UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département de Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

CALCUL SCIENTIFIQUE ET APPLICATIONS

Mémoire présenté dans le cadre de la
Licence en Calcul Scientifique et Applications

PLAN DE PHASE POUR LES SYSTEMES DYNAMIQUES BIDIMENSIONNELS

- Présenté par :

Chaiboub Jihade.

- Encadré par :

Pr. Benaicha Khadija

soutenu le 16 juin 2015 devant le jury composé de :

Pr. Benaicha Khadija

Pr. Rahmouni Aziza

Pr. Ammor Ouafae

2014/2015

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web: http://www.fst-usmba.ac.ma

Dédicace :

Je dédie ce projet de fin d'études :

-A mes parents pour leurs conseils, leurs encouragements et leur soutien moral et matériel.

-A mes chers frères.

-A tous mes amis.

-A tous ceux qui sont chers.

Remerciements :

Au terme de ce travail, nous tenons à exprimer notre gratitude et nos remerciements pour toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation.

Nous tenons d'abord à remercier Mme Benaicha, notre encadreur à la faculté des sciences et techniques pour son aide, ses conseils, son encouragement et sa disponibilité dans ce projet.

Nous remercions également les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Sommaire :

1-Introduction……..6

2-Etude des systèmes linéaires……7

A-Formes de Jordan dans$\mathbb{R}^2$……..….8

B- Portrait de phase (système simple -non simple)……....….10

C- Classes d'équivalence topologique……20

D- Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det)……..22

3- Etude des systèmes non linéaires……...……...24

A-Linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre……..……...…24

B-Théorème de la linéarisation……..…….……..25

C-Cycle limite……..……..……28

Application...……..….31

Conclusion……..37

1-Introduction :

Depuis Isaac Newton, les équations différentielles jouent un rôle essentiel pour la modélisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques et une part prépondérante des phénomènes sont modélisés en mathématiques par des équations différentielles. Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équations différentielles ordinaires. De telles équations apparaissent chaque fois que l'on veut décrire l'évolution déterministe d'un système au cours du temps : systèmes de points matériels, réactions chimiques, problèmes d'évolution de population, de diffusion d'épidémies, bref chaque fois que l'on étudie la dépendance d'un système par rapport à une variable. Dans d'autres circonstances, la modélisation aboutit à des équations faisant intervenir les dérivées de fonctions de plusieurs variables : c'est le cas pour l'équation de Schrödinger, l'équation de la chaleur, l'équation des ondes. On parle alors d'équations aux dérivées partielles. Mais, ces équations aux dérivées partielles dans des situations (très symétriques) se ramènent à des équations différentielles ordinaires : ainsi l'équation de Schrödinger décrivant l'atome d'hydrogène se ramène, grâce à sa symétrie sphérique, à une équation différentielle ordinaire.

Dans ce mémoire, on va parler des systèmes linéaires en montrant qu'un nombre fini de différents portraits de phase peut survenir pour les systèmes linéaires. On établit ensuite une classification des comportements à long terme d'un système et on mettra en place les définitions et les théorèmes importants pour la compréhension de notre étude. Aussi, on va parler des systèmes non linéaires et de la linéarisation qui est une méthode locale autour d'un point d'équilibre et qui permet d'en déduire le comportement globale lorsque les points d'équilibre sont réguliers.

Notons que la dynamique apportée par les effets non linéaires est plus riche que celle systèmes linéaires. A titre d'exemple, à la différence des systèmes linéaires qui ne possèdent qu'un seul point d'équilibre, les systèmes non linéaires peuvent posséder plusieurs points d'équilibre. De plus, de tels systèmes peuvent être le siège d'oscillations (cycles limites) caractérisées par leur amplitude et leur fréquence quelques soient les conditions initiales.

2-Etude des systèmes linéaires :

Soit (E) le système des équations différentielles ordinaires (système différentielle ou système dynamique) :

(E) $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

Où f et g sont deux fonctions des variables x et y.

On peut écrire aussi avec la notation matricielle : $\dot{X} = F(X)$

Où X=(x,y) est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et F(X)=(f(X),g(X)) est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Une solution de ce système consiste en un couple de fonctions (x(t),y(t)) , qui satisfait le système (E) .

Dans cette partie on va étudier le cas où f et g sont des fonctions linéaires de x et de y. Le système sera :

$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Leftrightarrow \dot{X} = AX$ Avec A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

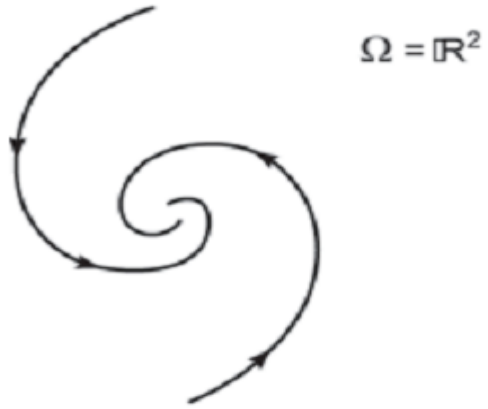
Définition :

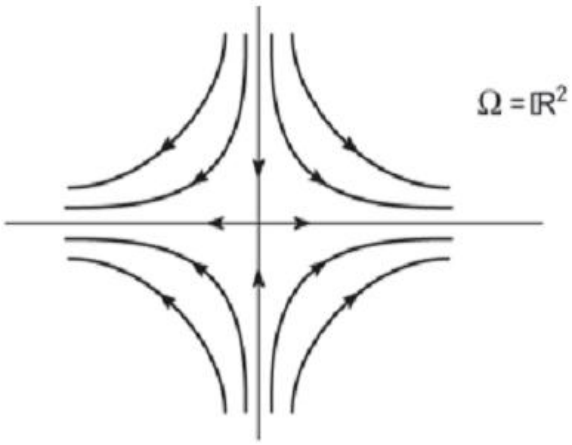
On appelle **un point d'équilibre** de (E) une solution constante c=(a,b) qui vérifie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(a,b) = 0 \\ \dot{y} = g(a,b) = 0 \end{cases}$$

on appelle le plan (x,y) un **plan de phase**. Et le **portrait de phase** pour une représentation des trajectoires dans le plan de phase.

Quelques exemples de portraits de phases :





A- Formes de Jordan dans $\mathbb{R}^2$:

Proposition :

Soit A une matrice réelle carrée de dimension 2. Alors il existe une matrice réelle inversible P telle que $J=P^{-1}AP$ est de l'une des formes suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (b) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$

Avec $\alpha, \beta, \theta, \mu, \varphi$ sont des réels, en relation directe avec les valeurs propres de la matrices A. On dit que J est semblable à A.

Remarque : Dans le cas (a) on pourra également trouver $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ et (d) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$

Les matrices J sont les formes de Jordan associées à A. Les valeurs propres de la matrice A (et de la matrice J) sont les valeurs λ solutions de l'équation caractéristique :

$\det(A-\lambda \mathbf{I})=0$ **I :<u>matrice identité.</u>**

$\Leftrightarrow \lambda^2-\mathrm{tr}(A)\,\lambda+\det(A)=0$ <u>équation caractéristique.</u>

Où $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+b_{22}$ est la trace de la matrice A, et $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ son déterminant.

Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta=(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)$

C'est la nature des valeurs propres qui détermine la forme de Jordan associée à **A** :

– Réelles distinctes ($\Delta > 0$) ;

– Réelles égales ($\Delta = 0$) ; *une racine double*

– Complexes conjuguées ($\Delta < 0$).

Si λ_1 et λ_2 sont racines de l'équation caractéristique, alors : tr**A** = $\lambda_1 + \lambda_2$ et det**A** = $\lambda_1\ \lambda_2$

☻ - Deux valeurs propres réelles distinctes ($\Delta > 0$) :

Les valeurs propres sont de la forme : $\lambda_i = \frac{tr(A)\pm\sqrt{\Delta}}{2}$; i=1,2

Soit u_1, u_2 les vecteurs propres associés à $\lambda_1 et\ \lambda_2$:

A $u_i = \lambda_i u_i$ i=1 ,2

Avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 > \lambda_2$ des valeurs propres distincts

P=$[u_1\ \ u_2]$

Et J est de la forme (a) : J=P^{-1}AP =$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Démonstration :

P=$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$

AP=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} a_{11}u_{11} + a_{12}u_{12} & a_{11}u_{21} + a_{12}u_{22} \\ a_{21}u_{11} + a_{22}u_{12} & a_{21}u_{21} + a_{22}u_{22} \end{pmatrix}$

=$\left[A\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}\quad A\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}\right]$ =$[Au_1\quad Au_2]$=$[\lambda_1 u_1\ \lambda_2 u_2]$=$[u_1\ \ u_2]\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$=PJ

AP=PJ

➔P^{-1}AP=J=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

☻ -Deux valeurs propres réelles identiques ($\Delta = 0$)

On va distinguer deux cas.

1) Si A est déjà diagonalisable :

Le sous-espace propre associé à $\lambda_0$est de dimension 2.

A est donc directement sous la forme de Jordan (b). En effet, quelle que soit la matrice de passage P , on a P^{-1}AP = J=A (A est semblable à elle-même) ,Car A=$\lambda_0 I$

Donc P^{-1}AP=$P^{-1}\lambda_0 IP$=$\lambda_0 P^{-1}$P=$\lambda_0 I$=A sachant que A=$\lambda_0 I$

2) Si A n'est pas diagonalisable :

On a $\lambda_0 = \frac{tr(A)}{2}$ et il n'y a pas deux vecteurs propres linéairement indépendants.

Soit u_0 un vecteur propre de A. En choisissant un vecteur m_2 linéairement indépendant de u_0, c'est à dire tel que det $(u_0,m_2)\neq 0$, alors P =$(u_0\ \ m_2)$est une matrice inversible qui permet de triangulariser A :

P^{-1}AP=$\begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

Où c ≠ 0 est un réel et en général différent de 1.

Pour retrouver la forme de Jordan (c), on définit une nouvelle matrice de passage :

$$P_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Alors $J = P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

☻ -Deux valeurs propres complexes conjuguées ($\Delta < 0$) :

Les valeurs propres sont : $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ Et $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ Avec $\alpha = \frac{tr(A)}{2}$ Et $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont également complexes conjugués et s'écrivent $u_i = a \pm ib$

Où a et b sont des vecteurs réels de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si on prend la matrice de passage P=(b a), alors A se met sous la forme de Jordan (d) :

$$J = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

B- Portrait de phase :

a- Si A est inversible :

➔L'unique solution de **AX** =0 est alors **X** = 0 et le système admet un seul point d'équilibre à l'origine du plan de phase.

- Deux valeurs propres réelles distinctes : λ_1 *et* λ_2.

Le système $\dot{X} = AX$ devient $\dot{Y} = JY$ avec Y= (y_1, y_2) et J sous la forme de Jordan (a) :

$$J = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Et on aura : $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ avec C_1, C_2 ***sont des constantes***.

On a $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \Leftrightarrow \lambda_2 t = \ln\frac{y_2}{C_2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\lambda_2} \ln\frac{y_2}{C_2}$

Alors $y_1(t) = C_1\, e^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln\frac{y_2}{C_2}} = C_1 (e^{\ln\frac{y_2}{C_2}})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C_1 (\frac{y_2}{C_2})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = K\, y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad \text{Avec} \quad K = \frac{C_1}{C_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}$$

Si λ_1 et λ_2 sont <u>strictement positives</u>, alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = +\infty \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = +\infty \end{cases}$ portrait de phase dans le plan (y_1, y_2) est le suivant :

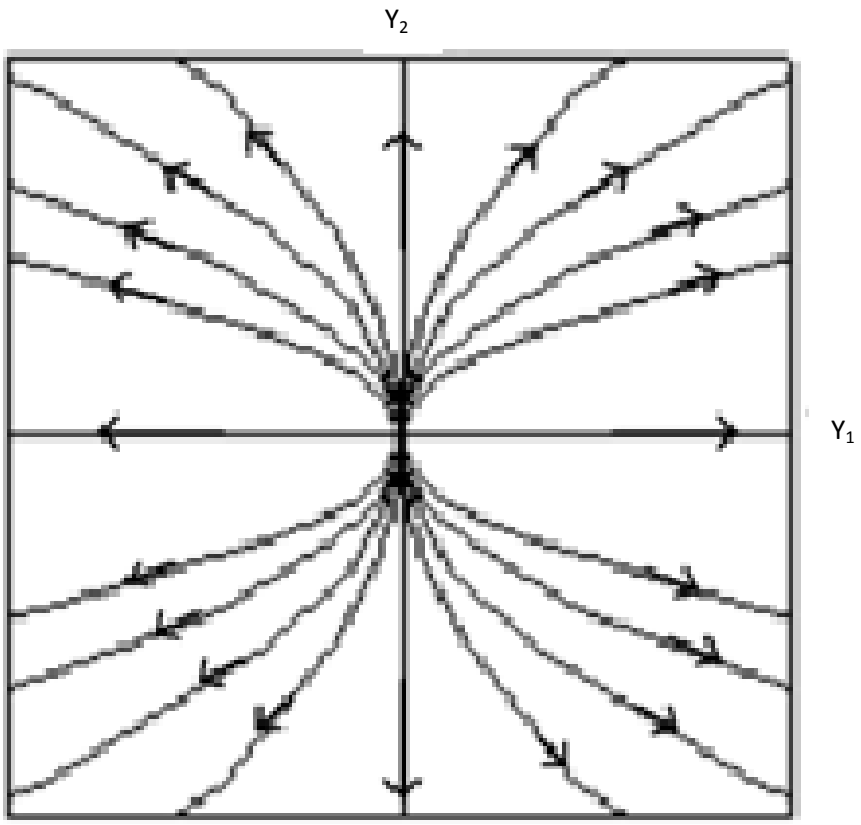


Figure 1 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque **A** possède deux valeurs propres réelles distinctes strictement positives.

➔ Le point d'équilibre à l'origine du portrait de phase est appelé **<u>un nœud</u>** ; Toutes les trajectoires partant du point d'équilibre s'en éloignent, on dit qu'on a un **<u>nœud instable</u>** (NI).

Si λ_1 et λ_2 sont <u>strictement négatives</u>, alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0 \end{cases}$, et le portrait de phase dans le plan (y_1, y_2) est le suivant :

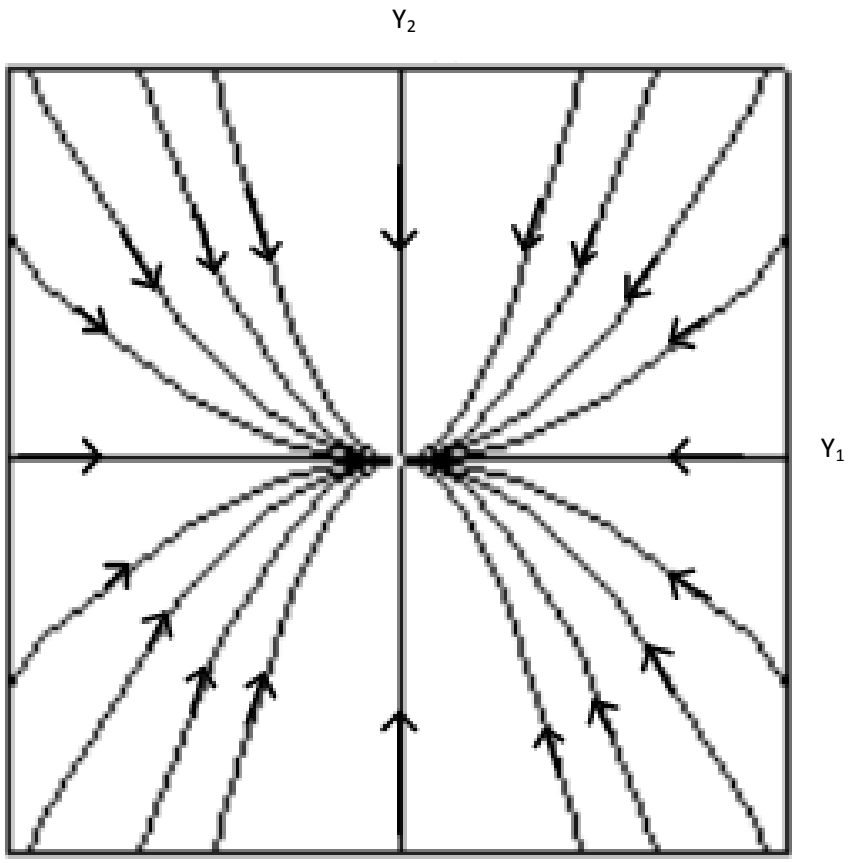


Figure 2 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque **A** possède deux valeurs propres réelles distinctes strictement négatives.

➔ Quelle que soit la condition initiale, les trajectoires convergent vers le point d'équilibre, ona un **nœud stable (NS).**

Si λ_1 et λ_2 sont de signe opposé, alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = +\infty \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0 \end{cases}$ et le portrait de phase dans le plan (y_1, y_2) est le suivant :

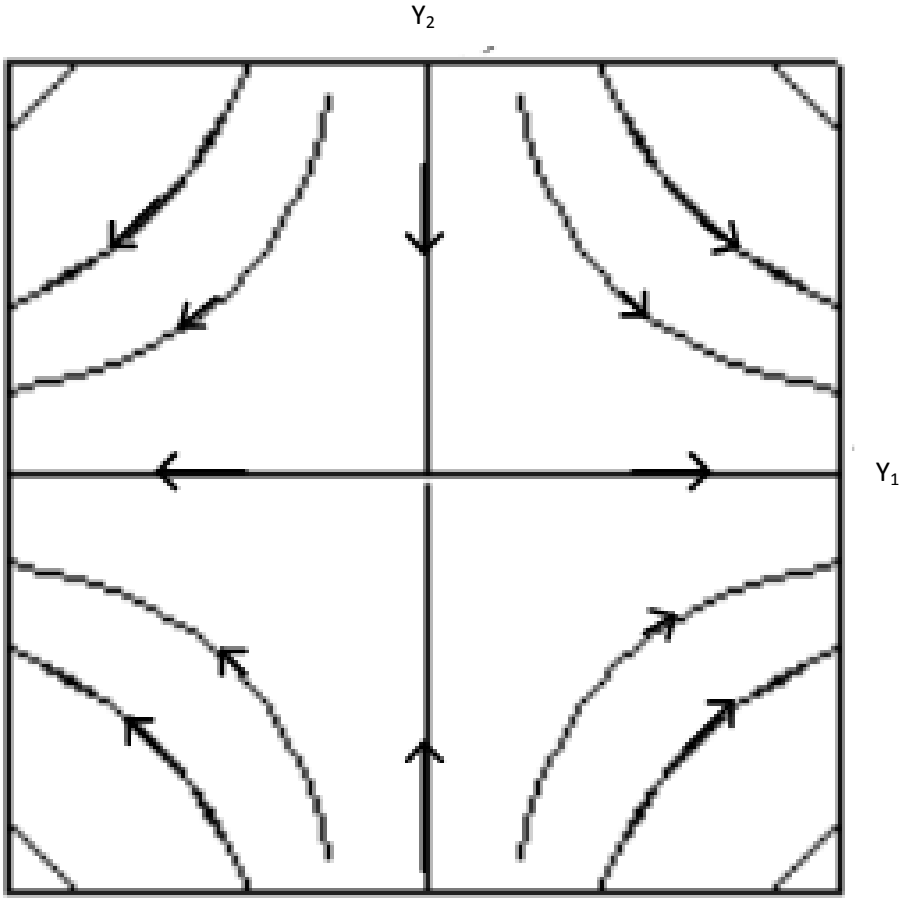


Figure 3 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque **A** possède deux valeurs propres réelles distinctes de signe opposé : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$; ou $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

⇒L'origine est **un point selle** (PS) ; les axes (Oy_1) et (Oy_2) sont appelés **les séparatrices** du point selle, car ces droites séparent le plan (y_1, y_2) en quatre « flots » de trajectoires différentes.

-La valeur propre double λ_0 :

On a deux cas, si A est diagonale ou non.

1)- A diagonalisable :

Le système canonique s'écrit : $\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_0 y_2 \end{cases}$ avec λ_0 non nul. Donc $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_0 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$.

On a $t = \frac{1}{\lambda_0} \ln \frac{y_2}{C_2}$ alors $y_1 = C_1 e^{\ln \frac{y_2}{C_2}} \Leftrightarrow y_1 = C_1 \frac{y_2}{C_2} = K\, y_2$ avec $K = C_1/C_2$.

Si $\lambda_0 > 0$, alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = +\infty \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = +\infty \end{cases}$ et le portrait de phase dans le plan (y_1, y_2) est le suivant, et on a une **étoile instable** :

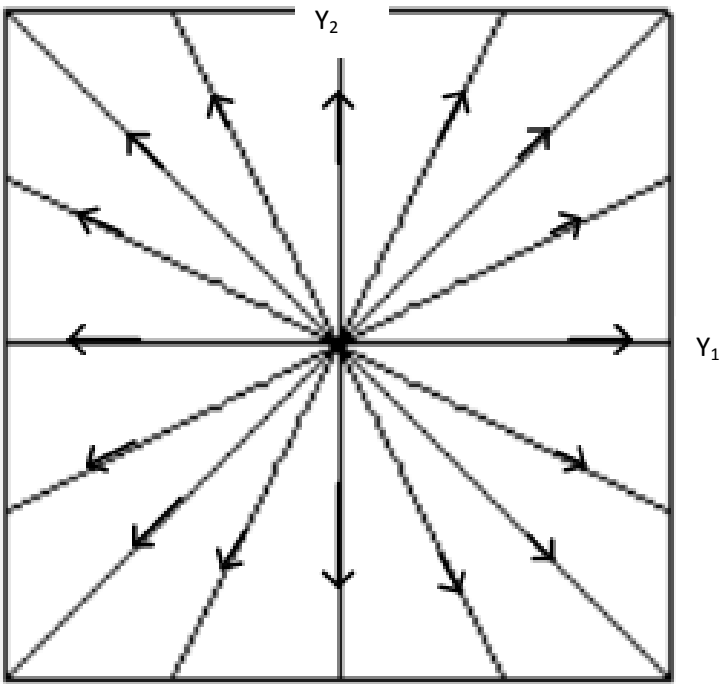


Figure 4 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque **A** diagonale possède une valeur propre double strictement positive.

➔ si $\lambda_0 < 0$ alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0 \end{cases}$ et le portrait de phase dans le plan (y_1, y_2) est ci-dessous , et on a une **étoile stable** :

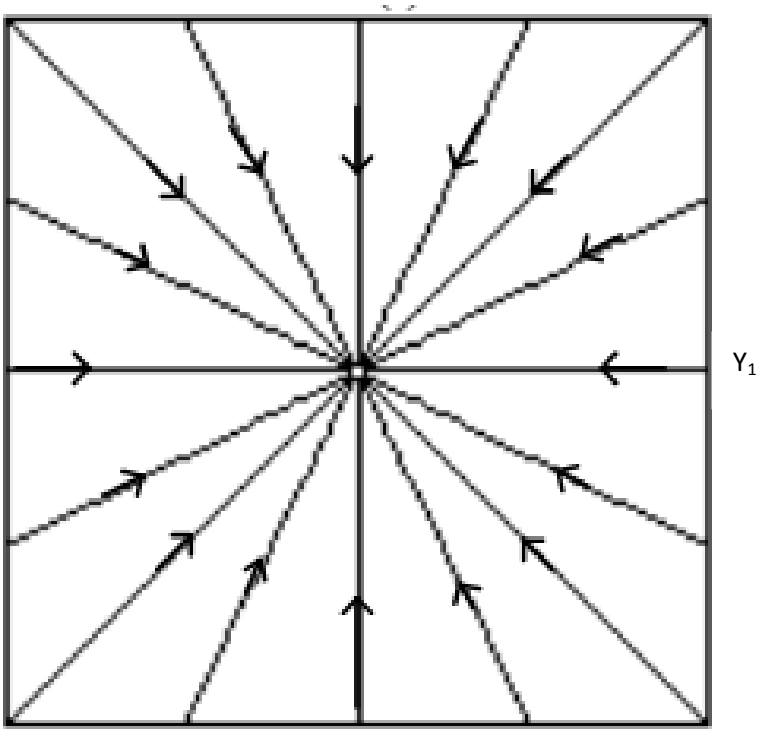


Figure 5 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque **A** diagonale possède une valeur propre double strictement négative.

2)- A non diagonalisable :

Le système canonique devient : $\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda_0 y_2 \end{cases}$ avec $\lambda_0$non nul.

Les solutions de ce système sont : $\begin{cases} y_1(t) = (C_1 + tC_2)e^{\lambda_0 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$

Donc si $\lambda_0 > 0$ alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = +\infty \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = +\infty \end{cases}$ et le portrait de phase toujours dans le plan (y_1, y_2) est :

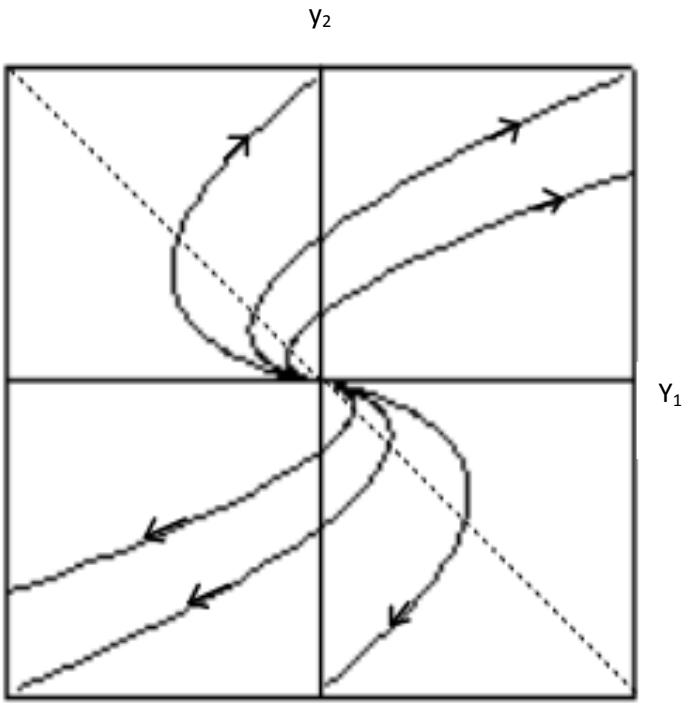


Figure 6 : Allure des trajectoires du système linéaire$\dot{X} = AX$, lorsque A non diagonale possède une valeur propre double strictement positive. La droite en pointillé a pour équation $\dot{y}_1 = 0$.

➔ L'origine est dans ce cas un **nœud dégénéré instable**. La droite à partir de laquelle les trajectoires changent de direction est la droite le long de laquelle les vecteurs vitesse sont verticaux, c'est-à-dire que cette droite correspond à l'isocline nulle $\dot{y}_1 = 0$. soit$\dot{y}_2 = -\lambda_0\, y_1$. Avec $\lambda_0 > 0$

Si $\lambda_0 < 0$ alors $\begin{cases} \lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0 \\ \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0 \end{cases}$ et le portrait de phase toujours dans le même plan (y_1, y_2) est le suivant et l'origine est **un nœud dégénéré stable**.

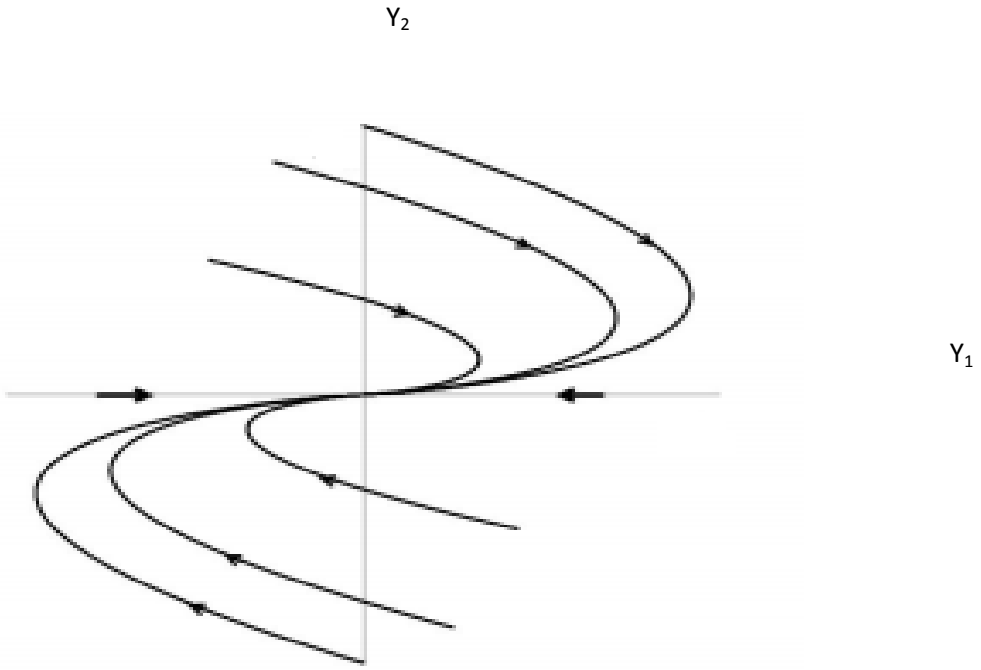


Figure 7 : Allure des trajectoires du système linéaire$\dot{X} = AX$, lorsque A non diagonale possède une valeur propre double strictement négative. La droite en pointillé a pour équation $\dot{y}_1 = 0$.

☻ -Deux valeurs complexes conjuguées :

D'après l'expression de la forme de Jordan dans le cas de valeurs propres complexes conjuguées, le système canonique est : $\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - \beta y_2 \\ \dot{y}_2 = \alpha y_1 + \beta y_2 \end{cases}$

On utilise les coordonnées polaires pour résoudre ce système, donc :

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\theta \\ y_2 = r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = {y^2}_1 + {y_2}^2 \\ \tan\theta = \frac{y_2}{y_1} \end{cases}$$

On dérive pour avoir : $\begin{cases} r\dot{r} = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 \\ \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dot{y}_2 y_1 - \dot{y}_1 y_2}{{y_1}^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0 \end{cases}$

Dans le plan (y_1, y_2) , les solutions correspondent donc à **des spirales** (sauf pour α = 0), qui s'éloignent ou se rapprochent du point (0,0) en fonction du signe de α , et dont le sens de rotation est donné par le signe de β .

Voir les portraits de phase possibles :

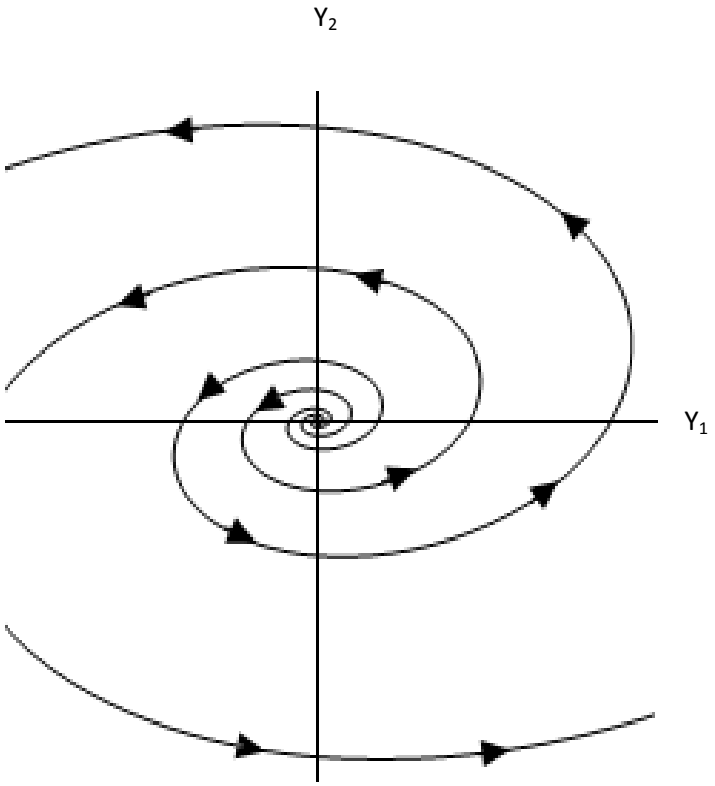


Figure 8 : Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque **A** possède des valeurs propres complexes conjuguées. $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

⇒l'origine est un **foyer instable** (**FI**) ou encore **spirale répulsive.**

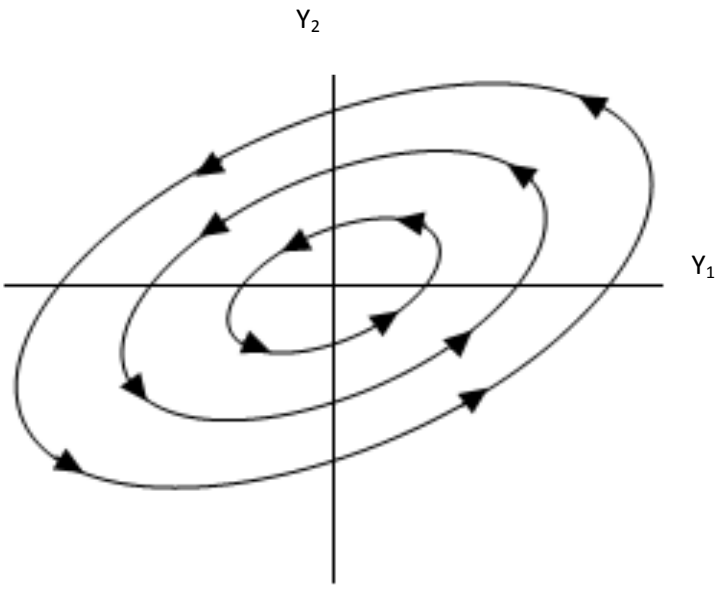


Figure 9 : Allure des trajectoires du système linéaire $\mathbf{X} = \mathbf{AX}$, lorsque $\mathbf{A}$ possède des valeurs propres complexes conjuguées. $\alpha = 0$ et $\beta > 0$.

➔ l'origine est un **centre.**

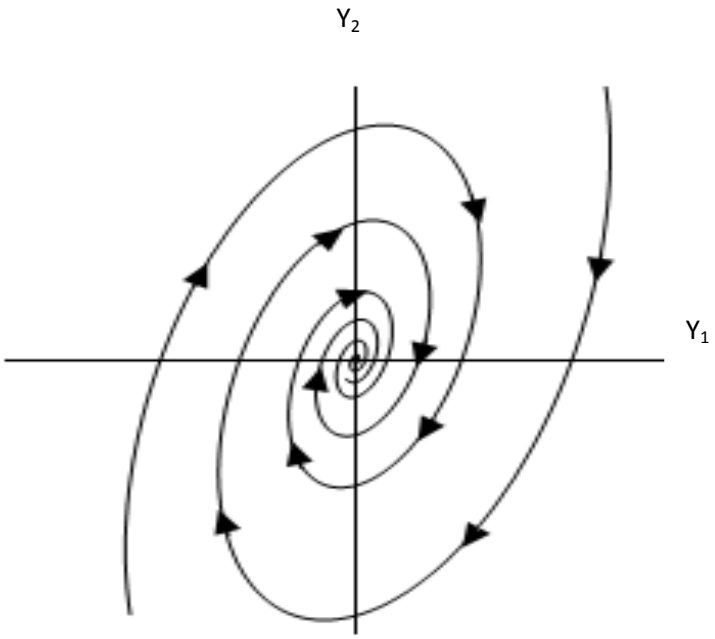


Figure 10 : (a) Allure des trajectoires du système linéaire $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$, lorsque $\mathbf{A}$ possède des valeurs propres complexes conjuguées; (b) Chroniques associées. $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.

➔ l'origine est un **foyer stable** (**FS**) ou encore **spirale attractante**.

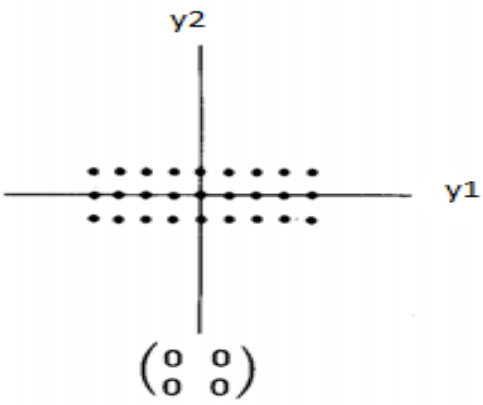
♥ Remarque : Dans le cas des centres, les trajectoires ne tendent jamais vers le point d'équilibre, mais restent dans son voisinage : on parle de **stabilité neutre**. Dans tous les autres cas de stabilité, il s'agit de **stabilité asymptotique**.

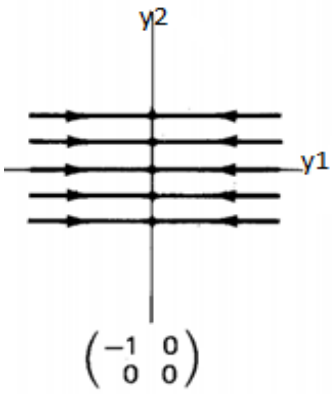
b- Si A n'est pas inversible :

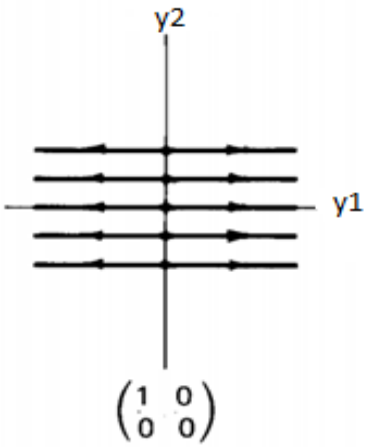
Dans ce cas, il faut regarder directement le portrait de phase pour savoir la nature d'origine.

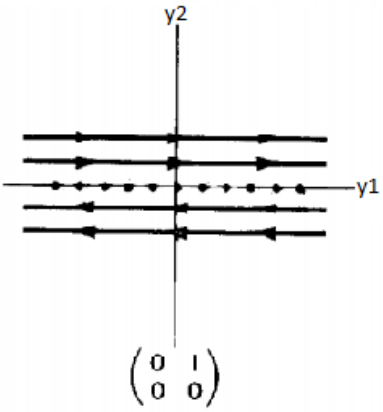
Lorsque A est non inversible, on aura deux possibilités $\begin{cases} rang(A) = 1 \\ ou \\ A\ est\ null \end{cases}$, pour le premier cas est une ligne de point fixe passant par l'origine, pour le deuxième cas, tous les points dans le plan se sont des points d'équilibres.

Par exemple :









C- Classes d'équivalence topologique :

Dans cette partie on va essayer de classer les portraits de phase des systèmes planaires linéaires en familles à l'intérieur desquelles les dynamiques sont qualitativement équivalentes.

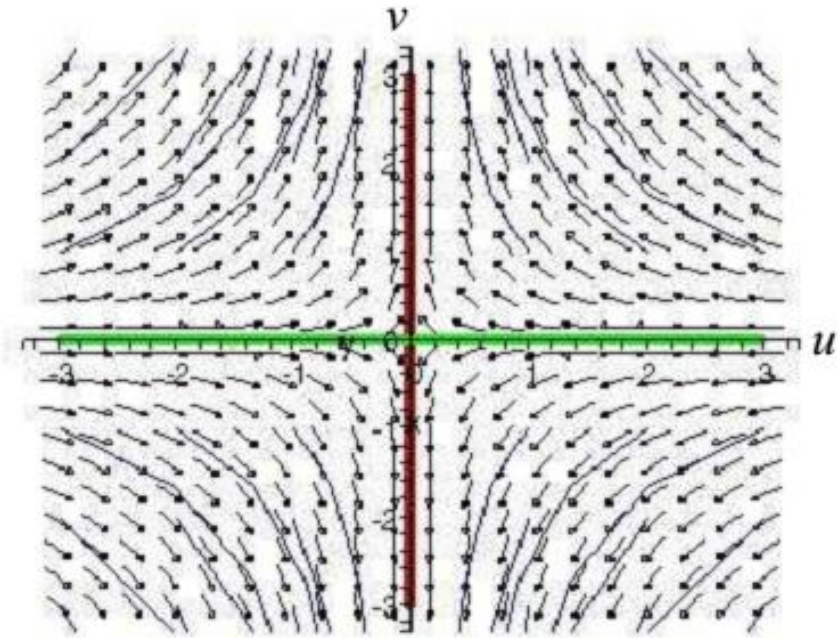
Soient les deux systèmes linéaires : $\begin{cases} \dot{X} = AX \ \ (1) \\ \dot{X} = BX \ \ (2) \end{cases}$

Définition :

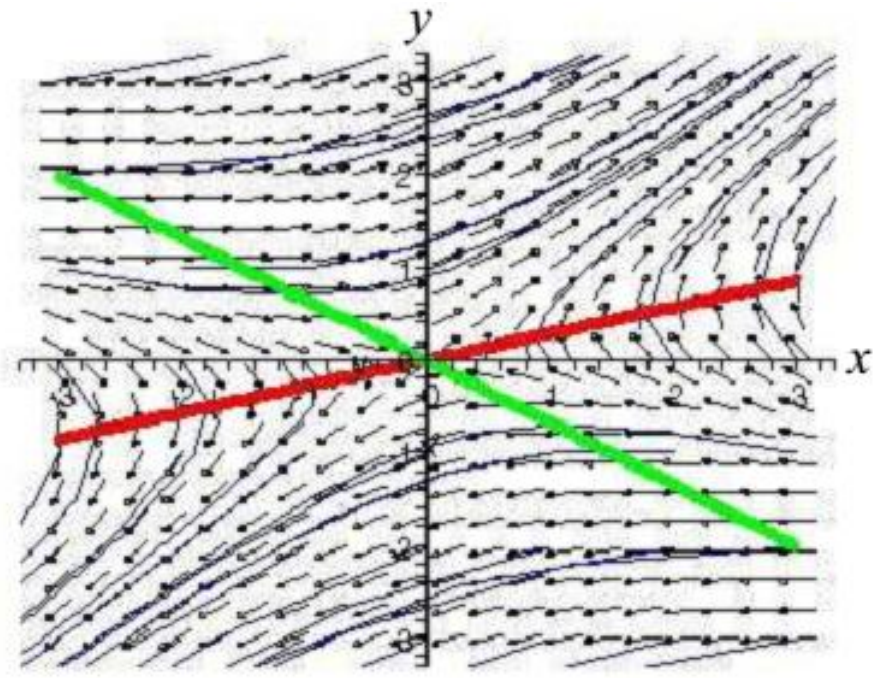
On dit que (1) et (2) sont topologiquement ou qualitativement équivalents s'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui transforme de manière bijective les trajectoires du système (1) en celles du système(2), tout en préservant le sens de variation du temps.

Exemple :

Soit A=$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ avec J=$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$



Représentation dans la base de Jordan.



Représentation dans la base de départ.

Définition :

Le point d'équilibre du système (1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point d'équilibre est dit non hyperbolique.

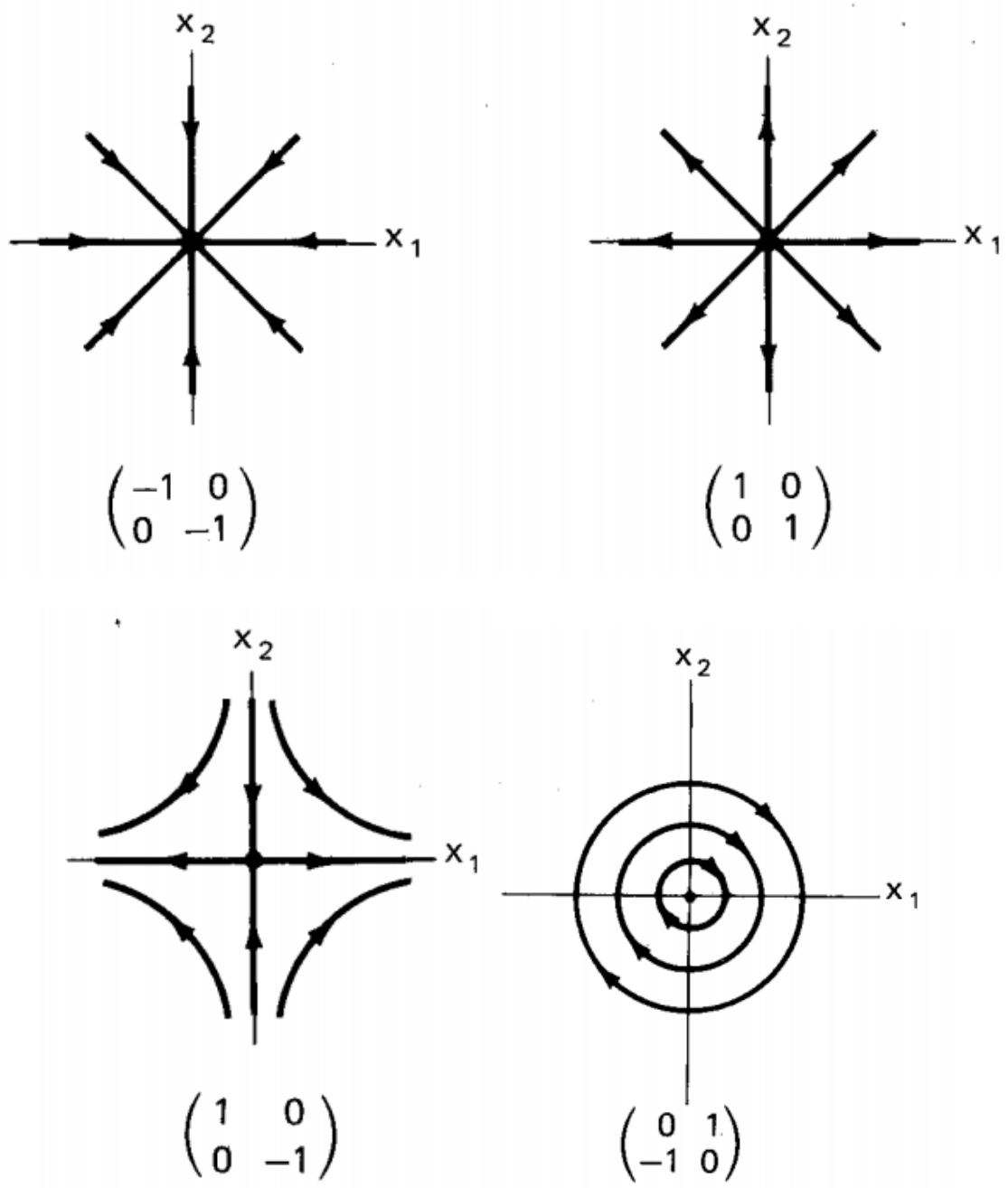
Théorème :

Supposons que les valeurs propres de A et B ont une partie réelle non nulle. Alors, les deux systèmes linéaires (1) et (2) sont topologiquement équivalents si et seulement si A et B ont le même nombre de valeurs propres avec des parties réelles de même signe.

En conséquence, on distingue trois classes d'équivalence topologique pour les systèmes linéaires planaires hyperboliques dont les représentants canoniques sont :

**deux valeurs propres négatives ➔ Nœuds, foyers et étoiles stables.
**deux valeurs propres positives ➔ Nœuds, foyers et étoiles instables.
**une valeur propre réelle positive et une négative ➔ point selle ou col.

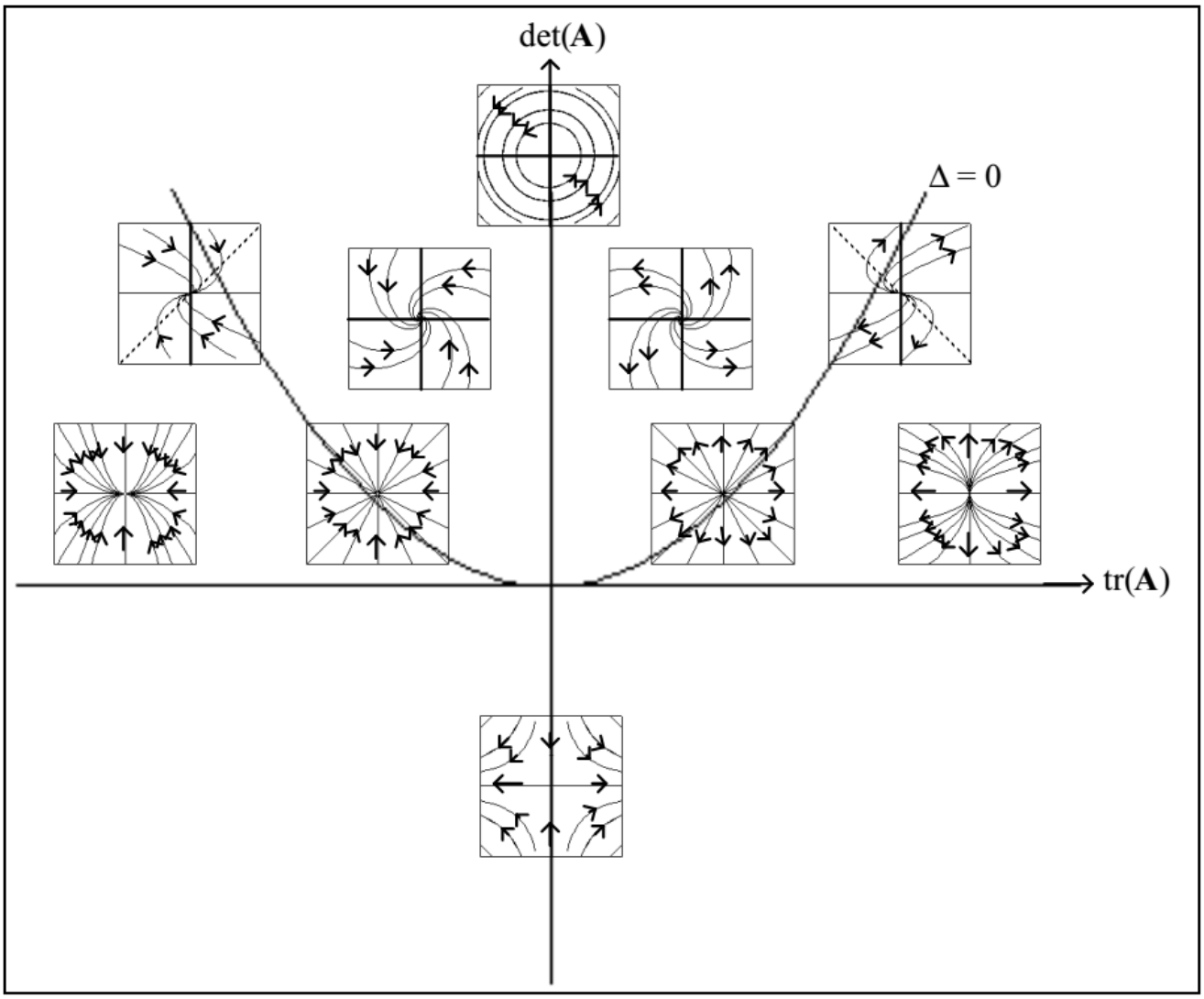
☻ - Les portraits de phase ci-dessous présentent les différentes classes d'équivalence topologiques des systèmes linéaires planaires :



D- <u>Typologie des solutions des systèmes linéaires dans le plan (tr,det) :</u>

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A , sont les solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$ avec det(A)=$\lambda_1\lambda_2$ et tr(A)=$\lambda_1 + \lambda_2$.
La nature des valeurs propres dépend de Δ=(tr(A))^2-det(A).

☻ On peut résumer cette typologie dans un plan (tr,det) suivant :



Dans ce plan on a l'équation Δ=0 c'est une parabole passant par l'origine et elle divise le plan en 2 parties .

Si $\Delta=0$, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ c'est-à-dire $\begin{cases} \det(A) = {\lambda_0}^2 \\ tr(A) = 2\lambda_0 \end{cases}$

Par conséquent, si λ_0 positive, on a une étoile ou un nœud instable sinon on a une étoile ou un nœud stable.

Si $\Delta > 0$, cette partie est divisée en 3 zones :

det(A)< 0 , les deux valeurs propres sont de signe opposé et l'origine est un point selle.

det(A)> 0 et tr(A)> 0 , les deux valeurs propres sont positives et l'origine est un nœud instable.

det(A)> 0 et tr(A)< 0, les deux valeurs propres sont négatives et l'origine est un nœud stable.

Si $\Delta < 0$, on a deux valeurs propres complexes conjuguées ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$) et on est dans la région au dessus de la parabole qui se partage aussi en 3 zones :

tr(A)>0 : α positif ➔ l'origine est un foyer instable.

tr(A)<0 :α négatif ➔ l'origine est un foyer stable.

tr(A)=0 :α=0 ➔ l'origine est un centre.

3- Etude des systèmes non linéaires :

A-Linéarisation au voisinage d'un point d' équilibre:

Par rapport à ce que nous avons traité dans la première partie (étude des systèmes linéaires), nous allons raisonner de manière locale au voisinage des points d'équilibre en utilisant la méthode de linéarisation.

Soit (a,b) un point d'équilibre du système dynamique $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ tel que :

$$\begin{cases} f(a,b) = 0 \\ g(a,b) = 0 \end{cases}$$

On utilise les coordonnées ou les variables locales : $\begin{cases} u(t) = x(t) - a \\ v(t) = y(t) - b \end{cases}$

On passe au voisinage de (a,b) et on applique un développement en série de Taylor au premier ordre des fonctions f et g :

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + R_1 \\ \dot{v} = \dot{y} = g(a,b) + (x-a)\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) + R_2 \end{cases}$$

Le système linearisé sera :

$\begin{cases} \dot{u} = a_{11}u + a_{12}v \\ \dot{v} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \Leftrightarrow \binom{\dot{u}}{\dot{v}} = A\binom{u}{v}$ Où A est la matrice Jacobienne.

A*=$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$: la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre (a,b).

Le systèmes $\dot{U} = A^{*}U$ est un système linéaire qui approxime le système de départ au voisinage du point d'équilibre (a,b). Ainsi, si un système possède plusieurs points d'équilibre, il y a aura autant de systèmes linaires que de points d'équilibre.

Exemple :

Soit (E) le système suivant : $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = cosx \end{cases}$

Ce système admet une infinité de points d'équilibre sur y=x : $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ avec k ∈ ℤ.

La matrice Jacobienne est : A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -sinx & 0 \end{pmatrix}$

On traite deux cas :

Si k est pair : A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et det(A)= -1< 0 ➔ (0,0) un point selle pour le système linéaire qui approche (E) au voisinage des points d'équilibre pour k pair : $\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = -u \end{cases}$

Si k est impair : A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, det(A)=1 > 0 et tr(A)=1> 0 alors (0,0) est un foyer instable pour le système linéaire qui approche (E) au voisinage des points d'équilibre pour k impair : $\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = u \end{cases}$

➔ On constate alors la parité de k influence sur le portrait de phase local, soit celui d'un point selle ou d'un foyer instable.

B-Théorème de linéarisation :

Théorème :

Soit le système non-linéaire $\dot{X} = F(X)$admettant un point d'équilibre (a,b) et tel que (detB) non nul , où **B** est la matrice Jacobienne associée au système au point(a,b) . Alors, dans un voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système $\dot{X} = F(X)$ et de sa forme linéarisée $\dot{U} = BU$ sont qualitativement équivalents, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

Exemple :

On considère les deux systèmes dynamiques suivant :

(1) $\begin{cases}\dot{x} = -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2)\end{cases}$ et (2) $\begin{cases}\dot{x} = -y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2+y^2)\end{cases}$

les deux systèmes ont le même point d'équilibre (0,0) et les matrices Jacobiennes se sont :

A1=$\begin{pmatrix}3x^2+y^2 & -1+2xy \\ 1+2xy & 3y^2+x^2\end{pmatrix}$ et A2=$\begin{pmatrix}-3x^2-y^2 & -1-2xy \\ 1-2xy & -3y^2-x^2\end{pmatrix}$

au point (0,0) : A1=A2=$B = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

➔ Les deux systèmes (1) et (2) ont la même partie linéaire au voisinage de (0,0)et on obtient tr(A)=0 et det(A)=1 c'est-à-dire les systèmes linéarisés correspondent aux centres.

Maintenant, on passe aux coordonnées polaires :

(1) Devient : $\begin{cases}\dot{r} = r^3 \\ \dot{\theta} = 1\end{cases}$ et (2) devient : $\begin{cases}\dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = 1\end{cases}$

Car $r^2=x^2+y^2$

On dérive et on obtient : $\dot{r}r = x\dot{x} + \dot{y}y$=x(-y+x$r^2$)+y(x+y$r^2$)=$r^2(x^2+y^2)=r^4$

Donc $\dot{r} = r^3$

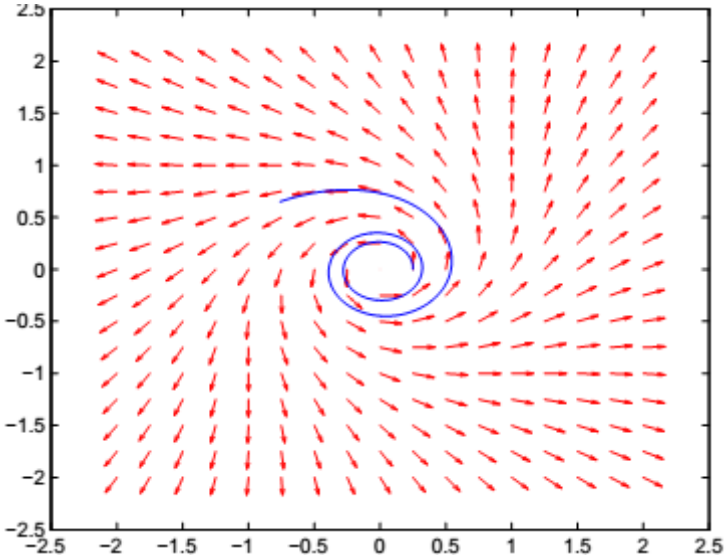
La même chose pour l'autre cas $\dot{r} = -r^3$.

On a tan$\theta = \frac{y}{x}$, on dérive pour avoir : $\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dot{y}x-\dot{x}y}{x^2}$

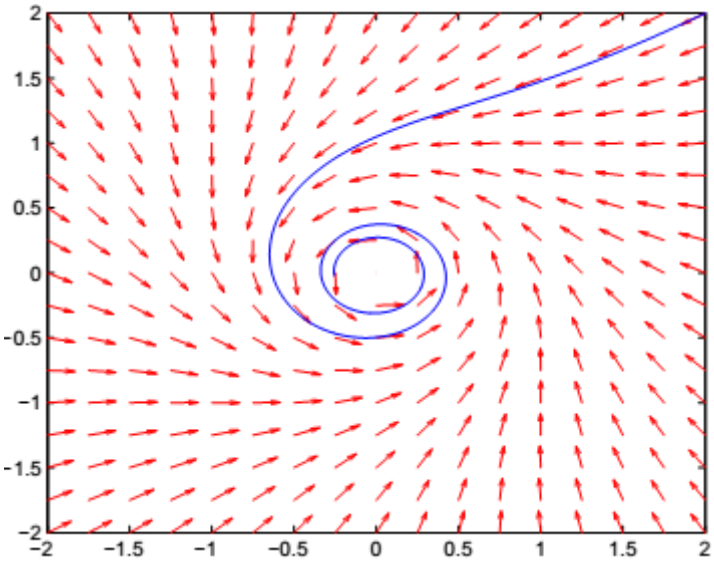
On remplace et on obtient : $\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{r^2}{r^2\cos^2\theta}$

Donc $\dot{\theta} = 1$

Dans le cas (1), quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires spirales en s'éloignant de l'origine qui est instable :



Dans le cas (2), quelles que soient les conditions initiales, les trajectoires spirales vers l'origine qui est asymptotiquement stable :



➔ Cet exemple montre bien que le portrait de phase local du système non linéaire ne correspond pas toujours à celui du système linéarisé.

Généralement un système non linéaire peut s'écrire sous la forme du somme de partie linéaire et partie non linéaire, comme dans cet exemple :

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}}_{\text{Partie Linéaire}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x\left(x^2+y^2\right) \\ y\left(x^2+y^2\right) \end{bmatrix}}_{\text{Partie non Linéaire}} \\ \dot{y} = \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}}_{\text{Partie Linéaire}} - \underbrace{\begin{bmatrix} x\left(x^2+y^2\right) \\ y\left(x^2+y^2\right) \end{bmatrix}}_{\text{Partie non Linéaire}} \\ \dot{y} = \end{cases}$$

Dans un voisinage du point d'équilibre, on dit que la partie linéaire est **perturbée** par la partie non linéaire. Dans le cas des nœuds, foyers et points selle, la partie linéaire est conservée par de petites perturbations, on dit que les nœuds, foyers et points selle sont **structurellement stables e** et le point d'équilibre est **hyperbolique**.

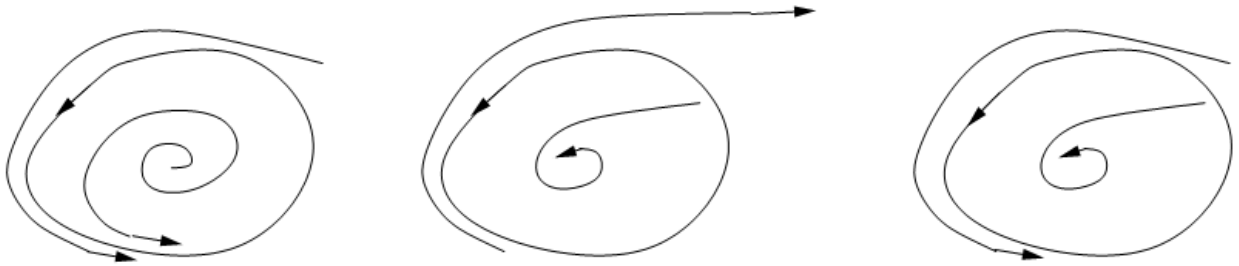
Par contre, les centres peuvent être détruits par de petites perturbations et on dit qu'ils sont **neutralement stables** et le point d'équilibre est **non hyperbolique**.

C-Cycle limite :

Définition :

Un cycle limite est une trajectoire fermée et isolée, où isolée signifie que ses trajectoires avoisinantes ne sont pas closes.

➔Si toutes les trajectoires avoisinantes convergent sur le cycle limite alors le cycle est dénommé stable ou attracteur. Autrement, le cycle est dénommé instable ou demi-stable :



cycle limite stable cycle limite instable cycle limite demi−stable

Les cycles limites stables sont très intéressants d'un point de vue scientifique puisque ils sont caractéristiques des systèmes qui montrent des oscillations stables et entretenues de manière autonome, c'est-à-dire le système oscille même en absence de forces périodiques externes.

Exemple :

On considère le système suivant : $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$

On passe aux coordonnés polaires (r,θ) , $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$

On dérive : $\dot{r}r = x\dot{x} + y\dot{y} = x\big(y + x(1 - r^2)\big) + y(-x + y(1 - r^2))$

$$= xy + x^2 - x^2r^2 - xy + y^2 - y^2r^2 = r^2(1 - r^2)$$

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

Et $\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2} = \frac{x\big(-x+y(1-r^2)\big)-y(y+x(1-r^2))}{x^2}$

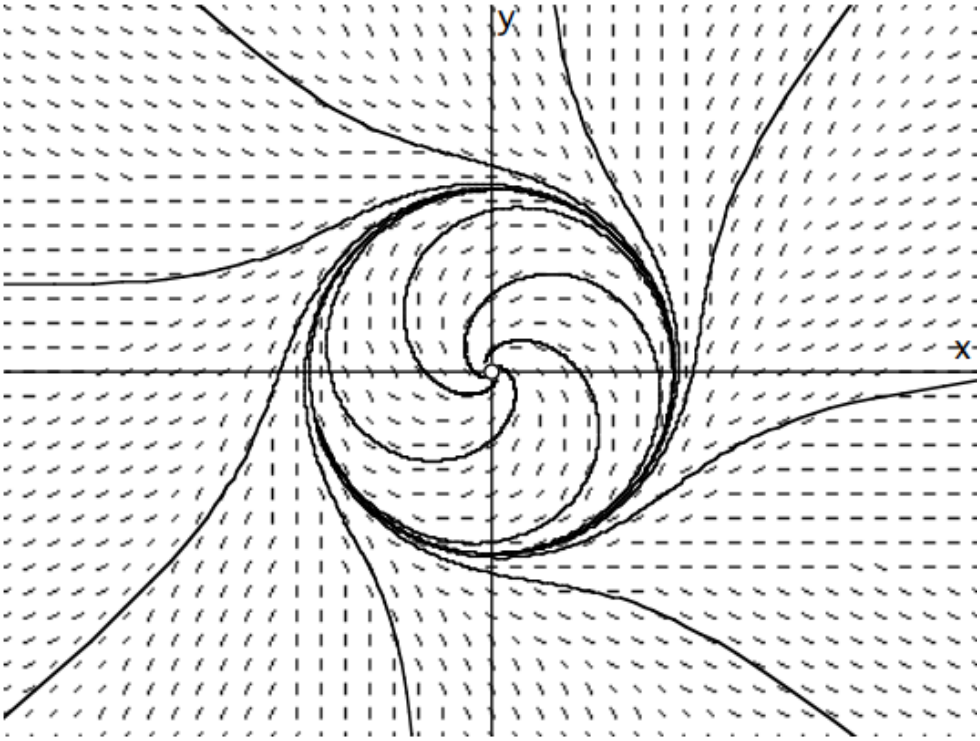
$$= \frac{-x^2-y^2}{r^2\cos^2\theta} = \frac{-r^2}{r^2\cos^2\theta}$$

$$\dot{\theta} = -1$$

Si $\dot{r} = 0$ on a r=1 ou r=0 car $r \geq 0$.

Alors $\begin{cases} \dot{r} > 0 \; pour \;\; 0 < r < 1 \\ \dot{r} < 0 \; pour \;\; r > 1 \\ \dot{\theta} < 0 \end{cases}$

Tous les trajectoires convergent vers la trajectoire r=1 lorsque t→ ∞. r=1 est un cycle limite stable de ce système :



Application (Modèle de compétition entre deux espèces) :

Compétition entre deux espèces c'est une interaction directe ou indirecte, de type compétition pour une ressource insuffisante pour deux espèces occupant une même niche écologique.

On va considérer deux populations x(t) et y(t) entrent en compétition pour des conditions limitées et on va ignorer tous les effets extérieurs. Avec l'absence de nourriture, la population x suit un modèle malthusien$\dot{x} = ax$. Mais normalement, le taux de croissance a est lié par x et y. On aura donc :$\dot{x} = x(a - bx - \sigma y)$

La même chose pour y : $\dot{y} = y(c - vx - dy)$

Pour comprendre la dynamique de ce système, il faut d'abord connaitre ses points d'équilibre.

$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ ➔ on trouve 4 points : (0,0) ;(0,c/d) ;(a/b,0) et ($\frac{\sigma c - ad}{v\sigma - bd}, \frac{av - bc}{v\sigma - bd}$).

On prend a=1=b=$\sigma = v$, c=3/4 et d=1/2 pour bien faciliter la compréhension. Donc le système sera :

$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y) = 0 \\ \dot{y} = y\left(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x\right) \end{cases}$ Les points d'équilibre sont : (0,0), (0,3/4) , (1,0) et (1/2,1/2).

La linéarisation aux points d'équilibre :

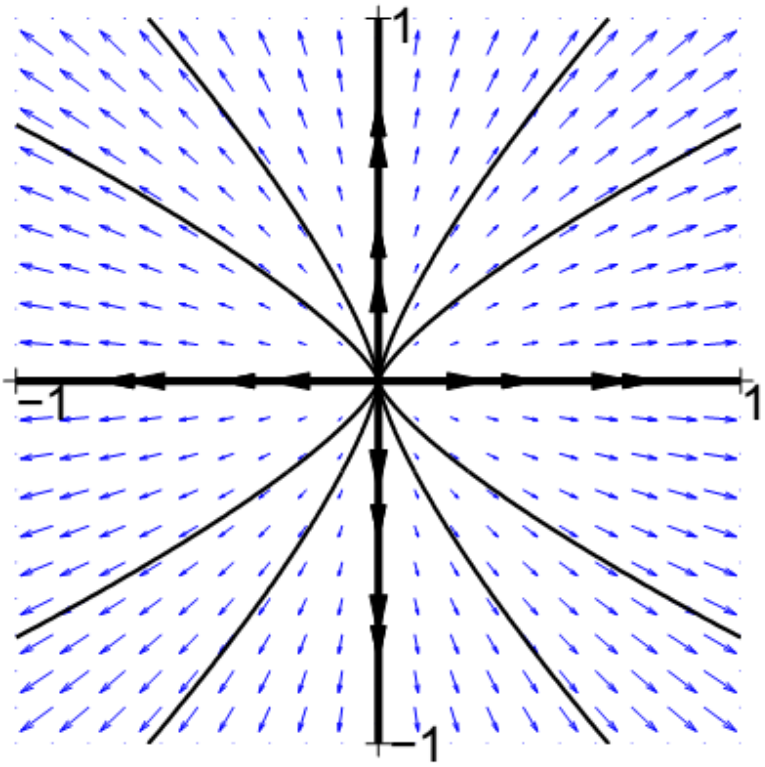
On a trouvé 4 points d'équilibre, alors on calcule leurs matrices Jacobiennes :

$$J=\begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -\frac{1}{2}y & \frac{3}{4} - 2y - \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

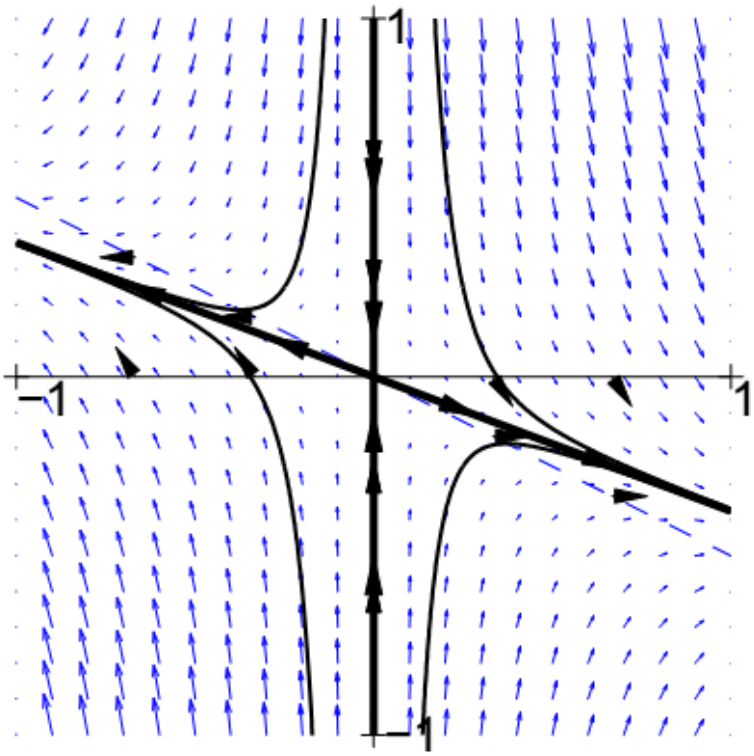
(1)Pour (0,0) ➔ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et (3) pour(1,0) ➔$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(2)Pour (0,3/4) ➔$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et (4) pour (1/2 ,1/2) ➔ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

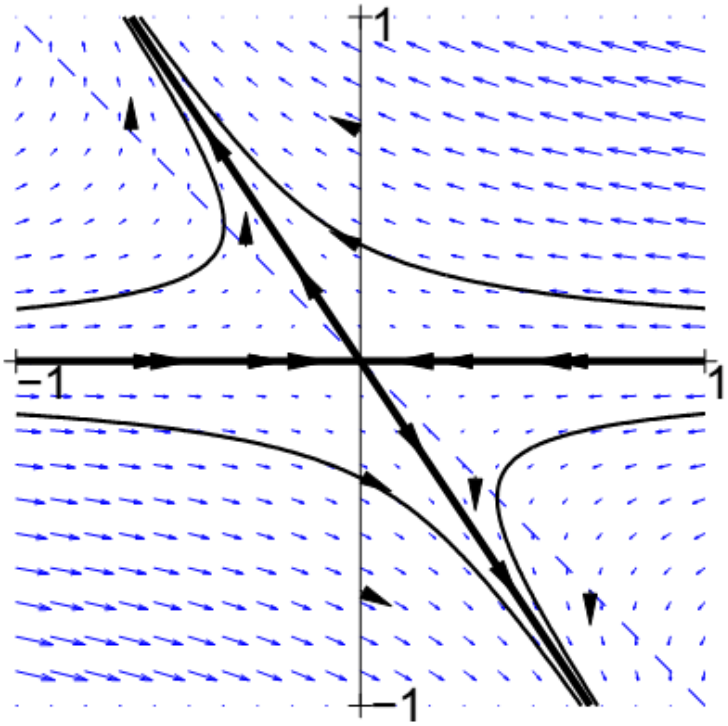
(1)➔ on a deux valeurs propres positives et les vecteurs propres sont : (0,1) et (1,0).Donc, on a un nœud instable. Le portrait de phase de linéarisation en (0,0) est :



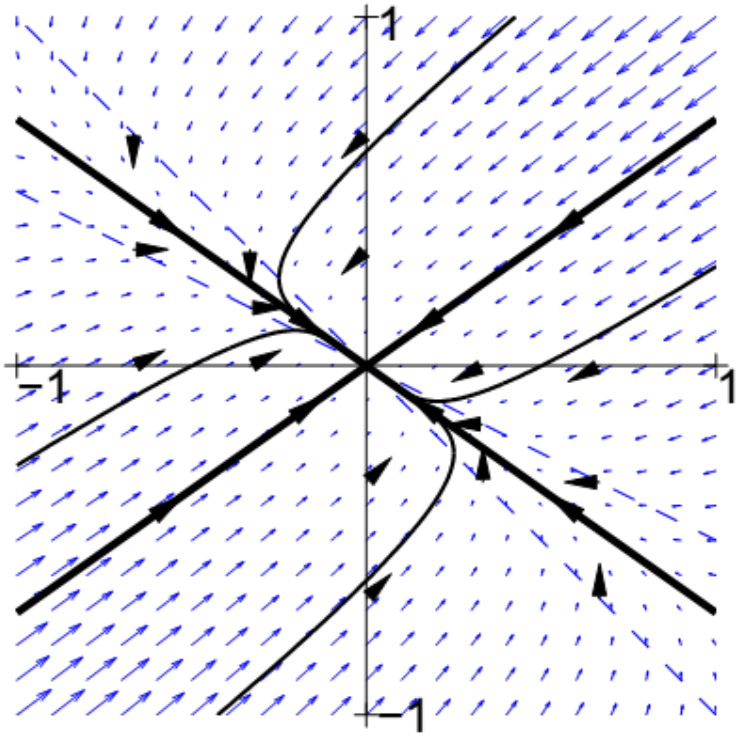
(2)➔ on a deux valeurs propres, une positive et l'autre négative et les vecteurs propres sont (1,-3/8)et (0 ,1). On a alors un point selle.
Le portrait de phase de linéarisation en ce point est ceci :



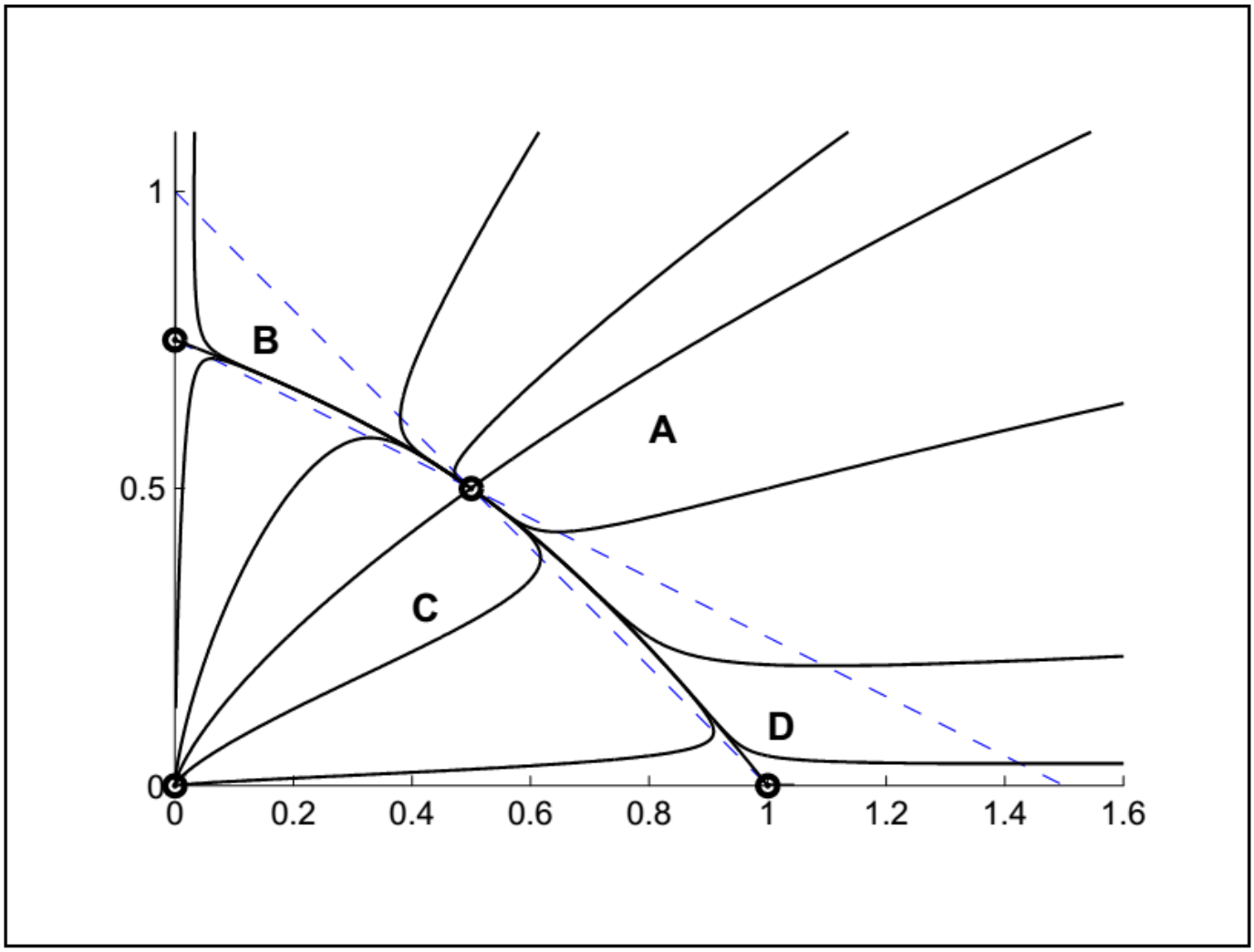
(3)➔ encore en ce point, on a un point selle. Les vecteurs propres sont : (1,0) et (1,-3/2).
Le portrait de phase est :



(4)➔les deux valeurs propres sont négatives et les vecteurs propres sont :
$(\sqrt{2},1)et\ (\sqrt{2},-1)$.
On a un nœud stable, le portrait de phase est :



Enfin, le portrait de phase du modèle de compétition entre deux espèces avec quelques solutions exactes est :



Dans la zone A , on a $\begin{cases} \dot{x} < 0 \\ \dot{y} < 0 \end{cases}$: toutes les trajectoires se déplacent vers le bas et vers la gauche, ce qui implique que les trajectoires traversent soit l'axe x ou y ou bien traverser les deux droites en pointillé qui forment la frontière entre (A et B) et (A et D). Mais les axes de coordonnées (Ox) et (Oy) sont eux-mêmes des solutions. Alors évidement chaque trajectoire commence en A doit passer par B ou D (autrement dit, il converge vers le point d'équilibre (1/2,1/2)).

Dans la zone B , on a $\begin{cases} \dot{x} > 0 \\ \dot{y} < 0 \end{cases}$: toutes les trajectoires se déplacent vers le bas et la droite. Elles ne peuvent pas dépasser les deux droites en pointillé car le champ de vecteur est dans B. Par conséquent, toutes les trajectoires de B doivent converger vers le point d'équilibre (1/2,1/2).

Dans la zone D , on a $\begin{cases} \dot{x} < 0 \\ \dot{y} > 0 \end{cases}$: toutes les trajectoires se déplacent vers le haut et vers la gauche mais elles ne peuvent pas traverser les deux droites en pointillé , alors elles convergent vers (1/2,1/2).

Dans la zone C , on a $\begin{cases} \dot{x} > 0 \\ \dot{y} > 0 \end{cases}$: toutes les trajectoires se déplacent vers le haut et vers la droite. Donc évidement elles traversent B et D sauf une trajectoire particulière dans C qui converge vers le point (1/2,1/2).

Conclusion : Ce modèle de population prédit que les deux espèces seront coexistées dans un équilibre stable.

Conclusion :

Au cours de notre étude plan de phase pour les systèmes dynamiques en dimension 2, qui permet de procéder à une discussion très claire, nous avons éliminé le contrainte temporelle dans l'étude de l'évolution d'un système, cela se montre particulièrement utile quand on compare par exemple la dépendance des solutions d'une équation différentielle à ses conditions initiales.

Nous avons aussi constaté que les cycles limites sont des phénomènes typiquement non linéaires qui ne peuvent pas avoir lieu dans un système linéaire car ce dernier peut avoir des orbites closes mais qui ne sont pas isolées.

Ainsi, nous avons traité le modèle de deux espèces partageant la même ressource (problème de population) qui évidement ne peuvent pas coexister (L'une va éliminer l'autre), sachant que les rencontres ont un effet instantané sur la mortalité des proies et sur la natalité des prédateurs.

Visiblement, il reste beaucoup à faire pour comprendre le rôle important que jouent les interactions dans la dynamique de population.

-Evolution de la taille.

-Coexistence de différentes espèces.

-Relation de prédation.

-Mécanisme d'interaction.

-stabilité des populations.

Bibliographie :

-d.k. arrowsmith and c.m. place (Ordinary differential equations).

-Jean louis pac (systemes dynamiques).

-Michael Vitus (Analysis of nonlinear system) winter 2007.

-http://www.math.polytechnique.fr/cmat/viterbo/Enseigt.html/Cours2008/Poly2008.pdf.