UNIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

LICENCE SCIENCES ET TECHNIQUES
Calcul scientifique et application

RAPPORT DE FIN D'ETUDES

Théorème de Ramsey

Réalisé par :
Sbai, Amin

Encadré par :
Bekkali Mohamed FST FES

Soutenu le 18- Juin 2015 devant le jury

Alami, Mostafa	C.R.M.E.F. FES
Bekkali, Mohamed	FST FES
Hilali, Abdelmajid	FST FES
Rouchdi, Ilham	FSJEC FES

Remerciements

Avant tout je remercie monsieur Mohammed Bekkali d'avoir encadrer ce travail.

J'exprime mes remerciements aux professeurs Abd.Hilali, M.Alami et I.Rouchdi d'avoir participer au jury, ainsi qu'à ma famille et mes amis qui m'ont aidé durant la préparation de ce travail.

Table des matières

1 Introducion

"L'analyse combinatoire s'emploie pour étudier et pour dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis", cette définition est complétée par les précisions suivantes que l'on retrouve dans la plupart des dictionnaires : "L'analyse combinatoire est née de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développée sous l'influence du calcul des probabilités. Elle est par ailleurs liée à la théorie des nombres et à la théorie des graphes, ses méthodes étaient originellement adaptées à la résolution de problèmes particuliers. En revanche, actuellement, on tente de ramener les problèmes rencontrés à des exemples types pour lesquels on développe des méthodes générales de résolution".

Retenons de cette définition le rôle des groupements d'ensembles finis et la généralisation des méthodes découvertes sur des cas particuliers, mais le raisonnement combinatoire se caractérise aussi par la nécessité de l'induction et par l'utilisation forcée des propriétés des nombres.

L'analyse combinatoire serait née de l'étude des jeux de hasard. Cela nous renvoie bien entendu à Blaise Pascal (1623-1662) et à son usage du triangle arithmétique pour déterminer les parties (1636), de même qu'à la correspondance en 1654 entre Blaise Pascal et Pierre Fermat (1601-1665) qui fut à l'origine du calcul des probabilités.

En fait, les prémisses de l'analyse combinatoire se trouve chez de nombreux prédécesseurs de ces deux savants et que la combinatoire elle-même n'est devenue un chapitre autonome des mathématiques que bien plus tard avec la publication entre 1796 et 1806 des articles de Hindeburg et de l'opuscule de Heinrich Burmann intitulé : "Développement des fonctions combinatoires".

l'analyse combinatoire est l'exemple même d'une science qui commence par résoudre des problèmes de dénombrements apparus dans diverses civilisations et en des périodes différentes, de la Chine il y a 5000 ans aux problèmes de trafics routiers d'aujourd'hui en passant par les problèmes linguistiques arabes du IXème siècle et que souvent des solutions combinatoires ont été inventées suite à la curiosité inventive de quelques mathématiciens dont les résultats furent tellement en avance sur le temps qu'ils ne furent point compris par leurs contemporains.

Frank Plumpton Ramsey (1902/1930), né à Cambridge, qui fût un esprit brillant en économie, en philosophie et en logique mathématique, domaine à partir duquel il présenta sa première version du théorème que nous allons citer par la suite, a laissé sa trace dans le monde du combinatoire, grâce à ce théorème, il a pu affirmer qu' on ne peut pas avoir de désordre complet dans une structure assez grande, ou plutôt qu'une telle structure contient nécessairement des sous-structures ayant un certain ordre.

Nous allons commencé par analyser un cas particulier du théorème du Ramsey, qui s'appelle "théorème d'amitiè", aprés nous allons énoncer le théorème de Ramsey dans sa version fini , voir comment calculer le nombre de ramsey, puis nous allons énoncer le théorème infini, puis montrer comment la version fini peut être déduite de la version infini, et términer par donner une application de la version infini.

2 Le théorème de Ramsey fini

2.1 Cas particulier

> Théorème d'amitié :
> Parmi six personnes on en trouve toujours soit trois qui se connaissent l'une l'autre, soit trois qui sont etrangères l'une à l'autre. Autrement dit, tout coloriage a deux couleurs du graphe complet a six noeuds crée un triangle monochrome.

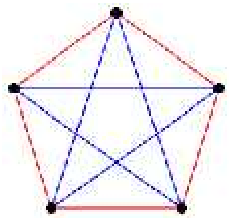
Pour démontrer ce théorème nous aurons besoin d'énoncer un autre théorème appelé "Principe des tiroirs" ou aussi "The Pigeonhole principle" dans la version anglaise.

> Principe des tiroirs :
> le principe des tiroirs de Dirichlet, affirme que si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs.

Soit en effet P_1 la première personne du groupe. D'aprés le principe cité au dessu, nous serons amenés à 2 deux cas sur les cinq autres personnes : soit elle en connait au plus deux, soit elle en connait au moins trois.

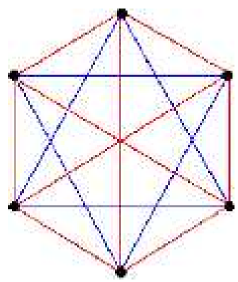
Supposons que l'on est dans le second cas, et soient P_2,P_3 et P_4 trois personnes connues de P_1 . Si deux d'entres elles se connaissent, mettons P_2et P_3, alors P_1,P_2 et P_3 se connaissent toutes les trois. Sinon, P_2 ,P_3 et P_4 ne se connaissent du tout, et alors le résultat annoncé est juste. Dans l'autre cas, si P_1 connait au plus deux personnes du groupe, alors forcément il n'en connait pas au moin trois, soient P_4,P_5 et P_6 ces personnes, si deux d'entres elles ne se connaissent pas, mettons cette foix P_4et P_5, alors P_1,P_4 et P_5 ne se connaissent pas toutes les trois. Sinon, P_4,P_5 et P_6 se connaissent mutuellement. Donc dans les deux cas nous aurons trois personnes qui se connaissent ou trois qui ne se connaissent pas.

Si l'on veut donner une illustration un peu plus visuelle de ce problème, on peut parler de graphes. On dessine donc un graphe complet de 5 points, chaque sommet représente une personne du groupe, et on colorie en rouge les arrâtes reliant les personnes qui se connaissent, et en bleu les arêtes reliant les personnes qui ne se connaissent pas. Avec cette interprétation, il s'agit de montrer qu'il existe forcément un triangle monochromatique (i.e. dont les trois côtés sont de la même couleur).



On peut voir facilement qu'avec cinque sommet, on peut colorier les arêtes du graphe sans avoir un triangle monochromatique, ou bien un K_3, on déduit donc qu'un ordre inférieur à 6 ne peut pas convenir.

Soit une 2-coloration en rouge et bleu du graphe complet à six sommets K_6 . Cinq arêtes de ce graphe partent d'un sommet quelconque v, et donc, d'après le principe des tiroirs, trois d'entre elles au moins (mettons (v, r), (v, s) et (v, t)) sont de la même couleur, qu'on peut supposer bleu sans perte de généralité. Si l'une des arêtes (r, s), (r, t) ou (s, t) est également bleu, le triangle correspondant (v, r, s) dans le premier cas) est entièrement bleu ; sinon, c'est le triangle formé par ces trois arêtes qui est entièrement rouge.



La question sur laquelle Ramsey a essayé de repondre est la suivante : Etant donné deux entiers s et t, existe-t-il un entier n (dépendant de s et t) tel que pour tout coloriage des arêtes de K_n avec deux couleurs (par convention, le rouge et le bleu), K_n contient un sous-graphe K_s formé d'arêtes bleus ou K_t formé d'arêtes rouges ? Il n'est pas évident qu'a priori cette question possède une solution. En effet, on pourrait penser que certains coloriages permettent de mettre en défaut la propriété désirée quel que soit n.

En fait, nous allons définir le nombre $R(s, t)$ comme étant le plus petit entier n tel que K_n contienne une copie de K_s rouge ou une copie de K_t bleue. Il nous faudra bien sur montrer que ces nombres existent , mais si de tels nombres existent, par difinition même de $R(s, t)$, on peut énoncer le théorème suivant.

2.2 Théoreme de Ramsey (cas de deux couleurs) :

> Théorème :
> Il existe un plus petit entier $R(s, t)$ tel que pour tout $n \geq R(s, t)$, tout coloriage de $K_n = (V, E)$, $c : E \to \{R, B\}$, est tel que G contient une copie de K_s colorée en R ou une copie de K_t colorée en B.

Preuve :

Nous allons montrer par récurrence double sur s et t que pour tout couple (s, t), il existe un entier n_0 tel que $n_0 = R(s, t)$. Pour montrer l'existence d'un tel nombre, on va lui donner un majorant explicite.

pour $s = 1$ ou $t = 1$ le résultat est évident et on a $R(1, t) = R(s, 1) = 1$, car dans K_1 il n'y a aucune arête, et alors aucune arête a colorer, pour $s = 2$ ou $t = 2$, c'est encore un résultat trivial et on a $R(s, 2) = s$ et $R(2, t) = t$, en effet, si toutes les arêtes de K_s sont colorée en rouge, alors nous avons directement notre K_s , si une arête est colorée en bleu, nous aurons un K_2, alors un ordre de graphe inférieur a s ne peut pas convenir.

On Voit que $R(s, t)$ existent toujours si $s + t \leq 5$, Supposons donc le résultat est établi pour les couples (s, t), avec $s + t < r$, et montrons que $R(s, t)$ existe pour $s + t = r$ avec $r \geq 6$.

Soit enfin n_1 tel que $n_1 = R(s - 1, t)$ et n_2 tel que $n_2 = R(s, t - 1)$. Ces entiers existent par hypothèse de récurrence. Nous allons montrer que leurs somme $n_0 = n_1 + n_2$ vérifie $n_0 = R(s, t)$.

On considère un sommet S_0 désormais fixé du graphe K_n, et l'on définit deux sous-ensembles A_1 et A_2 des autres sommets du graphe par : Pour tout $S = S_0$, $S \in A_i$ si et seulement si l'aréte (S_0, S) est de la couleur i $(i = 1, 2)$.

Les ensembles A_1 et A_2 forment une partition de l'ensemble des $n-1$ sommets restants, donc on a $Card(A_1) \geq n_1$ ou $Card(A_2) \geq n_2$ (sinon, par sommationon on trouve $Card(A_1 \cup A_2) \leq n - 2$).

Ces deux situations sont strictement équivalentes, nous allons étudier le cas ou $Card(A_1) \geq n_1$.

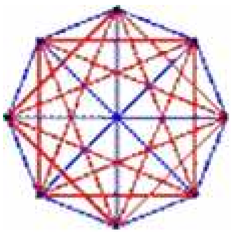
On a $n_1 = R(s - 1, t)$ par hypothèse, Donc le sous-graphe obtenu à partir des seuls sommets de A_1 contient lui-mème un sous-graphe de type K_{s-1} de la première couleur, ou un sous-graphe de type K_t de la seconde. Dans ce dernier cas, on a donc dans K_n un sous-graphe de type K_t de la seconde couleur. Dans le premier cas, il suffit d'ajouter notre sommet choisi au départ, qui est relié à tous ceux de A_1 par une arête de la première couleur, et en particulier aux sommets du sous-graphe K_{s-1} colorés de la première couleur. On obtient bien un graphe complet à $s - 1 + 1 = s$ sommets, dont toutes les arêtes sont de la première couleur.

Le cas $\mathrm{Card}(A_2) \geq n_2$ est symétrique et se traite de la même façon.

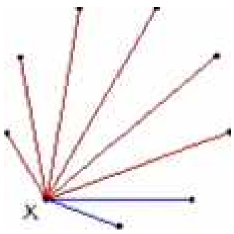
On conclue donc par récurrence que pour tout couple d'entiers (s, t), il existe un n_0 bien défini tel que $n_0 = R(s, t)$, et le théorème est donc démontré.

Example :

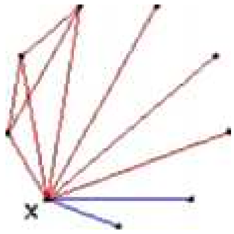
On voit tout d'abord que $R(4, 3) > 8$ de la coloration de K_8 ci-dessous. Cette coloration montre que K_8 peut être 2-coloré de telle sorte qu'il ne contient ni un K_4 rouge, ni un K_3 bleu comme un sous-graphe.



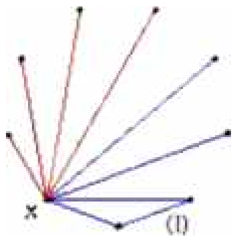
Pour montrer que $R(4, 3) = 9$, nous considérons une 2-coloration quelconque de K_9. On sait que dans tout graphe non orienté, le nombre de sommets impairs est pair, et pour cette raison, il ne peut pas exister un sougraphe rouge 5-régulier de K_9 , ni un sous-graphe bleu 3-régulier. Cela implique que dans un K_9 2-coloré, on doit avoir au moin un sommet incident à au moins six rouges arêtes ou au moins quatre bleus.

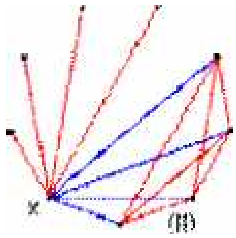


Nous savons déja que $R(3, 3) \doteq 6$, alors prenons un sommet, disons x, qui esi incident à 6 arêtes rouges, les 6 sommets connécté aux 6 arêtes rouges doivent induire un rouge ou bleu K_3. On a trouvé notre résultat si on trouve un K_3 bleu, alors on suppose qu'on a trouvé un K_3 rouge, ce dernier induit avec les arêtes qui connectent ce K_3 rouge à x, un K_4 rouge, et le résultat est trouvé.



Nous discutons maintenant le cas où x est incident à 4 arêtes bleus. Parmis les 4 sommets qui sont relié à x par ces arêtes bleus, il doivent exister 2 sommets qui sont reliés en bleu entre eux, cette arête cinstruit avec les arêtes incidentes à x un K_3 bleu, sinon tous les 4 sommets sont reliés en rouge, et alors ils forment un K_4 rouge.





On voit voit que dans tous cas, on obtient soit un K_3 bleu soit un K_4 rouge, et alors pour toute 2-coloration de K_9, on obtient forcement soit un K_3 bleu soit un K_4 rouge.

2.3 Théorème de Ramsey (cas de plusieurs couleurs)

> Théorème :
> Soient $r, n_1, \ldots, n_r$ des entiers. Il existe un entier $R(n_1, \ldots, n_r, r)$ tel que pour tout graphe complet K_N avec $N \geq R(n_1, \ldots, n_r, r)$ sommets et avec un r-coloriage de ses arêtes, il existe une couleur $j \in [1, \ldots, r]$ et un sous-graphe complet K_{n_j} unicolore de couleur j .

Preuve :

Le cas général se démontre également par récurrence, cette fois sur le nombre c de couleurs. Le résultat est trivial pour $c = 1$, et vient d'être démontré pour $c = 2$. Si $c > 2$, on va montrer l'existance du nombre de Ramsey encore une foix, on lui donnant un majorant donné par Paul Erdös.

Le théorème bicolore de Ramsey précédent énonce l'existence d'une fonction $R(n_1, n_2; 2) = R(n_1, n_2)$ bicolore, ce qui permet d'initier la récurrence. Nous allons prouver, pour $r \geq 3$:

$$R(n_1, \ldots, n_r; r) \leq R(n_1, \ldots, n_{r-2}, R(n_{r-1}, n_r; 2); r-1)$$

Soit K_t un graphe complet r-coloré avec :

$$t = R(n_1, \ldots, n_{r-2}, R(n_{r-1}, n_r; 2); r-1)$$

.

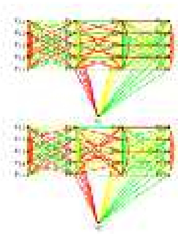
Identifions les couleurs $r-1$ et r : par l'hypothèse de récurrence, le graphe K_t $(r-1)$-coloré contient soit un K_{n_i} unicolore coloré avec la couleur $i \in [1, r-2]$ soit un $K_{R(n_{r-1}, n_r; 2)}$ coloré avec les deux couleurs r et $r-1$. Dans le premier cas, nous en avons terminé, car on a déja trouvé un K_{n_i}.

Dans le second cas, nous avons un graphe complet bi-coloré auquel on peut appliquer le théorème de Ramsey à 2 couleurs : il existe un sous-graphe complet K_{n_c} unicolore soit de couleur $c = r-1$ soit de couleur $c = r$, ce qui achève aussi la preuve.

Example :

$R(3, 3, 3)$ est le seul nombre de Ramsey (non trivial) correspondant à plus de deux couleurs dont on connait la valeur exacte.

voici les deux seuls 3-colorations de K_{16} ne contenant aucun triangles monochromatiques.



Partons d'une 3-coloration (en rouge, vert et jaune) d'un graphe complet K_n ne contenant pas de triangle monochromatique, et fixons un sommet v ; le voisinage vert de v, noté V , est le sous-graphe de K_n dont les sommets sont les u tels que l'arête [uv] soit verte. V ne peut contenir d'arête verte (sinon un triangle vert serait formé de cette arête et des deux arêtes la reliant à v). V est donc 2-coloré en rouge et jaune, et ne contient pas de triangle monochromatique ; comme $R(3, 3) = 6$, V a au plus 5 sommets.

Raisonnant de même sur les voisinages rouges et jaunes de v, on voit qu'ils contiennent également 5 sommets au plus, et donc en définitive que le graphe complet peut avoir au plus $1 + 5 + 5 + 5 = 16$ sommets ; ainsi, $R(3, 3, 3) = 17$.

Pour montrer que $R(3, 3, 3) = 17$, il suffit d'exhiber une 3-coloration de K_{16} ne contenant pas de triangles monochromatiques. À isomorphisme près, il en existe exactement 2, représentés la haut.

En définitive, $R(3, 3, 3) = 17$.

2.4 le nombre de Ramsey :

Les nombres $R(r, s)$, et leurs extensions à un nombre de couleurs quelconque, sont appelés des nombres de Ramsey. Un majorant pour $R(r, s)$ peut être déduit de la démonstration précédente ; d'autres arguments donnent des minorants (le premier fut obtenu par Paul Erdős à l'aide de la méthode probabiliste, qu'il développa à cette occasion).

Cependant, il reste un écart important entre les meilleurs minorants et majorants connus et il n'y a que très peu de couples (r, s) pour lesquels on a pu déterminer la valeur exacte de $R(r, s)$. En général, déterminer un minorant L pour $R(r, s)$ revient à exhiber une 2-coloration du graphe K_{L-1} ne contenant aucun K_r bleu et aucun K_s rouge.

Ramsey a montré que ces nombres sont tous finis. En 1947, Erdôs a utilisé les probabilités pour obtenir des bornes inférieures pour les nombre de Ramsey diagonaux $R(k, k)$.

> Théorème :Erdös, 1947
> Si les entiers positifs n et k satisfont à l'inégalité ${k \atop n} 2^{1-\binom{2}{k}} < 1$, alors $R(k, k) > n$.

Tout d'abord, nous remarquons que prouver ce théorème revient à montrer l'existance d'une coloration des arêtes de K_n sans K_k rouge ni K_k bleu.

Supposons que chaque arête est coloriée soit en bleu soit en rouge, avec la probabilité de $\frac{1}{2}$, et ceci independamment des autres arêtes. Formellement, nous venons de créer un espace de probabilité (Ω, A, P) tel que les éléments de Ω sont les $2^{\binom{2}{n}}$ colorations possibles des arêtes de K_n en deux couleurs. Ces éléments sont tous équiprobable.

Pour tous ensemble S de k sommets, soit A_s l'événement que le sous graphe de K_n induit par S est unicolore. Clairement, pour chaque S,

$$P(A_s) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{2}{k}} = 2^{1-\binom{2}{k}}$$

Et le dernier terme est strictement inférieur à 1 par hypothèse. Par conséquent,

$$P(B^c) = 1 - P(B) > 0$$

Cela assure l'existance d'un point de notre espace de probabilité pour lequel l'événement B^c se réalise. Autrement dit, il existe une coloration de K_n pour laquelle il n'y a aucun K_k unicolore. Ceci achève la preuve.

Les majorants sont souvent plus difficiles à établir : on doit, soit contrôler toutes les colorations possibles pour vérifier qu'il n'y a pas de contre-exemple, soit découvrir un argument mathématique prouvant qu'il n'y en a pas. Bien que des programmes informatiques sophistiqués évitent d'envisager toutes les 2-colorations possibles (par exemple en utilisant des arguments de symétrie, ou des techniques d'exploration d'arbres), la recherche de contre-exemples, ou la preuve par recherche exhaustive qu'il n'en existe pas, est une tâche que les logiciels existant ne peuvent accomplir que pour des graphes de petite taille : la complexité d'une recherche exhaustive est en effet, pour un graphe de n sommets, de l'ordre de $O(2^{n(n-1)/2})$ (en utilisant la notation de Landau).

Comme démontré plus haut, $R(3, 3) = 6$. Il est facile de voir que $R(4, 2) = 4$ et, plus généralement, que $R(s, 2) = s$ pour tout s (un graphe monochromatique de $s - 1$ sommets montre que$R(s, 2) \geq s$; un graphe de s sommets non entièrement rouge contient une arête bleue, donc un K_2 monochromatique). Utilisant alors l'inégalité prouvé dans le cas de 2 couleurs, on voit que $R(4, 3) \leq R(4, 2) + R(3, 3) - 1 = 9$, et donc que $R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) \leq 18$, et ainsi de suite.

Théorème :Erdös,Szekeres 1935
Pour tous $s, t \geq 2$ le nombre $R(s, t)$ existe. De plus on a $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$.

L'inégalité est facile à vérifier. On procéde par récurrence sur $s + t$. Pour $s = 2$ ou $t = 2$, on a bien $R(2, s) \leq C_t^1$, car les deux termes valent 1.

Supposons que $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$ pour tous s, t tel que $s + t < N$ et vérifions le pour $s + t = N$. Une fois encore, nous pouvons supposer $s, t \geq 3$. Par la démonstration du théorème bicolore en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient $R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1) \leq C_{s+t-3}^{s-2} + C_{s+t-3}^{s-1}$. On conclut donc par la formule du triangle de Pascal qui dit : $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$, que $C_{s+t-3}^{s-2} + C_{s+t-3}^{s-1} = C_{s+t-2}^{s-1}$.

Donc $R(s, t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$.

Parmi les $6,4.10^{22}$ 2-colorations du graphe complet à 16 sommets (identifiées aux graphes non orientés quelconques à 16 sommets, en convenant qu'on colorie en bleu une arête si elle relie deux sommets du graphe non orienté, et en rouge sinon), il n'y a (à isomorphisme près) que deux graphes $(4, 4, 16)$ (c'est-à-dire des 2-colorations du graphe complet K_{16} sans aucun K_4 monochromatique), et un seul graphe $(4, 4, 17)$ (le graphe de Paley d'ordre 17) parmi les $2,46.10^{26}$ 2-colorations de K_{17} (ces nombres montrent bien la difficulté d'une recherche exhaustive) ; ce résultat fut démontré par Evans, Pulham et Sheehan en 1979. Il en résulte que$R(4, 4) = 18$. Enfin, $R(4, 5) = 25$.

On ignore la valeur exacte de $R(5, 5)$, mais on sait qu'elle est comprise entre 43 et 49. Erdős a illustré la difficulté d'une détermination exacte en demandant d'imaginer qu'une armée extra-terrestre bien plus puissante que nous débarque et demande la valeur de $R(5, 5)$, faute de quoi ils détruiront notre planète. Dans ce cas, dit-il, nous devrions mobiliser tous nos ordinateurs et tous nos mathématiciens dans l'espoir de déterminer ce nombre. Mais s'ils nous demandaient $R(6, 6)$, nous ferions mieux d'essayer de détruire les extra-terrestres.

McKay, Radziszowski et Exoo ont employé des méthodes de construction de graphe assistée par ordinateur pour formuler en 1997 la conjecture selon laquelle $R(5, 5)$ vaut exactement 43. Ils construisirent une liste de 656 graphes de type $(5, 5, 42)$, et arrivèrent à la même liste par plusieurs méthodes distinctes, les amenant à conjecturer que leur liste est complète ; aucun de ces 656 graphes ne peut être étendu à un graphe $(5, 5, 43)$. Pour $R(r, s)$ avec $r, s > 5$, on ne connait que des bornes assez lâches. Les minorants pour $R(6, 6)$ et $R(8, 8)$ n'ont d'ailleurs pas été améliorés depuis, respectivement, 1965 et 1972.

La table suivante 13 donne $R(r, s)$ pour les valeurs de r et s jusqu'à 10 (avec $r \leq s$, la table étant symétrique puisque $R(r, s) = R(s, r)$. Lorsque la valeur exacte n'a pas été déterminée, la table suivante donne le meilleur encadrement connu.

r,s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	3	6							
4	1	4	9	18						
5	1	5	14	25	43-49					
6	1	6	18	36-41	58-87	102-165				
7	1	7	23	49-61	80-143	113-298	205-540			
8	1	8	28	58-84	101-216	132-495	217-1031	282-1870		
9	1	9	36	73-115	126-316	169-780	241-1713	317-3583	565-6588	
10	1	10	40-42	92-149	144-442	179-1171	289-2826	331-6090	581-12677	798-23556

2.5 Application sur les suites monotones :

Parmi les résultats démontrés par Erdös et Szerkes dans leur article de 1935, un théorème indique qu'un minimum d'ordre existe dans toute suite numérique (c'est un théorème " à la Ramsey ") :

> Théorème :
> De toute suite de n^2+1 nombres différents, on peut extraire une sous-suite croissante de longueur $n+1$ ou une sous-suite décroissante de longueur $n+1$.

En particulier, dans toute suite de 10 nombre, on trouve obligatoirement une suite de 4 nombres croissantes ou décroissantes.

$$a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_{n^2+1}$$

Prenons une suite de nombres différents, de longueur n^2+1. Pour chaque a_i considérons la plus longue sous-suite croissante qui commence par a_i.

$$a_1, a_i, ..., a_m \text{ avec } a_1 < a_i < ... < a_m$$

$$a_2, a_k, ..., a_p \text{ avec } a_2 < a_k < ... < a_p$$

$$a_3, a_q, ..., a_r \text{ avec } a_3 < a_q < ... < a_r$$

....

$$a_{n^2}, a_{n^2+1} \text{ avec } a_{n^2} < a_{n^2+1}$$

$$a_{n^2+1}$$

Si l'une de ces sous-suites a plus de n éléments, notre raisonnement est términé. Nous supposons donc chaqune de ces sous-suites a une longueur inférieure ou égale à n. Puisqu'il y a n^2+1 nombres, nous disposons de n^2+1 sous-suites croissante différentes (chacune commence par un nombre différent).

Classons toutes ces sous-suites par taille : celles de taille 1, celles de tailles 2, etc.., jusqu'à celles de taille n.

Suites de longueur 1 :

$$a_{n^2+1}$$

.

.

Suites de longueur 2 :

a_t, a_u

.

. a_x,

a_y

.

Suites de longueur j :

$a_a, a_z, ..., a_b$

.

.

$a_f, a_g, ..., a_h$

Pour au moin un entier j entre 1 et n, le nombre de sous-suites de taille j est plus grand que n (sinon le nombre total de sous-suites serait inférieur ou égal à n^2, or il y en a $n^2 + 1$. soit j cette taille et $p > n$ le nombre de sous-suites croissantes de taille j.

$$a_c, a_a, ..., a_f, ..., a_i$$

Considérons le premier élément de chacune des sous-suites de taille j, Cela nous donne p entiers différents pris dans la suite initiale. Nous les classons comme dans la suite initiale pour obtenir une sous-suite de la suite initiale de longueur p.

$$b_1, b_2, ..., b_f, ..., b_p$$

Notons $b_1, b_2, ...b_p$ cette sous-suite, et montrons qu'elle est décroissante. Comme elle possède p éléments avec $p > n$, cela terminera la demonstration. Si $b_1 < b_2$ alors la sous-suite est croissante, commençant par le nombre b_1, et se poursuivant par les p éléments de la sous suite croissante qui commence à b_2, et a pour longueur p (elle existe par définition), serait une sous-suite de longueur $p + 1$ commençant à b_1. Or une telle suite ne peut exister puisque par définition la sous-suite croissante la plus longue qui commence à b_1 a pour longueur p. Donc $b_1 > b_2$. De même $b_2 > b_3 > b_3 > ... > b_p$, ce que nous voulons établir.

Une question naturelle se pose : peut-on améliorer le $n^2 + 1$ et le remplacer par un nombre plus petit ? La réponse est non et un simple dessin permet de comprendre pourquoi. En considérant les ordonnées de 17 points, de celui le plus à gauche, u_1, vers celui le plus à droite, u_{16}, et en incluant entre u_8 et u_9 un point, on obtient une suite de 17 nombres différents.

Comme le théorème l'indique , on extrait sans mal une suite monotone croissante de longueur 5 de cette suite de 17 nombres. Une telle suite peut être représentée graphiquement par un tracé montant par 5 points. (il y a d'autre tracés montant ou descendant de 5 points)

Si l'on enlève le point central, on constate qu'aucun tracé montant ou descendant de 5 points n'est plus possible, ce qui signifie que les ordonnées des 16 points pris de gauche à droite constituent une suite de nombres différents dont on ne peut extraire aucune sous-suite croissante ou décroissante de longueur 5. Ce schéma se généralise évidemment pour tout n : il est donc impossible d'améliorer le $n^2 + 1$ du théorème des sous-suite monotones.

3 la théorie de Ramsey infini :

3.1 le théorème de ramsey infini :

Un résultat analogue, encore appelé théorème de Ramsey (ou théorème de Ramsey infini lorsque le contexte n'est pas clair), s'applique aux graphes infinis. Les représentations graphiques étant moins parlantes dans ce cas, les résultats de ce type sont généralement formulés dans le langage de la théorie des ensembles.

Nous allons donc l'énoncer tout de suite, le prouver, voir comment la version fini peut se déduire du théorème de Ramsey infini, et en fin on va donner des applications de la version infini.

> Théorème :
> Soit X un ensemble infini dénombrable. Pour toute coloration finie de $X^{(n)}$ (l'ensemble des parties de X de taille n), il existe un sous-ensemble infini M de X tel que $M^{(n)}$ (l'ensemble des parties de M de taille n) soit monochrome.

Preuve :

Soit c le nombre de couleurs. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'énoncé est vrai car dans toute partition finie d'un ensemble infini, l'un des sous-ensembles est infini.

Supposons que le théorème soit vrai pour $n = r$, et montrons-le pour $n = r + 1$. Étant donnée une c-coloration P de $X^{(r+1)}$, soit a_0 un élément de X et $Y = X \setminus \{a_0\}$. P induit une c-coloration P' de $Y^{(r)}$ définie par : la P'-couleur d'une partie s de Y est la P -couleur de $s \cup a_0$.

Donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sous-ensemble infini Y_1 de Y tel que $Y_1^{(r)}$ soit monochrome. Il y a donc un élément a_0 et un ensemble infini Y_1 tels que tous les sous-ensembles à $r + 1$ éléments de X formés de a_0 et de r éléments de Y_1 ont la même couleur.

Le même argument montre qu'il y a un élément a_1 de Y_1 et un sous-ensemble infini Y_2 de Y_1 avec la même propriété, et donc, par récurrence, on obtient une suite infinie $(a_0, a_1, a_2, ...)$ telle que la couleur de n'importe quel sous-ensemble à $r + 1$ éléments de la forme

$$(a_{i(1)}, a_{i(2)}, ..., a_{i(r+1)})$$

avec

$$i(1) < i(2) < ... < i(r + 1)$$

dépend seulement de i(1). Il y a de plus un nombre infini de valeurs i(n) pour lesquelles cette couleur sera la même. L'ensemble de ces $a_{i(n)}$ est par construction un ensemble ayant la propriété cherchée.

Ce théorème est à l'origine de la notion de cardinal de Ramsey (qu'on démontre être nécessairement un grand cardinal). Soit k un nombre cardinal infini, $[k]^{<\omega}$ l'ensemble des sous-ensembles finis de k ; on dit que k est un cardinal de Ramsey (ou simplement que k est Ramsey) si, pour toute application **f** de $[k]^{<\omega}$ dans l'ensemble $\{0, 1\}$, il existe un sous-ensemble A de k ayant le même cardinal que k qui est homogène pour **f**, c'est-à-dire que pour tout n, **f** est constante sur les sous-ensembles de A de cardinal n. Autrement dit, il s'agit d'un cardinal (non dénombrable) pour lequel le théorème de Ramsey (reformulé convenablement et un peu renforcé) est encore vrai.

3.2 Le cas infini implique le cas fini :

On peut déduire le théorème fini de la version infinie en raisonnant par l'absurde, ou plutôt par contraposition. Supposons que le théorème fini soit faux. Il existe des entiers c, n, T tels que pour tout entier k, il existe une c-coloration de $\{1, 2, ..., k\}^{(n)}$ sans ensemble monochromatique de cardinal T. Soit C_k l'ensemble de ces c-colorations.

Pour tout k, la restriction d'une coloration de C_{k+1} à $\{1, 2, ..., k\}^{(n)}$ obtenue en ignorant les ensembles contenant $k + 1$ est une coloration de C_k. Définissant C_k^1 comme l'ensemble des colorations de C_k qui sont des restrictions de colorations dans C_{k+1}, on voit que C_k^1 n'est pas vide, puisque C_{k+1} ne l'est pas.

De même, la restriction d'une coloration dans C_{k+1}^1 est dans C_k^1, ce qui permet de définir C_k^2 comme l'ensemble non vide de ces restrictions ; par récurrence, on peut donc définir C_k^m pour tous les entiers m et k.

On a donc pour tout k la suite décroissante $C_k \supseteq C_k^1 \supseteq C_k^2 \supseteq ...$, et tous les ensembles de cette suite sont non vides. De plus, C_k est fini (de cardinal inférieur ou égal à $c^{\frac{k!}{n!(k-n)!}}$). Il en résulte que la suite est stationnaire, et que $D_k = C_k \cap C_k^1 \cap C_k^2 \cap \ldots$ est non vide. Ainsi, toute coloration de D_k est la restriction d'une coloration dans D_{k+1}^1. Remontant alors en prolongeant une coloration de D_k à D_{k+1}, puis à D_{k+2}, et ainsi de suite, on construit une coloration de $N^{(n)}$ sans aucun ensemble monochromatique de cardinal T. Ceci est la contradiction cherchée avec le théorème de Ramsey infini ; par contraposition, ce dernier entraîne le cas fini.

3.3 Application du théorème de Ramsey infini :

3.3.1 Théorème de Ramsey infini appliqué aux graphes :

Théorème :
Soit K_∞ un graphe complet infini dont on colorie les arêtes avec k couleurs. Alors K_∞ contient un sous-graphe complet infini dont les arêtes sont toutes de la même couleur.

Preuve :

On va prouver par récurrence, en créant une suite d'ensembles infinis $F_0 \supseteq F_1 \supseteq ...$ de sommets de K_∞ , une suite de couleurs C_0, C_1, ... et une suite de sommets distincts a_0 , puis $a_1 \in F_0$,$a_2 \in F_1$,..., que, pour un entier i donné, toutes les arêtes de la forme (a_i, v) avec $v \in F_i$ sont toutes coloriées avec la couleur C_i.

Tout d'abord, on commence en prenant un sommet $a_0 \in K_\infty$: a_0 appartient à une infinité d'arêtes, colorées en seulement k couleurs, donc on peut choisir une couleur C_0 et un ensemble F_0 de sommets tels que (a_0, v) soit toujours de la couleur C_0 quelque soit $v \in F_0$.

Ensuite, on suppose qu'on dispose déjà des sommets a_0, ..., a_i , des couleurs C_0, ..., C_i et des ensembles $F_0 \supseteq ... \supseteq F_i$. Alors on choisit un sommet $a_{i+1} \in F_i$ quelconque, différent de tous les a_i vus jusque là. Puisque F_i est infini, il existe une couleur C_{i+1} et un ensemble $F_{i+1} \subseteq F_i$ infini tel que l'arete (a_i, v) soit de couleur C_{i+1} pour tout sommet $v \in F_{i+1}$.

Ce processus nous permet bien d'obtenir des suites (F_n), (C_n) et (a_n) infinies.

Maintenant, vu que la suite (C_n) prend un nombre fini de valeurs, il existe une couleur C_∞ telle que l'ensemble $X = \{n \in N : C_n = C_\infty\}$ soit infini.

Le sous-graphe induit par l'ensemble de sommets $a_X = \{a_n : n \in X\}$ est un graphe complet infini dont toutes les arêtes sont de couleur C_∞.

3.3.2 Application de Ramsey infini sur les suites :

Théorème :
Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Preuve :

Soit (u_n) une suite réelle. On considère l'ensemble $A = \{n \in N; \forall k > n, u_k < u_n\}$. Concernant cet ensemble A deux cas se présentent : ou bien A est fini, ou bien il est infini.

Si A est fini ou vide, il admet un élément maximal n_0 (on pose $n_0 = -1$ dans le cas où A est vide). On pose $p_0 = n_0 + 1$, donc $p_0 \not\in A$. Par définition de A, on sait qu'il existe $p_1 > p_0$ tel que $u_{p_1} = u_{p_0}$ (car sinon $p_0 \in A$).

De même, il existe $p_2 > p_1$ tel que $u_{p_2} = u_{p_1}$ car sinon $p_1 \in A$. Et ainsi de suite, par récurrence on construit une suite strictement croissante d'entier (p_k) tels que $u_{p_{k+1}} = u_{p_k}$ pour tout k. On a bien construit une sous-suite croissante de (u_n).

Si A est infini, alors on peut écrire $A = \{p_n; n \in N\}$ où (p_n) est une suite strictement croissante d'entiers. On a en particulier $u_{p_{n+1}} < u_{p_n}$ par définition de A. Ainsi la sous-suite (u_{p_n}) est décroissante.

3.3.3 les mots infini :

Le théorème de ramsey infini peut s'appliqué aussi sur les mots : si on colorie les facteurs d'un mot infini x en r couteurs, il existe une factorisation $x = u_0u_1u_2$ ... telle que u_1, u_2, ... sont de la même couleur.

4 Conclusion

- Le théorème d'amitié ; qui est un cas particulier du théorème de Ramsey à 2 couleurs, illustre d'une manière simple l'dée de Ramsey, on en a déduit que si dans un groupe de personnes, on veut avoir 3 qui se connaissent ou 3 qui ne se connaissent pas, le groupe doit contenir au moin 6 personnes, et on a vu qu'avec un ordre inférieur à 6, on peut trouver des graphes complets 2-coloré sans existance d'un triangle monochromatique.

- Le théorème de Ramsey à 2 couleurs généralise ce résultat pour des entiers s et t quelconque, on a montré que $R(s, t)$ le nombre de Ramsey existe toujours par hypothèse de récurrence.

- Calculer le nombre de Ramsey veut dire exactement ; préciser le cardinal minimal d'un groupe afin d'avoir une structure donnée, par exemple déterminer le nombre de personnes minimal pour avoir 4 personnes qui se connaissent ou 3 qui ne se connaissent pas, on a montré que c 'est exactement 9, et que moin que 9 ne peut pas convenir.

- les nombres de Ramsey calculés ne sont pas nombreux, en augmentant dans l'ordre, ou en passant à plus que 2 couleurs, ces nombre pertent leurs précision et deviennent des estimation, situé dans des intervalles large, et c'est à cause de la difficulté des méthodes utilisés qui sont reliées entièrement à la combinatoire, comme la méthode que nous avons vu " La méthode probabiliste" que Erdös a utilisé quand il a voulu donner un minorant à $R(k, k)$.

- La version infinie du théorème de Ramsey, et boucoups plus intéressante,elle est difficile d'être représenté par graphe, mais elle a aidé à résoudre plusieurs problèmes concernant plusieurs domaine, surtout en économie, vue Ramsey était un économiste.

- Le théoréme de Ramsey fini se déduit de la version infinie grâce à l'idée de Compacité.

Références

[1] Ramsey theory. Gregory E. W. Taylor, march 2006

[2] La méthode probabiliste. Marie Heyvaert,F. Thomas Bruss, SMF-Gazette, avril 2010

[3] Colorie-moi le ciel !. Pierre Bornsztein, Xavier Caruso et Dolphi, décembre 2003

[4] Jeux sur les graphes in La mathématique des jeux. P. Tougne, 1990

[5] Théorie des graphe. Michel Rigo, 2009

[6] Le désordre total n'existe pas. Logique et calcul, Jean-Paul DELAHAYE, 2009