leq \frac{1}{2-\Delta x^2(2a+b)}$ *alors*

$$0 \leq u_j^m \leq 1$$

$[0,1]$ *s'appelle la région d'invariance.*

Preuve par récurrence :
pour $m = 0$
on a $\qquad 0 \leq u_j^0 = f(x_j) \leq 1 \qquad$ vrai pour $\quad m = 0$
supposons que

$$0 \leq u_j^m \leq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, N$$

et montrons pour u_j^{m+1}
on a d'après l'approximation qu'on a fait par le schéma explicite donné par la méthode de différence finie :

$$u_j^{m+1} = ru_{j-1}^m + (1-2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta t\big(a(u_{j-1}^m)^2 + bu_{j-1}^m + c\big)$$

soit

$$\phi(u) = 2r + (1-2r)u + \Delta t(au^2 + bu + c)$$

et

$$\psi(u) = (1-2r)u + \Delta t(au^2 + bu + c)$$

d'après le schéma

$$u_j^{m+1} \leq 2r + (1-2r)u_j^m + \Delta t\big(a(u_{j-1}^m)^2 + bu_{j-1}^m + c\big) \quad \text{car} \quad u_j^m \leq 1$$

et

$$u_j^{m+1} \geq (1-2r)u_j^m + \Delta t\big(a(u_{j-1}^m)^2 + bu_{j-1}^m + c\big) \quad \text{car} \quad u_j^m \leq 1$$

Or on a

$$\phi'(u) = \psi'(u) = 1 - 2r + \Delta t(2au + b)$$

puisque $a \leq 0$ on a

$$2au + b \geq 2a + b$$

c'est à dire

$$\phi'(u) = \psi'(u) = 1 - 2r + \Delta t(2au + b) \geq (1-2r) + (2a+b)\Delta t$$

mais on a

$$r \leq \frac{1}{2 - \Delta x^2(2a+b)}$$

$$\begin{aligned} 2r - (2a+b)r\Delta x^2 &\leq 1 \\ 2r - (2a+b)\Delta t &\leq 1 \\ 1 - 2r + (2a+b)\Delta t &\geq 0 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\phi'(u) = \psi'(u) \geq 0$$

d'où ϕ et ψ sont croissante, donc

$$u_j^{m+1} \leq \phi(u_j^m) \leq \phi(1)$$

et

$$u_j^{m+1} \geq \psi(u_j^m) \geq \psi(0)$$

on a

$$\begin{aligned} \phi(1) &= \cancel{2r} + 1 - \cancel{2r} + \Delta t(a+b+c) \\ &= 1 + \Delta t(a+b+c) \qquad \text{or} \quad a+b+c \leq 0 \\ \phi(1) &\leq 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

et on a

$$\psi(0) = c\Delta t \qquad or \quad c \geq 0$$

d'où $0 \leq u_j^{m+1} \leq 1$ ce qui conclue la démonstration.

Il faut noter que le principe de maximum et la région d'invariance sont pas tout a fait les mêmes. Généralement, le principe du maximum implique l'existence d'une région d'invariance, mais tout les deux garantie la stabilité du schéma.

Deuxième partie

Étude numérique

Chapitre 4

Résolution de l'équation de la chaleur

4.1 L'équation de la chaleur linéaire

soit à résoudre l'équation de la chaleur linéaire $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixe. Considérons le problème bien posé suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \qquad \text{pour} \quad x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

On prend $k = 0.13$, 0.11, $\rho = 7.8g/cm^3$ et $\Delta x = 0.25$. Δt sera donné par les conditions de stabilité qu'on avait vu définie par l'inéquation : $r = \frac{k}{c\rho}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$. La solution analytique est donné par :

$$u_{exacte}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\exp(-\alpha n \pi^2 t)$$

4.1.1 programmation de la solution analytique

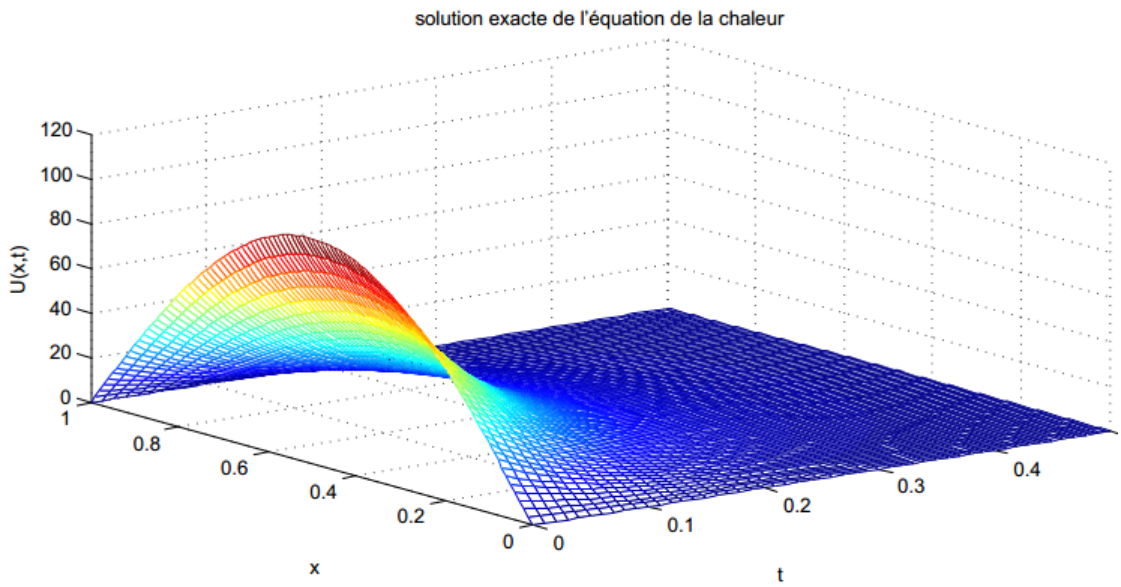
Puisque nous sommes en analyse numérique et non en analyse fondamentale nous devons savoir que nous ne travaillons qu'avec des points d'un maillage et non dans tout le domaine comme on aurait cru le faire. Pour évaluer la valeur numérique de u_{exacte} pour tout point appartenant dans la grille, nous devons faire une boucle qui, pour chaque point (x_j, t_j), calcule $u_{exacte}(x_j, t_j)$.
Posons $\infty = 100$ acceptable en analyse numérique, nous avons donc le programme suivant qui calcule la solution analytique.

```
***la solution analytique de l'equation de la chaleur***
clc ; clear ;
Tmax=0.5 ;
a=0 ;b=1 ;
dt=0.01 ;
dx=0.01 ;
nx=(b-a)/dx ;
nt=Tmax/dt ;
x=0 :dx :b ; t=0 :dt :Tmax ;
********** la solution analytique ********************
v=zeros(nx+1,nt+1) ;
n=0 ;
while(n<101)
```

```
for i=1 :nx+1
for j=1 :nt+1
u(i,j) = v(i,j) + sin(n*pi*x(i))*exp(-n*(pi)^2*t(j));
v(i,j)=u(i,j);
end
end
n=n+1;
end
mesh(t,x,v)
```

* *

Voici la courbe que nous avons obtenue pour



4.1.2 programmation de la solution numérique

D'après les approximations vues dans la première partie nous pouvons approximer le problème (4.1) par

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = ru_{j+1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j-1}^n \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, M \\ u_0^n = 0 \\ u_{M+1}^n = 0 \\ u_j^0 = \sin(\pi x_j) \end{cases} \tag{4.2}$$

ou on peut l'écrire en notation matricielle comme :

$$\mathbf{u}^{n+1} = (\mathbb{I}_d - rA)\mathbf{u}^n, \qquad n = 0, \ldots, N$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{u}^n = (u_1^n, \ldots, u_M^n)^t$$

Nous avons pris $r = \frac{1}{4}$ pour le cas où $r \leq \frac{1}{2}$ et $r = 0.625$ pour le cas où $r > \frac{1}{2}$, on a le programme suivant qui nous calcule les valeurs du vecteur u, remplacé par le vecteur h dans le programme

pour pouvoir lier le programme avec le premier calculant les éléments de la matrice v pour la solution exacte, à chaque instant j et qui les stocke dans une matrice w. Pour avoir la courbe du deuxième cas, il suffit de remplacer r par 0.625

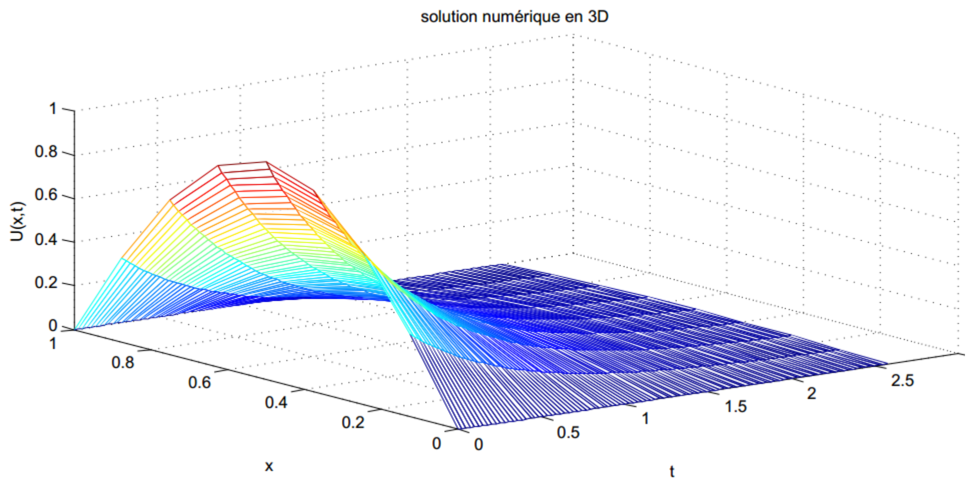
****

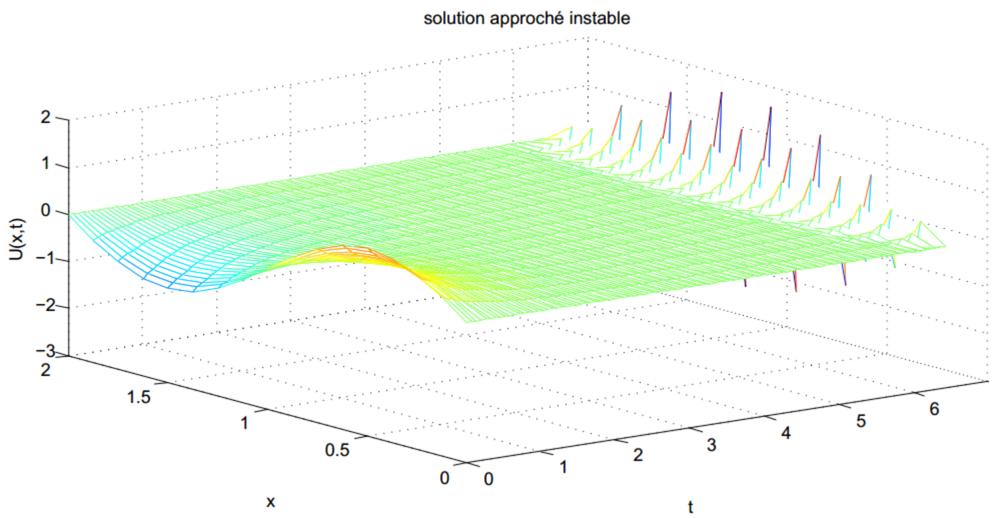
```
clc ; clear ;
k=0.13 ;c=0.11 ;
p=7.8 ;dx=0.125 ;
r=1/4 ; dt=dx*dx*c*p*r/k ;
Tmax=100*dt ;
a=0 ;b=1 ;
cla=0 ;clb=0 ;
nx=(b-a)/dx ;
nt=Tmax/dt ;
x=0 :dx :b ; t=0 :dt :Tmax ;
for i=1 :nx-1
N(i)=0 ;
end
N(1)=r*cla ;
N(nx-1)=r*clb ;
for i=1 :nx-2
M(i,i)=1-2*r ;
M(i,i+1)=r ;
M(i+1,i)=r ;
end
M(nx-1,nx-1)=1-2*r ;
for i=1 :nx+1
Ci(i)=sin(pi*x(i)) ;
end
for i=1 :nx-1
h(i)=Ci(i+1) ;
end
j=1 ;
h=h' ;
while(j < nt + 2)
for i=1 :nx-1
w(i,j)=h(i) ;
end
h=M*h+N' ;
j=j+1 ;
end
for i=nx :-1 :2
for j=nt+1 :-1 :1
w(i,j)=w(i-1,j) ;
end
end
for j=1 :nt+1
w(1,j)=0 ;
w(nx+1,j)=0 ;
end
```

mesh(t,x,w) ;

****

voici les courbes obtenues après compilation pour les deux cas :





Constatations :

nous avons remarqué, d'après les deux graphes correspondantes à $r \leq \frac{1}{2}$ et $r > \frac{1}{2}$, que la méthode présente deux régions de stabilité. Si $r \leq \frac{1}{2}$ la méthode est stable et converge vers la solution analytique. Nous avons une courbe semblable à celle de la solution analytiquement établie.
Mais si $r > \frac{1}{2}$, la méthode présente des failles et la courbe ne converge même pas. L'allure obtenue dans ce cas est totalement en désaccord avec celle de la solution exacte. Pour avoir un bon résultat dans cette méthode, il faut donc tenir compte de la valeur de r car elle influencera le résultat.

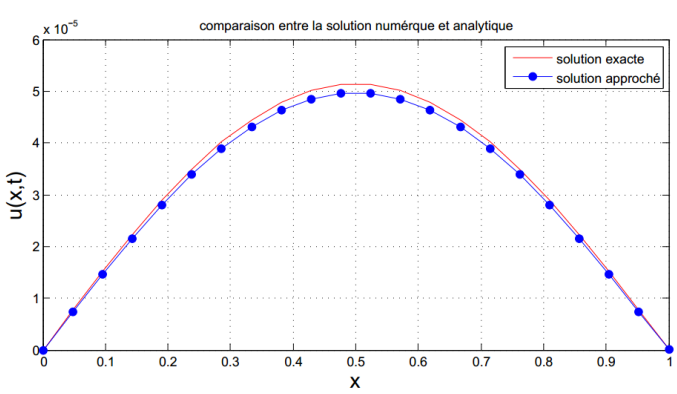
4.1.3 Comparaison des deux solution

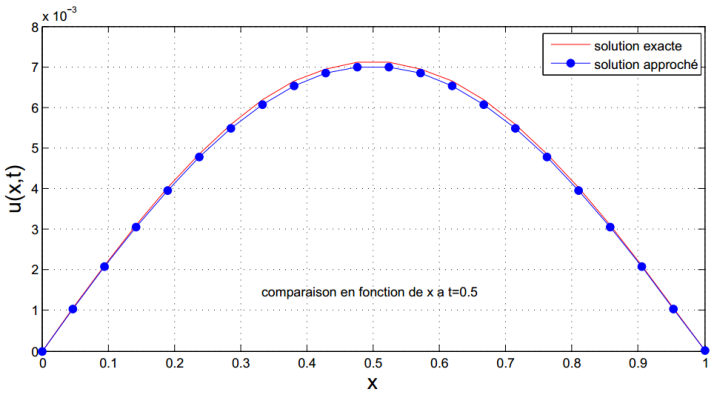
En fonction de r, nous voulons comparer graphiquement la méthode numérique explicite (directe) avec la solution analytique pour voir comment la solution approchée se rapproche à la solution exacte.

Nous combinons le programme de la solution analytique avec celui de la solution numérique directe pour pouvoir faire la comparaison, puis on ajoute à la fin du nouveau programme.
Voici le programme :

```
*********programation de la solution analytique de l'equation de la chaleur et la solution numerique avec comparaison (une courbe de niveau)(2D) *****
xmin=0 ;
xmax=1 ;
N=21 ;
dt=0.00105 ;
t=0 ;
tmax=1 ;
dx=(xmax-xmin)/N ;
x=xmin :dx :xmax ;
r = dt/(dx)^2 ;
u0=sin(pi.*x) ;
u=u0 ;
unpun=u0 ;
netaps=tmax/dt ;
for n=0 :netaps
u(1)=0 ;
u(N+1)=0 ;
for i=2 :N
unpun(i)=r*u(i+1)+(1-2*r)*u(i)+r*u(i-1) ;
end
t=t+dt ;
u=unpun ;
*solution exacte*
exacte = sin(pi. * x) * exp(-(pi)^2 * t);
plot(x,exacte,'r-') ;
hold on
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b') ;
hold off
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
shg
pause(0.01*dt) ;
end
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

Voici donc les courbes comparatives des solutions pour les deux méthodes à $t_j = 1$ et $t_j = 0.5$





4.2 Equation de la chaleur-diffusion :

Soit le problème suivant

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u) & \text{où} \quad F(u) = au^2 + bu + c \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

le schéma équivalent à $(*)$ est :

$$(*)_{equiv}\begin{cases} u_j^{n+1} = ru_{j+1}^n + (1-2r)u_j^n + ru_{j-1}^n + \Delta t\big(a(u_j^n)^2 + bu_j^n + c\big) & \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 & \forall n = 0,\dots,M \\ u_j^0 = u_0(x_j) & \forall j = 0,\dots,N \end{cases}$$

pour écrive un programme il faut fixer a, b et c

programmation de l'équation de la chaleur-diffusion :

On fixe $a = -1$, $b = 1$, et $c = 0$ donc F devient :

$$F(u) = u(u-1)$$

Donc d'après le théorème 7 la condition de stabilité doit être comme :

$$r \leq \frac{1}{2 + \Delta x^2}$$

on prend

$$u_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$$

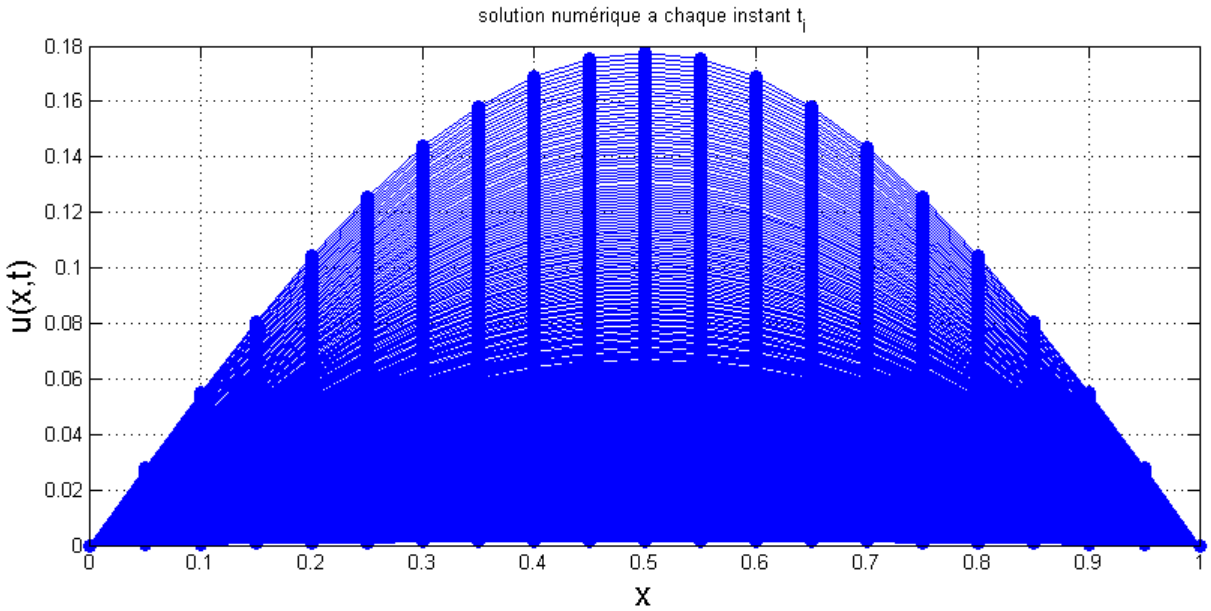
il est claire que

$$0 \leq u_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) \leq 1$$

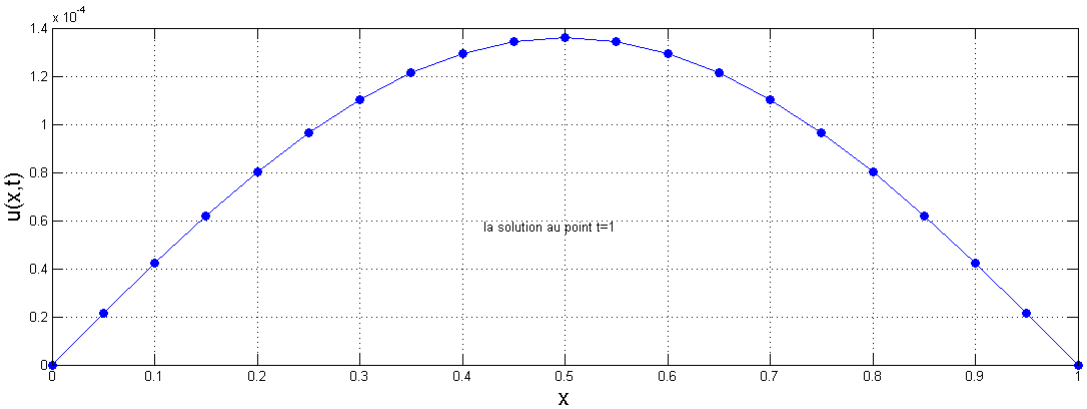
donc le schéma devrait être stable. le programme s'écrit comme

```
********** resolution de l'equation de difusion chaleur pour chaque instant t a Tmax *******
xmin=0 ;
xmax=1 ;
a=-1 ;
b=1 ;
c=0 ;
N=20 ;
dt=0.001 ;
t=0 ;
tmax=1 ;
dx=((xmax)-(xmin))/N ;
x=xmin :dx :xmax
r = dt/(dx)^2 ;
u0 = exp(-(x).^(2)/2);
u0(1)=0 ;
u0(N+1)=0
u=u0 ;
unpun=u0 ;
```

```
dp=2*tmax/N ;
p=0 :dp :tmax ;
netaps=tmax/dt
for n=0 :netaps
u(1)=0 ;
u(N+1)=0 ;
for i=2 :N
```
$unpun(i) = r * u(i+1) + (1 - 2 * r) * u(i) + r * u(i-1) + dt * (a * (u(i))^2 + b * u(i) + c)$; end
```
t=t+dt ;
u=unpun ;
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b') ;hold on
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
shg
hold off
pause(0.01*dt) ;
end
```
la courbe suivant présente la solution a chaque temps de t_{min} à t_{max}



voici la courbe au point $t_j = 1$



4.3 Équation Modélisant l'état Thermique D'un supraconducteur :

le problème s'écrit dans une dimension de la façon suivante :

$$(P1) : \begin{cases} c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) = \lambda F(u) \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u/_{\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0 \\ u/_{\Omega\times\{0\}} = u_0 \end{cases}$$

Donc le schéma numérique équivalent à $(P1)$ trouvé dans le chapitre 3 est :

$$\begin{cases} c_j^n \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} - \frac{k^n_{j-\frac{1}{2}}(u^n_{j+1}-u^n_j)-k^n_{j-\frac{1}{2}}(u^n_j-u^n_{j-1})}{\Delta x^2} = \lambda F(u_j^n) + P_j^n \qquad \forall j \in \Omega_j, \forall n \in \{1,\dots,M\} \\ u_0^n = u_{N+1}^n = 0 \qquad \forall n = 0,\dots,M \\ u_j^0 = u_0(x_j) \qquad \forall j = 0,\dots,N \end{cases}$$

programmation de l'équation de la supraconductivité :

On fixe $a = -1$, $b = 1$, et $c = 0$ donc F devient :

$$F(u) = u(u-1)$$

Donc d'après le théorème 6 la condition de stabilité doit être comme :

$$K_0 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

on prend

$$u_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$$

il est claire que

$$0 \leq u_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2}) \leq 1$$

On définit k comme :

$$k(u) = \begin{cases} \alpha\sqrt{u} \qquad \text{sur} \qquad 0 \leq u \leq u_0 \\ \beta = \alpha\sqrt{u_0} \qquad u_0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

le programme s'écrit comme

```
*** résolution numérique de l'équation modélisant l'état thermique d'un supraconducteur ***
xmin=0 ;
xmax=1 ;
a=-1 ;
b=1 ;
c=0 ;
N=20 ;
dt=0.001 ;
t=0 ;
tmax=1 ;
dx=((xmax)-(xmin))/N ;
x=xmin :dx :xmax
r = dt/(dx)^2 ;
u0 = exp(-(x).^(2)/2);
```

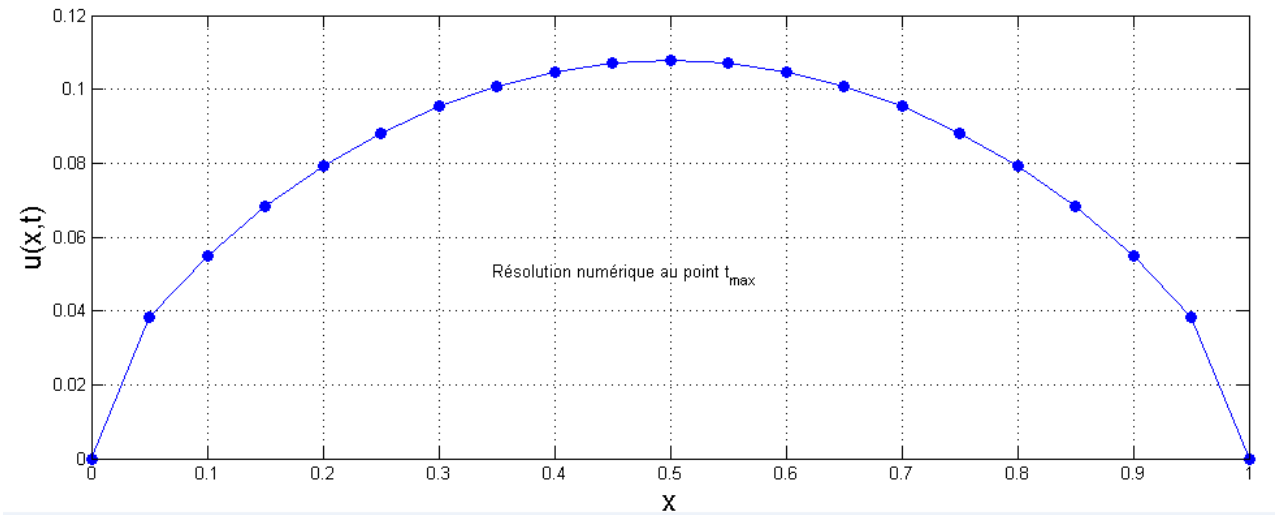
```
u0(1)=0 ;
u0(N+1)=0
u=u0 ;
unpun=u0 ;
dp=2*tmax/N ;
p=0 :dp :tmax ;
netaps=tmax/dt
for n=0 :netaps
u(1)=0 ;
u(N+1)=0 ;
for i=2 :N
```

$unpun(i) = u(i) + r * ((sqrt(u(i+1))/2 + sqrt(u(i))/2) * (u(i+1) - u(i))) - r * ((sqrt(u(i))/2 + sqrt(u(i-1))/2) * (u(i) - u(i-1))) + dt * (a * (u(i))^2 + b * u(i) + c)$;

```
end
t=t+dt ;
u=unpun ;
plot(x,u,'bo-','markerfacecolor','b') ;hold on
xlabel('x','fontsize',16)
ylabel('u(x,t)','fontsize',16)
shg
hold off

    pause(0.01*dt) ;
end
```

voici la courbe au point $t_{max} = 1$



Conclusion

Le but de ce projet a consisté principalement à introduire à l'étude et à la résolution des équations aux dérivées partielles paraboliques qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion thermique ce sera l'équation de chaleur-diffusion comme exemple type de cette classe d'équations. Nous avons vu qu'on peut garantir la stabilité de la solution approché à condition qu'il faut faire attention aux conditions de pas de discrétisations. En ce qui concerne le problème qui modélisent l'état thermique d'un supraconducteur, on a essayer de trouver un domaine, le plus grand qu'il soit, qui assure la stabilité du schéma équivalent dans ce domaine.Signalons qu'il y a des connections fortes entre ce projet et d'autre cours de mathématique de 1re année de master dans lesquels le lecteur trouvera les pré-requis nécessaire pour appréhender le contenu de ce mémoire.

Bibliographie

[1] A. Tveito et R. Winther, Partial Differential Equations - A Computational Approach,springer-verlag, 1998, ISBN 0-387-98327-9.

[2] Elkhomsi.M, Global Existence and Uniqueness of a Field Modelling the Thermal State of Three-dimensional Superconductor,publication dans le journal M.J.Condensed Matter, Volume 10, Number 1,2008.

[3] J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer-Verlag, Biomathematics Texts, second ed. 1993.

[4] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, 2nd ed, Springer-Verlag 1994.

[5] J.-F. Schied, Méthodes numérique pour la dynamique des fluides, 2011.

[6] Mark H. Holmes, Introduction to Numerical Methods in Differential Equations, springer,2006 ,0-387-30891-1.

[7] Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, Third Edition, AddisonWesley Publishing Company, ISBN 0-321-13304-8.

[8] Benoît Mandelbrot. Une approche fractale des marchés, Benoît Mandelbrot et Richard Hudson, éditions Odile Jacob, 2005.

[9] Anouk Barberousse ; La mécanique statistique - De Clausius à Gibbs, Collection Histoire des Sciences, Belin (2002), ISBN 2-7011-3073-5.

[10] Ludwig Boltzmann ; Leçons sur la théorie des gaz, Gauthier-Villars (1902-1905). Réédition Jacques Gabay (1987), ISBN 2-87647-004-7

[11] Ballard, P. and Millard, Modelisation et calcul des structures elancees, 2006.

[12] Jacques Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, Princeton University Bulletin, 1902.

[13] Brad Osgood, The Fourier Transform and its Applications,Stanford University Bulletin,2007.

[14] J.W.Thomas, numerical partial Differential Equations : Finite Difference Methods, Springer-velag, 2000, ISBN 0-387-97999-9.

[15] R.M. Guralnick, Similarity of matrices over local rings, Linear Algebra Appl. 41,1981, 161-174.