



UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Equipe de recherche : Algèbre Commutative et Aspect Homologique

Présenté par

MOUTU ABDOU SALAM MOUTUI

sous la direction du Pr. **NAJIB MAHDOU**

Thème :

SUR L'AMALGAMÉ D'UN ANNEAU LE LONG D'UN IDÉAL

soutenu le 27 juin 2011

Devant le Jury :

Abdelmajid HILALI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Président
Chahrazade BAKKARI	Faculté des Sciences Ain chock Casablanca	Examineur
Seddik GMIRA	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examineur
Najib MAHDOU	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant
Lahcen OUKHTITE	Faculté des Sciences et Techniques Errachidia	Examineur
Aziza RAHMOUNI HASSANI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examineur

RESUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter et traiter des extensions d'anneaux appelées les amalgamées introduites par Marco D'Anna et Marco Fontana en 2007. Il s'agit d'étudier le transfert de certaines propriétés des anneaux classiques ainsi que quelques propriétés homologiques à la structure des amalgamées. Et enfin, nous terminons ce travail par quelques axes de recherches que nous souhaitons aborder et résoudre par la suite.

Mots clés :

Amalgamation, extension triviale, Hermite, duplication algébrique, anneau de Bézout, anneau arithmétique, anneau de valuation, anneau diviseur élémentaire, les propriétés de "clean" et de "SFT".

DÉDICACES

A

Allah le tout miséricordieux

Ton amour, Ta miséricorde et Tes grâces à mon endroit m'ont fortifié dans la persévérance et l'ardeur au travail.

A

mes chers parents

Aucun mot ne saurait exprimer tout mon amour et toute ma gratitude. Merci pour vos sacrifices le long de ces années.

Merci pour votre présence rassurante et pour tout l'amour que vous procurez à notre petite famille. Vous avez toujours été pour moi les parents idéals, la lumière qui me guide dans les moments les plus obscures. Vous m'avez toujours conseillé et orienté dans la bonne voie du travail et de l'honneur. Votre droiture, conscience et amour pour nos familles me serviront d'exemple dans la vie.

En témoignage de profonds liens qui nous unissent, veuillez chers parents trouver à travers ce travail l'expression de mon grand amour, mon attachement et ma profonde reconnaissance.

Puisse votre existence pleine de sagesse, d'amour me servir d'exemple dans ma vie et dans l'exercice de ma profession.

Puisse dieu vous prêter longue vie et bonne santé afin que je puisse vous combler à mon tour.

Je vous aime très fort.

A

ma chère Tante Maman ASSIATY ZOUBERT

Qui a toujours été là pour moi, avec ses précieux conseils. Qu'elle trouve sur ce travail, toute ma reconnaissance et tout mon grand amour envers elle.

Je t'aime beaucoup.

A

mon cher professeur Salim Macolo

pour m'avoir fait confiance, guidé, encouragé, qui a su m'obliger à aller toujours plus en avant, et qui m'a prodigué ses conseils judicieux qui m'ont beaucoup aidé. Qu'il trouve, dans l'aboutissement de ce travail l'expression de l'infinie reconnaissance de l'élève respectueux et fidèle.

Que Dieu vous prête longue vie et bonne santé.

A

tous mes proches qui me sont très chers au Maroc

Anrifate Ahmed mourtadhoi, Radjab Youssouf , Rachmat Attoumane, Chamsidine Ali Abdallah, Abdou Mohamed, Ahamada Ali Soulé, Kalfane Said, Tamboura bou-bacar, Gourouza Abdoullaye, Dekka Toundjar, Halid Mohamed, Ahmed Attoumane, Youssouf Ahmed, Assane Mohamed, Samya Nafion, Nayak Ahmed, Dhoirna Mohamed, Anita Oussen, Faiza Abdallah, Fatima Andjilani, Chamsia, Fatou Lavani, Halassi Abdoul-haffar, Nazir Abdallah, Ibrahim Mohamed.

A

tous les membres de l'équipe de recherche Algèbre Commutative et Aspect Homologique de la faculté des sciences et techniques de Fès

Najib Mahdou, Tammekante Mohamed, Fuad Ali Ahmed, Aziza Rahmouni Hassani , Khalid Louartiti, Chhiti mohamed, Fatima Cheniour et Chahrazade Bakkari.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tout ce qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation :

Je voudrais, en tout premier lieu, exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant, professeur Najib Mahdou, d'avoir accepté de m'initier à la recherche et de diriger ce travail. Comme tous ceux qui ont eu la chance d'être sous sa direction, j'ai pu constater à quel point il est attachant, attentionné et profondément gentil. Il restera pour moi un modèle, pour ses grandes compétences scientifiques, pour son exigence de clarté, sa franchise et ses qualités humaines. Je lui adresse mes remerciements les plus chaleureux, d'avoir accepté de me prendre sous son aile, pour tout ce qu'il m'a appris et pour ses encouragements, et j'espère dans l'avenir pouvoir transmettre ne serait-ce-qu'une partie de tout ce qu'il m'a appris, la meilleure façon selon moi de lui rendre hommage.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs Mohamed SOBRANI, Seddik GMIRA, Chahrazade BAKKARI, Abdelmajid HILALI, Aziza RAHMOUNI HASSANI, et Lahcen OUKHTITE d'avoir

accepté de consacrer leur temps précieux pour être jury de ce travail.

Je voudrais aussi adresser mes chaleureux remerciements à Mme Chahrazade BAKKARI pour sa relecture, ses remarques pertinentes et pour ses corrections durant la rédaction.

Et pour terminer ce préambule, je voudrais remercier tous mes collègues de l'équipe d'Algèbre Commutative et Aspect Homologique de la Faculté des Sciences et Techniques de Fès auprès desquels j'ai constamment trouvé un esprit d'équipe et de bonne camaraderie.

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaire	5
1.1 Rappels de quelques résultats de modules libres, projectifs, et plats. . .	5
1.1.1 Module Libre	5
1.1.2 Module Projectif	6
1.1.3 Module Plat	7
1.2 Quelques anneaux classiques	10
1.3 Anneau réduit	13
1.4 Extension triviale	14
1.5 La duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal	15
1.6 L'amalgamation d'anneaux	16
2 Amalgamation d'anneaux définie par des propriétés arithmétiques	19
2.1 Transfert de quelques résultats des anneaux de valuations aux amal- gamées	19
2.2 Quand est-ce-que l'amalgamation d'anneaux est arithmétique?	24
3 Amalgamation d'anneaux définie par des conditions de Bézout	29
3.1 Etude des propriétés des anneaux diviseurs élémentaires, d'Hermité et de Bézout dans les extensions amalgamées	29
4 Etude des propriétés des anneaux “clean” dans les extensions amal-	

gamées	39
4.1 L'amalgamation en tant qu'anneau "clean" (uniquement "clean")	40
4.2 Caractérisation de l'amalgamation en tant qu'anneau local	46
5 Quelques propriétés homologiques de l'amalgamation d'anneaux	55
5.1 Transfert des propriétés RVN à l'amalgamation de $A \bowtie^f J$	55
5.2 Transfert des propriétés SFT à l'amalgamation $A \bowtie^f J$	59
6 Perspectives	64
Bibliographie	66

Introduction :

Le présent travail a pour but de présenter la nouvelle construction d'extension d'anneaux introduite par Marco d'Anna et Marco Fontana en 2007 appelée la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal ainsi qu'une généralisation de cette construction appelée amalgamation d'anneaux introduite par Marco d'Anna, Carmelo Antonio Finocchiaro, et Marco Fontana en 2009.

Ainsi, ce mémoire est divisé en cinq chapitres et une conclusion :

Le premier chapitre :

Dans ce chapitre, on rappelle certaines définitions et propriétés concernant les modules, les anneaux classiques et réduits. Nous introduisons aussi les amalgamées. Les résultats sont exposés sans démonstration mais avec des références précises.

Le deuxième chapitre :

Le second chapitre est consacré à l'article de N.Mahdou et M. Kabbour "**Amalgamation of rings defined by arithmetical propriety**", dans lequel ils étudient le transfert de quelques propriétés des anneaux de valuations et arithmétiques aux amalgamées.

Le troisième chapitre :

Au troisième chapitre, nous abordons un article de N.Mahdou et M. Kabbour “**Amalgamation of rings defined by Bezout like conditions**” dans lequel ils étudient quelques propriétés homologiques des amalgamées.

Le quatrième chapitre :

Il s’agit d’un article de D.D.Anderson, M.Chhiti, N.Mahdou et M.Tamekkante “**Clean-like conditions in an amalgamated algebras along an ideal**”, dans lequel ils caractérisent quand les amalgamées sont des anneaux (uniquement) “**clean**” et quand elles sont des anneaux locaux.

Le cinquième chapitre :

Situé dans l’article de K.Ouartiti, N.Mahdou et A.Mimouni intitulé “**Some homological properties of amalgamation of rings**”. Le but est de traiter le transfert des propriétés R.V.N et ”SFT”, dans les amalgamées.

Perspectives :

Ainsi, pour terminer ce mémoire, nous allons présenter quelques perspectives de ce sujet, que nous désirons aborder prochainement.

Premier chapitre

Préliminaire

Chapitre 1

Préliminaire

Durant tout ce mémoire nous désignons par R et S deux anneaux commutatifs unitaires. Pour alléger l'écriture, tous les modules considérés sont des R -modules, sauf mention du contraire. Notamment, les lettres A, B, C, D, \dots représentent, si on n'a pas précisé leurs natures, des R -modules.

1.1 Rappels de quelques résultats de modules libres, projectifs, et plats.

Tout d'abord, nous rappelons quelques définitions et théorèmes fondamentaux de modules libres, projectifs et plats.

1.1.1 Module Libre

Définition 1.1.1

Un R -module E est dit libre s'il est somme directe de copies de R . Si $Ra_i \cong R$ et $E = \bigoplus_{i \in I} Ra_i$ où I est un ensemble d'indexation, l'ensemble $\{a_i/i \in I\}$ est appelé alors une base de E .

Un module libre est dit de rang n s'il admet une base de cardinal n .

Théorème 1.1.2 ([37], Corollary 3.7)

Soient R un anneau et E un R -module libre de rang n . Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ engendrent E , alors c'est une base de E .

On rappelle qu'une suite de R -modules :

$$\dots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{u_{n+1}} M_n \xrightarrow{u_n} M_{n-1} \rightarrow \dots$$

est dite exacte si $Im(u_{n+1}) = Ker(u_n)$ pour tout entier naturel relatif n .

1.1.2 Module Projectif

Définition 1.1.3

Un R -module P est dit projectif si pour tout homomorphisme surjectif $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ et pour tout homomorphisme $P \xrightarrow{f} C$, où B et C sont des R -modules, il existe un homomorphisme $P \xrightarrow{h} B$ tel que $goh = f$.

$$\begin{array}{ccc} P & & \\ \downarrow h & \searrow f & \\ B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

On a la caractérisation suivante des modules projectifs :

Théorème 1.1.4 ([19], Theorems 3.11, 3.14)

Soient R un anneau et P un R -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) P est projectif ;
- 2) Le foncteur $Hom(P, \cdot)$ est exact (c'est à dire que pour toute suite exacte $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, la suite $Hom(P, A) \rightarrow Hom(P, B) \rightarrow Hom(P, C) \rightarrow 0$ reste exacte) ;
- 3) P est facteur direct d'un module libre ;

4) Toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow 0$ est scindée (c'est à dire que $B \cong A \oplus P$).

Théorème 1.1.5 (“Lemme de Schanuel” ; [37], Theorem 3.62)

Soient $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow K' \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow 0$ deux suites exactes courtes telles que P et P' sont projectifs. Alors, $\mathbf{K} \oplus \mathbf{P}' \cong \mathbf{K}' \oplus \mathbf{P}$.

Proposition 1.1.6 ([37], p. 90)

Dans un anneau intègre, tout idéal projectif est de type fini.

1.1.3 Module Plat

Définition 1.1.7

Un R -module E est dit plat si le foncteur $E \otimes_R$ est exact ; c'est à dire, pour toute suite exacte de R -modules $0 \rightarrow M \xrightarrow{u} N$, la suite $0 \rightarrow E \otimes_R M \xrightarrow{Id_E \otimes u} E \otimes_R N$ est exacte.

Exemples 1.1.8

\mathbb{Q} est un \mathbb{Z} -module plat.

D'une manière générale, le corps des fractions d'un anneau intègre \mathbf{R} est un \mathbf{R} -module plat [37, Corollary 3.48].

Notamment on a :

Théorème 1.1.9 ([37] Corollary 3.46)

Tout module projectif est plat.

Théorème 1.1.10

Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte courte telle que C est plat, A est plat si et seulement si que B est plat.

Théorème 1.1.11 ([37], Theorem 3.53)

Soient R un anneau et E un R -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) E est plat;
- 2) La suite $0 \rightarrow E \otimes_R I \rightarrow E \otimes_R R$ est exacte pour tout idéal I de type fini de R .

Définition 1.1.12

Un R -module E est dit n -présenté, où n est un entier naturel, s'il existe une suite exacte de la forme :

$$F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow E \rightarrow 0$$

où les F_i sont des modules libres de type fini pour tout $i = 1, \dots, n$.

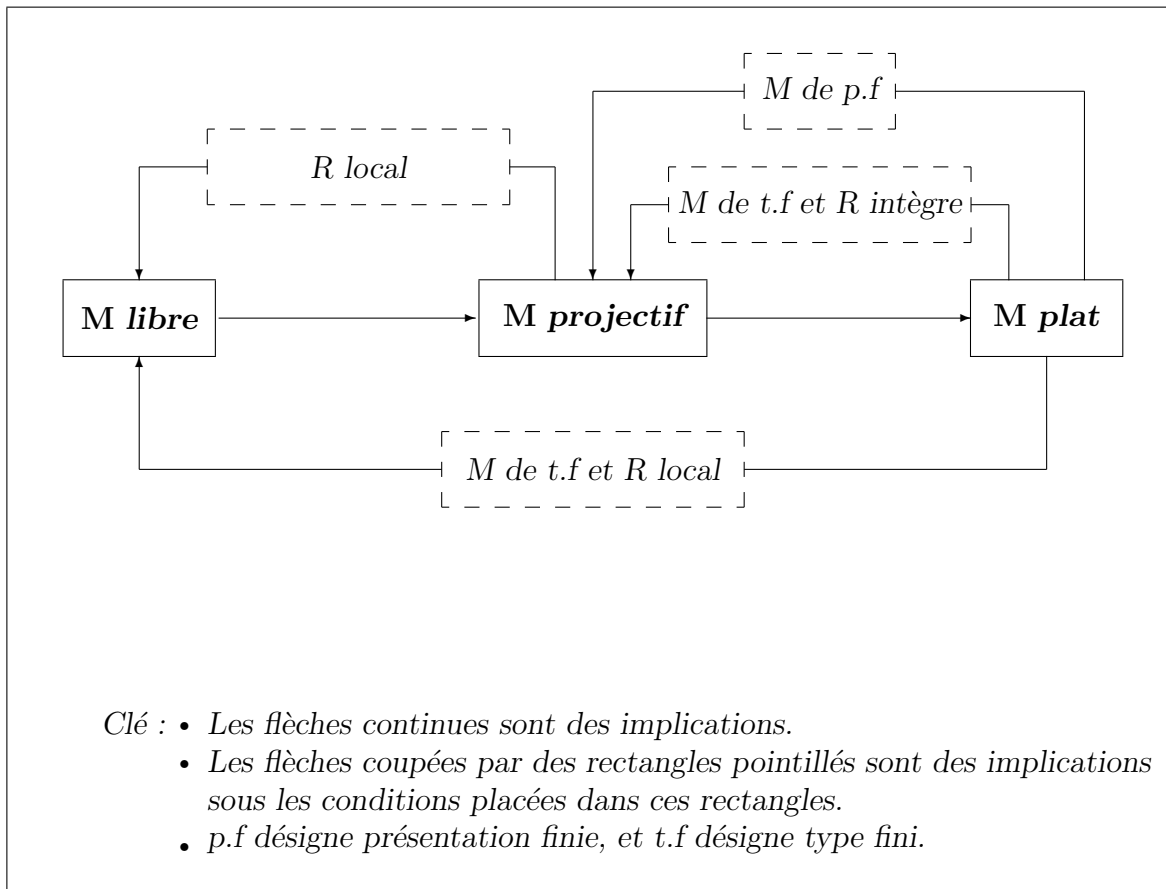
Pour $n = 0$, cela veut dire que E est de type fini. Pour $n = 1$, on dit que E est de présentation finie.

Signalons la caractérisation importante suivante de modules plats :

Théorème 1.1.13 ([37], Corollary 3.58)

Un module est plat de présentation finie si et seulement si il est projectif de type fini.

Nous allons, maintenant, schématiser quelques résultats qui traitent la liaison entre un module libre, projectif et plat, extraits du livre de Rotman [37].



1.2 Quelques anneaux classiques

Définition 1.2.1

Soit un anneau R . On dit que R est local s'il admet un seul idéal maximal M et on le note par (R, M) .

Définition et Théorème 1.2.2 ([37], Théorème 4.23)

Un anneau R est dit héréditaire s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. Tout idéal de R est projectif;
2. Tout sous module d'un module projectif est projectif;
3. Tout module quotient d'un module injectif est injectif.

○ Un anneau héréditaire intègre sera appelé un domaine de Dedekind.

Définition et Théorème 1.2.3 ([37])

Un anneau R est dit semi-héréditaire s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. Tout idéal de type fini de R est projectif;
2. Tout sous module de type fini d'un module projectif est projectif.

○ Un anneau semi-héréditaire intègre sera appelé un domaine de Prüfer.

Définition et Théorème 1.2.4 ([37], Théorème 4.16)

Un anneau R est dit régulier au sens de Von Neumann (en abrégé, RVN) s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. Tout idéal de type fini de R est principal engendré par un élément idempotent ;
2. Tout R -module est plat ;
3. Tout sous module de type fini d'un R -module F est un facteur direct de F .

Corollaire 1.2.5

Tout anneau régulier au sens de Von Neumann intègre est un corps.

Définition 1.2.6 ((55), Lemma 2.2)

Un anneau R est dit un (CH)-anneau s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

1. Tout idéal propre de type fini admet un annulateur non nul ;
2. Tout sous R -module projectif de type fini d'un R -module projectif est facteur direct.

Définition 1.2.7

Un anneau est Noethérien si tout idéal est de type fini.

Définition 1.2.8

1. Un anneau R est cohérent si tout idéal de type fini est de présentation finie.
En particulier les anneaux Noethériens sont des anneaux cohérents.
2. Soit R un anneau , R est dit semi-simple si tout R -module est projectif.

Théorème 1.2.9

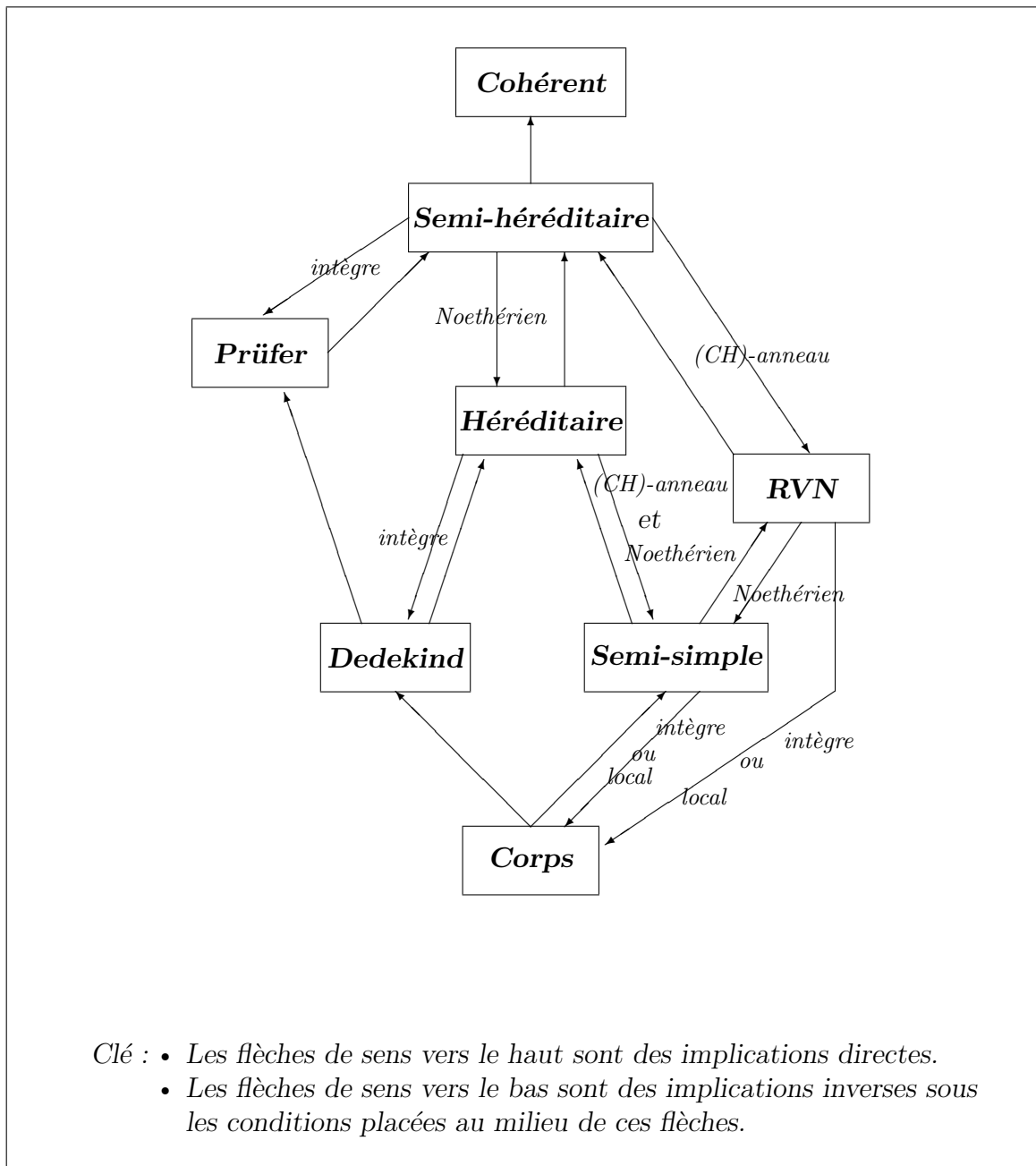
Tout anneau Noethérien qui est régulier au sens de Von Neumann est semi-simple.

Quelques relations entre ces anneaux sont directement déduites à partir de leurs définitions ou leurs propres propriétés, d'autres ont besoin de certaines notions supplémentaires.

Nous allons exposer ces relations sous forme d'un schéma :

1.2.10 Schéma

Relations entre quelques anneaux classiques



1.3 Anneau réduit

Définition 1.3.1

Un anneau R est dit *réduit* si R n'admet pas d'éléments nilpotents autre que zéro, c'est à dire que si $x^n = 0$ pour un certain entier naturel non nul n et $x \in R$, alors $x = 0$.

La propriété "réduit" est stable par localisation :

Théorème 1.3.2

Soient R un anneau réduit et S une partie multiplicative de R . Alors $S^{-1}R$ est réduit.

Corollaire 1.3.3

Soient R un anneau réduit et $Q(R)$ son anneau total des fractions. Alors, R est réduit si et seulement si $Q(R)$ est réduit.

La propriété "réduit" est une propriété locale :

Théorème 1.3.4

Soit R un anneau. Alors R est réduit si et seulement si R_P est réduit pour tout idéal premier P de R .

Comme les domaines sont naturellement réduits et les localisés des anneaux réguliers au sens de Von Neumann sont des corps, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.5

Soit R un anneau. Alors :

- 1) Si R est localement domaine, alors R est réduit.
- 2) Si R est régulier au sens de Von Neumann, alors R est réduit.

1.4 Extension triviale

Définition 1.4.1

Soient A un anneau, E un A -module et $R := A \rtimes E$ l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par : $(a, e)(b, f) = (ab, af + be)$. R est dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale, de A par E .

Théorème 1.4.2 (29, Theorem 25.1)

Soient A un anneau, E un R -module et $R := A \rtimes E$ l'extension triviale de A par E .

Alors :

- a) Un idéal premier (respectivement, maximal) de R est sous la forme $P \rtimes E$ (respectivement, $M \rtimes E$), où P (respectivement M) est un idéal premier (respectivement maximal) de A .
- b) Un élément $(a, e) \in R$ est inversible dans R si et seulement si a est inversible dans A .

Notons qu'avec un contre exemple, S. Kabbaj et N. Mahdou ont montré que [29, Theorem 25.1.(1)] n'est pas toujours vraie ; autrement dit, qu'un idéal quelconque de R n'est pas forcément de la forme $I \rtimes E$ où I est un idéal de A ; à savoir que pour tout idéal I de A , $I \rtimes E$ est un idéal de R (voir [31, Example 2.5]).

Un travail considérable de cette notion se trouve dans le livre de S.Glaz [23] et le livre de Huckaba (où R est appelé idéalisation de E par A) [23].

1.5 La duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal

C'est une extension d'anneau, qui a été introduite par Marco D'Anna et Marco Fontana en 2007.

Définition 1.5.1

soient R un anneau et E un sous-module de l'anneau total des fractions noté $Q(R)$ tel que $E.E \subset E$. on appelle **La duplication amalgamée d'un anneau R le long d'un sous- R -module E** , noté $R \bowtie E$, le sous anneau de $R \times Q(R)$ défini par :

$$R \bowtie E := \{(r, r + e)/r \in R \text{ et } e \in E\}.$$

Remarque :

1. Lorsque $E^2 = 0$, la duplication amalgamée $R \bowtie E$ coïncide avec l'extension triviale définie précédemment $R \times E$.
2. Une des différences principales entre l'extension triviale $R \times E$ et la duplication amalgamée $R \bowtie E$ est que $R \times E$ n'est jamais réduit tandis que $R \bowtie E$ peut être un anneau réduit et il est toujours réduit lorsque R est un domaine.
3. Si $E = I$ avec I idéal de R , l'anneau $R \bowtie I$ est un sous-anneau de $R \times R$, appelé la duplication amalgamée d'un anneau R le long d'un idéal I .

Corollaire 1.5.2 ([16], corollary 2.9)

Soient R un anneau et E un R -module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. R et $R+E$ sont Noethériens ;
2. $R \times R + E$ est Noethérien ;
3. $R \bowtie E$ est Noethérien.

1.6 L'amalgamation d'anneaux

Définition 1.6.1

Soient A et B deux anneaux, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On appelle **L'amalgamation de A et B suivant J et respectant f** , le sous-anneau de $A \times B$:

$$A \rtimes^f J := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}.$$

Cette nouvelle construction est une généralisation de la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal et a eu ses origines par M. D'anna, C. Finacchiaro et M. Fontana en 2009. En effet, il suffit de prendre $B = A$, $f = Id_A$, et $J = I$.

Exemple 1.6.2

Soient $A \subset B$ deux anneaux et $X := \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ des indéterminées sur B .

On a $A + XB[X] := \{h \in B[X] \mid h(0) \in A\}$ est un sous anneau de B .

Soient $J = XB[X]$ un idéal de $B[X]$, et $\sigma : A \hookrightarrow B[X]$ l'injection canonique. Alors on a :

$$A \rtimes^\sigma J \cong A + XB[X].$$

Remarque :

$\Gamma(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ est un sous-anneau de $A \rtimes^f J$.

Proposition 1.6.3 ([12], proposition 5.1)

Soient $P_A : A \rtimes^f J \rightarrow A$ et $P_B : A \rtimes^f J \rightarrow B$ les projections naturelles de $A \rtimes^f J (\subset A \times B)$ respectivement dans A et dans B . $P_A(A \rtimes^f J) = A$ et $P_B(A \rtimes^f J) = f(A) + J$ (car P_A et P_B sont surjectives).

Etant donné que :

$\ker(P_A) = \{0\} \times J$ et $\ker(P_B) = f^{-1}\{J\} \times 0$ nous avons alors les isomorphismes suivants :

$$\frac{A \rtimes^f J}{\{0\} \times J} \cong A \text{ et } \frac{A \rtimes^f J}{f^{-1}\{J\} \times \{0\}} \cong f(A) + J.$$

Maintenant, nous allons caractériser les idéaux premiers et maximaux de $A \rtimes^f J$.

Proposition 1.6.4 ([13], proposition 2.6)

on note par :

$Max(A) := \{L'ensemble des idéaux maximaux de A\}$,

$Spec(A) := \{L'ensemble des idéaux premiers de A\}$,

$Spec(B) := \{L'ensemble des idéaux premiers de B\}$ et

$Spec(A \rtimes^f J) := \{L'ensemble des idéaux premiers de A \rtimes^f J\}$.

Soient $X := Spec(A)$, $Y := Spec(B)$, $W := Spec(A \rtimes^f J)$ et soit $J_0 := \{0\} \times J \subset A \rtimes^f J$.

$\forall P \in X$ et $Q \in Y$ considérons :

$P'^f := P \rtimes^f J := \{(p, f(p) + j)/p \in P \text{ et } j \in J\}$.

$\overline{Q}^f := \{(a, f(a) + j)/a \in A, j \in J \text{ et } f(a) + j \in Q\}$.

Les assertions suivantes sont vérifiées :

1. Les idéaux premiers de $A \rtimes^f J$ sont sous la forme :

$P'^f \cup \overline{Q}^f$ pour $P \in X$ et $Q \in Y \setminus V(J)$.

2. Soit $P \in Spec(A)$ alors P'^f est un idéal maximal de $A \rtimes^f J$ si et seulement si P est un idéal maximal de A .

3. Soit Q un idéal premier de B ne contenant pas J . Alors \overline{Q}^f est un idéal maximal de $A \rtimes^f J$.

En particulier, on a :

$Max(A \rtimes^f J) = \{P'^f/P \in Max(A)\} \cup \{\overline{Q}^f/Q \in Max(B) \setminus V(J)\}$

Deuxième chapitre

Amalgamation d'anneaux définie par des propriétés arithmétiques

Chapitre 2

Amalgamation d'anneaux définie par des propriétés arithmétiques

M. Kabbour et N. Mahdou, "Amalgamation of rings defined by the arithmetical property", soumis pour publication.

2.1 Transfert de quelques résultats des anneaux de valuations aux amalgamées

Dans ce paragraphe, nous présentons un résultat étudiant le transfert des propriétés des anneaux de valuations aux amalgamées.

Définition 2.1.1

Soit A un anneau. Alors :

1. A est dit **anneau de valuation** si pour tout $a, b \in A$, on a :
 $a \in Ab$ ou $b \in Aa$
2. On dit que R est un **domaine de valuation** si c'est un anneau de valuation intègre.

Définition et Théorème 2.1.2

1. Un anneau R est dit anneau arithmétique si ses idéaux forment un treilli distributif; c'est à dire que $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ pour tout les idéaux \mathfrak{a} , \mathfrak{b} et \mathfrak{c} de R .
2. Un anneau R est arithmétique si et seulement si R_m est un anneau de valuation pour tout idéal maximal m de R .

Théorème 2.1.3

Soient A et B une paire d'anneaux, J un idéal de B et soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors les résultats suivants sont vérifiés.

- (1) Si f n'est pas injectif, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation si et seulement si A est un anneau de valuation et $J = (0)$.
- (2) Si f est injectif, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation si et seulement si $f(A) + J$ l'est aussi et $f(A) \cap J = (0)$.

Preuve:

(1) Supposons que $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation. Puisque f n'est pas injectif, il existe un certain $a \neq 0 \in \ker f$. On montre que $J = (0)$.

Soit $x \in J$, on a $(a, 0) = (a, f(a)) \in A \bowtie^f J$ et $(0, x) \in A \bowtie^f J$. Donc $(0, x) \in (A \bowtie^f J) (a, 0)$ (puisque $a \neq 0$) et donc $(0, x) = (a, 0)(b, f(b) + j)$ pour un certain $(b, f(b) + j) \in A \bowtie^f J$. D'où $x = 0$, ce qui implique que $J = (0)$.

Il reste donc à montrer que A est un anneau de valuation. Soit $(\alpha, \beta) \in A^2$, Par hypothèses, on a $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation alors $(\alpha, f(\alpha)) \in (A \bowtie^f J) (\beta, f(\beta))$ ou $(\beta, f(\beta)) \in (A \bowtie^f J) (\alpha, f(\alpha))$. Nous concluons donc que $\alpha \in A\beta$ ou $\beta \in A\alpha$.

Inversement, on suppose que $J = (0)$ et A est un anneau de valuation. Alors $A \bowtie^f J$ est isomorphe à A , et par conséquent $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation.

- (2) Soit $\varphi : A \bowtie^f J \rightarrow f(A) + J$ un homomorphisme d'anneaux défini par :

$$\varphi(a, f(a) + j) = f(a) + j.$$

Nous avons $\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times (0)} \simeq f(A) + J$, car φ est surjectif et $\ker \varphi = f^{-1}(J) \times (0)$. Supposons que f est injectif. Si $f(A) \cap J = (0)$ et $f(A) + J$ est un anneau de valuation, alors $f^{-1}(J) = (0)$ et $A \bowtie^f J \simeq f(A) + J$.

Il est évident donc que $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation.

Inversement, supposons que $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation. Puisque φ est un homomorphisme d'anneaux surjectif alors $f(A) + J$ est un anneau de valuation. Maintenant supposons que $f(A) \cap J \neq (0)$, et choisissons un élément $f(a) \neq 0 \in J$. On a $(a, 0) \in A \bowtie^f J$, donc $(a, 0) \in (A \bowtie^f J) (0, f(a))$ ou $(0, f(a)) \in (A \bowtie^f J) (a, 0)$, ce qui est absurde. Ainsi, nous concluons la preuve de ce théorème.

Remarque 2.1.4

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux injectifs et J un idéal de B . Si $A \bowtie^f J$ est un anneau de valuation et $J \neq (0)$, alors A est un domaine de valuation.

Preuve:

Supposons que cette propriété est fautive, et choisissons un élément $(a, b) \in A^2$ tel que $a \neq 0, b \neq 0$ et $a.b = 0$. Pour chaque $x \in J$, il existe $(c, f(c) + y) \in A \bowtie^f J$ tel que $(b, f(b))(c, f(c) + y) = (0, x)$. Alors $b.c = 0$ et $f(b)y = x$, donc $f(a)x = 0$ et $f(a) \in (0 : J)$. Pour chaque $x \in J$, nous pouvons écrire $(a, f(a))(d, f(d) + z) = (0, x)$, avec $(d, f(d) + z)$ est un élément de $A \bowtie^f J$. Ainsi $x = f(a)z = 0$ ce qui donne une contradiction car $J \neq (0)$.

Exemple 2.1.5

Soient K un corps, $K[[x]]$ l'anneau des séries formelles à une indéterminée x et à coefficients dans K et soit $i : K \hookrightarrow K[[x]]$ une injection. Nous avons l'égalité suivante $K[[x]] = K + xK[[x]]$ et $K \cap (xK[[x]]) = (0)$. En appliquant la propriété (2) du théorème 2.1.1, nous obtenons que $K \bowtie^i xK[[x]]$ est un anneau de valuation discrète.

Corollaire 2.1.6

soit A un anneau et soit E un sous- A -module de $Q(A)$ tel que $E^2 \subseteq E$, alors $A \bowtie E$ est un anneau de valuation si et seulement si A est anneau de valuation et $E = \{0\}$.

Preuve:

nous avons l'égalité $A \bowtie E = A \bowtie^i E$, avec $i : A \hookrightarrow A + E$ une injection.

Par application de la propriété (2) du théorème 2.1.1, nous obtenons que $A \bowtie E$ est un anneau de valuation si et seulement si $A + E$ l'est et $A \cap E = \{0\}$. Supposons que $A \bowtie E$ est un anneau de valuation et soit $\frac{a}{b} \in E$. Puisque $a = b\frac{a}{b} \in A \cap E$, alors $a = 0$ et $\frac{a}{b} = 0$. Donc $E = \{0\}$ ce qui termine la preuve.

Exemple 2.1.7

Soit A un anneau et soit I un idéal de A . Alors $A \bowtie I$ est un anneau de valuation si et seulement si A l'est et $I = (0)$.

Lemme 2.1.8

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, J un idéal de B et \mathfrak{m} un idéal maximal de A . Et soit l'ensemble $S = f(A \setminus \mathfrak{m}) + J$. On a : S est une partie multiplicative de B et l'application $F : A_{\mathfrak{m}} \rightarrow S^{-1}B$, définie par $F\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{f(a)}{f(s)}$, pour tout $\frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{m}}$ est un homomorphisme d'anneaux.

Preuve:

Soient $s, t \in A \setminus \mathfrak{m}$ et $x, y \in J$, nous avons l'égalité :

$$(f(s) + x)(f(t) + y) = f(st) + (f(s)y + f(t)x + xy).$$

Donc S est une partie multiplicative de B . Soient $a, b \in A$ et $s, t \in A \setminus \mathfrak{m}$, si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ alors il existe $u \in A \setminus \mathfrak{m}$ tel que $uta = usb$. Donc $f(u)f(t)f(a) = f(u)f(s)f(b)$ et $\frac{f(a)}{f(s)} = \frac{f(b)}{f(t)}$ et par conséquent F est bien défini. Soient $\frac{a}{s}$ et $\frac{b}{t} \in A_{\mathfrak{m}}$, il est facile de vérifier qu'on a :

$$F\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) = F\left(\frac{a}{s}\right) + F\left(\frac{b}{t}\right), F\left(\frac{ab}{st}\right) = F\left(\frac{a}{s}\right)F\left(\frac{b}{t}\right)$$

et $F(1) = 1$. Finalement, nous déduisons que F est un homomorphisme d'anneaux.

Lemme 2.1.9

En utilisant les mêmes notations que celles du lemme précédent, soit

$$M = \mathfrak{m} \rtimes^f J = \{(a, f(a) + j) / a \in \mathfrak{m}, j \in J\}.$$

Alors il y a une bijection entre l'anneau $(A \rtimes^f J)_M$ et $A_{\mathfrak{m}} \rtimes^F S^{-1}J$,

$\varphi : (A \rtimes^f J)_M \mapsto A_{\mathfrak{m}} \rtimes^F S^{-1}J$ avec

$$\varphi \left(\frac{(a, f(a) + x)}{(s, f(s) + y)} \right) = \left(\frac{a}{s}, \frac{f(a) + x}{f(s) + y} \right)$$

est l'isomorphisme d'anneaux.

Preuve:

Nous commençons par montrer que φ est un homomorphisme bien défini. Soit $M = \mathfrak{m} \rtimes^f J$, d'après la [Proposition 1.6.4], M est un idéal maximal de $A \rtimes^f J$. Pour tout $\frac{(a, f(a) + x)}{(s, f(s) + y)} \in (A \rtimes^f J)_M$, nous avons les égalités suivantes :

$$F \left(\frac{a}{s} \right) + \frac{f(s)x - f(a)y}{f(s)(f(s) + y)} = \frac{f(a)(f(s) + y) + f(s)x - f(a)y}{f(s)(f(s) + y)} = \frac{f(a) + x}{f(s) + y}.$$

Par conséquent $\left(\frac{a}{s}, \frac{f(a) + x}{f(s) + y} \right) \in A_{\mathfrak{m}} \rtimes^F S^{-1}J$. Soient $a, a' \in A$, $s, s' \in A \setminus \mathfrak{m}$, et $x, y, x', y' \in J$, tels que $\frac{(a, f(a) + x)}{(s, f(s) + y)} = \frac{(a', f(a') + x')}{(s', f(s') + y')}$. Alors il existe $(t, f(t) + z) \in S$ tel que

$$(t, f(t) + z)(s', f(s') + y')(a, f(a) + x) = (t, f(t) + z)(s, f(s) + y)(a', f(a') + x'),$$

et donc

$$\begin{cases} ts'a = tsa' \\ (f(t) + z)(f(s') + y')(f(a) + x) = (f(t) + z)(f(s) + y)(f(a') + y'). \end{cases}$$

Nous déduisons que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ et $\frac{f(a) + x}{f(s) + y} = \frac{f(a') + x'}{f(s') + y'}$. Donc, φ est bien défini de $(A \rtimes^f J)_M$ vers $A_{\mathfrak{m}} \rtimes^F S^{-1}J$. Par définition de φ , nous avons $\varphi(1) = 1$. Soient $X = \frac{(a, f(a) + x)}{(s, f(s) + y)}$ et $Y = \frac{(b, f(b) + y)}{(s, f(s) + y)}$ des éléments de $(A \rtimes^f J)_M$, nous avons clairement les égalités suivantes :

$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$ et $\varphi(XY) = \varphi(X)\varphi(Y)$.

Il en résulte que φ est un homomorphisme d'anneaux.

Il nous reste à montrer seulement que φ est un isomorphisme. Soit $X = \frac{(a, f(a) + x)}{(s, f(s) + y)} \in$

$\ker \varphi$, alors $\frac{a}{s} = 0$ et $\frac{f(a) + x}{f(s) + y} = 0$. Il existe un certain $(t, f(t) + j) \in A_{\mathfrak{m}} \times S$ tel

que $ta = 0$ et $(f(t) + j)(f(a) + x) = 0$. En multipliant l'égalité précédente par $f(t)$

nous obtenons que $(tu, f(tu) + f(t)j)(a, f(a) + x) = 0$. Il en résulte que $X = 0$ et

$\ker \varphi = (0)$, donc φ est injectif. Soient $a \in A$, s et $t \in A \setminus \mathfrak{m}$ et soient $x, y \in J$. Alors

nous avons les égalités suivantes :

$$\left(\frac{a}{s}, F\left(\frac{a}{s}\right) + \frac{x}{f(t) + y} \right) = \left(\frac{at}{st}, \frac{f(at) + f(a)y + f(s)x}{f(st) + f(s)y} \right).$$

Posons : $b = at, u = st, z = f(a)y + f(s)x$ et $j = f(s)y$. De cette égalité précédente

nous déduisons que

$$\left(\frac{a}{s}, F\left(\frac{a}{s}\right) + \frac{x}{f(t) + y} \right) = \varphi \left(\frac{(b, f(b) + z)}{(u, f(u) + j)} \right).$$

Ainsi, φ est surjectif. D'où φ est un isomorphisme d'anneaux. Ce qui complète la

preuve de ce lemme.

2.2 Quand est-ce-que l'amalgamation d'anneaux est arithmétique ?

Maintenant nous allons donner des résultats concernant le transfert des propriétés arithmétiques à l'amalgamation d'anneaux.

Remarque 2.2.1

Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de B .

Si $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique alors A est aussi un anneau arithmétique.

Théorème 2.2.2

Soient A et B une paire de domaines, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de B tel que $(0) \subsetneq J \subsetneq B$.

(1) Si f est injectif, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique si et seulement si $f(A) + J$ l'est et $f(A) \cap J = (0)$.

(2) Si f n'est pas injectif alors $A \bowtie^f J$ n'est pas un anneau arithmétique.

Preuve:

(1) Supposons que $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique. Puisque $f^{-1}(J) \subsetneq A$, alors il existe un idéal maximal \mathfrak{m} de A contenant $f^{-1}(J)$. Soit S défini comme dans le lemme 2.1.8. $M = \mathfrak{m} \bowtie^f J$ est un idéal maximal de $A \bowtie^f J$. Ainsi $(A \bowtie^f J)_M$ est un anneau de valuation. Donc en appliquant le lemme précédent (lemme 2.1.9), on obtient que $A_{\mathfrak{m}} \bowtie^F S^{-1}J$ est un anneau de valuation, avec $F : A_{\mathfrak{m}} \rightarrow S^{-1}B$ est un homomorphisme d'anneaux défini par $F\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{f(a)}{f(s)}$. Soit $\frac{a}{s} \in \ker F$, il existe donc $(t, j) \in (A \setminus \mathfrak{m}) \times J$ tel que $(f(t) + j)f(a) = 0$. Si $f(t) + j = 0$ alors $t \in f^{-1}(J)$ ce qui entraîne une contradiction car $f^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{m}$. Ainsi $f(a) = 0$. Et puisque B est un domaine, il en résulte que $a = 0$, et par suite F est injectif. Par application de la propriété (2) du théorème 2.1.1, nous obtenons que $F(A_{\mathfrak{m}}) \cap S^{-1}J = (0)$ et $F(A_{\mathfrak{m}}) + S^{-1}J$ est un anneau de valuation. Maintenant nous voulons montrer que $f(A) \cap J = (0)$. Soit a un élément de A tel que $f(a) \in J$, nous avons clairement $F\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{f(a)}{1} \in F(A_{\mathfrak{m}}) \cap S^{-1}J = (0)$, ainsi $\frac{f(a)}{1} = 0$. De la même façon que la preuve précédente on a $a = 0$, et par conséquent $f(A) \cap J = (0)$. Inversement, on considère la projection naturelle de $A \bowtie^f J \subseteq A \times B$ sur B , φ est injectif (car f est injectif). En conséquence, $A \bowtie^f J \simeq f(A) + J$. Par suite, $f(A) + J$ est un anneau arithmétique.

Et pour l'autre sens est évident puisque nous avons un isomorphisme entre $A \bowtie^f J$ et A .

(2) On suppose que $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique, et choisissons $j \neq 0 \in J$. Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A , $S = f(A \setminus \mathfrak{m}) + J$ et soit $F : A_{\mathfrak{m}} \rightarrow S^{-1}B$ l'homomorphisme d'anneaux défini par $F\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{f(a)}{f(s)}$ (d'après le lemme 2.1.6, il est facile de voir que $\frac{a}{1} \neq 0 \in \ker F$ si $a \neq 0 \in \ker f$). Ainsi F n'est pas injectif. En appliquant le lemme 2.1.7 et la condition (1) du théorème 2.1.1, nous obtenons que $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de valuation et $S^{-1}J = (0)$. Ainsi il existe $f(t_{\mathfrak{m}}) + j_{\mathfrak{m}} \in S$ tel que $(f(t_{\mathfrak{m}}) + j_{\mathfrak{m}})j = 0$. De cette hypothèse, nous pouvons écrire que $f(t_{\mathfrak{m}}) + j_{\mathfrak{m}} = 0$. Soit I l'idéal de A engendré par tous les $t_{\mathfrak{m}}$. Pour chaque idéal maximal \mathfrak{m} de A , nous avons $I \not\subseteq \mathfrak{m}$ puisque $t_{\mathfrak{m}} \in I \setminus \mathfrak{m}$. Par conséquent $I = A$, nous pouvons écrire donc que $1 = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$, avec $x_i \in A$, $t_i \in A \setminus \mathfrak{m}_i$ pour un certain idéal maximal \mathfrak{m}_i de A . Il en résulte que

$$1 = f(t_1)f(x_1) + \cdots + f(t_n)f(x_n)$$

et donc nous avons que $J = B$, puisque $f(t_i) \in J$. Ce qui est une contradiction. D'où le résultat.

Remarque 2.2.3

Soient $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B .

- Si $J = (0)$ alors $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique si et seulement si A est un anneau arithmétique.
- Si $J = B$ alors $A \bowtie^f J$ est un anneau arithmétique si et seulement si A et B sont des anneaux arithmétiques.

Preuve:

Puisque le produit $A \times B$ est un anneau arithmétique si et seulement si A et B sont des anneaux arithmétiques.

Le théorème 2.2.1 enrichit la littérature avec une nouvelle classe d'anneau arithmétique qui ne sont pas de Bézout.

Exemple 2.2.4

Soient A un domaine de Prüfer, K son corps des fractions, et soit $K[x]$ l'anneau

des polynômes à coefficients dans K et à une indéterminée x . Par application de [[19], Corollary 5.2.12], nous déduisons que $A + xK[x]$ est un domaine de Prüfer. Il est déjà établi que $A \bowtie^i (xK[x])$, avec $i : A \hookrightarrow K[x]$ une injection, est un anneau arithmétique, car $A \cap xK[x] = (0)$. Donc $\mathbb{Z} \bowtie^i (x\mathbf{Q}[x])$ est un anneau arithmétique qui n'est pas de Bézout.

Corollaire 2.2.5

Soient A un domaine, K son corps des fractions et soit E un sous- A -module de K tel que $E^2 \subseteq E$. Alors $A \bowtie E$ est un anneau arithmétique si et seulement si A est un anneau arithmétique et ($E = \{0\}$ ou $A \subseteq E$).

Preuve:

Nous aurons besoin d'utiliser la propriété suivante :

Tout anneau compris entre un anneau arithmétique R et son anneau total des fractions $Q(R)$, est aussi arithmétique. (Voir [[24], Theorem 4 p.118]).

Nous avons l'égalité $A \bowtie E = A \bowtie^i E$, avec $i : A \hookrightarrow A + E$ une injection. Par application du théorème 3.1.9 et la remarque 2.2.3, nous déduisons que $A \bowtie E$ est un anneau arithmétique si et seulement si une des assertions suivantes est vérifiée :

- A est un anneau arithmétique et $A + E = E$;
- $A \cap E = \{0\}$ et $A + E$ est un anneau arithmétique.

Puisque $A \cap E = \{0\}$ si et seulement si $E = \{0\}$, donc $A + E = E$ si et seulement si $A \subseteq E$, et le résultat est clair.

Troisième chapitre

Amalgamation d'anneaux définie par des conditions de Bézout

Chapitre 3

Amalgamation d'anneaux définie par des conditions de Bézout

M. Kabbour et N. Mahdou, “Amalgamation of rings defined by Bezout-like conditions”, Journal of Algebra and its applications, accepté pour publication.

3.1 Etude des propriétés des anneaux diviseurs élémentaires, d’Hermite et de Bézout dans les extensions amalgamées

Dans ce paragraphe, nous allons voir des propriétés sur les notions d’anneaux diviseurs élémentaires, d’Hermite et de Bézout qui seront étudiées sur les amalgamées.

Tout au long de ce chapitre, on notera par $\mathcal{M}_n(R)$, l’ensemble de toutes les matrices $n \times n$ dont les coefficients proviennent de R et par $\mathcal{GL}_n(R)$ l’ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(R)$. Soient A et B deux anneaux, pour chaque matrice $M = ((a_{i,j}, b_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(A \times B)$ on utilise la notation suivante : $M_a =$

$(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $M_b = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $M = M_a \times M_b$. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(A \times B)$, il est facile de voir que le produit MN de M et N est donné par : $MN = (M_a N_a) \times (M_b N_b)$.

Définition et Théorème 3.1.1 ([30])

soit R un anneau.

1. R est dit anneau diviseur élémentaire si pour chaque matrice M provenant de R , il existe deux matrices P et Q non singulières telles que PMQ soit une matrice diagonale.
2. R est dit anneau d'Hermité si pour chaque matrice M provenant de R , il existe une matrice Q non singulière telle que MQ est une matrice triangulaire.
3. R est dit anneau de Bézout si tout idéal de type fini de R est principal.

On a : 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)

Lemme 3.1.2

Soient A et B une paire de domaines, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal propre de B .

- (1) Si $A \bowtie^f J$ est un anneau de Bézout alors $f(A) \cap J = 0$.
- (2) Si $A \bowtie^f J$ est un anneau de Bézout et f n'est pas injectif alors $J = 0$.

Preuve:

(1) Supposons que la propriété est fautive ; c'est à dire que $f(A) \cap J \neq 0$, et choisissons un élément $a \in A$ tel que $f(a) \neq 0 \in J$. Alors $(0, f(a))$ est un élément de $A \bowtie^f J$. Par hypothèses, on a $A \bowtie^f J$ est un anneau de Bézout, ce qui implique que l'idéal engendré par $(0, f(a))$ et $(a, f(a))$ est principal. Il existe donc $(d, f(d) + j) \in A \bowtie^f J$ tel que :

$$(a, f(a)) (A \bowtie^f J) + (0, f(a)) (A \bowtie^f J) = (d, f(d) + j) (A \bowtie^f J).$$

Aussi, il existe aussi $(b, f(b) + x), (c, f(c) + y), (\alpha, f(\alpha) + s)$ et $(\beta, f(\beta) + t) \in A \bowtie^f J$

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, f(a)) = (d, f(d) + j)(b, f(b) + x) \\ (a, f(a)) = (d, f(d) + j)(c, f(c) + y) \\ (d, f(d) + j) = (0, f(a))(\alpha, f(\alpha) + s) + (a, f(a))(\beta, f(\beta) + t). \end{array} \right.$$

Il est évident de voir que $d \neq 0$ puisque $a = c.d$ et $f(a) \neq 0$. Donc $b = 0$ puisque $b.d = 0$ et A est un domaine. De ces égalités précédentes, nous déduisons que

$$f(a) = (f(d) + j)x = (f(d) + j)(f(c) + y) \text{ et } f(d) + j = f(a)(f(\alpha) + f(\beta) + s + t).$$

En multipliant la seconde égalité par x , nous obtenons que $1 = x(f(\alpha) + f(\beta) + s + t)$ puisque B est un domaine. Ainsi, x est inversible, et puisque $x \in J$ donc $J = B$, ce qui est une contradiction.

(2) Supposons que $J \neq 0$ et soit $u \neq 0 \in J$. Puisque f n'est pas injectif, il existe $a \neq 0 \in \ker f$. De ce fait, nous pouvons écrire que

$$(a, u) (A \rtimes^f J) + (0, u) (A \rtimes^f J) = (d, f(d) + j) (A \rtimes^f J)$$

pour un certain $(d, f(d) + j) \in A \rtimes^f J$. Avec des arguments similaires à ceux de (1), nous obtenons $J = B$. Ce qui complète la preuve de ce lemme.

Lemme 3.1.3

Les assertions suivantes sont vérifiées :

- (1) *Soient A et B deux anneaux. Alors $A \times B$ est un anneau diviseur élémentaire si et seulement si A et B sont des anneaux diviseurs élémentaires.*
- (2) *Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de B . Si $A \rtimes^f J$ est un anneau diviseur élémentaire alors A et $f(A) + J$ sont aussi des anneaux diviseurs élémentaires.*

Preuve:

- (1) Evident.

(2) Soit $U = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(A)$ et soit M la matrice définie par $M = ((a_{i,j}, f(a_{i,j})))_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients dans $A \bowtie^f J$. Nous avons l'égalité suivante $U = M_a$. Puisque $A \bowtie^f J$ est un anneau diviseur élémentaire, alors M est équivalente à une matrice diagonale. De là, nous pouvons en déduire facilement qu'il existe P et $Q \in \mathcal{GL}_n(A)$ telle que PUQ est une matrice diagonale. Par conséquent, A est un anneau diviseur élémentaire.

Puisque la projection sur la seconde composante de $A \bowtie^f J$ est égale à $f(A) + J$, avec des arguments similaires que celles précédentes, nous obtenons que $f(A) + J$ est un anneau diviseur élémentaire.

Théorème 3.1.4

Soient A et B une paire de domaines, $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B .

(1) Supposons que f est injectif.

- Si $J = B$ alors $A \bowtie^f J$ est un anneau diviseur élémentaire si et seulement si A et B sont aussi des anneaux diviseurs élémentaires.
- Si $J \neq B$ alors $A \bowtie^f J$ est un anneau diviseur élémentaire si et seulement si $f(A) + J$ est un anneau diviseur élémentaire et $f(A) \cap J = 0$.

(2) On suppose que f n'est pas injectif. Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau diviseur élémentaire si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $J = 0$ et A est un anneau diviseur élémentaire.
- $J = B$ et (A, B) est une paire d'anneaux diviseurs élémentaires.

Preuve:

(1) Deux cas seront considérés :

Cas 1 : Si $J = B$ alors $A \bowtie^f J = A \times B$. Par application de la condition (1) du lemme précédent (lemme 3.1.3), nous obtenons que $A \bowtie^f J$ est un anneau diviseur élémentaire si et seulement si A et B le sont aussi.

Cas 2 : Si $J \neq B$ et $A \bowtie^f J$ est un anneau diviseur élémentaire, alors $f(A) \cap J = 0$

(d'après le lemme 3.1.2) puisque chaque anneau diviseur élémentaire est un anneau de Bézout. Pour l'autre sens, $f(A) + J$ est un anneau diviseur élémentaire (d'après le lemme 3.1.3).

Réciproquement, supposons que $f(A) + J$ est un anneau diviseur élémentaire et $f(A) \cap J = 0$. Nous montrons que la projection naturelle $p_B : A \rtimes^f J \rightarrow f(A) + J$ où $p_B((a, f(a) + j)) = f(a) + j$ est un isomorphisme d'anneaux.

En effet,

$$f(a) + j = 0 \Rightarrow f(a) = j = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Donc la conclusion est évidente.

(2) On suppose que $A \rtimes^f J$ est un anneau diviseur élémentaire. En appliquant (2) du lemme 3.1.3, nous obtenons alors que A est un anneau diviseur élémentaire.

Dans le deuxième cas où $J = B$, on a $A \rtimes^f J = A \times B$, ainsi A et B sont des anneaux diviseurs élémentaires d'après le lemme 3.1.3. L'autre sens de (2) est une conséquence immédiate du lemme 3.1.3.

Le théorème précédent nous fournit un exemple d'anneau diviseur élémentaire qui n'est pas de valuation. Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de B . Il est facile de voir que : Si $A \rtimes^f J$ est un anneau de valuation alors A l'est aussi.

Exemple 3.1.5

Soient A un domaine diviseur élémentaire qui n'est pas un anneau de valuation (prenons le cas où $A = \mathbb{Z}$) et K son corps des fractions. Soit $K[[x]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans K et à une indéterminée x . Par [22, Exemple 1, p.161], $A + (xK[[x]])$ est un anneau diviseur élémentaire. Nous concluons que $A \rtimes^i (xK[[x]])$, où i est une application injective de A sur $K[[x]]$, est un anneau diviseur élémentaire. Pour l'autre sens, $A \rtimes^i (xK[[x]])$ n'est pas un anneau de valuation. Ainsi $\mathbb{Z} \rtimes^i (x\mathbb{Q}[[x]])$ est un anneau diviseur élémentaire qui n'est pas de valuation.

Corollaire 3.1.6

Soient A un domaine, K son corps des fractions et E un sous- A -module non nul de K tel que $E^2 \subseteq E$. Alors $A \rtimes E$ est un anneau diviseur élémentaire si et seulement si A l'est et $A \subseteq E$.

Preuve:

Nous prouvons en premier lieu que : tout anneau R' compris entre un anneau diviseur élémentaire R et son anneau total $Q(R)$, est aussi un anneau diviseur élémentaire. Soit $M = \left(\frac{a_{i,j}}{d} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(R')$, où $a_{i,j} \in R$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$ et d un élément non diviseur de zéro de R . Il existe certaines matrices inversibles P et Q dont les coefficients sont dans R telles que $P(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} Q$ est une matrice diagonale. L'ensemble $P(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En multipliant cette égalité par $\frac{1}{d}$, nous obtenons que $PMQ = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{d}, \dots, \frac{\lambda_n}{d}\right)$. Puisque $PMQ \in \mathcal{M}_n(R')$, nous établissons donc le résultat souhaité.

Nous supposons maintenant que A est un anneau diviseur élémentaire et $A \subseteq E$. On a $A \rtimes E = A \times E$. D'après (1) du lemme 3.1.3, nous obtenons que $A \rtimes E$ est un anneau diviseur élémentaire.

Inversement, supposons que $A \rtimes E$ est un anneau diviseur élémentaire. On a $A \rtimes E = A \rtimes^i E$, où $i : A \hookrightarrow A + E$ est une injection. Par application de la condition (1) du théorème 3.1.4, nous obtenons le résultat suivant :

- Si $E = A + E$ (c'est à dire que $A \subseteq E$), alors A et $A + E$ sont des anneaux diviseurs élémentaires.
- Sinon $(A + E) \cap E = 0$ et $A + E$ est un anneau diviseur élémentaire.

Du fait que, $E \neq 0$, nous avons $(A + E) \cap E \neq 0$. Ainsi, nous concluons que $A \subseteq E$ et A est un anneau diviseur élémentaire.

Exemple 3.1.7

Soient A un domaine et I un idéal non nul de A . Alors $A \rtimes I$ est anneau diviseur élémentaire si et seulement si A l'est et $I = A$.

Lemme 3.1.8

Soient A et B une paire d'anneaux. Alors :

- (1) $A \times B$ est un anneau de Bézout si et seulement si A et B sont des anneaux de Bézout.
- (2) $A \times B$ est un anneau d'Hermité si et seulement si A et B le sont aussi.

Preuve:

Evident.

Théorème 3.1.9

soient A et B une paire de domaines, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme injectif. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $A \bowtie^f J$ est un anneau d'Hermité ;
- (2) $A \bowtie^f J$ est un anneau de Bézout ;
- (3) Une des conditions suivantes est vérifiée :
 - $J = B$, A et B sont des anneaux de Bézout.
 - $J \neq B$, $f(A) \cap J = 0$ et $f(A) + J$ est un anneau de Bézout.

Preuve:

(1) \Rightarrow (2) Claire puisque tout anneau d'Hermité est un anneau de Bézout.

(2) \Rightarrow (3) Supposons que $J \neq B$. D'après le lemme 3.1.2, on a $f(A) \cap J = 0$. Alors la projection naturelle est $p_B : A \bowtie^f J \rightarrow f(A) + J$; $p_B((a, f(a) + j)) = f(a) + j$ est un isomorphisme d'anneaux puisque f est injectif. Par conséquent $f(A) + J$ est un anneau de Bézout.

Si $J = B$ alors A et B sont des anneaux de Bézout d'après la condition (1) du lemme 3.1.8 puisque $A \bowtie^f J = A \times B$.

(3) \Rightarrow (1) Si $J = B$ alors A et B sont des anneaux Hermiteux puisque chaque domaine de Bézout est un anneau d'Hermité. Ainsi $A \bowtie^f J = A \times B$ est un anneau d'Hermité.

Maintenant nous supposons que $J \neq B$. Alors $A \rtimes^f J \simeq f(A) + J$ et $A \rtimes^f J$ est un domaine de Bézout et par suite anneau d’Hermite (car tout domaine de Bézout est un anneau d’Hermite). Ce qui complète la preuve de ce théorème.

Exemple 3.1.10

Soient A un domaine de Bézout, K son corps des fractions, et $K[[x]]$ l’anneau des séries de polynômes à coefficients dans K et à une indéterminée x . Alors $A \rtimes^i (xK[[x]])$, où $i : A \hookrightarrow K[[x]]$ est une application d’inclusion, est un anneau d’Hermite.

Corollaire 3.1.11

Soient A un domaine et K son corps des fractions. Soit E un A -sous-module non nul de K tel que $E^2 \subseteq E$. alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $A \rtimes E$ est un anneau d’Hermite ;
- (2) $A \rtimes E$ est un anneau de Bézout ;
- (3) A est un anneau de Bézout et $A \subseteq E$.

Preuve:

(1) \Rightarrow (2) Évident car tout anneau d’Hermite est un anneau de Bézout.

(2) \Rightarrow (3) Soit $\frac{a}{b} \neq 0 \in E$. Alors $a \neq 0 \in A \cap E$ et donc $A \cap E \neq 0$. En appliquant le théorème 3.1.9, nous obtenons que $A + E = E$ et $(A, A + E)$ est un anneau de Bézout. Il est évident que $A \subseteq E$ et A est un anneau de Bézout.

(3) \Rightarrow (1) Par application du lemme 3.1.8 et d’après la condition (3) du théorème 3.1.9, Il suffit de prouver que tout anneau compris entre un domaine de Bézout et son corps des fractions est aussi un domaine de Bézout. En effet soit R un domaine de Bézout et soit R' un anneau tel que $R \subseteq R' \subseteq qf(R)$. Soient $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d} \in R'$ alors nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a'c \\ b = b'c \\ \alpha a' + \beta b' = 1 \end{array} \right.$$

pour certains éléments $a', b', c, \alpha, \beta \in R$. Par suite $\frac{c}{d} = \alpha \frac{a}{d} + \beta \frac{b}{d}$ est un élément de R' . Ainsi $\frac{c}{d} \in R'$ et $R' \frac{a}{d} + R' \frac{b}{d} \subseteq R' \frac{c}{d}$. Inversement, nous avons :

$$\frac{c}{d} \in R' \frac{a}{d} + R' \frac{b}{d} \subseteq R' \frac{a}{d} + R' \frac{b}{d}.$$

Il est évident que $R' \frac{a}{d} + R' \frac{b}{d} = R' \frac{c}{d}$. Finalement, R' est un domaine de Bézout.

Exemple 3.1.12

Soit A un domaine et soit I un idéal non nul de A . Alors $A \rtimes I$ est un anneau de Bézout si et seulement si A est un anneau de Bézout et $I = A$.

Théorème 3.1.13

Soient A et B une paire de domaines, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme qui n'est pas injectif. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $A \rtimes^f J$ est un anneau d'Hermite ;
- (2) $A \rtimes^f J$ est un anneau de Bézout ;
- (3) une des conditions suivantes est vérifiée :
 - $J = B$, A et B sont des anneaux de Bézout.
 - $J = 0$, et A est un anneau de Bézout.

Preuve:

(2) \Rightarrow (3) Par application de la condition (2) du lemme 3.1.2, nous obtenons $J = 0$ ou $J = B$. Si $J = 0$ alors $A \rtimes^f J \simeq A$, sinon $A \rtimes^f J = A \times B$. En utilisant le lemme 3.1.8, nous avons l'implication désirée.

(3) \Rightarrow (1) Si $J = 0$ alors $A \rtimes^f J \simeq A$ et A est un anneau Hermite (puisque A est un domaine).

Si $J = B$, alors $A \rtimes^f J = A \times B$ est un anneau d'Hermite par application de la condition (2) du lemme 3.1.8.

Quatrième chapitre

Etudes des propriétés des anneaux
"clean" dans les extensions
amalgamées

Chapitre 4

Etude des propriétés des anneaux “clean” dans les extensions amalgamées

D.D. Anderson, M. Chhiti, N. Mahdou, et M. Tamekkante “Clean-like conditions in an amalgamated algebras along an ideal ”, en cours de préparation.

Tout au long de ce chapitre, nous notons respectivement par $\text{Nilp}(A)$, $\text{Rad}(A)$, $U(A)$ et $\text{Idem}(A)$ l’idéal de tous les éléments nilpotents de l’anneau A , le radical de jacobson de A , l’ensemble des éléments inversibles et l’ensemble de tous les idempotents de A .

4.1 L'amalgamation en tant qu'anneau "clean" (uniquement "clean")

Définition et Théorème 4.1.1

1. Un anneau A est dit **anneau "clean"** (uniquement "clean") si pour tout $a \in A$, a peut s'écrire (de façon unique) sous la forme $a = u + e$ tel que $u \in U(A)$ et $e \in \text{Idem}(A)$.
2. L'image homomorphe d'un anneau "clean" est aussi "clean".

Proposition 4.1.2

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B .

1. Si $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean" (respectivement uniquement "clean") alors A est un anneau "clean" (respectivement uniquement "clean") et $f(A) + J$ est un anneau "clean".
2. On suppose que $\frac{f(A) + J}{J}$ est uniquement "clean". Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean" si et seulement si A et $f(A) + J$ le sont aussi.

Preuve:

(1) On sait que les anneaux A et $f(A) + J$ sont des images homomorphes propres de $A \bowtie^f J$. Alors, ils sont "clean". Supposons maintenant que $A \bowtie^f J$ est uniquement "clean" et considérons $u + e = u' + e'$ avec $u, u' \in U(A)$ et $e, e' \in \text{Idem}(A)$. Alors, $(u, f(u)) + (e, f(e)) = (u', f(u')) + (e', f(e'))$ et clairement on a $(u, f(u)), (u', f(u')) \in U(A \bowtie^f J)$ et $(e, f(e)), (e', f(e')) \in \text{Idem}(A \bowtie^f J)$. Dès lors, $(u, f(u)) = (u', f(u'))$ et $(e, f(e)) = (e', f(e'))$ car $A \bowtie^f J$ est uniquement "clean". Ainsi, $u = u'$ et $e = e'$. Et par conséquent, A est uniquement "clean".

(2) Si $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean", alors A et $f(A) + J$ sont aussi des anneaux "clean" d'après 1).

Inversement, supposons que A et $f(A) + J$ sont des anneaux "clean" et considérons $(a, j) \in A \times J$. Puisque A est "clean", nous pouvons écrire que $a = u + e$ avec

$(u, e) \in U(A) \times \text{Idem}(A)$. Aussi, du fait que $f(A) + J$ est “clean”, alors $f(a) + j = f(x) + j_1 + f(y) + j_2$ avec $f(x) + j_1$ et $f(y) + j_2$ sont respectivement des éléments unités et idempotents de $f(A) + J$. Or $\overline{f(x)} = \overline{f(x) + j_1}$ (respectivement $\overline{f(y)} = \overline{f(y) + j_2}$) (respectivement $\overline{f(e)}$) sont respectivement des éléments unités et idempotents de $\frac{f(A) + J}{J}$, et on a $\overline{f(a)} = \overline{f(u)} + \overline{f(e)} = \overline{f(x)} + \overline{f(y)}$. Donc, $\overline{f(u)} = \overline{f(x)}$ et $\overline{f(e)} = \overline{f(y)}$ puisque $\frac{f(A) + J}{J}$ est uniquement “clean”. Considérons $j'_1, j'_2 \in J$ tel que $f(x) = f(u) + j'_1$ et $f(y) = f(e) + j'_2$. On a alors $(a, f(a) + j) = (u, f(u) + j'_1 + j_1) + (e, f(e) + j'_2 + j_2)$, et il est clair que $(e, f(e) + j'_2 + j_2)$ est un élément idempotent de $A \bowtie^f J$. Donc, nous avons à prouver seulement que $(u, f(u) + j'_1 + j_1)$ est inversible dans $A \bowtie^f J$. En effet, puisque $f(u) + j'_1 + j_1$ est inversible dans $f(A) + J$, il existe donc un élément $f(\alpha) + j_0$ tel que $(f(u) + j'_1 + j_1)(f(\alpha) + j_0) = 1$. Ce qui implique que $\overline{f(u)f(\alpha)} = \bar{1}$. Alors, $\overline{f(\alpha)} = \overline{f(u^{-1})}$. Par suite, il existe $j'_0 \in J$ tel que $f(\alpha) = f(u^{-1}) + j'_0$. Ainsi, $(u, f(u) + j'_1 + j_1)(u^{-1}, f(u^{-1}) + j'_0 + j_0) = (u, f(u) + j'_1 + j_1)(u^{-1}, f(\alpha) + j_0) = (1, 1)$. En conséquence, $(u, f(u) + j'_1 + j_1)$ est inversible dans $A \bowtie^f J$ et $A \bowtie^f J$ est “clean”.

Remarques 4.1.3

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B .

1. Si $J = B$, alors $A \bowtie^f B$ est “clean” si et seulement si A et B sont “clean” puisque $A \bowtie^f B = A \times B$.
2. Si $f^{-1}(J) = \{0\}$, alors $A \bowtie^f J$ est “clean” si et seulement si $f(A) + J$ est “clean”.

Corollaire 4.1.4

Soient A un anneau et I un idéal tels que A/I est uniquement “clean”. Alors $A \bowtie I$ est “clean” si et seulement si A est “clean”.

Contrairement à la proposition précédente, nous allons montrer que, si $J \subseteq \text{Rad}(B)$, la caractérisation de $A \bowtie^f J$ pour être “clean” ne dépend pas du choix de f .

Théorème 4.1.5

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B tel que $f(u) + j$ est inversible (dans B) pour tout $u \in U(A)$ et $j \in J$. Alors, $A \bowtie^f J$ est "clean" (respectivement uniquement "clean") si et seulement si A est "clean" (respectivement uniquement "clean").

Plus généralement, si $J \cap \text{Idem}(B) = 0$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \bowtie^f J$ est clean (respectivement uniquement "clean");
2. A est clean (respectivement uniquement "clean") et $J \subseteq \text{Rad}(B)$.

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.6

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B tel que $J \cap \text{Idem}(B) = 0$. Alors $\text{Idem}(A \bowtie^f J) = \{(e, f(e)) \mid e \in \text{Idem}(A)\}$.

Preuve:

Soit $(e, f(e) + j)$ un élément idempotent de $A \bowtie^f J$. Il est clair que e doit être un élément idempotent de A . D'une part on a : $(f(e) + j)^2 = f(e) + j$, et $j - j^2 = 2f(e)j$. Alors, $f(e)(j - j^2) = 2f(e)^2j = 2f(e)j$. Par conséquent, $-f(e)j^2 = f(e)j$. D'autre part, $(f(e)j)^4 = (f(e)^2j^2)^2 = (f(e)j^2)^2 = (-f(e)j)^2 = (f(e)j)^2$. Donc $f(e)j^2 = (f(e)j)^2 \in J \cap \text{Idem}(B) = \{0\}$, et $f(e)j = -f(e)j^2 = 0$. Par suite, $j - j^2 = 2f(e)j = 0$. Ainsi, $j \in J \cap \text{Idem}(B) = \{0\}$. Finalement, $j = 0$ et $\text{Idem}(A \bowtie^f J) \subseteq \{(e, f(e)) \mid e \in \text{Idem}(A)\}$.

L'autre sens est évident.

Preuve du théorème 4.1.5.

Remarquons dans un premier temps que si $f(u) + j$ est inversible (dans B) pour tout $u \in U(A)$ et $j \in J$ alors $J \cap \text{Idem}(B) = (0)$. En effet, si $j \in J \cap \text{Idem}(B)$ alors, $1 - j = -(1 + j) \in \text{Idem}(B) \cap U(B) = 1$. Ainsi, $j = 0$. Donc, si $A \bowtie^f J$ est (uniquement) "clean" alors A l'est aussi (d'après la proposition 4.1.2 (1)).

Supposons que A est “clean” et $f(u) + j$ est inversible (dans B) pour tout $u \in U(A)$ et $j \in J$. Considérons $(a, j) \in A \times J$. Puisque A est “clean”, alors $a = u + e$ où u et e sont respectivement des éléments unités et idempotents de A . En conséquence, $f(u) + j$ est inversible dans B . Alors, il existe $v \in B$ tel que $(f(u) + j)v = 1$. D’autre part on a, $(f(u) + j)(f(u^{-1}) - vf(u^{-1})j) = f(u)f(u^{-1}) + jf(u^{-1}) - (f(u) + j)vf(u^{-1})j = 1 + jf(u^{-1}) - f(u^{-1})j = 1$. Ainsi, $(u, f(u) + j)$ est inversible dans $A \bowtie^f J$ (puisque $(u, f(u) + j)(u^{-1}, f(u^{-1}) - vf(u^{-1})j) = (1, 1)$). Donc, $(a, f(a) + j) = (u, f(u) + j) + (e, f(e))$ est la somme d’un élément unité et un élément idempotent de $A \bowtie^f J$. Finalement, $A \bowtie^f J$ est “clean”.

Supposons en plus que A est uniquement “clean”. D’après le lemme 4.1.6, $\text{Idem}(A \bowtie^f J) = \{(e, f(e)) \mid e \in \text{Idem}(A)\}$. Supposons maintenant qu’on a $(u, f(u) + j) + (e, f(e)) = (u', f(u') + j') + (e', f(e'))$ avec $(u, f(u) + j), (u', f(u') + j') \in U(A \bowtie^f J)$ et $e, e' \in \text{Idem}(A)$. Il est donc clair que, u et $u' \in U(A)$, et $u + e = u' + e'$. Or A est uniquement “clean”, donc $u = u'$ et $e = e'$. Ainsi, $(e, f(e)) = (e', f(e'))$ et $(u, f(u) + j) = (u', f(u') + j')$. Par conséquent, $A \bowtie^f J$ est uniquement “clean”.

On suppose que $J \cap \text{Idem}(B) = (0)$.

(1) \Rightarrow (2) On a à montrer que $J \subseteq \text{Rad}(B)$. Considérons $j \in J$ et $x \in B$. Puisque $A \bowtie^f J$ est “clean” et d’après (1) qui précède, on a $(0, xj) = (u, f(u) + xj) + (e, f(e))$ avec $(u, f(u) + xj)$ est un élément inversible de $A \bowtie^f J$ et $e \in \text{Idem}(A)$. Nous avons $0 = u + e$ et donc $u = -1$ et $e = 1$. Par conséquent, $1 - xj = -(f(-1) + xj)$ est inversible dans B et par suite $j \in \text{Rad}(B)$.

(2) \Rightarrow (1) Découle de ce qui précède puisque pour tout $j \in J \subseteq \text{Rad}(B)$, il est clair que $f(u) + j = f(u)(1 + f(u^{-1})j)$ est inversible dans B .

Corollaire 4.1.7

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d’anneaux et J un idéal de B tels que $J \subseteq \text{Rad}(B)$. Alors $A \bowtie^f J$ est “clean” (respectivement uniquement “clean”) si et seulement si A est “clean” (respectivement uniquement “clean”).

Exemple 4.1.8

Soient $A \subset B$ une extension d'anneau commutatif et $X := \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ des indéterminées sur B . Et soit $A + XB[[X]] := \{h \in B[[X]] \mid h(0) \in A\}$ le sous-anneau de l'anneau séries $B[[X]]$. Alors, $A + XB[[X]]$ est "clean" si et seulement si A est "clean".

Preuve:

D'après l'exemple 1.6.2, $A + XB[[X]]$ est isomorphe à $A \bowtie^\sigma J$, où $\sigma : A \hookrightarrow B[[X]]$ est l'injection naturelle et $J := XB[[X]]$. Aussi, $\text{Rad}(B[[X]]) = \{g \in B[[X]] \mid g(0) \in \text{Rad}(A)\}$. Donc, $J \subseteq \text{Rad}(B[[X]])$. D'autre part, d'après le Corollaire 4.1.7, $A \bowtie^\sigma J$ est "clean" si et seulement si A est "clean". Ainsi, nous avons le résultat désiré.

Exemple 4.1.9

Soient T un anneau, $J \subseteq \text{Rad}(T)$ un idéal de T et soit D un sous-anneau de T tel que $J \cap D = (0)$. L'anneau $D + J$ est "clean" si et seulement si D est "clean".

Preuve:

D'après [12, Proposition 5.1 (3)], $D + J$ est isomorphe à $D \bowtie^\iota J$ avec $\iota : D \hookrightarrow T$ l'injection naturelle. Ainsi, d'après le corollaire 4.1.7, $D + J$ est "clean" si et seulement si A est "clean".

Le résultat suivant montre que la caractérisation de $A \bowtie^f J$ pour être (uniquement) "clean" est établie dans le cas où A est un anneau réduit et $J \cap \text{Nilp}(B) = (0)$.

Théorème 4.1.10

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B . L'ensemble $\bar{A} = A/\text{Nilp}(A)$, $\bar{B} = B/\text{Nilp}(B)$, $\pi : B \rightarrow \bar{B}$ la projection canonique, et $\bar{J} = \pi(J)$. On considère l'homomorphisme d'anneaux $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ défini par $\bar{f}(\bar{a}) = \overline{f(a)}$. Alors, $A \bowtie^f J$ est "clean" (respectivement uniquement "clean") si et seulement si $\bar{A} \bowtie^{\bar{f}} \bar{J}$ est "clean" (respectivement uniquement "clean").

Pour la démonstration de ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.11

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B . Alors,

$$\text{Nilp}(A \rtimes^f J) = \{(a, f(a) + j) \mid a \in \text{Nilp}(A), j \in \text{Nilp}(B) \cap J\}.$$

Preuve:

On considère $(a, f(a) + j) \in \text{Nilp}(A \rtimes^f J)$. Alors il existe un entier positif n tel que $(a, f(a) + j)^n = 0$. Donc $a^n = 0$, ce qui implique que $a \in \text{Nilp}(A)$ et $f(a) \in \text{Nilp}(B)$. D'autre part, $(f(a) + j)^n = 0$. Ainsi, $f(a) + j \in \text{Nilp}(B)$. En conséquence, $j \in \text{Nilp}(B)$ puisque $f(a) \in \text{Nilp}(B)$. D'où $j \in \text{Nilp}(B) \cap J$.

Inversement, considérons $a \in \text{Nilp}(A)$ et $j \in \text{Nilp}(B) \cap J$. Il est clair que $f(a) \in \text{Nilp}(B)$. Alors, $f(a) + j \in \text{Nilp}(B)$. Ainsi, $(a, f(a) + j)$ est un élément nilpotent de $A \rtimes^f J$.

Preuve du théorème 4.1.10.

Il est facile de voir que \bar{f} est bien défini et que c'est un homomorphisme d'anneaux.

Soit

$$\begin{aligned} \psi : A \rtimes^f J / \text{Nilp}(A \rtimes^f J) &\rightarrow \bar{A} \rtimes^{\bar{f}} \bar{J} \\ \overline{(a, f(a) + j)} &\mapsto (\bar{a}, \bar{f}(\bar{a}) + \bar{j}) \end{aligned}$$

L'application ψ est bien définie. En effet, si $\overline{(a, f(a) + j)} = \overline{(b, f(b) + j')}$, alors $(a-b, f(a-b) + j - j') \in \text{Nilp}(A \rtimes^f J)$. Donc d'après le lemme 4.1.11, $a-b \in \text{Nilp}(A)$ et $j - j' \in \text{Nilp}(B)$. Par suite, $\bar{a} = \bar{b}$ et $\bar{j} = \bar{j}'$. Et il est facile de vérifier aussi que ψ est un homomorphisme d'anneaux. De plus, $(\bar{a}, \bar{f}(\bar{a}) + \bar{j}) = (0, 0)$ implique que $a \in \text{Nilp}(A)$ et $j \in \text{Nilp}(B)$. Par conséquent, $(a, f(a) + j) \in \text{Nilp}(A \rtimes^f J)$; c'est à dire que $\overline{(a, f(a) + j)} = (0, 0)$. Donc, ψ est injectif. Aussi il est clair que, ψ est surjectif par construction. Finalement, ψ est un isomorphisme. D'où nous avons le résultat désiré.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème précédent et c'est aussi un cas particulier du corollaire 4.1.7.

Corollaire 4.1.12

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B . On suppose que $J \subseteq \text{Nilp}(B)$. Alors $A \bowtie^f J$ est "clean" (respectivement uniquement "clean") si et seulement si A est "clean" (respectivement uniquement "clean").

Preuve:

Avec la notation du théorème 4.1.10, $A \bowtie^f J$ est "clean" (respectivement uniquement "clean") si et seulement si $\overline{A} \bowtie^{\overline{f}} 0$ est "clean" (respectivement uniquement "clean") puisque $\overline{J} = (0)$. D'autre part d'après [12, Proposition 5.1 (3)], on a $\overline{A} \bowtie^{\overline{f}} 0 \cong \overline{A}$. En conséquence, le résultat désiré découle de [2, Théorèmes 9 et 23 (3)].

Soient E un A -module et $B := A \rtimes E$. Soit $\iota : A \hookrightarrow B$ l'injection canonique. En identifiant E avec $0 \rtimes E$ qui est nilpotent d'ordre 2, E peut être considéré comme un idéal de B . Notons qu'il n'est pas évident que $A \rtimes E$ coïncide avec $A \bowtie E$.

Corollaire 4.1.13

Avec la notation précédente, l'anneau $A \rtimes E$ est "clean" (respectivement uniquement "clean") si et seulement si A est "clean" (resp., uniquement "clean").

Preuve:

Puisque $0 \rtimes E$ est nilpotent d'ordre 2, ce résultat provient immédiatement du corollaire 4.1.12.

4.2 Caractérisation de l'amalgamation en tant qu'anneau local

L'étude des propriétés "clean" sur l'anneau $A \bowtie^f J$ nous a permis de donner la caractérisation de $A \bowtie^f J$ pour être local.

Théorème 4.2.1

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B . Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau local si et seulement si A est local et $J \subseteq \text{Rad}(B)$.

Preuve:

Remarquons d'abord qu'un anneau commutatif est local si et seulement si c'est un anneau "clean" indécomposable (qui est un anneau "clean" où $\{0, 1\}$ est l'ensemble de tous les éléments idempotents), d'après [2, Théorème 3].

Supposons que $A \bowtie^f J$ est un anneau local. Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean" indécomposable. Clairement, on a A est "clean". De plus, si $e \in \text{Idem}(A)$ alors $(e, f(e)) \in \text{Idem}(A \bowtie^f J) = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Donc $\text{Idem}(A) = \{0, 1\}$. En conséquence, A est un anneau "clean" indécomposable, et donc un anneau local.

Considérons $j \in J$ et $x \in B$. Puisque $A \bowtie^f J$ est "clean" on a :

$(0, xj) = (-1, -1 + xj) + (1, 1)$ avec $(-1, -1 + xj)$ est un élément unité de $A \bowtie^f J$ comme $\text{Idem}(A \bowtie^f J) = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Ainsi, $1 - xj = -(-1 + xj)$ est inversible dans B . D'où, $j \in \text{Rad}(B)$.

Inversement, on suppose que A est un anneau local et $J \subseteq \text{Rad}(B)$. D'après le théorème 4.1.5, $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean". D'autre part, d'après le lemme 4.1.6, $\text{Idem}(A \bowtie^f J) = \{(e, f(e)) \mid e \in \text{Idem}(A)\} = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Ainsi, $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean" indécomposable. Et par conséquent, $A \bowtie^f J$ est un anneau local.

Exemple 4.2.2

Soient $A \subset B$ une extension d'anneaux commutatifs et $X := \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ des indéterminées sur B . Alors $A + XB[[X]]$ est local si et seulement si A est local.

Preuve:

D'après [12, Exemple 2.5], $A + XB[[X]]$ est isomorphe à $A \bowtie^\sigma J$, où $\sigma : A \hookrightarrow B[[X]]$ est l'injection naturelle et $J := XB[[X]]$. Il est bien connu que $\text{Rad}(B[[X]]) = \{g \in B[[X]] \mid g(0) \in \text{Rad}(A)\}$. Ainsi, $J \subseteq \text{Rad}(B[[X]])$. D'où, d'après le théorème 4.2.1, $A \bowtie^\sigma J$ est local si et seulement si A est local. Finalement, nous avons le résultat désiré.

Exemple 4.2.3

Soient T un anneau, J un idéal de T , et D un sous-anneau de T tels que $J \cap D = (0)$. L'anneau $D + J$ est local si et seulement si D est local et $J \subseteq \text{Rad}(T)$.

Preuve:

D'après [12, Proposition 5.1 (3)], $D + J$ est isomorphe à l'anneau $D \rtimes^{\iota} J$ où $\iota : D \hookrightarrow T$ est l'injection naturelle. Ainsi, d'après le théorème 4.2.1, $D + J$ est "clean" si et seulement si A est "clean".

Corollaire 4.2.4

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $A \rtimes^f J$ est local et uniquement "clean" ;
2. A est local, uniquement "clean" et $J \subseteq \text{Rad}(B)$.

En particulier , si A est un anneau et I un idéal de A alors $A \rtimes I$ est local et uniquement "clean" si et seulement si A est local et uniquement "clean".

Preuve:

(1) \Rightarrow (2) Découle de la proposition 4.1.2 (1) et du théorème 4.2.1.

(2) \Rightarrow (1) Provient du théorème 4.2.1 et du corollaire 4.1.7.

Lorsque l'idéal J est engendré par un élément idempotent alors $J \cap \text{Idem}(B) \neq 0$. Ce pendant, il permet de passer des conditions "clean" entre A et $A \rtimes^f J$ plus facilement, en respectant f . Le transfert de la propriété "clean" de A à $A \rtimes^f J$ est plus aisé tout en respectant f .

Proposition 4.2.5

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit (e) l'idéal de B engendré par l'élément idempotent e . Alors $A \rtimes^f (e)$ est "clean" si et seulement si A et $f(A) + (e)$ sont "clean".

En particulier, si e est un élément idempotent de A alors, $A \rtimes (e)$ est "clean" si et seulement si A est "clean".

Preuve:

D'après la proposition 4.1.2 (1), si $A \bowtie^f (e)$ est “clean” alors A et $f(A) + J$ sont “clean”.

Soit $(a, f(a) + re)$ un élément de $A \bowtie^f J$ (avec $a \in A$ et $r \in B$). Puisque A et $f(A) + (e)$ sont “clean”, il existe u et v (resp. u' et v') dans A (resp. $f(A) + (e)$) qui sont respectivement unités et idempotents tels que $a = u + v$ et $f(a) + re = u' + v'$.

On a :

$$(a, f(a) + re) = (u, f(u) + (u' - f(u))e) + (v, f(v) + (v' - f(v))e).$$

D'autre part, $[f(u) + (u' - f(u))e][f(u^{-1}) + (u'^{-1} - f(u^{-1}))e] = [f(u)(1 - e) + u'e][f(u^{-1})(1 - e) + u'^{-1}e] = 1$. Et

$$\begin{aligned} [f(v) + (v' - f(v))e]^2 &= [f(v)(1 - e) + v'e]^2 \\ &= f(v)(1 - e) + v'e \\ &= f(v) + (v' - f(v))e \end{aligned}$$

Dès lors, $(u, f(u) + (u' - f(u))e)$ et $(v, f(v) + (v' - f(v))e)$ sont respectivement unité et idempotent de $A \bowtie^f (e)$. En conséquence, $A \bowtie^f (e)$ est “clean”.

Finalement, si $A = B$ et $f = \text{id}_A$ alors $A \bowtie^f (e) = A \bowtie (e)$ et $f(A) + (e) = A$. Ainsi, le cas particulier est une conséquence directe de ce qui précède.

Exemple 4.2.6

Pour tout homomorphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \bowtie^f (\bar{4})$ est clean et est réduit puisque $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est “clean”, réduit et $\bar{4}$ est un élément idempotent de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et puisque $(\bar{4}) \cap \text{Nilp}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = \{0\}$ (d'après Proposition 4.2.5 et [12, Proposition 5.4]).

Rappelons qu'un anneau R est dit booléen si pour tout $x \in R$, on a $x^2 = x$; (x est dit un élément idempotent). Il est établi qu'un anneau R est booléen si et seulement si R est uniquement “clean” avec $\text{Rad}(R) = (0)$ si et seulement si R est clean avec la caractéristique de 2 et 1 est seul unité dans R ; cf. [36, Theorem 19].

Le résultat suivant donne une caractérisation de $A \bowtie^f J$ pour être un anneau booléen.

Proposition 4.2.7

Soient $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et J un idéal de B .

1. Si $J \subseteq \text{Idem}(B)$, alors $A \bowtie^f J$ est "clean" si et seulement si A est "clean".
2. L'anneau $A \bowtie^f J$ est booléen si et seulement si A est aussi booléen et $J \subseteq \text{Idem}(B)$.

Preuve:

Remarquons d'abord que $J \subseteq \text{Idem}(B)$ implique que $2J = (0)$. En effet, soit $j \in J$. On a $2j \in J \subseteq \text{Idem}(B)$. Alors, $j + j = (j + j)^2 = j^2 + 2j^2 + j^2 = j + 2j + j$. Ainsi, $2j = 0$.

1. Soit $(a, f(a) + j)$ un élément de $A \bowtie^f J$ (avec $a \in A$ et $j \in J$). Nous avons $a = u + e$ avec u et e sont respectivement unité et idempotent de A . On a $(f(e) + j)^2 = f(e)^2 + j^2 + 2f(e)j = f(e) + j$ puisque $2j = 0$.

Donc, $(u, f(u))$ et $(e, f(e) + j)$ sont respectivement unité et idempotent de $A \bowtie^f J$, et on a $(a, f(a) + j) = (u, f(u)) + (e, f(e) + j)$. D'où, $A \bowtie^f J$ est "clean".

L'implication inverse est évidente.

2. Supposons que $A \bowtie^f J$ est booléen. Pour tout $a \in A$, on a $(a, f(a)) = (a, f(a))^2 = (a^2, f(a)^2)$, donc $a = a^2$. Ainsi, A est booléen. En plus, pour chaque $j \in J$, $(0, j) = (0, j)^2 = (0, j^2)$. Ce qui implique que $j = j^2$. Donc $J \subseteq \text{Idem}(B)$.

Maintenant, supposons que A est booléen et $J \subseteq \text{Idem}(B)$. On a que $2J = (0)$. Donc, pour tout $a \in A$ et $j \in J$, on a $(a, f(a) + j)^2 = (a^2, f(a)^2 + j^2 + 2f(a)j) = (a, f(a) + j)$. Finalement, $A \bowtie^f J$ est booléen.

Remarque 4.2.8

Etant donné un anneau A , deux cas se présentent lorsque $A = U(A) \cup \text{Idem}(A)$. Notamment, un corps ou un anneau booléen ; cf. [2, Theorem 14]. Dans la proposition

précédente, nous donnons une caractérisation lorsque $A \rtimes^f J$ est booléen. D'autre part, il est facile de montrer que $A \rtimes^f J$ est un corps si et seulement si A est un corps et $J \in \{(0), B\}$ avec B est un corps.

Il est bien connu que les anneaux de Von Neumann sont des cas particuliers des anneaux "clean".

Le résultat suivant étudie quand est-ce-que $A \rtimes^f J$ est régulier au sens de Von Neumann.

Proposition 4.2.9

Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneau et soit J un idéal de B .

1. Si A et $f(A) + J$ sont réguliers au sens de Von Neumann alors $A \rtimes^f J$ l'est aussi.
2. Si $A \rtimes^f J$ est régulier au sens de Von Neumann alors A est régulier au sens de Von Neumann et $J \cap \text{Nilp}(B) = (0)$ de plus on a l'équivalence si f est surjectif.

Preuve:

1. On suppose que A et $f(A) + J$ sont réguliers au sens de Von Neumann . Donc A et $f(A) + j$ sont réduits, et alors $A \rtimes^f J$ l'est aussi (d'après [12, Remarque 5.5 (3)]). En plus, d'après [13, Proposition 4.1], la dimension de Krull de $A \rtimes^f J$ est $\dim(A \rtimes^f J) = \max\{\dim(A), \dim(f(A) + J)\} = 0$. Ainsi, $A \rtimes^f J$ est régulier au sens de Von Neumann.

2. On suppose maintenant que $A \rtimes^f J$ est régulier au sens de Von Neumann, alors $A \rtimes^f J$ est réduit et $\dim(A \rtimes^f J) = 0$. Donc, d'après [12, Proposition 5.4] et [13, Proposition 4.1], A est réduit avec sa dimension de Krull est nulle et $J \cap \text{Nilp}(B) = (0)$. Inversement, si f est surjectif, A est régulier au sens de Von Neumann et $J \cap \text{Nilp}(B) = (0)$. Et avec les mêmes références $A \rtimes^f J$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann.

Corollaire 4.2.10

Soit R un anneau commutatif et soit I un idéal propre de R . Alors R est un anneau régulier au sens de Von Neumann si et seulement si $R \bowtie I$ est régulier au sens de Von Neumann.

On rappelle aussi qu'un anneau R est appelé "neat" si tout image homomorphe de R est "clean". Par exemple, tout anneau "clean" est "neat" mais la réciproque est fausse (Comme exemple, l'anneau des entiers est "neat" mais non "clean").

Maintenant, nous construisons une classe d'anneaux sur lesquels les propriétés "neat" et "clean" coïncident. Rappelons qu'un anneau A est dit indécomposable lorsque les seuls éléments idempotents de A sont 0 et 1. Sinon, il est appelé décomposable.

Proposition 4.2.11

Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal propre de B . On considère les assertions suivantes :

1. A est un anneau décomposable.
2. $J \cap \text{Idem}(B) \neq (0)$.
3. $f(u) + j$ est inversible (dans B) pour tout $u \in U(A)$ et $j \in J$.

Si une des trois conditions précédentes est satisfaite, alors $A \bowtie^f J$ est un anneau "clean" si et seulement si $A \bowtie^f J$ est "neat".

Preuve:

On suppose que A est un anneau indécomposable, et on considère $e \in \text{Idem}(A) \setminus \{0, 1\}$.

Alors $(e, f(e)) \in \text{Idem}(A \bowtie^f J) \setminus \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Dès lors, si $j \in J \cap \text{Idem}(B) \neq (0)$, alors $(0, j) \in \text{Idem}(A \bowtie^f J) \setminus \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Ainsi, si une des conditions (1) ou (2) est satisfaite, l'anneau $A \bowtie^f J$ est un anneau décomposable. Par suite, d'après [33, Proposition 2.3], $A \bowtie^f J$ est "clean" si et seulement si il est "neat".

Supposons que (3) est satisfaite et que $A \bowtie^f J$ est “neat”. D’après la définition des anneaux “neat”, $A \cong A \bowtie^f J/(\{0\} \times J)$ est “clean ”. Ainsi, d’après le théorème 4.1.5, $A \bowtie^f J$ est “clean ”. L’implication inverse est claire.

Cinquième chapitre

Quelques propriétés homologiques de l'amalgamation d'anneaux

Chapitre 5

Quelques propriétés homologiques de l'amalgamation d'anneaux

K. Louartiti, N. Mahdou et A. Mimouni “Some homological properties of amalgamation of rings”, en cours de préparation.

Dans ce chapitre, nous caractérisons le transfert des propriétés des anneaux RVN et SFT dans les extensions amalgamées.

Définition 5.0.12

1. Un idéal I d'un anneau R est appelé un SFT-idéal si il existe un entier naturel k et un idéal de type fini $J \subseteq I$ tel que $a^k \in J$ pour tout $a \in I$.
2. Un anneau R est dit un SFT-anneau si tout idéal de R est un SFT-idéal.

5.1 Transfert des propriétés RVN à l'amalgamation de $A \bowtie^f J$

Théorème 5.1.1

Soient A et B deux anneaux, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors :

1) $A \bowtie^f J$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann si et seulement si A est anneau régulier au sens de Von Neumann, J ne contient pas d'éléments nilpotents, et tout idéal premier de B ne contenant pas J est maximal.

2) $A \bowtie^f J$ est un anneau semi-simple si et seulement si A est semi-simple, J est un A -module de type fini ne contenant pas d'éléments nilpotents et tout idéal premier de B ne contenant pas J est maximal.

Lemme 5.1.2

Soient A et B deux anneaux, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau réduit si et seulement si A est réduit et J ne contient pas d'éléments nilpotents.

Preuve:

On suppose que $A \bowtie^f J$ est réduit. Soient $a \in A$ et n un entier naturel tel que $a^n = 0$, alors $(a; f(a)) \in A \bowtie^f J$ et

$$\begin{aligned} (a; f(a))^n &= (a^n; \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i a^i f^{n-i}(a)) = (a^n; \sum_{i=0}^{n-1} C_n^i f(a)^i f^{n-i}(a)) \\ &= (a^n; (\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i) f^n(a)) = (a^n; (2^n - 1) f(a)^n) = (0; 0). \end{aligned}$$

Donc $(a; f(a)) = (0; 0)$, Par conséquent $a = 0$. Ainsi A est réduit d'après ([29]).

Aussi, soit $j \in J$ et n un entier naturel tel que $j^n = 0$, alors $(0; j) \in A \bowtie^f J$ et $(0; j)^n = (0; j^n) = (0; 0)$, ce qui implique que $(0; j) = (0; 0)$, ainsi $j = 0$ et J ne contient pas d'éléments nilpotents.

Inversement, supposons que A est réduit. D'après le premier chapitre (préliminaires), on a :

$$\text{Spec}(A \bowtie^f J) = \{P'^f \mid P \in \text{Spec}(A)\} \cup \{\bar{Q}^f \mid Q \in \text{Spec}(B) \setminus V(J)\}.$$

Et soit $(a; f(a) + j) \in (\bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P'^f) \cap (\bigcap_{Q \in \text{Spec}(B) \setminus V(J)} \bar{Q}^f)$. On a

$$\left(\bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P'^f \right) \cap \left(\bigcap_{Q \in \text{Spec}(B) \setminus V(J)} \bar{Q}^f \right) = \left(\bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P \bowtie^f J \right) \cap \left(\bigcap_{Q \in \text{Spec}(B) \setminus V(J)} \bar{Q}^f \right)$$

, alors $a \in \bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P$ et $j \in (\bigcap_{Q \in \text{Spec}(B) \setminus V(J)} Q) \cap J$ ce qui implique que $a = 0$ (car A est réduit). Et puisque $j \in (\bigcap_{Q \in \text{Spec}(B)} Q) \cap J$, alors il existe un entier n tel que $j^n = 0$ et $j \in J$. Par conséquent $j = 0$ (car J ne contient pas d'élément nilpotent). Finalement, nous concluons que $(a; f(a) + j) = (0; 0)$. D'où, $A \bowtie^f J$ est réduit.

Lemme 5.1.3

Soient A un anneau commutatif, J un idéal de B qui est un A -module de type fini et $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien.
- ii) A est un anneau Noethérien.

Preuve:

(voir [[12], Proposition 5.6])

Preuve du théorème 5.1.1

1) On suppose $A \bowtie^f J$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann. Alors $A \bowtie^f J$ est réduit et tout idéal premier de $A \bowtie^f J$ est maximal (voir [?]). Donc A est un anneau réduit et J n'a pas d'éléments nilpotents (d'après le lemme 5.1.2) et pour tout idéal premier P de A , P'^f est un idéal premier de $A \bowtie^f J$. Alors P'^f est un idéal maximal. Donc P est un idéal maximal de A . Par conséquent A est un anneau régulier au sens de Von Neumann. Et pour tout idéal premier Q de B ne contenant pas J , \bar{Q}^f est un idéal premier de $A \bowtie^f J$, alors \bar{Q}^f est un idéal maximal. Ainsi Q est un idéal maximal de B .

Inversement, on suppose que A est anneau régulier au sens de Von Neumann.

Alors A est réduit et J n'a pas d'éléments nilpotents. Donc $A \bowtie^f J$ est réduit (d'après le lemme 5.1.2). Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\text{Spec}(A \bowtie^f J) &= \{P'^f \mid P \in \text{Spec}(A)\} \cup \{\bar{Q}^f \mid Q \in \text{Spec}(B) \setminus V(J)\} \\
&= \{P'^f \mid P \in \text{Max}(A)\} \cup \{\bar{Q}^f \mid Q \in \text{Max}(B) \setminus V(J)\} \\
&= \text{Max}(A \bowtie^f J).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous concluons que $A \bowtie^f J$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann. 2) Supposons que $A \bowtie^f J$ est semi-simple. Alors $A \bowtie^f J$ est un anneau Noethérien et régulier au sens de Von Neumann, ce qui implique que A est un anneau Noethérien (d'après le lemme 5.1.3), et régulier au sens de Von Neumann (d'après 1) du théorème 5.1.1) et J est un A -module de type fini qui ne contenant pas d'éléments nilpotents et tout idéal premier de B ne contenant pas J est maximal. Ainsi A est semi-simple. Inversement, supposons que A est semi simple. Alors A est un anneau Noethérien et régulier au sens de Von Neumann et J est un A -module de type fini, par suite $A \bowtie^f J$ est Noethérien (d'après le lemme 5.1.3). J n'a pas d'éléments nilpotents et tout idéal premier de B ne contenant pas J est maximal. D'où $A \bowtie^f J$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann (d'après le théorème 5.1.1, 1)).

Exemple 5.1.4

Soient $B = \prod_{i=1}^n K_i$ avec $K_i = \{0; 1\}$ et A un sous-anneau d'une séquence stationnaire de B . Soient $I = \bigoplus_{i=1}^n K_i$ un idéal de B et $i : A \longrightarrow B$ une injection canonique. Alors $A \bowtie^i J$ est un anneau régulier au sens de Von Neumann qui n'est pas Noethérien

Preuve:

B est un anneau booléen (c'est à dire que $a^2 = a$ pour tout $a \in B$). Alors B est un anneau régulier au sens de Von Neumann [Voir D. Costa 1994]. Or A est un sous-anneau de B alors A est un anneau booléen, puisque A est anneau régulier au sens de Von Neumann. Par suite, $A \bowtie^f J = A \bowtie J$ est régulier au sens de Von Neumann (d'après le théorème 5.1.1).

5.2 Transfert des propriétés SFT à l'amalgamation $A \bowtie^f J$.

Théorème 5.2.1

Soient A et B deux anneaux, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \bowtie^f J$ est un SFT-anneau ;
- (ii) A et $f(A) + J$ sont des SFT-anneaux.

Lemme 5.2.2

Soient A et B deux anneaux, I et K sont des idéaux de A et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Alors :

- (i) Si A est un SFT-anneau, alors $f(A)$ est un SFT-anneau.
- (ii) Si I et K sont des SFT-idéaux, alors $I + K$ est un SFT-idéal.

Preuve:

(i) Soit L un idéal de $f(A)$, alors il existe un idéal L' de A tel que $L = f(L')$. Or A est un SFT-anneau, alors L' est un SFT-idéal. Par conséquent, il existe un entier naturel k et un idéal de type fini $I' \in L'$ tels que $a^k \in I'$ pour tout $a \in L'$. Ainsi, pour chaque $a \in L$, il existe $b \in L'$ tel que $a = f(b)$. Or $b^k \in I'$, alors $f(b^k) = f(b)^k \in f(I') \subset f(L') = L$. Donc, L est un SFT-idéal et $f(A)$ est un SFT-anneau.

(ii) Soit I et K des SFT-idéaux, alors il existe deux idéaux de type fini I' et K' tels que $I' \subset I$ et $K' \subset K$, et il existe aussi deux entiers naturels k et k' tel que $a^k \in I'$

et $b^{k'} \in K'$ pour tout $a \in I$ et $b \in K$. Soit $a + b \in I + K$, alors :

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+k'} &= \sum_{i=0}^{i=k+k'} C_{k+k'}^i a^i b^{k+k'-i} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{i=k} C_{k+k'}^i a^i b^{k-i} \right] b^{k'} + \left[\sum_{i=k+1}^{i=k+k'} C_{k+k'}^i a^{i-k} b^{k+k'-i} \right] a^k. \end{aligned}$$

Ainsi, $(a + b)^{k+k'} \in I' + K' \subset I + K$. Par conséquent, $I + K$ est un SFT-idéal.

Lemme 5.2.3

Soient A et B deux anneaux, J un idéal de B et soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On suppose que J est un SFT-idéal, alors $I \bowtie^f J$ est un SFT-idéal si et seulement si I est un SFT-idéal pour tout idéal I de A .

Preuve:

On suppose que $I \bowtie^f J$ est un SFT-idéal de $A \bowtie^f J$. Alors il existe un idéal de type fini K de $A \bowtie^f J$ tel que

$$K = \sum_{i=0}^n (a_i; f(a_i) + e_i) A \bowtie^f J \subseteq I \bowtie^f J.$$

Et il existe aussi un entier naturel k tel que $(a; f(a) + e)^k \in K$ pour tout $(a; f(a) + e) \in I \bowtie^f J$. Pour chaque $a \in I$, nous avons $(a; f(a))^k = (a^k; \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i a^i f^{k-i}(a)) \in K$, alors $a^k \in I' = \sum_{i=0}^n a_i A \subseteq I$ et donc I est un SFT-idéal.

Inversement, supposons que I est un idéal-SFT. Alors il existe un idéal de type fini $I' = \sum_{i=0}^n a_i A \subset I$ et il existe k entier naturel tel que $a^k \in I'$ pour tout $a \in I$. Aussi J est SFT-idéal, alors il existe un idéal de type fini $J' = \sum_{i=0}^m b_i B \subset J$ et il existe k' entier naturel tels que $a^{k'} \in J'$ pour tout $a \in J$.

Soit $P' = \sum_{i=0}^n (a_i; f(a_i)) A \bowtie^f J + \sum_{i=0}^m (0; b_i) A \bowtie^f J$, alors $P' \subset I \bowtie^f J$ est un idéal de type fini. Soit $(a; f(a) + e) \in I \bowtie^f J$ avec $a \in I$ et $e \in J$, alors $a^k \in \sum_{i=0}^n a_i A$

et $e^{k'} \in \sum_{i=0}^m b_i B$. Par suite,

$$\begin{aligned}
(a; f(a) + e)^{k+k'} &= [(a; f(a)) + (0; e)]^{k+k'} \\
&= \sum_{i=0}^{k+k'} C_{k+k'}^i (a; f(a))^i (0; e)^{k+k'-i} \\
&= \left[\sum_{i=0}^k C_{k+k'}^i (a; f(a))^i (0; e)^{k-i} \right] (0; e)^{k'} \\
&\quad + \left[\sum_{i=k+1}^{k+k'} C_{k+k'}^i (a; f(a))^{i-k} (0; e)^{k+k'-i} \right] (a; f(a))^k.
\end{aligned}$$

Dès lors, $(a; f(a) + e)^{k+k'} \in P'$. Par conséquent $I \bowtie^f J$ est un SFT-idéal.

Preuve du théorème :

(i) \Rightarrow (ii). Soit I un idéal de A , alors $\{0\} \times J$ et $I \bowtie^f J$ sont des idéaux de $A \bowtie^f J$. Donc, $\{0\} \times J$ et $I \bowtie^f J$ sont des SFT-idéaux de $A \bowtie^f J$. Par conséquent J est un SFT-idéal. Par suite I est un idéal-SFT (D'après le lemme 5.2.3). Ainsi A et $f(A)$ sont des SFT-anneaux (d'après le lemme 5.2.2).

Aussi, $\{0\} \times J$ est un SFT-idéal de $A \bowtie^f J$, donc J est un SFT-idéal de B . Par conséquent $f(A) + J$ est un SFT-anneau (d'après le lemme 5.2.2).

(ii) \Rightarrow (i). D'après [[13], Proposition 2.6], les idéaux premiers de $A \bowtie^f J$ sont de la forme $P'^f = P \bowtie^f J$ ou $\overline{Q}^f = \{(a, f(a) + j) \mid a \in A ; j \in J, f(a) + j \in Q\}$, pour $P \in \text{Spec}(A)$ et $Q \in \text{Spec}(B)$.

A est un SFT-anneau, alors P est un SFT-idéal. Aussi J est un idéal de B tel que $J \subseteq f(A) + J$ qui est un SFT-anneau. Alors J est un SFT-idéal. Ainsi, P'^f est un SFT-idéal (d'après le lemme 5.2.3).

Soit $P_A : A \bowtie^f J \rightarrow A$ la projection naturelle de $A \bowtie^f J \subseteq A \times B$ sur A . Alors $P_A(\overline{Q}^f)$ est un idéal de A pour tout idéal premier \overline{Q}^f de $A \bowtie^f J$. Or A est un SFT-anneau, alors $P_A(\overline{Q}^f)$ est un SFT-idéal. Donc il existe un idéal de type fini $I' = \sum_{i=0}^n a_i A \subseteq P_A(\overline{Q}^f)$ et il existe k entier naturel tel que $a^k \in I'$ pour tout $a \in P_A(\overline{Q}^f)$. Et $f(A) + J$ est un SFT-anneau alors $(f(A) + J) \cap Q$ est un SFT-idéal de $f(A) + J$. Alors il existe un idéal de type fini $J' = \sum_{i=0}^m (f(b_i) + j_i)(f(A) + J) \subseteq (f(A) + J) \cap Q$

et il existe aussi k' entier naturel tels que $a^{k'} \in J'$ pour tout $a \in (f(A) + J) \cap Q$. Soit $Q' = \sum_{i=0}^n (a_i, f(a_i) + e_i)A \rtimes^f J + \sum_{i=0}^m (b_i, f(b_i) + j_i)A \rtimes^f J$, alors Q' est un idéal de type fini de \overline{Q}^f . Et pour $(a, f(a) + e) \in \overline{Q}^f$, nous avons $a^k \in I'$ et $(f(a) + e)^{k'} \in J'$.

Alors

$$(a, f(a) + e)^{k+k'} = (a^{k+k'}, \sum_{i=0}^{k+k'-1} C_{k+k'}^i a^i (f(a) + e)^{k+k'-i}) \in Q'.$$

D'où, \overline{Q}^f est un SFT-idéal.

Exemple 5.2.4

Soit $A := \mathbb{Z} \rtimes^i \mathbb{Q}$ où $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est l'injection canonique. Alors $A := \mathbb{Z} \rtimes^i \mathbb{Q}$ est un SFT-anneau qui n'est pas Noethérien.

Preuve:

Après avoir identifié \mathbb{Q} avec $\{0\} \times \mathbb{Q}$, \mathbb{Q} est considéré comme un idéal de $\mathbb{Z} \rtimes^i \mathbb{Q}$, et $\mathbb{Z}\alpha\mathbb{Z}$ coïncide avec $\mathbb{Z} \rtimes^i \mathbb{Q}$. Dans [6], $\mathbb{Z}\alpha\mathbb{Z}$ est un SFT-anneau mais qui n'est pas Noethérien. Alors $\mathbb{Z} \rtimes^i \mathbb{Q}$ est un SFT-anneau qui n'est pas Noethérien.

Perspectives

Chapitre 6

Perspectives

Au terme de ce travail, nous allons essayer d'éclaircir des perspectives de notre recherche. Nos questions visées sont regroupées en trois parties et sont comme suit :

Premier axe de recherche :

Nous allons essayer de caractériser les idéaux de présentation finie dans les extensions amalgamées.

Deuxième axe de recherche :

Soit $f : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et soit J un idéal de B .
Quand est-ce-que les idéaux de $A \bowtie^f J$ sont projectifs (resp., plats) ?

Troisième axe de recherche :

Dans cette partie nous allons essayer de donner une caractérisation des extensions amalgamées n -cohérentes.

Bibliographie

- [1] M.-S. Ahn et D.D. Anderson; *Weakly clean rings and almost clean rings*, Rocky Mount. J. Math. **36** (2006), 783-798.
- [2] D.D. Anderson et V. P. Camillo, *Commutative rings whose elements are a sum of a unit and an idempotent*, Comm. Algebra, **30** (7) (2002), 3327– 3336.
- [3] D.D. Anderson, M. Chhiti, N. Mahdou, et M. Tamekkante; *Clean-like conditions in an amalgamated algebras along an ideal* , en cours de préparation.
- [4] D. D. Anderson, *Multiplication ideals, multiplication rings, and the ring $R(X)$* , CANAD. J. MATH. **28** (1976), 760-768.
- [5] D. D. Anderson, *Principal-like ideals and related polynomial content conditions*, UNIVERSITY OF IOWA, SPRINGER BOOK COLLOGUE, (2010).
- [6] C. Bakkari, *Armendariz and SFT Properties in Subring Retracts*, MEDITERRANEAN JOURNAL OF MATHEMATICS, VOL. 6 (2009) 339– 345.
- [7] C. Bakkari; *On Prüfer-like conditions*, Journal of Commutative Algebra, Accepted for publication. Available from math. AC/0911.2250v1 11 Nov 2009.
- [8] C. Bakkari, N. Mahdou et S. Kabbaj, *Trivial extensions defined by Prufer conditions*, JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA, **214** , (2010).
- [9] W.C. Brown; *Matrices over commutative rings*, Pure and applied mathematics, **169** (1993).
- [10] V. P. Cammillo et D. Khurana; *A characterisation of unit regular rings*, Communication in algebra **29** (2001), 2293-2295.

- [11] J. Coykendall, *The SFT property does not imply finite dimension for power series rings*, JOURNAL OF ALGEBRA 256 (2002), 85-96.
- [12] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana; *Amalgamated algebras along an ideal*, Comm Algebra and Applications, Walter De Gruyter (2009), 241–252.
- [13] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana; *Properties of chains of prime ideals in amalgamated algebras along an ideal*, J. Pure Applied Algebra **214**(2010), 1633-1641
- [14] M. D'Anna; *A construction of Gorenstein rings*; J. Algebra **306**(2) (2006), 507-519.
- [15] M. D'Anna et M. Fontana; *The amalgamated duplication of a ring along a multiplicative-canonical ideal*, Ark. Mat. **45**(2) (2007), 241-252.
- [16] M. D'Anna et M. Fontana; *An amalgamated duplication of a ring along an ideal : the basic properties*, J. Algebra Appl. **6**(3) (2007), 443-459.
- [17] L. Fuchs et L. Salce; *Modules overs valuation domains*, Pure and applied mathematics, 97 (1985).
- [18] L. Gillman et M. Henriksen; *Some remarks about elementary divisor rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956) 362-365.
- [19] S. Glaz; *Commutative coherent rings*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1371 (1989).
- [20] S. Glaz; *Fixed rings of coherent regular ring*, Comm. Algebra, 20 (1992), 2635-2651.
- [21] J. Han et W. K. Nicholson; *Extensions of clean rings*, Comm. Algebra **29** (2001), 2589-2595.
- [22] M. Henriksen; *Some remarks on elementary divisors rings II*, Michigan Math.J., 3 (1956) 159 - 163.
- [23] J.A. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, Marcel Dekker, New York-Basel,1988.

- [24] C.U. Jensen ; *Arithmetical rings*, Acta Mathematica Hungaricae 17, (1966) 115-123.
- [25] S. Kabbaj et N. Mahdou, *Trivial extensions of local rings and a conjecture of Costa*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker, New York, 231 (2003), 301-312.
- [26] M. Kabbour et N. Mahdou ; *Amalgamation of rings defined by Bezout-like conditions*, Journal of Algebra and its applications, accepté pour publication.
- [27] M. Kabbour et N.Mahdou ; *Amalgamation of rings defined by the arithmetical propriety*, soumis pour publication, accepté pour publication.
- [28] I. Kaplansky ; *Elementary divisors and modules*, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1949) 464-491.
- [29] I. Kaplansky, *Commutative rings*, revised, UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS, CHICAGO, (1974).
- [30] M.D. Larsen ; W.J. Lewis, et T.S. Shores ; *Elementary divisors rings and finitely presented modules*, American Mathematical society, volume 187 (1974) 231 - 248.
- [31] K. Louartiti, N. Mahdou et A. Mimouni ; *Some homological proprieties of amalgamation of rings* , en cours de préparation.
- [32] N. Mahdou ; *On 2-Von Neumann regular rings*, Comm. Algebra, Vol. 33, (2005), 3489-3496.
- [33] W. McGovern ; *Neat rings*, J.Pure Appl. Algebra **205** (2006), 243-265.
- [34] M. Nagata ; *Local Rings*, Interscience, New York, 1962.
- [35] W. K. Nickolson ; *Lifting idempotents and exchange rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 278-279.
- [36] W. K. Nickolson et Y. Zhou ; *Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit*, Glasgow Math. J. **46** (2004), 227–236.

- [37] J. Rotman; *An Introduction to Homological Algebra*, Academic press, Pure and Appl. Math., A Series of Monographs and Textbooks, 25 (1979).
- [38] T.S. Shores; *Modules over semihereditary Bézout rings* , Proc. Amer. Math. Soc. volume 46 (1974) 211 - 213.
- [39] K. Varadarajan; *Clean, Almost clean, Potent commutative rings*, Journal of Algebra and its Applications. Vol. 6, No. 4 (2007), 671-685.
- [40] L. Vaš; **- clean rings; Some clean and almost clean Bear *- rings and Von Neumann Algebras*, J. Algebra **324** (2010) 3388 3400.
- [41] C. C. WEIBEL, *An introduction to homological algebra*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, UNITED KINGDOM, (1994).