Sciences Fondamentales et Appliquées

Mémoire de Fin D'étude
POUR

L'obtention Du Diplôme Licence Science et Technique délivré par

Faculté De Science et Technique Fés

Spécialité "Mathématiques et Applications"

présentée et soutenue publiquement par

Youssef Tbatou

le 18 juin 2015

Formulations Mathématiques de certaines fonctions économiques: Analyse et Transcription

Encadrant du Mémoire : **Mohammed BELLAHMAR**
Co-encadrant du Mémoire : **Mohammed El khomssi**

Jurys

M. Mohammed Elkhomssi,	Professeur,FST-Fés
M. Abdelmajid HILALI,	Professeur,FST-Fés
M. Mohammed BELLAHMAR,	Professeur,FST-Fés

Faculté des Sciences et Techniques
Fès
2202 – Route d'Imouzzer, Fès, Maroc

MEMOIRE

Remerciements

Tout d'abord j'envoie mes remerciement à monsieur le professeur Mohammed Elkhomssi pour son encadrement et son soutien tout au long de la préparation de ce mémoire ; je lui exprime ma haute gratitude pour sa disponibilité, ses encouragements et ses conseils qui ont joué un rôle capital dans l'achèvement de ce travail.
Je suis très reconnaissant envers les membres du jury :M. Mohammed Elkhomssi, M. Abdelmajid HILALI et M. Mohammed BELLAHMAR pour le temps qu'ils m'ont consacré en examinant ce travail et le grand honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer autant que jury.

Table des matières

1 Les fonctions de bases : de l'utilité et demande de consommateur 4

1.1 Hypothèses de consommation et Préférence : 4

1.2 Fonction d utilité et utilité marginale : 5

1.2.1 Maximisation d'utilité et méthode de résolution[9] : 6

1.2.2 Maximisation d'utilité dans le temps et fonction temporelle[9],[1] : 9

1.3 Fonction de la demande individuelle et effets : 11

1.3.1 Fonction de la demande individuelle 11

1.3.2 Effet de substitution-effet revenu : 12

1.4 Fonction de la demande totale : 13

1.4.1 Élasticité-prix de la demande : 13

1.4.2 Les élasticité partielle de la demande : 15

2 Comportement du producteur[8] : 17

2.1 Ensemble de production et technologie : 17

2.1.1 Ensemble de production : 17

2.1.2 Les types de facteurs de production et relation avec le temps : 17

2.1.3 Propriétés sur les ensemble de production ou ordre technique : 18

2.1.4 Plan de production efficace : 18

2.2 Fonction de production ou technologie de production 18

2.2.1 Fonction de production en courte période : 18

2.2.2 Fonction de production en long période : 19

2.2.3 Fonction de production et comportement d'entreprise : 21

2.3 Les fonctions de coûts : 23

2.3.1 Fonction de coût en courte période : 23

2.3.2 Les fonctions de coût en long période : 25

2.4 Fonction D'offre : 26

3 L'équilibre du marché (partiel) 28

3.1 L'équilibre du marché en régime de concurrence parfaite : 28

3.2 Détermination du niveau d'équilibre : 29

3.3 La stabilité de l'équilibre : 32

Introduction

La microéconomie est une branche de l'économie qui analyse les comportements des individus ou des entreprises et leurs choix dans le domaine de la production, de la consommation, de la fixation des prix et des revenus. Elle analyse les comportements des agents économiques individuels (consommateurs et entreprises) et de leurs relations sur les différents marchés où s'échangent les produits et les facteurs de production.

Pour cela, la microéconomie s'appuie sur des modèles mathématiques : le consommateur possède ainsi une fonction d'utilité, et le producteur une fonction de production.
Le programme du producteur est de maximiser son profit sous contrainte de production, et celui du consommateur est de maximiser son utilité sous contrainte de son revenu.

L'objet de la microéconomie est en premier lieu l'étude du comportement supposé rationnel, des agents en termes de production et de consommation, ainsi que de la fixation des prix et des revenus.

En effet, le but de la microéconomie est de trouver l'équilibre de marché, autrement dit les prix et les revenus qui équilibrent l'offre et la demande sur le marché.
Au premier temps on va expliquer l'aspect économique modélisant les situations actuelles dans la société pour comprendre la microéconomie et on a étudier une analyse des variation des fonctions objectifs (économique), puis on va aborder l'aspect mathématique pour généraliser et affirmer tout ce qui est économique on se basant sur la modélisation des outils économiques par les écritures mathématiques, et en déduira une synthèse des formes économiques par des formulations mathématique.

Chapitre 1

Les fonctions de bases : de l'utilité et demande de consommateur

1.1 Hypothèses de consommation et Préférence :

considérons n produits forment un ensemble de consommation X, avec $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ associes des quantités $\{x_i \quad 1 \leq i \leq n\}$ et des prix $\{p_{x_i} \quad 1 \leq i \leq n\}$.

a)Relation de préférence :

Définition 1. *On considère la relation de préférence noté $\succsim$, c'est une relation binaire sur un ensemble X.*
La relation de préférence stricte $\succ$ est définie par :

$$x_i > x_j \iff X_i \succsim X_j \quad \textit{mais non} \quad X_j \succsim X_i$$

on dit que le produit X_i est strictement préféré au produit X_j.
La relation d'indifférence est définie par :

$$x_j \sim x_j \iff X_i \succsim X_j \quad \textit{et} \quad X_j \succsim X_i$$

on dit que le produit X_i est indifférent au produit X_j où les deux produits sont indifférents.
Exemple : *Soit un consommateur dispose d'un ensemble de produits.*
$X = \{X_1 = l'eau, X_2 = nourriture, X_3 = vêtements, X_4 = chocolat\}$ *avec des quantités respectivement* $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$
$X_1 \succ X_4$ *l'eau est strictement préféré au chocolat.*
$X_1 \succsim X_3$ *la nourriture est préférée aux vêtements.*
$X_1 \succsim X_2 \quad$ *et* $\quad X_2 \succsim X_1$ *l'eau est indifférent au nourriture.*

b)Hypothèses sur les préférences

Axiome 1. *La relation de préférence est complète $\iff \forall\ X_i, X_j \in X$ soit on a $X_i \succsim X_j$ soit $X_j \succsim X_i$ soit $X_i \succsim X_j \quad$ et $\quad X_j \succsim X_i$,*
c'est à dire que le consommateur peux toujours comparer entre deux produits (possibilité de comparer).

Axiome 2. *la relation de préférence est réflexive* $\iff \forall\ X_i \in X$ *on a* $X_i \succsim X_i$ *c'est à dire tout produit est au moins aussi désirable que lui-même.*

Axiome 3. *la relation de préférence est transitive* $\iff \forall\ X_i, X_j, X_k \in X$ *si* $X_i \succsim X_j$ *et* $X_j \succsim X_k \implies X_i \succsim X_k$.

Axiome 4. *la relation de préférence est continue* $\iff \forall\ X_i \in X$ *les ensembles* $\{\ X_j \in X / X_i \succsim X_j\ \}$ *et* $\{\ X_j \in X / X_j \succsim X_i\ \}$ *sont des fermés.*

Axiome 5. *la relation de préférence est faiblement monotone si* $x_i \geq x_j \implies X_i \succsim X_j$.

Axiome 6. *la relation de préférence est fortement monotone si* $x_i > x_j \implies X_i \succ X_j$.

Axiome 7. *la relation de préférence est convexe* $\iff \forall\ X_i, X_j, X_k \in X$ *et on a* $X_i \succsim X_j$ *et* $X_j \succsim X_k \implies \lambda X_i + (1-\lambda)X_j \succsim X_k\ \forall 0 \leq \lambda \leq 1$

Axiome 8. *la relation de préférence est convexe stricte* $\iff \forall\ X_i \neq X_j, X_k \in X$ *et on a* $X_i \succsim X_j$ *et* $X_j \succsim X_k \implies \lambda X_i + (1-\lambda)X_j \succ X_k\ \forall\ 0 \leq \lambda \leq 1$

1.2 Fonction d utilité et utilité marginale :

a)Fonction d'utilité :

Définition 2. *une relation de préférence* $\succsim$ *est dite rationnelle si elle est : complète, réflexive et transitive.*

Définition 3. *on considère un consommateur dont ces achats portent sur n produits* $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$*, la satisfaction éprouvée par le consommateur dépend des quantités des produits* $\{x_i \quad 1 \leq i \leq n\}$ *; alors on obtient une fonction des quantités consommés noté* $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *qui représente la relation de préférence et on a :* $\forall X_i, X_j \in X$
on a

$$X_i \succsim X_j \implies U(x_i) \geq U(x_j)$$

Théorème 1. *pour tout relation de préférence qui est rationnelle, continue et strictement croissante, il existe toujours une fonction d'utilité continue et strictement croissante qui la représente.*

Corollaire 1. *d'après l'axiome 6 si la relation de préférence* $\succsim$ *est monotone* $\implies$ *la fonction d utilité qui la représente est strictement croissante.*

Définition 4. *soit* $f : X \longrightarrow \mathfrak{R}$ *est quasi-concave* $\iff$ *on a* $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$.

Corollaire 2. *d'après l'axiome 7 si la relation de préférence* $\succsim$ *est strictement convexe* $\implies$ *la fonction d'utilité qui la représente est strictement quasi-concave.*

b) Utilité marginale : C'est l'accroissement de l'utilité par une augmentation infinitésimale de quantité x_i on supposons que tous les autres quantités $x_j = cte\ \forall j \neq i\ j = 1, 2, \ldots, n$ on a :

$$U_{m_{x_i}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h} = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

Taux marginale de substitution ou taux psychologique d'échange : pour un niveau donné de satisfaction peut être obtenu de différente combinaison de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, il est important de déterminer le taux auquel le consommateur est disposé a substituer entre les produits pour maintenir le même niveau d'utilité est donné par :
on a la fonction d utilité définie par :

$$U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

la différentielle totale est :

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i \in S_1} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i \in S_2} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i.$$

telle que

$$S_1 = \{i = 1, 2, \ldots, n / \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0\} \quad et \quad S_2 = \{i = 1, 2, \ldots, n / \frac{\partial U}{\partial x_i} < 0\}.$$

Supposons que la satisfaction procurée au consommateur est constante.

$$U = cte \implies dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i \in S_1} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i \in S_2} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = 0$$

$$\implies \sum_{i \in S_1} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = -\sum_{i \in S_2} \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i.$$

On a une augmentation des quantités consommés dont leur variation $dx_i > 0$, donc en résulte un gain d utilité.
Et en même temps on a une diminution des quantités consommés dont leur variation $dx_i < 0$, Donc en résulte une perte d utilité qui est en même valeur avec le gain de l'utilité on dit qu'on a une compensation d utilité.
Remarque : Lorsqu'on fixe $(n-2)$ quantités on peut étudier la possibilité de varier les deux quantités qui restants.
Donc on aura :
$\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et $k \neq i, j$ et

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}.$$

1.2.1 Maximisation d'utilité et méthode de résolution[9] :

a) Programmes sous contrainte : Le consommateur ou l'acheteur cherche toujours la plus grande satisfaction possible, dans ce cas le problème qu'il doit résoudre est la maximisation de sa fonction d'utilité. Ce consommateur ne peut pas acheter n'importe quelle quantités des produits $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ car son revenu est limité.
Soit R le revenu du consommateur et $(p_{x_1}, p_{x_2}, \ldots, p_{x_n})$ les prix des produits $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

soit i le taux d'intérêt périodique.
On suppose que le revenu et les prix sont constantes données dans ce cas on va avoir 3 types de problème a maximiser :
1) si le consommateur dépense la totalité de son revenu on obtient :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases}\max U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ S.C\\ R = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i}\end{cases}$$

2) si le consommateur fait un crédit pour atteindre sa satisfaction :

$$(\mathcal{P}_2)\begin{cases}\max U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ S.C\\ R < \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i}\end{cases}$$

3) si le consommateur épargne la différence et la dépenser plus tard :

$$(\mathcal{P}_3)\begin{cases}\max U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ S.C\\ R > \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i}\end{cases}$$

b) Méthode de résolution :

Méthode de substitution : On suppose que le consommateur dépense la totalité de son revenu :
donc on obtient l'équation budgétaire :

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i}.$$

Alors le problème mathématique à résoudre est :

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases}\max U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ S.C\\ R = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i}\end{cases}$$

1)Condition de premier ordre : Condition nécessaire de déterminer un maximum est :

$$x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \ldots, x_{0_n}) \quad est \quad un \quad point \quad critique \quad \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

2)Condition de deuxième ordre : La continuité des dérivés partielles d'ordre 2 peuvent dire que la matrice hessienne de f est une matrice symétrique est :

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial^2 x_1} \cdots\cdots \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Si la hessienne de $H_f(x_0)$ est définie $< 0 \implies x_0$ est un maximum local
Application :
si on a deux produit on a le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max U = f(x_1, x_2) \\ S.C \\ R = x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2} \end{cases}$$

solution :

Soit la hessienne de f est donné par : $H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & r \\ r & t \end{pmatrix}$

$si \quad st - r^2 < 0 \implies$ il s agit d'un maximum local.

b) Optimisation par la méthode de Lagrange : On considère la fonction L définie par :

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda[g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - R]$$

$$avec \quad g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{x_i} = R$$

λ : appelée multiplicateur de Lagrange

Conditions qui permettent d'avoir un maximum

on suppose que x_0 est un point critique

1)Condition de qualification de la contrainte : il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :
1) $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$ pour au moins un x_i telle que $i = 1, 2, \ldots, n$
2) la fonction g est linéaire

2)Condition de premier ordre : Supposons que les la contrainte de qualification est vérifié si le vecteur $x* = (x*_1, x*_2, \ldots, x*_n)$ est une solution de programme $\mathcal{P} \implies$ il existe un unique $\lambda*$ telle que $x* = (x*_1, x*_2, \ldots, x*_n)$ vérifie les $n+1$ conditions suivantes :
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x*, \lambda*) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial \lambda*}(x*, \lambda*) = 0$

3)Condition de deuxième ordre : On suppose qu'il existe un vecteur $x* = (x*_1, x*_2, \ldots, x*_n)$ qui vérifie les C.P.O
on a les $(n+1)$ mineurs principaux diagonaux D_k de la matrice hessienne bordé du la lagrangien $H_L(x*, \lambda*)$ évaluée a l'optimum soit alternativement négative $(k \quad impaire)$ et positive $(k \quad paire) \iff H_L(x*, \lambda*)$ est définie négative $\implies x* = (x*_1, x*_2, \ldots, x*_n)$ est un maximum local.

1.2.2 Maximisation d'utilité dans le temps et fonction temporelle[9],[1] :

Maintenait on suppose qu'on a N périodes dont le consommateur effectue son dépense avec des différentes maniérés :
1) si le consommateur ne dépense pas la totalité de son revenu périodique on obtient alors un épargne d argent et nous donne :
si $R_k > c_k \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots, n$ alors on a :

$$\sum_{k=1}^{N} R_k + \sum_{k=1}^{N} (R_k - C_k)(1+i)^{N-k} = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

2) si le consommateur ne dépense plus que son revenu périodique don il va faire des empruntes pour effectuer ses achats :
si $R_k < C_k \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots, n$ alors on a

$$\sum_{k=1}^{N} R_k - \sum_{k=1}^{N} (C_k - R_k)(1+i)^{N-k} = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

3) si le consommateur ne dépense la totalité de son revenu périodique on obtient alors :
si $R_k = C_k \quad pour \quad k = 1, 2, \ldots, n$ alors on a

$$\sum_{k=1}^{N} R_k = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

$\Longrightarrow$ d'après les trois equations précédentes on résume en une seule equation :

$$\sum_{k=1}^{N} R_k(1 + (1+i)^{N-k}) = \sum_{k=1}^{N} C_k(1 + (1+i)^{N-k})$$

a) Fonction temporelle d'utilité : Soit un consommateur dispose de n dépenses sur n produit au N période ; on obtient une fonction d'utilité qui dépend des dépenses considéré on obtient une fonction définie par :

$$U = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

la dépense d'un produit X_i est définie par :

$$c_i = x_i p_{x_i}$$

de même raisonnement pour la première partie on obtient

Utilité marginale : C'est l'accroissement de l'utilité par une augmentation infinitésimale de dépense c_i, on supposons que tous les autres dépenses $c_j = cte \ \forall j \neq i \quad j = 1, 2, \ldots, n$ on a :

$$U_{m_{c_i}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, \ldots, c_i + h, \ldots, c_n) - f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{h} = \frac{\partial f(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{\partial c_i} = \frac{\partial U}{\partial c_i}$$

Taux marginale de substitution ou taux psychologique d'échange : pour un niveau donné de satisfaction peut être obtenu de différente combinaison de $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, il est important de déterminer le taux auquel le consommateur est disposé a substituer entre les produits pour maintenir le même niveau d'utilité est donné par :
On a la fonction d utilité définie par :

$$U = f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

la différentielle totale est :

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i = \sum_{i \in S_1} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i + \sum_{i \in S_2} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i$$

telle que

$$S_1 = \{i = 1, 2, \ldots, n / \frac{\partial U}{\partial c_i} > 0\} \quad et \quad S_2 = \{i = 1, 2, \ldots, n / \frac{\partial U}{\partial c_i} < 0\}$$

Supposons que la satisfaction procurée au consommateur est Constante

$$U = cte \implies dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i = \sum_{i \in S_1} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i + \sum_{i \in S_2} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i = 0$$

$$\implies \sum_{i \in S_1} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i = -\sum_{i \in S_2} \frac{\partial U}{\partial c_i} dc_i$$

On a une augmentation des dépenses qui ont une variation $dc_i > 0$ qui correspond un gain d'utilité au fur et à mesure une diminution des dépenses qui ont une variation $dc_i < 0$ donc en résulte une perte d'utilité qui est en même valeur avec le gain de l'utilité on dit qu'on a une compensation d'utilité.
Remarque : Lorsqu'on fixe $(n-2)$ dépenses on peut étudier la possibilité de varier les deux dépenses qui restants.
Donc on aura :
$\frac{\partial U}{\partial c_k} = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et $k \neq i, j$ et

$$dU = \frac{\partial U}{\partial c_i} + \frac{\partial U}{\partial c_j} = 0$$

donc

$$\frac{\partial U}{\partial c_i} = -\frac{\partial U}{\partial c_j}$$

b) Maximisation d'utilité dans le temps : Nous somme maintenant en mesure de déterminer la combinaison temporelle des dépenses que le consommateur décidera d'adopter pour maximiser sa fonction d'utilité dans le temps.Dans cela on consiste a repartir les dépenses totales de consommation entre les différentes périodes et on obtient le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max U = f(c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ S.C \\ \sum_{k=1}^{N} R_k(1 + (1+i)^{N-k}) = \sum_{k=1}^{n} C_k(1 + (1+i)^{N-k}) \end{cases}$$

Résolution par la méthode de lagrangien : on considère la fonction L définie par :

$$L(c_{1,2},\ldots,c_n,\lambda)=f(c_1,c_2,\ldots,c_n)+\lambda[g(c_1,c_2,\ldots,c_n)-\sum_{k=1}^{n}R_k(1+(1+i)^{n-k}]$$

$$avec \quad g(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\sum_{k=1}^{N}C_k(1+(1+i)^{N-k})$$

λ :appelée multiplicateur de Lagrange

Conditions qui permettent d'avoir un maximum

on suppose que c_0 est un point critique

1)Condition de qualification de la contrainte : il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :
1) $\frac{\partial g}{\partial c_i}(c_0)\neq 0$ pour au moins un c_i telle que $i=1,2,\ldots,n$
2) la fonction g est linéaire

2)Condition de premier ordre : supposons que les la contrainte de qualification est vérifié si le vecteur $c*=(c*_1,c*_2,\ldots,c*_n)$ est une solution de programme $\mathcal{P} \implies$ il existe un unique $\lambda*$ telle que $c*=(c*_1,c*_2,\ldots,c*_n)$ vérifie les $n+1$ conditions suivantes :
$\frac{\partial f}{\partial c_i}(c*,\lambda*)=0$
$\frac{\partial f}{\partial \lambda*}(c*,\lambda*)=0$

3)Condition de deuxième ordre : On suppose qu'il existe un vecteur $c*=(c*_1,c*_2,\ldots,c*_n)$ qui vérifie les C.P.O
on a les $(n+1)$ mineurs principaux diagonaux D_k de la matrice hessienne bordé du la lagrangien $H_L(c*,\lambda*)$ évaluée à l'optimum soit alternativement négative $(k \quad impaire)$ et positive $(k \quad paire) \iff H_L(c*,\lambda*)$ est définie négative $\implies$ $c*=(c*_1,c*_2,\ldots,c*_n)$ est un maximum local.

1.3 Fonction de la demande individuelle et effets :

1.3.1 Fonction de la demande individuelle

On considère un consommateur porte sur n produit $X=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ avec des quantités $\{x_i \quad 1\leq i\leq n\}$ et des prix $\{p_{x_i} \quad 1\leq i\leq n\}$ et porte sur un revenu R.
La demande du consommateur pour un produit c'est la quantité de ce produit demandé par le consommateur ou l'acheteur qui est dépend de prix de ce produit et des autre produit et le revenu du consommateur.
La fonction de la demande d un produit X_i est définie par :

$$x_i=f_i(p_{x_1},p_{x_2},\ldots,p_{x_n},R)$$

Soit $R=\sum_{i=1}^{n}x_ip_{x_i}$

on admettons que les autre prix p_{x_j} sont constantes pour $j \neq i \quad j = 1, 2, \ldots, n$
donc on aura la fonction de demande du produit x_i définie par :

pour chaque produit X_i on a :

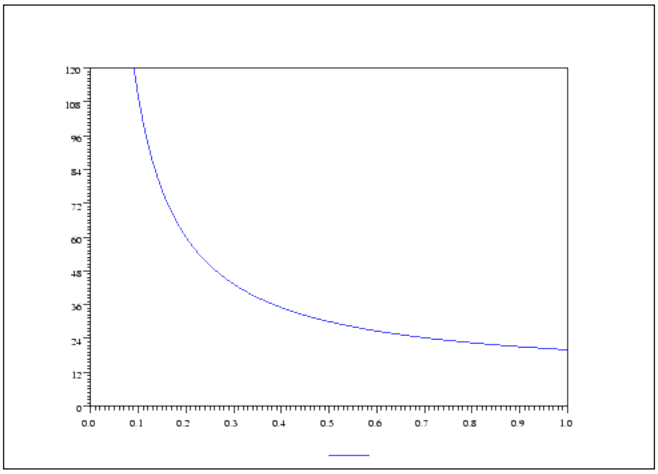
$$x_i = \frac{R - \sum_{j=1_{j \neq i}}^{n} x_j p_{x_j}}{p_{x_i}}$$

$\Longleftrightarrow$

$$x_i = \frac{a}{p_{x_i}} \quad avec \quad a = \frac{R - \sum_{j=1_{j \neq i}}^{n} x_j p_{x_j}}{p_{x_i}} = cte$$

donc

$$x_i = f(p_{x_i})$$



On remarque que la fonction de demande est décroissante de prix.
Si le prix est plus élevé la demande ou la quantité de produit demandé diminue et vice versa.

1.3.2 Effet de substitution-effet revenu :

pour toute variation des prix des produits consommés ou de revenu du consommateur, modifie la structure des dépenses de l'individu qui cherche à maximiser sa satisfaction. Pour cela on utilise deux concept :

Effet de substitution : exprime le taux auquel le consommateur substitue le bien X_i aux autre produits lorsque le prix p_{x_i} du produit X_i se modifie.

$$dU = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{k=1, k \neq i}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dx_i}$$

Effet revenu : Exprime la réaction du consommateur concernant les achats du bien X_i lorsque son revenu se modifie et les prix restent constantes.
La somme de deux effets traduit : "la réaction d'ensemble du consommateur en se qui concerne les achats du produit X_i lorsque le prix p_{x_i} change.

Conclusion : la demande varie au sens inverse du prix
l'augmentation de prix d'un produit provoque une diminution de sa demande.

1.4 Fonction de la demande totale :

Considérons maintenant un marché constitué de n produit$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ avec des quantités $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et des prix $(p_{x_1}, p_{x_2}, \ldots, p_{x_n})$ et m consommateur.
La demande du j^{ieme} consommateur de produit X_i est donné par :

$$D_{ij} = x_{ij} = f_j(p_{x_i})$$

La demande totale de produit X_i dans un marché est donné par :

$$D_i = \sum_{j=1}^{m} D_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} f_j(p_{x_i})$$

1.4.1 Élasticité-prix de la demande :

Définition 5. *la fonction de demande est décroissante de son prix, on précise son mode de décroissance. Cette information est utile pour les vendeurs qui se pressentant sur un marché. Elle concerne donc principalement la demande totale de de tout les consommateurs du produit considéré. Cette demande peut être plus au moins sensible a une modification du prix, pour la mesurer les économistes utilisent le concept d'élasticité de la demande par rapport au prix :*
étant la fonction :

$$D = \sum_{j=1}^{m} D_j = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} f_j(p_{x_i})$$

soit D_i la demande ou quantité demandé du produit X_i avec un prix :
donc l'élasticité-prix de la fonction de demande est définie par le rapport au prixp_{x_i} de produit X_i comme étant la limite du rapport de l'accroissement relatif de D_i à l'accroissement relatif de p_{x_i} lorsque l'accroissement de prix tend vers zéro

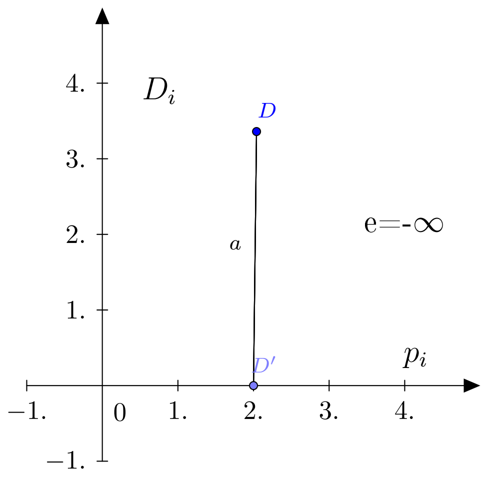
$$e_{D_i/p_{x_i}} = \lim_{\Delta p_{x_i} \to 0} \frac{\frac{\Delta D_i}{D_i}}{\frac{\Delta p_{x_i}}{p_{x_i}}} = \frac{p_{x_i}}{D_i} \quad \frac{dD_i}{dp_{x_i}}$$

On a D_i est une fonction décroissante $\Longrightarrow$ $dD_i < 0$

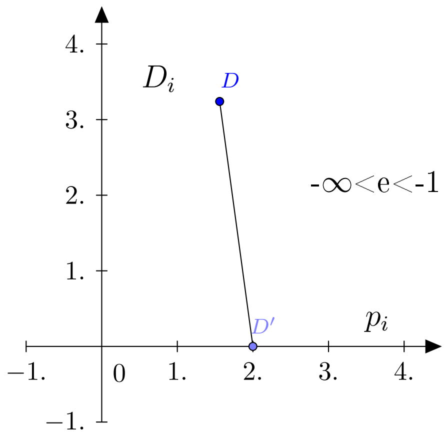
$$\Longrightarrow \quad e_{D_i/p_{x_i}} < 0$$

1)Les différentes cas d'élasticité-prix :

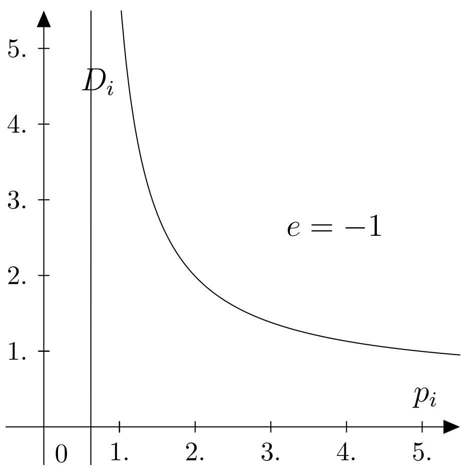
Élasticité de la demande parfaitement élastique : Lorsqu'une variation infinitésimale du prix provoque une variation infiniment grande de la quantité demandé.



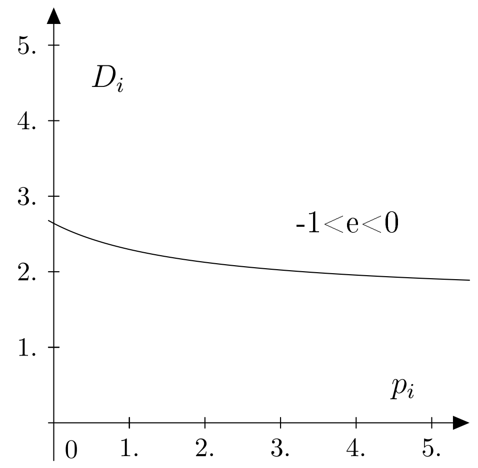
2)Élasticité de la demande relativement élastique : Lorsqu'une variation donné du prix correspond une variation finie,mais plus que proportionnelle de la quantité demandé.



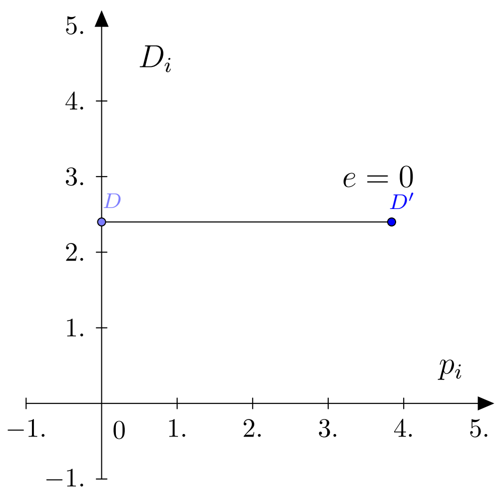
3) Élasticité de la demande unitaire : lorsqu'une modification du prix entraine une modification proportionnelle de la quantité. la valeur algébrique de l'élasticité égale a -1 et la courbe de demande a la forme d'une hyperbole équilatère



4) Élasticité de la demande relativement inélastique : Lorsqu'au la variation du prix correspond une modification moins que proportionnelle de la quantité demandé.



5)Élasticité de la demande parfaitement inélastique : Lorsqu'un changement du prix ne provoque aucun modification de la quantité demande. La demande totalement insensible aux variation du prix



1.4.2 Les élasticité partielle de la demande :

Élasticité partielle directe de la demande d'un produit : C'est la proportion % de l'augmentation ou diminution de la demande de produit X_i lorsque son prix p_{x_i} augmente de 1% que les autres prix ne change pas.

$$e_{D_i/p_{x_i}} = \frac{\partial D_i}{\partial p_{x_i}} \frac{p_{x_i}}{D_i}$$

Élasticité partielle croisée directe de la demande d'un produit : C'est la proportion % de l'augmentation ou diminution de la demande de produit X_i lorsque le prix d'un autre produit augmente de 1% alors que le $p_{x_i} = cte$

$$e_{D_i/p_{x_j}} = \frac{\partial D_i}{\partial p_{x_j}} \frac{p_{x_j}}{D_i}$$

remarque : si $e_{D_i/p_{x_j}} > 0$ c'est à dire p_{x_j} augmente $\implies$ D_i augmente
on dit que X_i X_j sont concurrentes ou substituables l'un a l'autre.
si $e_{D_i/p_{x_j}} < 0$ c'est à dire p_{x_j} diminue $\implies$ D_i diminue
on dit que X_i et X_j sont complémentaire.

Élasticité-revenu de la demande C'est la proportion % de la quantité demandé du produit X_i résultant d'une variation de 1% du revenu.

$$e_{D_i/R} = \frac{\partial D_i}{\partial R} \frac{R}{D_i}$$

Remarque :
Si $e_{D_i/R} > 0$, on dit pour X_i est produit normal mais on a deux cas possible
type 1 : si $e_{D_i/R} > 1$ on dit que X_i est produit de luxe ou de confort
type 2 : si $0 < e_{D_i/R} < 1$ on dit que X_i est produit de première nécessité ou subsistance
si $e_{D_i/R} < 0$,on dit pour X_i est produit de bien inférieur.

Conclusion : Le comportement du consommateur rationnel s'analyse *à* partir de la maximisation d'une fonction d'utilité, qui dépend des quantités de ses produits désirés. Toute composante de solution optimale est varie en sens inverse du prix de chaque produit.

Chapitre 2

Comportement du producteur[8] :

Préliminaire :comment produire ? La production d'une entreprise est un processus de transformation des ressources les facteurs de production" (inputs) en différentes produits (outputs).

2.1 Ensemble de production et technologie :

2.1.1 Ensemble de production :

Soit une entreprise dispose m facteurs de production (inputs) $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ avec des quantités $\{a_i \quad 1 \leq i \leq n\}$ et fabrique n produits $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ avec des différentes quantités $\{x_i \quad 1 \leq i \leq n\}$
output net= la quantité du produit-la quantité consommé.

Définition 6. *Plan de production est définie par :*
• *liste des outputs nets des différentes produits :* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$
• *liste des inputs (facteurs de production) :* $A = (A_1, A_2, \ldots, A_m)$
on note $P = (X_1, X_2, \ldots, X_n, A_1, A_2, \ldots, A_m) = (X, A)$ *le plan de production*

Définition 7. *L'ensemble de tout les plans de production réalisable (techniquement possible) est appelé ensemble de production de la firme.*

Remarque : chaque production aura son ensemble de production

2.1.2 Les types de facteurs de production et relation avec le temps :

On a deux types de facteurs : fixes et variables
facteur fixe : la quantité qui nécessaire a l'entreprise pour produire est indépendante du volume de production.
Exemple : la terre est un facteur fixe pour une exploitation agricole dont la surface cultivable ne change pas.
Facteur variable : lorsque la quantité nécessaire à l'entreprise dépend de l'importance de la production.
Exemple : la main d'œuvre est facteur variable pour une entreprise industrielle
cout fixe : cout des facteurs fixes c'est la dépense de l'entreprise est aussi fixe
cout variable : cout des facteurs variables c'est la dépense de l'entreprise est aussi variable

Remarque : La distinction entre les facteurs fixes et variables dépend la longueur de la période de temps considérée, plus la période de temps est long plus les facteurs variables soient nombreux c'est à dire que les facteurs fixe devient variables.
Exemple : l'outillage d'un usine sa capacité de production c'est un facteur fixe mais si l'on voit dans une période lente devient un facteur fixe.

2.1.3 Propriétés sur les ensemble de production ou ordre technique :

Soit X ensemble de production
1) $X \neq \emptyset$
c'est à dire il est toujours possible de ne rien produire
2) monotonicité : $\forall x \in X$ et $x' \leq x \implies x' \in X$
c 'est à dire on peut toujours produire avec les mêmes facteurs ou plus de facteurs
3)divisibilité : $\forall x \in X$ et $0 \leq \lambda \leq 1 \implies$ le plan $x' = \lambda x \in X$
le plan de production x est utilisable en réduisant les facteurs de productions (inputs) et outputs dans la même proportion
4) additivité :$\forall x \in X$ et $x' \in X \implies$ le plan $z = x + x' \in X$
5)convexité : $\forall x \in X$ et $x' \in X \implies$ le plan $z = \lambda x + (1-\lambda)x' \in X$
6)continuité : $\forall x \in X$ et tout voisinage V_x de x il existe $x' \in V_{x'}$ telle que $x' \in X$

2.1.4 Plan de production efficace :

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un vecteur de production nette. on dit que x est techniquement efficace, s'il existe $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \notin X$ telle que $x'_i \geq x_i \quad pour \quad i = 1, 2, \dots n$

2.2 Fonction de production ou technologie de production

Une technologie de production est un processus par lequel un produit (output) peut être produit par l'emploie d'une combinais on de facteurs de production (inputs).
La fonction de production est une relation fonctionnelle entre output et un vecteur d'inputs

$$f_i : \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \longrightarrow x_i$$
$$x_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

2.2.1 Fonction de production en courte période :

Définition 8. *la productivité physique d'un facteur de production A_j est la quantité du produit X_i qui peut être en faisant varier la quantité de A_j . Les autres quantités de $A_k \quad k \neq j \quad et \quad k = 1, 2, \dots, m$ supposée inchangée .*

Productivité physique totale d'un facteur A_j : c'est la quantité x_i du produit X_i obtenu par une combinaison des quantités fixes de tout les facteurs $A_k k \neq j \quad et \quad k = 1, 2, \dots, m$ et une quantité variable de facteur A_j
$x_{i_j} = f_i(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, a_j, \dots, \bar{a}_m)$ telle que $\bar{a}_k = cte$ pour $k \neq j$

Productivité physique moyenne d'un facteur A_j : C'est le rapport du quantité de la (P.P.T) de facteur A_j par rapport a sa quantité

$$\frac{x_{i_j}}{a_j} = \frac{f_i(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, a_j, \ldots, \bar{a}_m)}{a_j}$$

Productivité physique marginale d'un facteur A_j : définie par la variation de la (P.P.T) résultant de la variation de sa quantité

$$\frac{\partial x_{i_j}}{\partial a_j} = \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_m)}{\partial a_j}$$

Taux marginale de substitution technique : Soit une technologie (fonction de production)a m inputs variables
on a :

$$x_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$\Longrightarrow dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} da_j$$

on suppose que la quantité produite x_i par l'entreprise du produit X_i est constante, alors on obtient :

$$x_i = cte \Longrightarrow dx_i = 0$$

d'où :

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(a_1, a_2 \ldots, a_m)}{\partial a_j} da_j = 0$$
$$\Longrightarrow \sum_{j \in S_1} \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} da_j + \sum_{j \in S_2} \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} da_j = 0$$

$S_1 = \{j = 1, 2, \ldots, m / \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} > 0\}$ *et* $S_2 = \{i = 1, 2, \ldots, m / \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} < 0\}$
par conséquent

$$\sum_{j \in S_1} \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} da_j = -\sum_{j \in S_2} \frac{\partial f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)}{\partial a_j} da_j$$

donc ;
on a une augmentation des quantités des facteurs utilisées qui ont une productivité ≥ 0 il résulte un gain de quantité produite.
et une diminution des quantités des facteurs utilisées qui ont une productivité ≤ 0 il résulte une perte de quantité produite. donc on a une compensation de quantité produite.

2.2.2 Fonction de production en long période :

les rendements d'échelle :

Définition 9. *Une technologie de production est caractérisé par des rendements d'échelle qui concernent la relation entre la quantité ou l'échelle de production et les quantités des m facteurs à la fois dans une proportion donné.*

On suppose qu'on veut augmenter la production c'est pour ça on augmentera les quantités des m facteurs qui sont variés d'une même proportion %,
Question : que devient la fonction de production quand tous les facteurs varient dans les mêmes proportions ?

Définition 10. *une technologie présente des rendements d'échelle constantes si :*

$$f_i(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) = \lambda f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

$\Longrightarrow$

$$f_i(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) = \lambda x_i$$

Définition 11. *une technologie présente des rendements d'échelle croissantes si :*

$$f_i(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) > \lambda f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

$\Longrightarrow$

$$f_i(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) > \lambda x_i$$

Définition 12. *une technologie présente des rendements d'échelle décroissantes si :*

$$f_i(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) < \lambda f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

$\Longrightarrow$

$$f_i(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_m) < \lambda x_i$$

Exemples : Soit l'ensemble des facteurs de production $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ associés par des quantités $\{a_i \quad 1 \leq i \leq m\}$.

Définition 13. *Soit*

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$a = (a_1, \ldots, a_m) \to f_i(a_1, \ldots, a_m) = x_i$$

on dit que f est homogène de degré k si $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ est $k \in \mathbb{R}$

$$f(ta) = t^k f(a)$$

si $k = 1$ on a $f(ta) = tf(a)$
donc la fonction homogène représente les rendement d'échelle constante. si $0 < k < 1$ on a $f(ta) < t^k f(a)$
donc la fonction homogène représente les rendement d'échelle décroissante . si $k = 1$ on a $f(ta) > t^k f(a)$
donc la fonction homogène représente les rendement d'échelle croissante. exemples : fonction linaire,quadratique[1]*, cobb-douglass*[2]*.*

1. $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$
2. $f(x) = \prod_i x_i^{a_i}$ telle que $x \in \mathbb{R}^n$

2.2.3 Fonction de production et comportement d'entreprise :

Introduction : Pour aller plus loin, il est nécessaire de savoir les prix des facteurs de productions (inputs), en effet les facteurs utilisée par l'entreprise s'achètent et les produits qu'elle fabrique se vendent.

Coût de production totale : supposons une entreprise utilise m facteurs variables $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ et plusieurs facteurs fixes, pour fabriquer un produit x_i $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ i est fixé
soient $(p_{a_1}, p_{a_2}, \ldots, p_{a_m})$ les prix des quantités $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ des m facteurs variables de production $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$
on considère que les prix des facteurs variables sont constantes
• le coût des facteurs variables pour le produit X_i est :

$$c_{v_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j$$

• le coût des facteurs fixes pour le produit X_i est :

$$c_{k_i} = K_i = cte$$

• le coût total de production pour le produit X_i est :

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j + k_i$$

d'où :
• le coût des facteurs variables pour n produits est :

$$C_v = \sum_{i=1}^{n} c_{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j$$

• le coût des facteur fixes pour n produits est :

$$C_k = \sum_{i=1}^{n} c_{k_i} = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

• le coût totale pour n produits est :

$$C = C_v + C_k = \sum_{i=1}^{n} c_{v_i} + \sum_{i=1}^{n} c_{k_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j + \sum_{i=1}^{n} K_i$$

en effet, ce coût total ne peut pas prendre n'importe quelle valeur l'entrepreneur ne dispose pas des ressources financières illimitées. le coût total de l'entreprise ne pourra pas dépasser cette somme,
donc on aura une nouvelle equation de coût :

$$C_0 = C_v + C_k = \sum_{i=1}^{n} c_{v_i} + \sum_{i=1}^{n} c_{k_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j + \sum_{i=1}^{n} K_i$$

équivalente a l'équation budgétaire du consommateur
avec C_0 paramètre est supposé constant avec une partie absorbée par les quantités fixes et une autre absorbée par les quantités variables.

Profit de production totale :

Définition 14. *Le profit au sens économique du terme, se définie comme la différence entre les recettes et les couts supportes par une firme.*
On a pour chaque produit X_i un profit c'est à dire :

$$\pi_i = r_i - c_i = r_i - (\sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j + k_i)$$

Remarque : il est nécessaire de tenir compte de tous les coûts.
Le comportement de l'entreprise est de maximiser son profit.
La maximisation du profit de l'entreprise se résume a déterminer les prix auxquels elle veut vendre ses produits et acheter ses facteurs.

On a recette=le prix de la quantité du produit $*$ la quantité du produit
$\Longrightarrow$

$$r_i = p_{x_i} x_i$$

d'où :

$$\pi_i = p_{x_i} x_i - c_i$$

d'autre part on a : $x_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ donc pour n produit on obtient :

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = \sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n} c_i$$

$\Longrightarrow$

$$\Pi = R - (C_v + C_k) = R - C$$

Maximisation du profit : pour chaque produit X_i on ana :

$$\pi_i = p_{x_i} x_i - c_i$$

$\Longrightarrow$

$$\pi_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) = p_{x_i} f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) - \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j + k_i$$

on remarque que le profit d un produit dépend seulement des quantités des facteurs variables de production
d'où il maximiser le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max \pi_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) \\ S.C \\ x_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \max p_{x_i} f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) - \sum_{j=1}^{m} p_{a_j} a_j + k_i \\ S.C \\ x_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_m) \end{cases}$$

Résolution : pour chaque produit X_i on a :

1)Condition de premier ordre : Condition nécessaire de déterminer un maximum est :

$$a_0 = (a_{0_1}, a_{0_2}, \dots, a_{0_n}) \quad est \quad un \quad point \quad critique \quad \Longleftrightarrow \frac{\partial \pi_i}{\partial a_j}(a_0) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{p_{x_i}\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(a_0)}\,-p_{a_j} = 0$$

s'appelle la productivité marginale en valeur :
cela indique que la productivité marginale en valeur de le facteur A_j doit être égale a son prix.
On aura :

$$p_{x_i}\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(a_0) = p_{a_j}$$

signifie que la condition d'un maximum de profit est que chaque facteur employé jusqu'au point sa productivité marginale en valeur égale a son prix.

2)condition de deuxième ordre : on suppose que la matrice hessienne de π_i matrice carré symétrique est :

$$H_{\pi_i}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial^2 a_1} & \dots\dots & \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial a_1 \partial a_m} \\ \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial a_2 \partial a_1} & \dots\dots & \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial a_2 \partial a_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial a_m \partial a_1} & \dots\dots & \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial^2 a_m} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \pi_i(a_0)}{\partial a_i \partial a_j} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

si la hessienne de $H_{\pi_i}(a_0)$ est définie $< 0 \Longrightarrow a_0$ est un maximum local

2.3 Les fonctions de coûts :

2.3.1 Fonction de coût en courte période :

Définition 15. *1) coûts fixes : ils ne varient pas en fonction de la quantité produite*
2) coûts fixes : ils varient en fonction de la quantité produite

on a le coût total est définie par :

$$C = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) + K$$

et le coût variable est :

$$C - K = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Cette fonction nous donne le minimum que l'entrepreneur doit supporter pour réaliser chaque vecteur de production.

Différentes catégories de couts et leurs relations :

Le coût total moyen :
égale au quotient du coût total par la quantité du produit X_i :

$$\frac{C}{x_i} = \frac{\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) + K}{x_i}$$

Le coût variable moyen :
est le quotient du coût variable par la quantité du produit X_i :

$$\frac{C - K}{x_i} = \frac{\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i}$$

Le coût fixe moyen :
est le quotient du coût fixe par la quantité du produit X_i :

$$\frac{K}{x_i}$$

en résultant que :

$$\frac{C}{x_i} = \frac{\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_i} + \frac{K}{x_i}$$

c'est à dire que le coût totale moyen =coût variable moyen + coût fixe moyen.

Coût marginale : c'est l'accroissement du coût totale par une augmentation donné de la quantité d'un produit.

$$C_{m_{x_i}} = \frac{\partial C(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

Maximisation du profit en courte période : nous avons supposé que l'entreprise considéré n'était pas en mesure d'exercer une influence sur les prix de ventes des produits $(P_{x_1}, P_{x_2}, \dots, P_{x_n})$, pas plus que sur les prix des facteurs de production $(P_{a_1}, P_{a_2}, \dots, P_{a_m})$, ses prix sont imposé sur le marché et représentant des données aux yeux de l'entrepreneur. Il en résulte que plus l'entreprise produit et plus elle vend, plus ses recettes augmentent. Autrement dit, les recettes de l'entreprise sont, au même titre que ses couts, une fonction de quantités produites $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
par conséquent le profit de l'entrepreneur est, lui aussi fonction de la production.
Donc on obtient :

$$\Pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = R - C = \sum_{i=1}^{n} r_i - C = \sum_{i=1}^{n} p_{x_i} x_i - (\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) + K)$$

1)Condition de premier ordre : Condition nécessaire de déterminer un maximum est :

$$x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}) \quad est \quad un \quad point \quad critique \quad \Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$\Longrightarrow$

$$p_{x_i} - \underbrace{\frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i}} = 0$$

s'appelle le coût marginale :
cela indique que le coût marginal de quantité de produit X_i doit être égale a son prix.
On aura :

$$p_{x_i} = \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i}$$

signifie que la condition d'un maximum de profit est que chaque facteur employé jusqu'au point son coût marginal en valeur égale a son prix.

2)Condition de deuxième ordre : On suppose que la matrice hessienne de Π matrice carré symétrique est :

$$H_{\Pi}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Pi(x_0)}{\partial^2 x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2\Pi(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2\Pi(x_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2\Pi(a_0)}{\partial a_2 \partial a_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2\Pi(x_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2\Pi(a_0)}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\Pi(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \forall i,j = 1,2,\ldots,n$$

si la hessienne de $H_{\Pi}(x_0)$ est définie $< 0 \implies$ hessienne de $H_{\phi}(x_0)$ est définie < 0
$\implies x_0$ est un maximum local

2.3.2 Les fonctions de coût en long période :

On a les facteurs fixes en long période deviennent facteurs variables qui dépend de vecteur de production $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, alors on obtient le coût total en long période définie par :

$$C = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Différentes catégories de couts :

Le coût total moyen : égale au quotient du cout total de long période par la quantité produite du produit X_i :

$$\frac{C}{x_i} = \frac{\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i}$$

Coût marginale : C'est l'accroissement du cout totale par une augmentation donné de la quantité d'un produit.

$$C_{m_{x_i}} = \frac{\partial C(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$$

Maximisation du profit en long période : On a le même raisonnement :

$$\Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = R - C = \sum_{i=1}^{n} r_i - C = \sum_{i=1}^{n} p_{x_i} x_i - \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

1)Condition de premier ordre : Condition nécessaire de déterminer un maximum est :

$$x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}) \quad est \quad un \quad point \quad critique \quad \Longleftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$\Longrightarrow$

$$p_{x_i} - \frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial x_i} = 0$$

$\Longrightarrow$

$$p_{x_i} = \frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial x_i} > 0$$

signifie que la condition d'un maximum de profit en long période est que chaque facteur employé jusqu'au point son coût marginale égale au prix.

2.4 Fonction D'offre :

a)Fonction d'offre individuelle et totale :
de même que la fonction de demande établit une relation entre la quantité demande d'un produit et son prix,la fonction d'offre peut s'exprimer par une courbe dont la forme dépend des propriétés de la fonction de coût marginal en courte période et en long période et on .
on a :

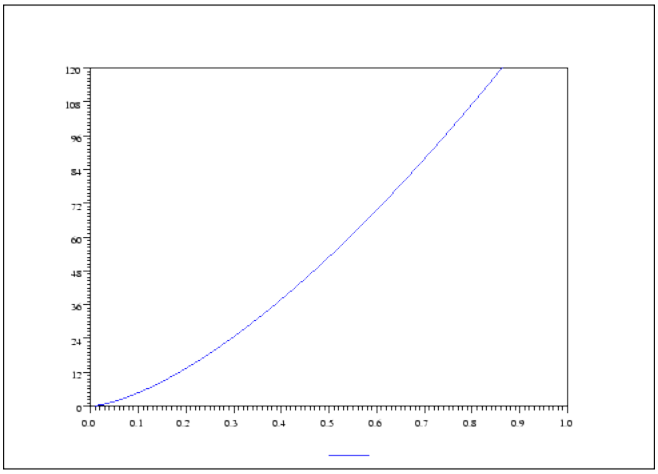
$$C_{m_{x_i}} = \frac{\partial C(x_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(x_0)}{\partial x_i}$$

d autre part on le coût marginal est l augmentation de coût total par une augmentation de la production du produit X_i et lorsqu'on veut, maximiser le profit en court période et en long période on a :

$$C_{m_{x_i}} = p_{x_i}$$

On remarque que l'augmentation de quantité de chaque produit provoque une augmentation du prix. Donc an a une relation croissante entre le prix et la quantité offrir.
Donc

$$O_i = x_i = g(p_{x_i})$$



l'offre du j^{ieme} producteur de produit X_i est donné par :

$$O_{ij} = x_{ij} = g_j(p_{x_i}).$$

Si on a l producteur on aura
l'offre totale de produit X_i dans un marché est donné par :

$$O_i = \sum_{j=1}^{l} O_{ij} = \sum_{j=1}^{l} x_{ij} = \sum_{j=1}^{l} g_j(p_{x_i}).$$

b) L'élasticité de l'offre :
dire que l'offre croissante du prix ne constitue pas une précision suffisante. Une offre peut en effet être plus ou moins sensible $\grave{a}$ une modification du prix. Pour mesurer cette sensibilité, on utilise le concept d'élasticité de l'offre par rapport au prix.
Cette élasticité peut être définie comme le pourcentage% de variation de la quantité offerte résultant d'une variation 1% de du prix. Plus précisément elle est la limite de la variation relative de la quantité offerte, résultant d'une variation relative du prix $\Delta p_{x_i} \to 0$; elle s'écrit :

$$e_{O_i/p_{x_i}} = \lim_{\Delta p_{x_i} \to 0} \frac{\frac{\Delta O_i}{O_i}}{\frac{\Delta p_{x_i}}{p_{x_i}}} = \frac{p_{x_i}}{O_i} \quad \frac{dO_i}{dp_{x_i}}.$$

L'élasticité de l'offre par rapport au prix est $e_{O_i/p_{x_i}} > 0$ si l'offre est une fonction croissante du prix.

Conclusion :

Chapitre 3

L'équilibre du marché (partiel)

Introduction :
On a vu que le régime de concurrence parfaite se caractérise par le fait que ni les acheteurs ni les vendeurs individuellement considérés ne peuvent exercer d'influence sur le prix. Cela suppose une indépendance absolue des décision de tous ceux qui se présentent sur le marché. On a vu comment consommateurs et producteurs prenaient leur décision, en fonction du système des prix qu'ils observent. Il s'agit maintenant d'étudier la compatibilité de ces décisions, c'est ta dire de déterminer le ou les systèmes de prix tels que l'offre des producteurs *à* ces prix égalise la demande des consommateurs.

3.1 L'équilibre du marché en régime de concurrence parfaite :

La notion de marché en concurrence parfaite :
- Un marché est constitué par un groupe d'individus et d'entreprises en relation les uns avec les autres pour acheter ou vendre un certain type de produit de consommation ou de facteurs de production.
- La théorie micro-économique associe la notion de concurrence parfaite au caractère anonyme et impersonnel du marché. Plus précisément on parlera de concurrence parfaite quand les quatre conditions suivantes seront respectées :
1-L'homogénéité du produit :Tous les produits offerts sur le marché doivent être comparables ou homogènes. En d'autres termes chacune des unités proposées par les offreurs doit être totalement interchangeable

2-L'atomicité : L'atomicité d'un marché se caractérise par la présence d'un grand nombre d'offreurs et de demandeurs. Ces offreurs et ces demandeurs doivent être de taille réduite "atomes".

3-Libre entrée : l'accès des offreurs ou des demandeurs sur un marché doit être totalement libre. Toute réglementation imposant des conditions préalables à l'exercice d'une activité est donc exclue. On devrait pouvoir librement créer une pharmacie, par exemple.

4-La transparence : La transparence d'un marché se caractérise par une parfaite circulation de l'information sur les conditions du marché.

Si ces conditions sont réunis. Nous nous poserons deux questions :
1) comment se détermine le niveau d'équilibre du marche ?
2) l'équilibre réalisé est-il stable ?

3.2 Détermination du niveau d'équilibre :

Lorsque les conditions de concurrence parfaite sont réunis. Aucun vendeur ni aucun acheteur individuellement considéré n'est en mesure d'exercer une influence sur le prix du marché. Le seul variable est le prix.

L'équilibre du marché en courte période : L'approche en équilibre partiel s'intéresse à l'étude du marché d'un seul produit.
L'équilibre du marché en courte période est réalisé si la quantité demandée par les acheteurs du produit X_i considéré est égale a la la quantité offerte par les vendeurs de ce même produit.
On considère :
ensemble de produits $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ associes des quantités $\{x_i \quad 1 \leq i \leq n\}$ et des prix $\{p_{x_i} \quad 1 \leq i \leq n\}$.
Ensemble de facteur de production $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ associes des quantités $\{a_i \quad 1 \leq i \leq m\}$ et des prix $\{p_{a_i} \quad 1 \leq i \leq m\}$.
On a sur un marché M consommateurs telle que $k = 1, 2, \dots, M$et N producteurs avec $l = 1, 2, \dots, N$.

à l'équilibre :

$$D_i = \sum_{k=1}^{M} D_{ik} = \sum_{k=1}^{M} f_k(p_{x_i}) = \sum_{l=1}^{N} g_l(p_{x_i}) = \sum_{l=1}^{N} O_{il} = O_i$$

$\Longrightarrow$

$$D_i(p_{x_i}) = O_i(p_{x_i})$$

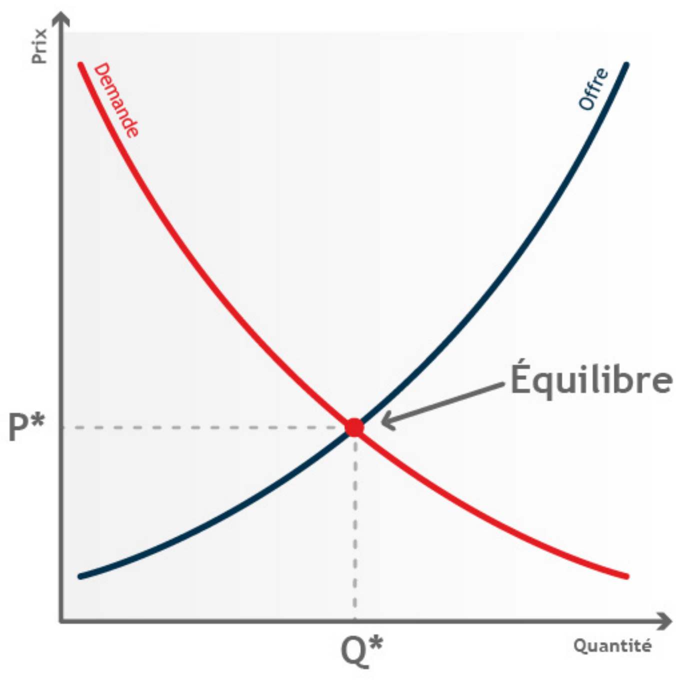
notation

$$p_{x_i} = p_e \quad à \quad l'quilibre$$

d'où

$$D_i(p_e) - O_i(p_e) = 0$$

cette condition détermine *à* la fois le prix d'équilibre et la quantité échangée.



1) Le prix pratiqué est plus haut de le prix d'équilibre $p_{x_i} > p_e$ la quantité demandée serait inférieur $à$ la quantité offerte$D_i < O_i$.
Puisque le prix serait considéré comme trop élevé par certains demandeurs. Certains offreurs ne pourraient donc pas vendre leur production au ce prix. (Plutôt que de ne rien vendre) ils accepteraient alors de traiter $à$ un prix plus bas, la concurrence entre les offreurs réduits le prix jusqu'à ce qu'il fixe au niveau d'équilibre.
2) Au contraire le prix pratiqué était plus faible que le prix d'équilibre $p_{x_i} < p_e$ la quantité demandée serait supérieur $à$ la quantité offerte. $D_i > O_i$
ce prix fixé ne permettraient pas $à$ certains producteurs de fabriquer le bien considéré compte tenu du niveau de leurs coûts, certains demandeurs ne pourraient donc pas obtenir le bien désiré ; plutôt que d'y renoncer complètement. Certains demandeurs accepteraient de traiter $à$ un prix plus élevé, la concurrence entre les demandeurs ferait monter le prix jusqu'à ce qu'il fixe au niveau d'équilibre.

Donc le prix de l'équilibre est donc le seul auquel les désirs des acheteurs et des vendeurs soient compatibles entre eux. Il est unique. Puisque le produit offert et demandé est homogène. Par hypothèse il doit être tel que les fonctions d'offre et de demande soient satisfaites

L'équilibre du marché en long période : L'équilibre du marché en long période suppose non seulement que l'offre totale et la demande totale soient égale, mais que les profits soient nuls. les forces de la concurrence déterminent non seulement le prix du produit et la quantité échangée, mais le nombre des entreprises dans la branche de production.

L'équilibre à long terme d'un marché de concurrence parfaite est donc caractérisé par une double hypothèse :
1) tous les facteurs de production sont des facteurs variables.
2) le nombre d'entreprises se déterminent librement selon les conditions de rentabilité qui prévalent sur le marché.
A long terme, le prix d'équilibre est égal à la valeur minimale du coût moyen à long terme et les entreprises présentes sur le marché réalisent un profit économique nul.

L'équilibre des marchés de facteurs de production : Maintenant l'analyse peut être transposée au cas des marchés des facteurs de production sur lesquels les entrepreneurs sont demandeurs. On sait que l'entrepreneur qui cherche $à$ maximiser son profit adopte une combinaison $(A_1, A_2, \ldots, A_h)$ des facteurs de production d ensemble de facteurs de production $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

On sait que chaque entrepreneur cherche à maximiser son profit adopte une combinaison des facteurs $\{A_1, \ldots, A_m\}$ telle que le prix de chaque facteur A_j égale sa productivité marginale, et on a :
La fonction de production définie par

$$x_i = f_i(a_1, \ldots, a_n)$$

x_i : la quantité du point X_i désiré par l'entrepreneur.

Donc

$$\begin{aligned}\pi_i(a_1,\ldots,a_n) &= R - C\\ &= p_{x_i}x_i - \sum_{j=1}^{m} a_j p_{a_j}\\ &= p_{x_i} f_p(a_1,\ldots,a_n) - \sum_{j=1}^{m} a_j p_{a_j}\end{aligned}$$

les conditions nécessaire d'un maximum de profit est donné par :

$$\bar{a} = (\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n) \text{ est un point critique } \iff \tfrac{\partial \pi_i}{\partial a_j}(\bar{a}) = 0 \quad j = 1,\ldots,m$$
$$\iff p_{x_i}\tfrac{\partial f}{\partial a_j}(\bar{a}) - p_{a_j} = 0 \text{ pour } j = 1,\ldots,m$$
$$p_{x_i}\frac{\partial f}{\partial a_j}(\bar{a}) = p_{a_j}$$

Autrement dit, la demande d'un facteur de production est fonction de son prix, des prix autres facteurs et du prix du produit. Comme le prix du produit, p_x, dépend lui-même de la demande de ce produit, la demande des facteurs dépend indirectement de la demande du produit ;c'est la raison pour laquelle elle est qualifiée de demande dérivée.

Si on se limite à l'étude du marché d'un facteur de production particulier et que l'on suppose que les prix des autres facteurs et le prix du produit fabriqué sont données, la demande du facteur considéré apparait comme une fonction de son seul prix :
D'après la résolution du système d'équations. On aura les quantités des facteurs demandé sont dépends des prix des facteurs et du prix du produit X_i. Et on obtient :

$$D_l(a_j) = \phi_l(p_{a_1},\ldots,p_{a_m},p_{x_i})$$

la demande totale du facteur A_j est obtenue par l addition de tout les demende des entreprises individuelles existantes

$$\begin{aligned}D_{a_j} &= \sum_{l=1}^{m} D_l(a_j) &(3.1)\\ &= \sum_{l=1}^{m} \phi_l(p_{a_j}) &(3.2)\end{aligned}$$

La demande d'un facteur comme les demandes individuelles, est une fonction décroissante du prix de ce facteur. Elle pourrait être représenter par une courbe descendante de la gauche vers la droite.

en face de cette demande ce présente une offre. Si le facteur considéré et lui même un produit par exemple une machine ou un outillage

son offre est le fait

des entreprise qui le fabrique. La fonction d'offre totale est alors du type de celle que nous avons rencontrer a propos du marché des produit ; la fonction totale de facteur A_j s'écrira :

$$O_{a_j} = \sum_{k=1}^{M} O_k(a_j) = \sum_{k=1}^{M} \psi_k(a_j)$$

L'offre de A_j est une fonction croissante du prix p_a. Elle pourrait être représentée par une courbe ascendante de la gauche vers la droite. L'équilibre du marché suppose l'égalité de l'offre et de la demande totales :
Remarque tous les raisonnements précédents sont donc applicables lorsque règne la concurrence parfaite sur le marché du facteur considéré. Mais il se peut aussi que le facteur de production ne soit pas un produit fabriqué ; ainsi en va-t-il du travail.
Exemple :équilibre du marché du travail.
Sur le marché du facteur travail, les offreurs sont des travailleurs qui sont en même temps des consommateurs. On peut alors supposer que la définition que la satisfaction du travailleur-consommateur dépend de revenu (R) et de son loisir (L) ; sa fonction d'utilité s'écrira :

$$U = f(R, L).$$

Plus le revenu est élevé, plus le consommateur peut se procurer de biens sur le marché des produits et plus la satisfaction retirée de l'utilisation de ces biens est grandes. Mais l'augmentation du revenu suppose l'allongement du temps de travail, c'est à dire la réduction du temps de loisir et de la possibilité de profiter du revenu. La maximisation de l'utilité suppose par conséquent la réalisation d'un certain équilibre entre le revenu et loisir.

3.3 La stabilité de l'équilibre :

En définissant les conditions de l'équilibre du marché, nous avons admis implicitement que cet équilibre était stable. Autrement dit, nous avons supposer que s'il existait un point d'équilibre auquel l'offre et la demande totales sont égales, ce point serait nécessairement atteint ; que si le marché se trouvait initialement en déséquilibre, le prix d'équilibre finirait par s'établir. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. Aussi l'analyse économique opéré-t-elle une distinction entre l'équilibre stable et l'équilibre instable . **L'équilibre stable :**
un équilibre est stable s'il établit ou se rétablit automatiquement lorsqu'il a été troublé pour une raison quelconque. **L'équilibre instable :**
Au contraire, un équilibre est instable si sa réalisation n'est pas garantie ou s'il ne se restaure pas lorsqu'il a été détruit.

Un déplacement de la courbe de demande consécutif à une modification des préférences des consommateurs ou un déplacement de la courbe de l'offre dû à une modification des conditions de production détruisent l'équilibre du marché. La situation ainsi créée va déclencher un processus d'ajustement qui pourra éventuellement aboutir au rétablissement de l'équilibre.

L'analyse de stabilité fait abstraction des détails nécessaire au processus d'ajustement pour ne considérer que sa nature, favorable ou défavorable au rétablissement de l'équilibre.

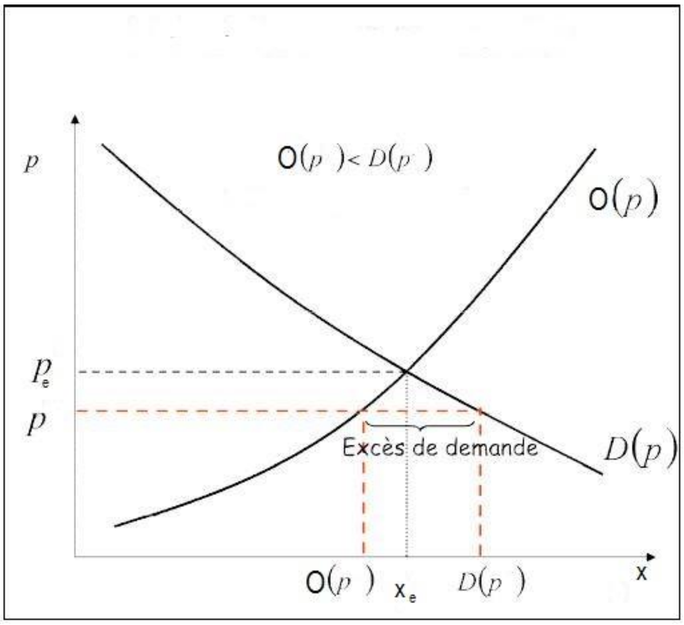
Considérons un marché de produit X_i a un prix quelconque p_{x_i} on deux cas de figure :

Première cas : D'abord soit $P_e$le prix d'équilibre donc

$$D_i(p_e) = O_i(p_e)$$

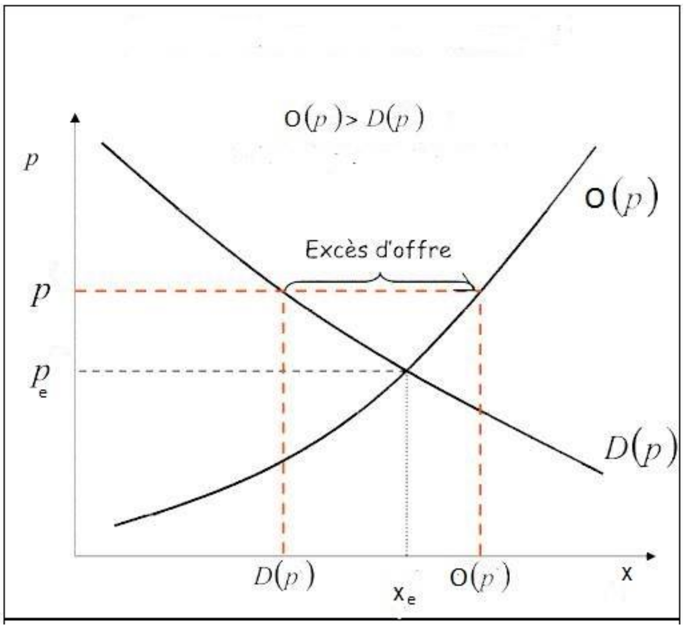
1)si le prix du produit dans le marché est bas c'est a dire $p_{x_i} < p_0$alors on a un excès de demande au prix p_{x_i}.
c'est a dire :

$$D_i(p_{x_i}) - O_i(p_{x_i}) = E(p_{x_i}) > 0$$



1)si le prix du produit dans le marché est élevé c'est a dire $p_{x_i} > p_0$alors on a un excès de d'offre au prix p_{x_i} ou on dit excès de demande.

$$D_i(p_{x_i}) - O_i(p_{x_i}) = E(p_{x_i}) > 0$$



Conclusion :

Bibliographie

[1] Jaques Lecaillon, Analyse Micro-Économie, Édition,1985.

[2] C.D. Echaudemaison in Dictionnaire d'Economie et de Sciences sociales, Paris, Nathan 1993

[3] Bernard Guerrien, Dictionnaire de l'analyse économique, La Découverte, 2002.

[4] Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston et Jerry Green, Microeconomic Theory, Oxford University Press.

[5] Hal Varian, Introduction à la microéconomie, de Boeck Université.

[6] François Bourguignon, Pierre-André Chiappori et Patrick Rey, Théorie microéconomique, Fayard

[7] Bernard Guerrien et Emmanuelle Bénicourt, 2008, "La théorie économique néoclassique", La Découverte.

[8] Stanley J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, sringer,1993

[9] Paul Broussous, Fonctions de plusieurs variables, UNIVERSITÉ DE POITIERS, 2010.

[10] Christelle Dumas, Microéconomie Pré-rentrée De Licence, ellipse, 2000.

[11] Joshua, Linear Algebra, Saint Michael's College, 2014