



# THESE

Présentée à



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

Faculté des Sciences et Techniques

FES

## Thèse de Doctorat

Spécialité : Probabilités et statistique

Sujet:

---

---

### CONTRIBUTION AUX ESPÉRANCES CONDITIONNELLES DES ENSEMBLES ALÉATOIRES PETITS INTÉGRABLES ET APPLICATIONS À LA CONVERGENCE DES CLASSES DES MARTINGALES

---

---

présentée par

**Mohamed El Harami**

*Soutenue le 21 Avril 2012*

*Devant le Jury:*

<b>Pr. M. Ettaouil</b>	<b>FST. Univ. Fès</b>	<b>Maroc</b>	<b>Président</b>
<b>Pr. O. Ammor</b>	<b>FST. Univ. Fès</b>	<b>Maroc</b>	<b>Membre Rapporteur</b>
<b>Pr. S. Bouali</b>	<b>FS. Univ. Kenitra</b>	<b>Maroc</b>	<b>Membre Rapporteur</b>
<b>Pr. E. Azroul</b>	<b>FS. Univ. Fès</b>	<b>Maroc</b>	<b>Membre Examineur</b>
<b>Pr. A. Faik</b>	<b>FS. Univ. Meknes</b>	<b>Maroc</b>	<b>Membre Examineur</b>
<b>Pr. A. Hilali</b>	<b>FST. Univ. Fès</b>	<b>Maroc</b>	<b>Membre Examineur</b>
<b>Pr. F. Ezzaki</b>	<b>FST. Univ. Fès</b>	<b>Maroc</b>	<b>Directeur de Thèse</b>

---

## Résumé

---

Au cours de ce travail nous avons démontré l'existence de l'espérance conditionnelle des fonctions Pettis intégrables définies dans un espace mesuré de mesure positive non nécessairement finie à valeurs dans un espace de Banach non *WRNP*. Ce résultat est également démontré pour les ensembles aléatoires Pettis intégrables à valeurs dans l'ensemble des parties convexes et faiblement compactes (resp, convexes fermées et bornées ) d'un espace de Banach  $E$ . Comme applications, nous démontrons des nouveaux résultats de convergence au sens de la norme de Pettis, de Mosco, la topologie linéaire et la topologie de Slice de plusieurs classes des martingales Bochner et Pettis intégrables. Nous avons également prouvé de nouvelles versions du théorème de la convergence dominée pour les espérances conditionnelles des ensembles aléatoires Pettis et Bochner intégrables.

**Mots clés:** L'intégrale de Pettis, Espérances conditionnelles, fonctions et multifonctions Pettis intégrales, Martingales, surmartingales, Mils, Amarts, GFT, Mosco convergence, linéaire topologie, Slice topologie.

---

---

# Contents

---

<b>Introduction (in French)</b>	<b>1</b>
<b>Bibliography</b>	<b>5</b>
0.1 Résumé du chapitre I . . . . .	8
<b>1 General Pettis Conditional expectation and convergence theorems</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Notations and preliminaries . . . . .	14
1.3 Pettis conditional expectation . . . . .	18
1.4 Pettis Levy's theorem and dominated convergence theorem of con- ditionals expectations . . . . .	35
<b>Bibliography</b>	<b>42</b>
1.5 Résumé du chapitre II . . . . .	45
<b>2 Pettis conditional expectation for closed convex and bounded random sets and convergence of multivalued mils and GFT</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction . . . . .	52
2.2 Notations and preliminaries . . . . .	53
2.3 Pettis conditional expectation for $ccb(E)$ -valued random sets . . . . .	57
2.4 Levy's theorem and convergence of the sequences $(E^{\mathcal{F}_n}(X_n))$ in the linear topology . . . . .	66
2.5 Convergence of multivalued mils and GFT . . . . .	74
<b>Bibliography</b>	<b>90</b>
2.6 Résumé du chapitre III . . . . .	93

<b>3</b>	<b>Convergence of unbounded integrables and Pettis integrables multivalued supermartingales</b>	<b>99</b>
3.1	Introduction . . . . .	99
3.2	Notations definitions and preliminaries . . . . .	100
3.3	Convergence of unbounded integrables multivalued supermartingales	105
3.4	Toward the Pettis integrables multivalued supermartingales . . . . .	117
	<b>Bibliography</b>	<b>125</b>
3.5	Résumé du chapitre IV . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Convergence of Pettis integrables adapted sequences in a Banach space without <math>WRNP</math></b>	<b>132</b>
4.1	Introduction . . . . .	132
4.2	Notations definitions and preliminaries . . . . .	133
4.3	Conditional expectation of Pettis integrables functions with values in a Banach space not $WRNP$ . . . . .	136
4.4	Convergence of Pettis integrables adapted sequences, mils and amarts	139
	<b>Bibliography</b>	<b>154</b>
	<b>Conclusion (in French)</b>	<b>156</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>158</b>
	<b>Résumé</b>	<b>160</b>
	<b>Perspectives(in French)</b>	<b>161</b>