Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
FACULTÉ DE SCIENCES ET TECHNIQUES,FÈS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Pour obtenir :

Le Diplôme De La Licence(LST)
De l'Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Spécialité Mathématiques&Appliquations
Présenté et soutenu par :
Aziza Salem

Anneau quotient et Localisation

Dirigé Par : Pr.Najib MAHDOU

Soutenue le : 15 Juin 2015 à 10h

Devant le Jury :

Pr.Najib MAHDOU : Encadrant
Pr.Aziza RAHMOUNI HASSANI
Pr.Anisse OUADGHIRI

Dédicaces

A tous ceux qui se sont investis pour ma formation plus particulièrement :

En signe de reconnaissance de soutien inconditionnel que vous m'avez apporté et pour l'investissement que vous avez consacré à mes études.

A tous ceux qui ont m'encouragé tout le long de mes études.

A tous les membres de ma familles.
Je vous dédie ce travail en témoignage des liens qui nous ont unis et les efforts que vous avez consentis à mon égard.

A tous mes professeurs qui ont travaillé jour et nuit pour m'assurer une solide formation.

A tous mes collègues.

Pour vous je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les personnes qui ont m'encouragé et m'aidé tout le long de ce travail.

Tout d'abord je remercie mon encadrant, Professeur NAJIB MAHDOU, qui, grâce à ses orientation, ses encouragements et sa disponibilité j'ai pu réaliser ce travail.

J'adresse mes respectueux remerciements à tous les membres de jury.

Je remercie toute ma famille et mes amies pour leurs soutien moral.

Je remercie tous mes collègues de la licence Mathématiques et Applications, pour leurs soutien amical durant toute cette année d'étude.

Je remercie beaucoup tous les membres du groupe encadré par Pr.NAJIB MAHDOU pour leurs disponibilités à fin de répondre à mes questions concernant l'utilisation du logiciel LATEX.

Table des matières

Introduction

Dans ces deux chapitres, nous introduisons deux constructions fondamentales d'anneaux :

Le passage au quotient :

Tout d'abord : étant donnés un anneau et une relation d'équivalence convenable sur cet anneau, l'objectif est de munir l'ensemble des classes d'équivalences d'une structure d'anneau. cela revient en fait à rendre nuls les éléments d'un idéal de l'anneau sans modifier les autres règles de calcul.

La localisation :

Il s'agit cette fois de rendre inversible une famille d'éléments de l'anneau.

Chapitre 1

Anneau quotient

1.1 Construction

Soient A un anneau et I un idéal de A.
On définit la relation $\mathfrak{R}$ par :

$$x\mathfrak{R}y \iff x - y \in \mathrm{I}$$

— Il est facile de vérifie que $\mathfrak{R}$ c'est une relation d'équivalence.

— On va munir A/I d'une structure d'anneau.
On définit sur A/I l'addition et la multiplication de la façon suivante :

(a+I)+(b+I) = a+b+I.
(a+I)(b+I) = ab+I.(1.1)
Avec $a, b \in \mathrm{A}$.
On vérifie facilement que (1.1) a un sens :
Si a' (resp, b') est un autre représentant de la classe $a+\mathrm{I}$ (resp, $b+\mathrm{I}$), alors la classe de $a'b'$ est celle de ab, et la classe de $a'+b'$ est celle de $a+b$, c'est bien le cas, car :
si $a' = a+h$ et $b' = b+h'$, avec $h, h' \in \mathrm{I}$, alors

$$\begin{aligned} a'b' &= (a+h)(b+h') \\ &= ab + ah' + hb + hh'. \end{aligned}$$

Chacun des trois produits $ah', hb, hh' \in \mathrm{I}$.
De même pour l'addition :

$$\begin{aligned} a'+b' &= (a+h)+(b+h') \\ &= a+b+h+h'. \end{aligned}$$

— $1+\mathrm{I}$ est l'élément unité pour la multiplication.

On a donc démontré le théorème suivent :

Théorème 1.1.1. *–Soient* A *un anneau et* I *un idéal de* A. *L'ensemble quotient* $\mathrm{A}/\mathfrak{R}$ *possède une unique structure d'anneau telle que la surjection canonique* $cl : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{R}$ *est un morphisme d'anneaux.*
Ce morphisme est surjectif de noyau I. *L'*anneau quotient $\mathrm{A}/\mathfrak{R}$ *est noté* A/I. *Le morphisme* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}$ *est aussi appelé* surjection canonique.

Remarque 1.1.2. *–Cette façon de "négliger" (rendre nul) les éléments de* I *permet dans bien des cas de travailler avec un anneau* A/I *plus simple que l'anneau* A*, et d'en déduire les résultats dans* A *lui même.*

L'importance de la structure d'anneau quotient vient notamment du *théorème de factorisation* que nous démontrons maintenant :

Théorème 1.1.3. *–Soient* A *et* B *deux anneaux et* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme d'anneaux.*
Si I *est un idéal de* A *contenu dans* $\ker f$*, il existe un unique homomorphisme d'anneaux* $\bar{f} : \mathrm{A}/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ *tel que* $f = \bar{f} \circ cl$. *D'une façon visuelle on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "cl"'] & \mathrm{B} \\ \mathrm{A}/\mathrm{I} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. –Nécessairement, $\bar{f}$ doit être tel que $\bar{f}(cl(a)) = f(a)$ pour tout $a \in \mathrm{A}$. Comme tout élément de A/I est de la forme $cl(a)$ pour un certain $a \in \mathrm{A}$; cela montre qu'il existe au plus un homomorphisme d'anneaux $\bar{f} : \mathrm{A}/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ tel que $f = \bar{f} \circ cl$.
Montrons maintenant l'existence de $\bar{f}$:
Soit x un élément de A/I. On sait qu'il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $x = cl(a)$. Si a' un autre représentant de x tel que $x = cl(a')$ alors $a' - a \in \mathrm{I}$, puisque $\mathrm{I} \subset \ker f$, $f(a' - a) = 0$ et par conséquent, $f(a) = f(a')$. On peut ainsi poser $\bar{f}(x) = f(a)$.
Le résultat est indépendant de représentant choisi.
Il reste à montrer que $\bar{f}$ est un homomorphisme d'anneaux :
Comme $cl(0_{\mathrm{A}}) = 0_{\mathrm{A}/\mathrm{I}}$ et $cl(1_{\mathrm{A}}) = 1_{\mathrm{A}/\mathrm{I}}$, on a bien $\bar{f}(0_{\mathrm{A}/\mathrm{I}}) = 0_{\mathrm{B}}$ et $\bar{f}(1_{\mathrm{A}/\mathrm{I}}) = 1_{\mathrm{B}}$. De plus, si $x = cl(a)$ et $y = cl(b)$ sont deux éléments de A/I, on a $x + y = cl(a + b)$ et

$$\begin{aligned} \bar{f}(x+y) &= \bar{f}(cl(a+b)) \\ &= f(a+b) \\ &= f(a) + f(b) \\ &= \bar{f}(cl(a)) + \bar{f}(cl(b)) \\ &= \bar{f}(x) + \bar{f}(y). \end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}\bar{f}(xy) &= f(ab)\\ &= f(a)f(b)\\ &= \bar{f}(x)\bar{f}(y).\end{aligned}$$

Il en résulte que $\bar{f}$ est un homomorphisme d'anneaux.

□

–Soient A un anneau et I un idéal de A.On s'intéresse maintenant aux idéaux de l'anneau A/I.
Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A/I. Alors on sait que $cl^{-1}(\mathfrak{J})$ est un idéal de A. Par construction, il contient I puisque pour tout $a \in \mathrm{I}$, $cl(a) = 0$ est un élément de $\mathfrak{J}$.
La propriété importante est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.1.4. *–Soient* A *un anneau et* I *un idéal de* A. *L'application* cl^{-1} *:*

$$\begin{gathered}\textit{idéaux de } \mathrm{A/I} \to \textit{idéaux de } \mathrm{A} \textit{ contenant } \mathrm{I}\\ \mathfrak{J} \mapsto cl^{-1}(\mathfrak{J})\end{gathered}$$

est une bijection.

Autrement dit, pour tout idéal J *de* A *qui contient* I*, il existe un unique idéal* $\mathfrak{J}$ *de* A/I *tel que* $\mathrm{J} = cl^{-1}(\mathfrak{J})$*. De plus, on a* $\mathfrak{J} = cl(\mathrm{J})$ *(image de l'idéal* J *par la surjection canonique, laquelle l'image se trouve être encore un idéal dans ce cas).*

Démonstration. –Commencer par construire la bijection réciproque.
Si J est un idéal de A, montrons d'abord que $cl(\mathrm{J})$ est un idéal de A/I. On a $0 = cl(0) \in cl(\mathrm{J})$. D'autre part, si x et y appartiennent à $cl(\mathrm{J})$, soient a et b deux éléments de J tels que $x = cl(a)$ et $y = cl(b)$. Alors :

$$\begin{aligned}x + y &= cl(a) + cl(b)\\ &= cl(a+b).\end{aligned}$$

Comme J est idéal de A alors $a + b \in \mathrm{J}$ et $x + y \in cl(\mathrm{J})$.
Enfin, soit x un élément de $cl(\mathrm{J})$ et y un élément de A/I. Choisissons encore $a \in \mathrm{J}$ et $b \in \mathrm{A}$ tels que $x = cl(a)$ et $y = cl(b)$. On a :

$$\begin{aligned}xy &= cl(a)cl(b)\\ &= cl(ab).\end{aligned}$$

Puisque $ab \in \mathrm{J}$ et $cl(ab) \in cl(\mathrm{J})$ car J est un idéal de A.
Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de A/I, on a :

$$\boxed{\mathrm{cl}(\mathrm{cl}^{-1}(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}}$$

Montrons les deux inclusions.
Soit x un élément de $cl(cl^{-1}(\mathrm{J}))$ alors il est de la forme $x = cl(a)$ pour $a \in cl^{-1}(\mathrm{J})$.

On a donc $x \in \mathfrak{J}$.
Réciproquement, si $x \in \mathfrak{J}$, soit $a \in \mathrm{A}$ tel que $x = cl(a)$, donc $a \in cl^{-1}(\mathfrak{J})$ et $x \in cl(cl^{-1}(\mathrm{J}))$.

Enfin, si J est un idéal de A, on a :

$$\boxed{\mathrm{cl}^{-1}(cl(\mathrm{J})) = \mathrm{I} + \mathrm{J}}$$

Là encore il faut montrer les deux inclusions.
Si $x \in \mathrm{I} + \mathrm{J}$, alors on peut écrire x sous la forme $x = a + b$ avec $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{J}$. Il en résulte :

$$\begin{aligned} cl(x) &= cl(a) + cl(b) \\ &= cl(b) \in cl(\mathrm{J}). \end{aligned}$$

Donc $x \in cl^{-1}(cl(\mathrm{J}))$. Dans l'autre sens, soit $x \in cl^{-1}(cl(\mathrm{J}))$. Par définition $cl(x) \in cl(\mathrm{J})$ donc il existe $a \in \mathrm{J}$ tel que $cl(x) = cl(a)$. On a alors $cl(x - a) = 0$ donc $x - a \in \mathrm{I}$. Finalement $x = x - a + a \in \mathrm{I} + \mathrm{J}$.

Si de plus J contient I alors $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \mathrm{J}$ et les deux formules établies montrent que l'application cl^{-1} définit une bijection de l'ensemble des idéaux de A/I vers l'ensemble des idéaux de A contenant I, dont la bijection réciproque est donnée par cl.

□

Corollaire 1.1.5. –*Soient* A *un anneau et* I *un idéal de* A. *Alors les idéaux de* A/I *sont* J/I *où* J *est un idéal de* A *contenant* I.

Démonstration. – Soit :

$$cl : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I} \text{ tel que } cl(a) = a + \mathrm{I}$$

$\ker cl = \{a \in \mathrm{A} / a + \mathrm{I} = 0_{\mathrm{A}} + \mathrm{I}\} = \mathrm{I}$.
Un idéal de A/I est $cl(\mathrm{J})$ avec J un idéal de A contient I.

$$cl(\mathrm{J}) = \{cl(i),\ \ i \in \mathrm{J}\} = \{i + \mathrm{I},\ \ i \in \mathrm{J}\} = \mathrm{J}/\mathrm{I}$$

. □

Proposition 1.1.6. –*Soient* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme d'anneaux,* I *un idéal de* A *contenu dans le* $\ker f$ *et* $\bar{f} : \mathrm{A}/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ *l'homomorphisme fournit par le théorème de factorisation.*
Alors, le noyau de $\bar{f}$ *est égale à* $(\ker f)/\mathrm{I}$.

Démonstration. –En effet, si $\bar{f}(x) = 0$, soit $a \in \mathrm{A}$ tel que $cl(a) = x$. On a alors $f(a) = 0$, d'où $a \in \ker f$.
Réciproquement, si $x \in \ker f/\mathrm{I}$, il existe $a \in \ker f$ tel que $x = cl(a)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et $x \in \ker \bar{f}$.

□

1.2 Théorèmes des isomorphismes

Théorème 1.2.1 (Premier théorème d'isomorphisme)**.** *–Soient* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme d'anneaux,* I *un idéal de* A *contenu dans le* $\ker f$ *et* $\bar{f} : \mathrm{A}/\mathrm{I} \to \mathrm{B}$ *l'homomorphisme fournit par le théorème de factorisation.*
Si $\ker f = \mathrm{I}$ *alors,*

$$\mathrm{A}/\ker(f) \simeq \mathrm{I}m(f)$$

.

Démonstration. –Soit $x \in \mathrm{A}$ tel que $cl(x) \in \ker \bar{f}$, alors par construction $x \in \ker f$ et donc $x \in \mathrm{I}$, d'où $cl(x) = 0$, il suit que $\bar{f}$ est injectif. Par construction aussi on a l'image de $\bar{f}$ est égale à l'image de f. □

Théorème 1.2.2 (Deuxième théorème d'isomorphisme)**.** *–Soit* A *un anneau,* I *un idéal de* A *et* B *un sous-anneau de* A*, alors :*

1. $\mathrm{B} + \mathrm{I} = \{b + x / b \in \mathrm{B},\ x \in \mathrm{I}\}$ *est un sous-anneau de* A *et* I *est un idéal de* $\mathrm{B} + \mathrm{I}$ *;*
2. $\mathrm{B} \cap \mathrm{I}$ *est un idéal de* B *;*
3. *Les anneaux* $(\mathrm{B} + \mathrm{I})/\mathrm{I}$ *et* $\mathrm{B}/\mathrm{B} \cap \mathrm{I}$ *sont isomorphes.*

Démonstration. –

1. $1_\mathrm{A} = 1_\mathrm{A} + 0 \in \mathrm{B} + \mathrm{I}$.
   $\forall b_1 + x_1, b_2 + x_2 \in \mathrm{B} + \mathrm{I}$:

   $$(b_1 + x_1) - (b_2 + x_2) = (b_1 - b_2) + (x_1 - x_2) \in \mathrm{B} + \mathrm{I}$$

   et

   $$(b_1 + x_1)(b_2 + x_2) = b_1 b_2 + b_1 x_2 + x_1 b_2 + x_1 x_2 \in \mathrm{B} + \mathrm{I}$$

   . Donc $\mathrm{B} + \mathrm{I}$ est un sous anneau de A.
   On vérifie facilement que I est un idéal de $\mathrm{B} + \mathrm{I}$.
   2. et 3. : soit la surjection canonique $cl : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}$. On considère la restriction de cl à B, $cl' : \mathrm{B} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}$, $x \mapsto cl'(x) = cl(x)$. cl' est évident un homomorphisme d'anneau. On a : $\ker cl' = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}$, et ainsi $\mathrm{B} \cap \mathrm{I}$ est un idéal de B. On a :

   $$\begin{aligned} \Im cl' &= \{cl'(x),\ x \in \mathrm{B}\} \\ &= \{x + \mathrm{I},\ x \in \mathrm{B}\} \\ &= \mathrm{B} + \mathrm{I}/\mathrm{I}. \end{aligned}$$

   Ainsi le premier théorème d'isomorphisme donne : $\mathrm{B}/\mathrm{B} \cap \mathrm{I} \simeq (\mathrm{B} + \mathrm{I})/\mathrm{I}$

□

Théorème 1.2.3 (Troisième théorème d'isomorphisme)**.** *–Soient* A *un anneau et* $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$ *deux idéaux de* A.

La composition canonique $A \to A/I \to (A/I)/(J/I)$ *a pour noyau* J. *Il en résulte un isomorphisme canonique :*

$$A/J \simeq (A/I)/(J/I)$$

.

Démonstration. –La composée de deux homomorphisme surjectifs étant encore surjectif, le morphisme $A \to (A/I)/(J/I)$ est surjectif. Un élément $a \in A$ appartient au noyau si, et seulement si $cl(a) \in A/I$ appartient au noyau de l'homomorphisme $A/I \to (A/I)/(J/I)$, c'est-à-dire $cl(a) \in J/I$, or $J/I = cl(J)$, cela signifie que $a \in cl^{-1}(cl(J)) = J$ puisque J contient I.
Le théorème de factorisation affirme alors l'existence d'un unique homomorphisme $\varphi : A/J \to (A/I)/(J/I)$ rendant le diagramme suivent :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] & (A/I)/(J/I) \\ A/J \arrow[urr, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

commutatif. Cet homomorphisme est surjectif.
Soient $x \in A/J$ un élément tel que $\varphi(x) = 0$ et a tel que $x = cl_J(a)$. Par définition de φ, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= cl_{J/I} \circ cl_I(a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $a \in J$. Ainsi, $x = 0$ et l'homomorphisme φ est injectif. C'est donc un isomorphisme.
La dernière partie de la démonstration peut être généralisée en un complément important au théorème de factorisation.

□

Définition 1.2.4. –*On dit que deux idéaux* I *et* J *de* A *sont comaximaux si* $I + J = A$. *Ils donnent lieu à la forme générale du* théorème chinois.

Théorème 1.2.5 (Théorème chinois)**.** –*Soient* A *un anneau et* I *et* J *deux idéaux comaximaux de* A. *Il existe alors un unique isomorphisme :*

$$A/IJ \simeq A/I \times A/J$$

Démonstration. –Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] \arrow[dr] & \\ A/IJ \arrow[r, dotted, "\varphi"] & (A/I) \times (A/I) \end{tikzcd}$$

dans lequel on doit montrer l'existence d'une unique flèche pointillée qui le rendre commutatif.

Or, le morphisme $A \to A/I \times A/J$ envoie $a \in A$ sur $(cl_I(a), cl_J(a))$. Son noyau est donc $I \cap J$, et puisque I et J sont comaximaux, alors $I \cap J = IJ$. Il existe ainsi un unique morphisme φ rendant le diagramme commutatif et $\varphi(cl_{IJ}(a)) = (cl_I(a), cl_J(a))$ pour tout $a \in A$.
Ce morphisme est un isomorphisme :
Comme $I + J = A$, il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $x + y = 1$. Alors on a les égalités :

$$\begin{aligned} 1 &= cl_I(x+y) \\ &= cl_I(y) \end{aligned}$$

dans A/I et

$$\begin{aligned} 1 &= cl_J(x+y) \\ &= cl_J(x) \end{aligned}$$

dans A/J.
Par suite

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (cl_I(x), cl_J(x)), \\ &= (0,1) \end{aligned}$$

tandis que $\varphi(y) = (1,0)$.
Si a et b sont dans A, il en résulte que :

$$\begin{aligned} \varphi(ax + ay) &= (0, cl(b)) + (cl(a), 0) \\ &= (cl(a), cl(b)). \end{aligned}$$

Tout élément de $A/I \times A/J$ étant de la forme $(cl(a), cl(b))$, donc φ est surjectif. □

1.3 Exemples d'anneau quotient

Exemple 1.3.1. *–Soient* K *un corps et a et b deux élément de* K. *Alors on a :*

1. *L'anneau* $K[X]/(X-a)$ *est isomorphe à* K *;*
2. *L'anneau* $K[X,Y]/(Y-b)$ *est isomorphe à* $K[X]$ *;*
3. *L'anneau* $K[X,Y]/(X-a, Y-b)$ *est isomorphe à* K.

Démonstration. –

1. Soit $\varphi : K[X] \to K$ l'homomorphisme d'anneaux défini par : $\varphi(P) = P(a)$. Il est surjectif et son noyau contient l'idéal $(X-a)$.
   D'autre part, Si $P \in \ker\varphi$, i.e $P(a) = 0$, le théorème de factorisation implique que P est de la forme : $P(X) = Q(X)(X-a)$, autrement dit $P \in (X-a)$. Ainsi φ est un isomorphisme.
2. On définit $\psi : K[X,Y]K[X]$ par $P(X,Y) \mapsto P(X,b)$. Il est surjectif, son noyau contient l'idéal $(Y-b)$.
   Enfin si $P(X,b) = 0$, prouvons que $P(X,Y)$ est un multiple de $Y-b$. On peut en fait invoquer le théorème de factorisation dans l'anneau des polynômes en une

variable à coefficients dans l'anneau intègre K[X]. Mais on peut le démontrer directement on écrit :

$$\mathrm{P(X,Y)} = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}_k(\mathrm{Y})\mathrm{X}^k,\ \mathrm{P}_k \in \mathrm{K[Y]}.$$

Alors, $\mathrm{P}(\mathrm{X}, b) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}_k(b)\mathrm{X}^k = 0$, si bien P_k est multiple de $\mathrm{Y} - b$, et donc P est multiple de $\mathrm{Y} - b$.

3. On introduit $\eta : \mathrm{K[X,Y]} \to \mathrm{K}$ donné par $\eta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(a, b)$. C'est le composé $\varphi \circ \psi$. Son noyau contient l'idéal $(\mathrm{X} - a, \mathrm{Y} - b)$. Réciproquement, soit $\mathrm{P} \in \mathrm{K[X,Y]}$ tel que $\mathrm{P}(a, b) = 0$. La division euclidienne de P par $\mathrm{Y}-b$ dans K[X, Y] nous permet d'écrire :

$$\mathrm{P(X,Y)} = (\mathrm{Y} - b)\mathrm{Q(X,Y)} + \mathrm{R(X,Y)}$$

avec R(X, Y) est un polynôme en Y strictement inférieur à 1. Donc un polynôme R(X) en X seulement. Alors $\mathrm{P}(a, b) = \mathrm{R}(a) = 0$, ce qui implique que R(X) s'écrit $(\mathrm{X} - a)\mathrm{S(X)}$. Finalement on a bien $\mathrm{P(X,Y)} \in (\mathrm{X} - a, \mathrm{Y} - b)$.

□

Exemple 1.3.2. *–Soit n un entier* ≥ 1. *On note* $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *la surjection canonique.*

1. *Étant donné un entier m, Alors* $s(m)$ *est inversible dans l'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *si et seulement si n et m sont premiers entre eux.*
2. *L'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est intègre si et seulement si n est premier.*
3. *Si n est premier l'anneau* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un corps.*

Démonstration. –

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Dire que $s(m)$ est inversible signifie qu'il existe $m' \in \mathbb{Z}$ tel que $s(m)s(m') = s(1)$. Cela implique qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $mm' = 1 + kn$, d'où une relation de Bézout entre m et n qui sont donc premiers entre eux.

   Réciproquement, si m et n sont premiers entre eux, ils existent u et v de $\mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$, d'où $s(u)s(m) = s(1)$: $s(m)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'inverse $s(u)$.
2. Supposons que n est premier et montrons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre. Soient a et b tels que $s(a)s(b) = s(0)$. Cela signifie que ab est un multiple de n, donc, n étant premier, que n divise a ou que n divise b. Ainsi $s(a) = s(0)$ ou $s(b) = s(0)$.

   Dans l'autre sens, si n n'est pas premier, on peut écrire $n = n_1 n_2$ pour des entiers n_1, n_2 tels que $1 < n_1 < n$ et $1 < n_2 < n$. En particulier $s(n_1)$ et $s(n_2)$ sont non nuls dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} s(n_1)s(n_2) &= s(n_1 n_2) \\ &= s(n) = s(0). \end{aligned}$$

   Ainsi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre.
3. Supposons que n est premier et montrons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps. Si m est un élément de $\mathbb{Z}$ tel que $s(m) \neq 0$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, cela signifie que n ne divise pas m, donc n et m sont premiers entre eux. D'après 1. $s(m)$ est inversible. Par suite $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

$\square$

Exemple 1.3.3. *–Soit* K *un corps,posons* $A = K[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$.

1. *Notons x et y l'image de* X *et* Y *dans* A. *On a donc* $x^2 = xy = y^2 = 0$. *Tout élément de* A *s'écrit de manière unique sous la forme* $a+bx+cy$, *avec* $(a,b,c) \in K^3$. *Si* $a'+b'x+c'y$ *est un autre élément de* A, *on a :* $(a+bx+cy)(a'+b'x+c'y) = aa' + (ab'+a'b)x + (ac'+c'a)y$, *si bien* $a+bx+c$ *est inversible si et seulement si le système :*

$$aa' = 1, \quad ab' + a'b = 0, \quad ac' + c'a = 0$$

a une solution (a', b', c'). *Il faut que* $a \neq 0$, *et dans ce cas* $a' = 1/a$, $b' = -b/a^2$ *et* $c' = -c/a^2$ *est solution. Ainsi,* $a+bx+cy$ *est inversible si et seulement si* $a \neq 0$.

2. *Les idéaux* 0 *et* A *sont principaux, engendrés respectivement par* 0 *et* 1. *Soit maintenant* I *un idéal principal de* A *distinct de* 0 *et de* A. *Il est engendré par un élément* $a+bx+cy$ *de* A *non nul et non inversible, donc* $a = 0$. *Remarquons que l'on a :*

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta x+\gamma y)(bx+cy) &= (\alpha b)x + (\alpha c)y \\ &= \alpha(bx+cy)\end{aligned}$$

Ainsi, l'élément (non nul) $b'x+c'y$ *appartient a l'idéal engendré par* $bx+cy$ *si et seulement si le couple* (b', c') *est multiple de couple* (b,c). *Alors* $\alpha \neq 0$, *si bien que ces éléments sont différents par multiplication de l'élément inversible* α *et définissent le même idéal. On peut ainsi supposer que* $b = 1$, *ou* $b = 0$, *auquel cas suppose* $c = 0$ *ou* $c = 1$.

les idéaux principaux de A *sont donc* $(x+\lambda y)$ *avec* $\lambda \in K$.

3. *Soit* I *un idéal non principal, en particulier,* $I \neq A$. *Il contient ainsi deux éléments* $(bx+cy)$ *et* $(b'x+c'y)$ *non proportionnels. Ainsi par combinaisons linéaires,* I *contient tous les éléments de la forme* $\beta x+\lambda y$, *c'est-à-dire l'idéal* (x,y). *Il est maximal (tout autre élément est inversible), donc le seul idéal de* A *non principal est* (x,y).

Chapitre 2

Localisation

2.1 Partie multiplicative

Définition 2.1.1. *–Soit* A *un anneau. Une partie* S *est dite multiplicative si elle vérifie les propriétés suivantes :*

— $1 \in \mathrm{S}$ *et* $0 \notin \mathrm{S}$ *;*

— *pour tous a et b dans* S*,* $ab \in \mathrm{S}$.

2.2 Construction

— *Sur un ensemble* $\mathrm{A} \times \mathrm{S}$*, définissons le relation* $\sim$ *par :*
$(a, s) \sim (b, t)$ *si et seulement s'il existe* $u \in \mathrm{S}$ *tel que* $u(at - bs) = 0$.
Si de plus A *est intégre la relation* $\sim$ *devient :*
$(a, s) \sim (b, t)$ *si, et seulement si* $(at - bs) = 0$.
C'est en effet une relation d'équivalence.

— *Pour tout* $(a, s) \in \mathrm{A} \times \mathrm{S}$*, puisque* $1 \in \mathrm{S}$ *et* $1(as - as) = 0$*,* $(a, s) \sim (a, s)$*. La relation est réflexive.*

— *Si* $(a, s) \sim (b, t)$*, soit* $u \in \mathrm{S}$ *tel que* $u(at - bs) = 0$*, alors* $u(bs - at) = 0$*, d'où* $(b, t) \sim (a, s)$*. La relation est symétrique.*

— *Enfin si* $(a, s) \sim (b, t)$ *et* $(b, t) \sim (c, u)$ *choisissons* v *et* w *tels que* $v(at - bs) = 0$ *et* $w(bu - ct) = 0$*. Comme* $t(au - cs) = u(at - bs) + s(bu - cs)$ *on a* $vwt(au - cs) = 0$*. Puisque* v *et* w *et* t *appartiennent à* S*,* $vwt \in \mathrm{S}$ *et* $(a, s) \sim (u, c)$*. Par suite le relation est transitive.*

Définition 2.2.1. *Soient* A *un anneau et* S *une partie multiplicative, l'ensemble quotient* $\frac{A\times S}{\sim}$ *est noté* $S^{-1}A$ *s'appelle* le localisé *de* A *en* S *ses éléments* $(\bar{a,s})$ *se notent* a/s *ou* $\frac{a}{s}$.

Proposition 2.2.2. *Soient* A *un anneau et* S *une partie multiplicative, les deux applications suivantes sont des lois de compositions interne sur* $S^{-1}A$

$$+ : S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A : (a/s) + (b/t) = (at+bs)/st$$
$$\times : S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A : (a/s) \times (b/t) = (ab/st)$$

$S^{-1}A$ *muni de ses deux lois est un anneau appelé anneau de fractions de* A *par rapport à* S*, il a pour élément unité* $1/1$ *pour la multiplication et* $0/1$ *pour l'addition.*

Démonstration. On vérifie que + et × sont bien définis :
si $(a,s) \sim (a',s')$, il faut montrer que :
$(at+bs,st) \sim (a't+bs',s't)$ et $(ab,st) \sim (a'b,s't)$
On a alors $(at+bs)s't-(a't+bs')st = t^2(as'-a's)$.
Choisissons $u \in S$ tel que $u(as'-a's) = 0$, il en résulte :
$u((at+bs)s't-(a't+bs')st) = 0$
et donc $(at+bs,st) \sim (a't+bs',s't)$. De même,
$u(abs't-a'bst) = ubt(as'-a's) = 0$
et donc $(ab,st) \sim (a'b,s't)$. Plus généralement, si $(a,s) \sim (a',s')$ et $(b,t) \sim (b',t')$, on a, en répétant ces vérifications (ou en remarquant la commutativité des opérations),
$(a,s)+(b,t) \sim (a',s')+(b,t) \sim (a',s')+(b',t')$

La vérification que ces lois confèrent une structure d'anneau à $S^{-1}A$ est un peu longue mais sans surprise et ne faite ici. Par exemple, la distributivité de l'addition sur la multiplication se démontre ainsi : si a/s, b/t et c/u sont trois éléments de $S^{-1}A$,

$$\begin{aligned} \frac{a}{s}\left(\frac{b}{t}+\frac{c}{u}\right) &= \frac{a(bu+ct)}{stu} \\ &= \frac{abu}{stu}+\frac{act}{stu} \\ &= \frac{ab}{st}+\frac{ac}{su} \\ &= \frac{a}{s}\frac{b}{t}+\frac{a}{c}\frac{c}{u}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.3. *L'application* $i : A \to S^{-1}A$ *telle que* $i(a) = a/1$ *pour tout* $a \in A$ *est un homomorphisme d'anneaux et pour tout* $s \in S$ $i(s)$ *est inversible dans* $S^{-1}A$. *Si* A *est intègre alors* i *est injectif.*

Démonstration. $i(0) = 0/1 = 0$ et $i(1) = 1/1 = 1$, et pour tous a et b dans A, on a :

$$\begin{aligned} i(a+b) &= (a+b)/1 \\ &= a/1 + b/1 \\ &= i(a) + i(b). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i(ab) &= (ab)/1 \\ &= (a/1)(b/1) \\ &= i(a)i(b). \end{aligned}$$

Enfin, si $s \in \mathrm{S}$ on a : $i(s) = s/1$ et

$$\begin{aligned} i(s)(1/s) &= s/s \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc pour tout $s \in \mathrm{S}$, $i(s)$ est inversible dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$.
Si A est intègre, comme $s \in \mathrm{S}$ ne peut pas être nul, on a $a = 0$ et par conséquent i est injectif. □

Exemple 2.2.4. –

1. *Si* $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$ *et* $\mathrm{S} = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *l'anneau* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *sera égale à* $\mathbb{Q}$.

2. *Si* S *est formé d'éléments inversibles, alors* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

3. *Si* $\mathrm{A} = \mathbb{Z}$ *et* $\mathrm{S} = \{1; 10; ...\}$ *est l'ensemble de puissance de* 10 *dans* $\mathbb{Z}$, *alors* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *sera l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des nombre rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme* $a/10^n$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.2.5. –*Soient* A *un anneau commutatif et* S *une partie multiplicative de* A. *Notons* $i : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *l'homomorphisme d'anneaux que nous venons de construire. Alors, pour tout anneau* B *et tout homomorphisme* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *tel que les éléments de* $f(\mathrm{S})$ *sont inversibles dans* B, *il existe un unique homomorphisme* $\varphi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *tel que* $f = \varphi \circ i$.

On peut résumer cette dernière formule et dire que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{B} \\ \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Si φ existe, il doit vérifie :

$$\begin{aligned}\varphi(a/s)f(s) &= \varphi(a/s)\varphi(i(s))\\ &= \varphi(a/s)\varphi(s/1)\\ &= \varphi(a/1)\\ &= \varphi(i(a))\\ &= f(a).\end{aligned}$$

Et donc

$$\varphi(a/s) = f^{-1}(s)f(a).$$

Ou $f^{-1}(s)$ désigne l'inverse de $f(s)$ dans B. Cela prouve qu'il existe au plus tel homomorphisme φ.
Pour montrer son existence, il suffit de vérifier que la formule indiquée défini un homomorphisme $\varphi : S^{-1}A \to B$ tel que $\varphi \circ i = f$.
Si $a/s = b/t$, soit $u \in S$ tel que $u(at - bs) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}f^{-1}(s)f(a) &= f^{-1}(s)f^{-1}(tu)f(tu)f(a)\\ &= f^{-1}(stu)f(tua)\\ &= f^{-1}(stu)f(ubs)\\ &= f^{-1}(t)f(b).\end{aligned}$$

Donc φ est bien définie
Montrons que φ est un homomorphisme :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f(0/1)\\ &= f^{-1}(0)f(1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= f(1/1)\\ &= f^{-1}(1)f(1)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}\varphi(a/s) + \varphi(b/t) &= f^{-1}(s)f(a) + f^{-1}(t)f(b)\\ &= f^{-1}(st)(f(at) + f(bs))\\ &= f^{-1}(st)f(at + bs)\\ &= \varphi((at + bs)/st)\\ &= \varphi((a/s) + (b/t)).\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\varphi(a/s)\varphi(b/t) &= f^{-1}(s)f(a)f^{-1}(t)f(b)\\ &= f^{-1}(st)f(ab)\\ &= \varphi(ab/st)\\ &= \varphi((a/s)(b/t)).\end{aligned}$$

L'application φ est un homomorphisme. □

Définition 2.2.6. –*Soit* A *un anneau intègre. La partie* $\mathrm{S} = \mathrm{A}\setminus\{0\}$ *est une partie multiplicative de* A.
L'anneau $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est alors un corps appelé* corps des fractions *de* A*, on le note* $Frac(\mathrm{A})$.

Remarque 2.2.7. –

1. $1 \in \mathrm{S}$. *D'autre part, si a et b sont deux éléments non nuls de* A*, on a par définition* $ab \neq 0$. *Ainsi* S *est une partie multiplicative de* A.

   Un élément de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est de la forme* a/s *avec* $a \in \mathrm{A}$ *et* $s \in \mathrm{S}$. *S'il est nul, il existe un élément* $b \in \mathrm{A}\setminus\{0\}$ *tel que* $ab = 0$. *Puisque* A *est intègre alors on a* $a = 0$. *En particulier,* $1/1 \neq 0$ *dans* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. *Si* a/s *n'est pas nul, on a* $a \neq 0$ *et* s/a *un élément de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *tel que* $(a/s)(s/a) = as/as = 1$. *Par suite* a/s *est inversible.*
   Finalement $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est un corps.*
2. *Soient* A *un anneau et* S *une partie multiplicative de* A*, l'homomorphisme* $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est injectif si et seulement si tout élément de* S *est simplifiable.*

Soient A *un anneau et* I *un idéal de* A*, nous avons déjà vu que les idéaux contenant* I *sont en bijection avec les idéaux de* A/I*, regardons maintenant ce qui se passe pour la localisation.*

2.3 Correspondance entre les idéaux de A et $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$

Proposition 2.3.1. *Soit* S *une partie multiplicative d'un anneau* A. *Si* I *est un idéal de* A *alors* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ *est l'idéal de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *engendré par* $i(\mathrm{I})$*, avec* $i(\mathrm{I})$ *n'est pas forcement un idéal.*

Démonstration. –Soit J un idéal de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, définissons l'ensemble I de A suivant :

$$\mathrm{I} = \{a \in \mathrm{A}/\exists s \in \mathrm{S},\ a/s \in \mathrm{J}\}$$

Il est clair que $\mathrm{J} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$. Montrons que I est un idéal de A. Si a et b sont dans I, alors ils existent s et t dans S tels que a/s et b/t soient dans J. Mais alors $(a+b)/st = 1/t \times a/s + 1/s \times b/t \in \mathrm{J}$ donc $a + b \in \mathrm{I}$. Si de plus $c \in \mathrm{A}$, alors $ca/s = c/1 \times a/s \in \mathrm{J}$ donc $ca \in \mathrm{I}$ et I est un idéal de A. □

Proposition 2.3.2. –

— *Soit* S *une partie multiplicative d'un anneau* A. *L'application* $\mathrm{I} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ *est une bijection, de l'ensemble des idéaux de* A *qui vérifient la condition :*

$$sa \in \mathrm{I},\ avec\ s \in \mathrm{S}\ et\ a \in \mathrm{A},\ alors\ \ a \in \mathrm{I} \tag{2.1}$$

sur l'ensemble des idéaux de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*, la bijection réciproque étant définie en faisant correspondante, à chaque idéal* J *de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*, l'idéal de* A*, image réciproque par l'application* i *de* J.

Si I *et* J *sont deux idéaux de* A*, on a :*

1. $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{J}) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}+\mathrm{S}^{-1}\mathrm{J}$ *;*
2. $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{I}\cap\mathrm{J}) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}\cap\mathrm{S}^{-1}\mathrm{J}$ *;*
3. $(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I})(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{J}) = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{IJ}$.

— *Soit* P *un idéal premier de* A *ne rencontrant pas* S*, alors* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ *est un idéal premier de* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *engendré par* $i(\mathrm{P})$ *avec* $\mathrm{P} = i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{P}))$.

Démonstration. –

— Soit $\mathrm{I} = i^{-1}(\mathrm{J})$. Soit, $sa \in \mathrm{I}$, $s \in \mathrm{S}$, $a \in \mathrm{A}$, alors $\frac{s}{1}\times\frac{a}{1} \in \mathrm{J}$. Donc $\frac{a}{1} \in \mathrm{J}$ et $a \in \mathrm{I}$. Puisque $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ est un idéal de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ engendré par $i(\mathrm{I})$ et que $i(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{J}$, on a $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} \subseteq \mathrm{J}$.
L'autre inclusion est évidente, partant d'un idéal J, on a donc $\mathrm{S}^{-1}i^{-1}(\mathrm{J}) = \mathrm{J}$. D'autre part, on a aussi $i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}) = \mathrm{I}$, si I est un idéal de A vérifiant la condition (2.1) ; en effet si $a \in \mathrm{I}$, $i(a) = a/1 \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$, donc $a \in i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I})$. Soit $b \in i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I})$, donc $b/1 \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ et il existe $s, t \in \mathrm{S}$ et $a \in \mathrm{I}$ tels que $tsb = tb \in \mathrm{I}$. Donc la condition (2.1), $b \in \mathrm{I}$. Par suite on a l'égalité : $i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}) = \mathrm{I}$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ est un idéal de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$.

— Montrons que l'idéal $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ est premier :
supposons que $\frac{a}{s}\times\frac{a'}{s'} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ alors il existe $s \in \mathrm{S}$ tel que $s"aa' \in \mathrm{P}$ Comme P est premier et S ne rencontre pas P, alors $aa' \in \mathrm{P}$ donc $a \in \mathrm{P}$ ou $a' \in \mathrm{P}$. Ainsi on a $\frac{a}{s} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ ou $\frac{a'}{s'} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$. Par suite L'idéal $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ est premier.
Montrons enfin que :

$$\mathrm{P} = i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P})$$

En effet, comme $i(\mathrm{P}) \subset \mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$, on a bien $\mathrm{P} \subset i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P})$.
Par ailleurs si $a \in i^{-1}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P})$, alors $\frac{a}{1} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}$ donc il existe $x \in \mathrm{P}$ et $s \in \mathrm{S}$ tels que $\frac{a}{1} = \frac{x}{s}$. Il existe alors $s' \in \mathrm{S}$ tel que $s'(as - x) = 0 \in \mathrm{P}$. Comme $s' \notin \mathrm{P}$ et que P est premier, on a $as - x \in \mathrm{P}$ et comme $x \in \mathrm{P}$, on a $as \in \mathrm{P}$. Encore une fois, comme $s \notin \mathrm{P}$ et que P est premier, on a $a \in \mathrm{P}$.

□

Proposition 2.3.3. *Soient* A *un anneau,* S *une partie multiplicative de* A *et* I *idéal de* A *tel que* $\mathrm{I}\cap\mathrm{S} = \varnothing$.
Soit $i : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{I}$ *la surjection canonique. Alors* $i(\mathrm{S})$ *est une partie multiplicative de* A/I *et les anneaux* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ *et* $i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$ *sont isomorphes.*

Démonstration. –L'ensemble $i(\mathrm{S})$ est une partie multiplicative de A/I. (La condition $\mathrm{I}\cap\mathrm{S} = \varnothing$ assure que $0 \notin i(\mathrm{S})$). Soit $f : \mathrm{A} \to i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$ l'application composée de l'application naturelle

$$\mathrm{A}/\mathrm{I} \to i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$$

et de :

$$\mathrm{A} \xrightarrow{i} \mathrm{A}/\mathrm{I}$$

Si $s \in \mathrm{S}$, $f(s)$ est inversible dans $i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A/I})$ et a pour image $i(s)/1$ et d'inverse $1/i(s)$. Donc f se factorise à travers l'application : $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. Notons θ l'application $\mathrm{S}^{-1}f$ de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ dans $i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A/I})$. Il est claire que θ s'annule sur $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ car $\theta(a/1) = i(a)/1 = 0$, puisque $a \in \mathrm{A}$ et donc $i(a) = 0$ dans A/I, et donc le noyau de θ contient l'image de I par $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ c'est-à-dire que θ se factorise à travers la surjection canonique $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$. Notons $\phi : \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I} \to i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A/I})$ l'application obtenue à partir de θ par la factorisation précédente. $\overline{a/s} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ on a $\phi(\overline{a/s}) = \theta(a/s) = i(a)/i(s)$, donc ϕ est surjective. D'autre part si $i(a)/i(s) = 0$ dans $i(\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{A/I})$, il existe $t \in \mathrm{S}$ tel que $i(ta) = 0$, c'est-à-dire $ta \in \mathrm{I}$; Par suite $a/1 \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$ et $a/s \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ par suite $\overline{a/s} = 0$ dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$. □

2.4 Exemples de partie multiplicative

Exemple 2.4.1. *–Soient* K *un corps et* $\varphi : \mathrm{K}[\mathrm{U},\mathrm{V}] \to \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ *l'homomorphisme d'anneau définie par les égalités* $\varphi(\mathrm{U}) = \mathrm{X}^3$, $\varphi(\mathrm{V}) = -\mathrm{X}^2$ *et* $\varphi(a) = a$ *pour tout* $a \in \mathrm{K}$.
Le noyau de φ *est engendré par* $(\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^3)$.
Soit A *l'image de* φ,A *est intègre et son corps des fractions est isomorphe à* K[X].

Démonstration. On constate qu'un polynôme multiple de $\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^3$ est dans le noyau φ. Réciproquement, si $\varphi(\mathrm{P}) = 0$, effectuons la divisions euclidienne de P par $\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^3$ dans K[U][V]. On trouve deux polynôme P_2 et $\mathrm{P}_3 \in \mathrm{K}[\mathrm{U},\mathrm{V}]$, avec $\mathrm{P}_3 = 0$ ou $\deg_{\mathrm{U}} < 2$ tels que :
$\mathrm{P}(\mathrm{U},\mathrm{V}) = (\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^3)\mathrm{P}_2(\mathrm{U},\mathrm{V}) + \mathrm{P}_3(\mathrm{U},\mathrm{V})$
On écrit $\mathrm{P}_3(\mathrm{U},\mathrm{V}) = \mathrm{A}(\mathrm{V}) + \mathrm{UB}(\mathrm{V})$ et on a donc

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{P}) &= \mathrm{A}(-\mathrm{X}^2) + \mathrm{X}^3\mathrm{B}(-\mathrm{X}^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nécessairement, en considérant les parties paires et impaires de $\varphi(\mathrm{P})$, on trouve que $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$. Autrement dit, $\ker\varphi = (\mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^3)$.
Soit $\mathrm{P} = \sum_{i,j} \mathrm{U}^i\mathrm{V}^j$. On voit que $\varphi(\mathrm{P}) = \sum_{i,j} a_{i,j}(-1)^j\mathrm{X}^{3i+2j}$. Tous les degrés ≥ 2 sont possibles, si bien que l'image de φ est formés des polynômes dont le terme de degré 1 est nul. Notons

$$\mathrm{A} = \Im\varphi$$

C'est un sous-anneau de K[X] qui est intègre, donc A intègre.
Son corps des fractions est un sous-corps de K[X]. Pour montrer que c'est K[X] lui même, il suffit de montrer que X y appartient. Or $\mathrm{X} = \mathrm{X}^3/\mathrm{X}^2 = -\varphi(\mathrm{U})/(\mathrm{V})$.

□

Exemple 2.4.2. *–Soit* S *une partie multiplicative de* A. *On note* $r(\mathrm{A})$ *les éléments nilpotents de* A.

1. *Si* A *est intègre,* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est intègre.*

2. *Si* A *est réduit,* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est réduit.*

3. *On note* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *l'homomorphisme naturel* $a \mapsto a/1$*. Alors on a :*

$$r(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}) = r(\mathrm{A})\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$$

.

Démonstration. –

1. Soient a/s et b/t deux éléments de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ de produit nul. Il existe ainsi $u \in \mathrm{S}$ tel que $u(ab) = 0$. Comme A est intègre et $u \neq 0$, $ab = 0$. Ainsi, $a = 0$ ou $b = 0$ et donc $a/s = 0$ ou $b/t = 0$. L'anneau $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est intègre.

2. Soit $a/\mathrm{S} \in \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ un élément nilpotent. Il existe alors $t \in \mathrm{S}$ tel que $ta^n = 0$. Cela implique que $(ta)^n = 0$, donc ta est nilpotent. Comme A est réduit, $ta = 0$, d'où $a/s = 0$ dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, et $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est réduit.

3. Soit a/s un élément nilpotent de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. Cela signifie qu'il existe $n \geq 0$ et $t \in \mathrm{S}$ tel que $ta^n = 0$. A apriori, ta est nilpotent dans A. Autrement dit, tout élément nilpotent de $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ est multiple de l'image d'un élément nilpotent de A par un élément de S (qui est inversible dans $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$). Il en résulte que l'idéal engendré par $f(r(\mathrm{A}))$ contient $r(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A})$. L'autre inclusion est évidente.

□

Exemple 2.4.3. –

1. *Soit* A *un anneau et* $s \in \mathrm{A}$ *un élément non nilpotent. Alors la partie* $\mathrm{S} = \{1; s; s^2; \ldots\}$ *est une partie multiplicative et l'anneau localisé* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *est non nul. On le note en général* A_{S}.

2. *Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme d'anneau. Si* S *est une partie multiplicative de* A, $f(\mathrm{S})$ *est une partie multiplicative de* B. *Si* T *est une partie multiplicative de* B, $f^{-1}(\mathrm{T})$ *est une partie multiplicative de* A.

3. *Si* I *un idéal d'un anneau* A*, l'ensemble* $\mathrm{S} = 1 + \mathrm{I}$ *des éléments* $a \in \mathrm{A}$ *tels que* $a - 1 \in \mathrm{I}$ *est une partie multiplicative.*

4. *Soit* P *un idéal premier de* A*. On a* $\mathrm{S} = \mathrm{A} \backslash \mathrm{P}$ *est une partie multiplicative de* A*. Dans ce cas on note* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *par* A_{P} *qui est un anneau local. La réciproque est fausse.*
Voici un contre exemple :

Soient A *un anneau local qui n'est pas un corps,* B *un anneau,* R *le produit direct de* A *par* B*, et* $\mathrm{S} = \{(1,0),(1,1)\}$ *qui est une partie multiplicative de* R*. On vérifie que :*

(a) $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$ *est isomorphe à* $\mathrm{A} \times 0$ *qui est isomorphe à* A *(puisque si* $(a,e) \in \mathrm{R}$*, alors* $(a,e)(1,0) = (a,0)$ *et donc* $(a,e)/(1,1) = (a,0)/(1,0)$ *puisque* $(1,0) \in \mathrm{S}$*). Donc* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$ *est local comme* A.

(b) C'est claire que S *n'est pas sous la forme* $\mathrm{R}-\mathrm{P}$*, ou* P*est un idéal premier. Sinon on aura* $\mathrm{P} = \mathrm{R}-\mathrm{S}$. *On vois que* P *n'est pas un idéal.*
En effet, soit $e \in \mathrm{B}$ *qui est différent de* 0 *et de* 1. *Donc* $(1,e)$ *et* $(1,-e)$ *appartient à* P *(puisque n'appartient pas à* S*). Et pourtant* $(1,e)+(0,-e) = (1,0)$ *n'appartient pas à* A *(puisque appartient à* S*).*

(c) R *n'est pas local.*

Bibliographie

[1] M.-PMALLIAVIN, algébre commutative*, MASSON, 1984.*

[2] URL *:http ://www.fsr.um5a.ac.ma/cours/maths/cherrabi/Alg4Cours.pdf ;*

[3] Antoine.Chambert-Loir*,algébre commutative,version du 24 –08–2005,URL :http ://fr.scribd.com/doc/111029526/algcom-p6 ;*

[4] Najib Mahdou *:Introduction à l'Algèbre Homologique, I.S.B.N : 978 9954 32 910 8, (Premire dition : 2013) IPNPUB Fez, Morocco.*