



Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

La stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcations : application au modèle de Goodwin

Présenté par :

◆ Najoua SIAR

Encadré par :

◆ Pr. AKHMOUCH Mohammed

Soutenu le 13 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr. AKHMOUCH Mohammed
- Pr. EZZAKI Fatima
- Pr. OUADGHIRI Anisse

Stage effectué à

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES

Année Universitaire 2015 / 2016

La stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcations : application au modèle de Goodwin

Najoua SIAR

13 juin 2016

Remerciements

Je remercie mon professeur Mr. Mohammed AKHMOUCH qui m'a proposé ce sujet de mémoire et a pris la responsabilité de m'encadrer, je le remercie de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche et d'avoir cru en mes compétences.

Je remercie également les professeurs Mme. Fatima EZZAKI et Mr. Anisse OUADGHIRI d'avoir accepté et pris le temps de constituer le jury de ce mémoire. Leurs commentaires contribuent à l'amélioration de ce manuscrit.

Un grand merci à Mr. Mohammed BENZAKOUR qui m'a soutenu avec beaucoup de patience et de gentillesse. Ses conseils pertinents et sa compréhension m'ont été d'une grande aide dans ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs du département Mathématiques et Applications de la FST.

Je n'oublie pas de remercier ma famille et surtout mes parents qui m'ont toujours soutenus durant mes années d'études.

Enfin, rien de tout cela n'aurait été possible sans la bienveillance, l'amour et la présence de Dieu dans ma vie.

Résumé

Ce mémoire a pour but d'étudier **les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires** grâce à l'analyse mathématique et numérique, qui permet de décrire leurs comportements au voisinage des points d'équilibre, et de déterminer les conditions portant sur les paramètres décrivant un état d'une population, afin d'observer un phénomène donné, et donc de faire des prédictions qualitatives et quantitatives sur le comportement d'une population.

On cherche à prévoir si selon les paramètres d'évolution choisis pour le modèle en question, la population s'éteindra au bout d'un temps fini ou bien explosera ou encore se stabilisera autour d'une valeur fixée. Ici encore, chaque modèle d'étude fait intervenir des outils mathématiques bien spécifiques. Dans ce mémoire nous prenons comme exemple d'application **le modèle de Goodwin** et nous distinguerons dans l'étude numérique le modèle déterministe et le modèle stochastique, le premier fournit une seule solution à partir des données initiales, c'est à dire une seule trajectoire d'évolution censée représenter les paramètres moyens de la population au cours du temps, alors que le second prend en compte des incertitudes sur ces paramètres.

Les premiers chapitres seront consacrés à l'étude théorique de la stabilité ainsi que **la théorie de bifurcations** et le dernier chapitre sera une application de cette théorie sur le modèle de Goodwin en étudiant sa stabilité et en le résolvant par des méthodes numériques.

Des rappels sur les bases des mathématiques et les définitions nécessaires seront faits au fur et à mesure et selon le besoin.

Table des matières

1	Introduction et préliminaires	5
1.1	Avant-propos	5
1.2	Rappel sur les équations différentielles ordinaires	5
1.3	Généralités sur les systèmes dynamiques	8
1.4	Quelques définitions de base	10
2	La stabilité des systèmes dynamiques linéaires	12
2.1	La stabilité en dimension $n=2$	12
2.2	La stabilité en dimension n quelconque :Critère de Routh Hurwitz	17
3	La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires	19
3.1	La stabilité en dimension $n=1$	19
3.2	La stabilité en dimension n quelconque	20
3.2.1	La stabilité par linéarisation	21
3.2.2	La stabilité au sens de Lyapunov	22
4	Introduction à la théorie de bifurcations locales	24
4.1	Bifurcation selle-nœud	24
4.2	Bifurcation transcritique	26
4.3	Bifurcation fourche ou "pitchfork"	27
4.4	Bifurcation de Hopf	29
4.4.1	Bifurcation de Hopf sur-critique	30
4.4.2	Bifurcation de Hopf sous-critique	31
5	Application : modèle de Goodwin	32
5.1	Historique	32
5.2	Étude théorique de la stabilité	33
5.3	Résolution numérique	38
5.3.1	Modèle déterministe	38
5.3.2	Modèle stochastique	41
	Bibliographie	50

Liste des figures

2.1	Noeud instable	13
2.2	Noeud stable	13
2.3	Point selle	13
2.4	Noeud singulier : instable(à gauche), Noeud singulier : stable(à droite)	14
2.5	Noeud dégénéré : stable(à gauche), Noeud dégénéré : instable(à droite)	15
2.6	Centre	15
2.7	Foyer stable	16
2.8	Foyer instable	16
2.9	Schéma explicatif résumant la notion de stabilité d'un système linéaire à deux dimensions.	17
3.1	(a) :instable,(b) :stable,(c) :asymptotiquement stable	20
4.1	Cycle limite	29
5.1	modèle de Goodwin :la réaction R1 représente la formation de l'ARNm (X), la réaction R2 représente la synthèse du protéine (Y) et R3 la production du facteur d'inhibition de la transcription (Z). R4, R5 et R6 représentent les réactions de dégradation	33
5.2	Diagramme de bifurcation	37
5.3	Portrait de phase au point de bifurcation	37
5.4	Portrait de phase :foyer stable	38
5.5	Comparaison entre la solution obtenue par la méthode de RK 4 et celle obtenue par A-B-M pour N=35 et N=40	39
5.6	Comparaison entre la solution obtenue par la méthode de RK 4 et celle obtenue par A-B-M pour N=50 et N=100	40
5.7	La solution obtenue par la méthode de RK 4 (à gauche) et celle obtenue par A-B-M (à droite) pour N=30	40
5.8	Comparaison entre la solution obtenue par RK4 et l'ode45 (à gauche) et celle obtenue par A-B-M et l'ode45 (à droite) pour N=35	41
5.9	Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour N=25 et N=40	42
5.10	Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour N=100 et N=1000	43
5.11	Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour N=25 et N=40	43
5.12	Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour N=100 et N=1000	44

Chapitre 1

Introduction et préliminaires

1.1 Avant-propos

La modélisation de phénomènes physiques, biologiques ou économiques a toujours été la principale motivation pour le développement des mathématiques aussi abstraites soient-elles. Aujourd'hui encore elles sont plus que jamais présentes et nécessaires dans chacun de ces domaines. Même s'il paraît plus évident de les trouver en mécanique ou en finance, leurs applications en biologie sont multiples et connaissent à l'heure actuelle de nombreux développements.

Mais tout d'abord qu'est-ce que modéliser ? **Un modèle mathématique** est une traduction d'une observation représentée sous forme d'ensemble d'équations et il est nécessaire dès que la complexité numérique d'un phénomène observé ne permet plus à l'intuition d'en comprendre le fonctionnement ni d'en prévoir l'évolution. (Ceci est d'ailleurs le cas de beaucoup de phénomènes observés dans la nature). On doit alors avoir recours à un modèle mathématique, c'est à dire faire tout d'abord une hypothèse sur la loi mathématique qui régit le phénomène observé. Remarquons que cette loi n'est elle même qu'une représentation de la réalité, par conséquent elle n'est pas unique, elle devra d'ailleurs souvent être remise en question et le cas échéant, réévaluée. Une loi mathématique met en jeu des variables et des paramètres dont les valeurs seront fixées grâce aux données expérimentales recueillies sur le terrain. La pertinence du modèle choisi est alors évaluée en effectuant une simulation et en comparant les résultats obtenus aux données expérimentales.

La modélisation mathématique en biologie est nécessaire dans de nombreuses disciplines telles que l'écologie, la dynamique des populations, la génétique, l'épidémiologie, la médecine et fait intervenir la plupart des domaines des mathématiques, analyse réelle et complexe, algèbre, calcul différentiel et intégral, analyse numérique, probabilités et statistique.

Un des domaines de la biologie où les mathématiques sont les plus représentées et depuis fort longtemps est **la dynamique des populations**. Ce terme doit être entendu en un sens très large. La dynamique des populations n'étudie pas seulement l'évolution des populations animales, végétales ou bactériennes, mais concerne aussi la génétique et la génomique aux niveaux cellulaires et moléculaires. La dynamique des populations consiste non seulement à décrire la taille de la population étudiée au cours du temps mais aussi à expliquer les comportements évolutifs observés.

1.2 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

1.2.1 Equation différentielle

Définition 1.2.1.1 : Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation mettant en jeu une fonction $y(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m > 1$:

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (1.1)$$

Où $y^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de y par rapport à t et F une fonction suffisamment régulière définie sur un domaine D de \mathbb{R}^{m+2} à valeur dans \mathbb{R} . L'ordre d'une EDO est défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation, c'est-à-dire m .

Pour son étude théorique on se ramène en général à une forme du premier ordre en posant le changement de variable suivant :

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

L'équation (1.1) devient alors :

$$G(t, z, z') = 0 \quad (1.3)$$

Définition 1.2.1.2 : (*Solution d'une équation différentielle*)

On appelle solution d'une équation différentielle une fonction :

$$\begin{cases} \Phi : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \Phi(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

définie et m -fois dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et telle que :

$$\begin{cases} F(t, \Phi(t), \Phi'(t), \Phi^{(2)}(t), \dots, \Phi^{(m)}(t)) = 0, \forall t \in I \\ (t, \Phi(t), \Phi'(t), \Phi^{(2)}(t), \dots, \Phi^{(m)}(t)) \in D, \forall t \in I \end{cases} \quad (1.5)$$

1.2.2 Système d'équations différentielles

Définition 1.2.2.1 : Soient

$$\begin{cases} F_i : D_i \rightarrow \mathbb{R} \\ X \rightarrow F_i(X) \end{cases} \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (1.6)$$

n fonctions définies sur des domaines D_i de $\mathbb{R}^{1+(m+1) \times n}$. On appelle système d'équations différentielles d'ordre m un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} F_1(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) = 0 \\ F_2(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) = 0 \\ \vdots \\ F_n(t, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Définition 1.2.2.2 : *solution d'un système différentiel*

Une solution de (1.7) est un ensemble :

$$\begin{cases} \Phi_i : I \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t \rightarrow \Phi_i(t) \end{cases}, \quad \forall i \in \{1 \dots n\} \quad (1.8)$$

de n fonctions définies et m -fois dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et telle que pour tout $i \in \{1 \dots n\}$ et pour tout $t \in I$ on a :

$$\begin{cases} F_i(t, \Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t), \Phi_1'(t), \dots, \Phi_n'(t), \dots, \Phi_1^{(m)}(t), \dots, \Phi_n^{(m)}(t)) = 0 \\ (t, \Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t), \Phi_1'(t), \dots, \Phi_n'(t), \dots, \Phi_1^{(m)}(t), \dots, \Phi_n^{(m)}(t)) \in D_i \end{cases} \quad (1.9)$$

Remarque :

Toute équation différentielle d'ordre m ($m \geq 2$), linéaire ou non linéaire, peut être transformée en un système de m équations différentielles de 1er ordre.

1.2.3 Equation différentielle linéaire : On appelle équation différentielle linéaire d'ordre m toute équation de la forme :

$$y^{(m)}(t) = f(y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) + b(t) \quad (1.10)$$

avec f une fonction linéaire c'est-à-dire qu'on peut écrire l'équation (1.10) sous la forme suivante :

$$y^{(m)}(t) = a_0(t)y(t) + a_1(t)y'(t) + \dots + a_{(m-1)}(t)y^{(m-1)}(t) + b(t)$$

Alors le système équivalent est de la forme suivante :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

Avec :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Si la fonction f n'est pas sous la forme décrite dans l'équation (1.11), on dit que l'équation différentielle est non-linéaire.
- Si de plus les a_i ne dépendent pas du temps, on dit qu'on a une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

1.2.4 Systèmes autonomes, non autonomes : Un système différentiel est dit **autonome** si la variable temporelle n'apparaît pas explicitement dans la fonction f . Dans le cas contraire, le système est dit **non autonome**. Un système non autonome est de la forme :

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t))$$

Exemple : Le système suivant est autonome :

$$\begin{cases} u'(t) = 3\exp(u(t)) - \frac{1}{u(t)} \\ u(\Pi) = e \end{cases} \quad (1.11)$$

Alors que le système :

$$\begin{cases} u'(t) = t.u(t) \\ u(\Pi) = e \end{cases} \quad (1.12)$$

est non autonome.

Proposition 1 : L'étude des systèmes non autonomes peut être ramenée à l'étude des systèmes autonomes ; cela augmente la dimension de l'espace des états d'une unité (n est incrémenté) et cela peut faire perdre l'éventuel caractère linéaire du système.

Preuve :

Soit le système du premier ordre $u'(t) = f(t, u(t))$, avec une condition initiale donnée. On va transformer ce système en un système autonome par la transformation suivante : soit $s(t) := t$ pour $Y := \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, on pose : $F(Y) = \begin{pmatrix} f(z, y) \\ 1 \end{pmatrix}$, alors : $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ s(t) \end{pmatrix}$ vérifie :

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ 1 \end{pmatrix}, F(U(t)) = \begin{pmatrix} f(t, u(t)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi U est solution de $U' = F(U)$, qui est bien un système autonome. Par ailleurs, en considérant le système linéaire $u'(t) = a(t)u(t)$ cette transformation donne $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ t \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} a(U_2)U_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$. Le système équivaut donc à :

$$\begin{cases} U'_1 = a(U_2).U_1 \\ U'_2 = 1 \end{cases} \quad (1.13)$$

qui n'est pas linéaire.

Remarque :

Un système autonome est invariant par translation dans le temps, c'est-à-dire si $y(t)$ est une solution du système alors la solution décalée dans le temps $y(t - t_0)$ est également solution.

1.3 Généralités sur les systèmes dynamiques

Tous les phénomènes autour de nous sont des systèmes dynamiques. Certains de ces systèmes sont régis par des lois physiques et mathématiques que les scientifiques ont tenté ou tentent de comprendre et d'analyser.

Pour cela, ils ont recours à des modélisations de ces systèmes et d'en prévoir leurs comportements futurs.

Définition 1.3.1 : *Un système dynamique*

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction.

De multiples applications des systèmes dynamiques voient le jour dans de nombreux domaines, comme par exemple :

- * **Biologie et médecine** : dynamique des cellules vivantes.
- * **Éthologie et écologie** : recherche d'un équilibre entre proies et prédateurs.
- * **Mécanique rationnelle ou quantique** : pendules, phénomènes oscillatoires.
- * **Sociologie** : évolution d'une population. ...

Ces systèmes dynamiques peuvent être représentés par divers formalismes :

- ★ Équations différentielles ordinaires.
- ★ Équations aux dérivées partielles.
- ★ Équations différentielles à retard.
- ★ Équations différentielles stochastiques. ...

Et donc un système dynamique peut être défini de manière formalisée par la donnée :

- D'un ensemble E , dit **espace des phases** (ou des états) : espace d'Hilbert, espace de Banach, variété différentielle, ...
- D'un vecteur $X(t)$ de E , objet de l'étude caractérisant l'état du système à l'instant t .
- D'une équation différentielle appelée **équation d'évolution** définie par : $\frac{dX}{dt} = F(X)$.

Si la fonction F est linéaire alors l'équation peut s'écrire sous la forme : $\frac{dX}{dt} = AX$ et donc l'ensemble des trajectoires solutions $t \rightarrow X(t)$ seront de la forme $X(t) = e^{tA}.X_0$, avec $X_0 = X(t_0)$ la condition initiale.

Deux types de systèmes dynamiques peuvent se distinguer : **les systèmes dynamiques à temps discret** et **les systèmes dynamiques à temps continu**. [1]

Définition 1.3.1.1 : *Les systèmes dynamiques à temps discret*

Un système dynamique à temps discret est un système dynamique où la loi appliquée est à temps discret i.e les variables du système ne peuvent avoir qu'un nombre fini de valeurs (l'ensemble de définition est dénombrable).

Un exemple est fourni par un modèle de **la croissance d'une population animale**. Cette loi de croissance s'écrit :

$$P_{n+1} = CP_n \tag{1.14}$$

L'équation ci-dessus donne :

$$P_n = C^n P_0 \tag{1.15}$$

où P_0 désigne la population initiale.

Définition 1.3.1.2 : *Les systèmes dynamiques à temps continu*

Les systèmes dynamiques à temps continu représentent la limite des systèmes discrets, où l'évolution se fait à des intervalles de temps de plus en plus brefs. Dans ce cas, la loi devient une équation différentielle.

A titre d'exemple, l'équation :

$$\frac{dP}{dt} = CP \tag{1.16}$$

peut être vue comme une limite continue de l'équation(1.14). Pour $C > 0$, elle décrit aussi un modèle simple de croissance d'une population, quand la population est petite la solution est bien connue :

$$P(t) = P_0 e^{Ct} \tag{1.17}$$

1.4 Quelques définitions de base

Dans cette partie, nous introduisons quelques définitions que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Toutes les définitions qui vont suivre seront énoncées pour la dimension $n = 2$ mais peuvent être généralisées pour une dimension n quelconque.

- **Un champ de vecteurs :**

Un champ de vecteurs X sur un ouvert $U \in \mathbb{R}^2$ est défini par la donnée de deux applications f et g auxquelles on associe le système d'équations différentielles ordinaires :

$$X := \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.18)$$

- **Un flot :**

Un flot associé à X est une application $\varphi : V \rightarrow U$ où $V = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U \mid p \in U, t \in I_p \subseteq \mathbb{R}\}$ telle que $\forall p \in U, \varphi(t, p)$ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t, p)}{\partial t} = X(\varphi(t, p)) \\ \varphi(0, p) = p \end{cases} \quad (1.19)$$

C'est-à-dire que $\varphi(\cdot, p) : I_p \times \{p\} \rightarrow U$ est la solution maximale du problème de Cauchy associé à X avec la condition initiale $(x(0), y(0)) = p$. De plus, le flot est dit **complet** si pour tout $p \in U, I_p = \mathbb{R}$.

- **Une orbite :**

Orbite ou trajectoire de X passant par $p \in U$ est l'ensemble $O(p) = \{\varphi_t(p), t \in \mathbb{R}\}$ où $\varphi_t : U \rightarrow U$ est le flot associé à X pour t fixé.

- **Une orbite périodique :**

Une orbite périodique de X passant par $p \in U$ est une orbite de X telle qu'il existe $T \in \mathbb{R}_*^+$ avec $\varphi_T(p) = p$.

- **Point fixe :**

Un point fixe ou point singulier ou encore point d'équilibre de X est un point p^* où l'orbite croise l'axe des abscisses i.e $f(p^*) = g(p^*) = 0$.

- **Point fixe attracteur :**

Un point fixe p est attracteur si tous les points suffisamment proches de p sont attirés vers p . Dans ce cas on dit que p est stable.

- **Point fixe répulsif :**

Un point fixe p est répulsif si tous les points suffisamment proches de p sont repoussés par p . Dans ce cas on dit que p est instable.

- **Point fixe hyperbolique :**

p^* est un point fixe hyperbolique si la matrice jacobienne du système :

$$DX(p^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(p^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(p^*) \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

possède deux valeurs propres dont la partie réelle est non nulle. Sinon, il est dit **non hyperbolique**.

- **Conjugaison :**

On s'intéresse maintenant aux relations entre deux champs de vecteurs qui nous permettent de connaître quand leurs systèmes dynamiques associés présentent la même dynamique dans un ouvert du plan.

Deux systèmes dynamiques X et Z , auxquels on associe les flots φ_t et Ψ_t respectivement, sont dits **topologiquement conjugués** s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $h \cdot \varphi_t = \Psi_t \cdot h$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, si h est un C^k difféomorphisme avec $k \geq 1$, plutôt qu'un homéomorphisme, alors X et Z sont dits C^k **conjugués**.

Cette définition signifie que h envoie chaque orbite de X sur une orbite de Z en préservant le paramètre t , c'est-à-dire qu'on a $h : \varphi_t(x, y) \rightarrow h(\varphi_t(x, y)) := \Psi_t(h(x, y))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- **Équivalence :**

On définit maintenant une notion un peu plus faible que la conjugaison de deux champs de vecteurs vue précédemment, mais qui s'avère souvent utile en pratique.

Deux systèmes dynamiques X et Z , auxquels on associe les flots φ_t et Ψ_t respectivement, sont dits **topologiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme h envoyant les orbites de X sur celles de Z en préservant leur orientation, sans forcément préserver le paramètre temps t . Si h est un C^k difféomorphisme avec $k \geq 1$ plutôt qu'un homéomorphisme, alors X et Z sont dits C^k **équivalents**.

- **Portrait de phase :**

Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace de phase. Étant donné un système dynamique $\dot{X} = F(X, t)$, sans résoudre les équations on peut toujours à un instant t donné représenter graphiquement (à l'aide des flèches) le champ des \dot{X} (le champ des vitesses si X sont des coordonnées). La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour se faire une idée du comportement du système.

- **Bassin d'attraction :**

Un attracteur d'un système dynamique est une région de l'espace de phase vers laquelle converge toute trajectoire de phase passant à son voisinage. Le voisinage en question est appelé **bassin d'attraction de l'attracteur**.

- **Diagramme de bifurcation :**

Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

Chapitre 2

La stabilité des systèmes dynamiques linéaires

2.1 La stabilité en dimension $n=2$

Les points fixes jouent un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques. Henri Poincaré (1854-1912) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables, il n'est point nécessaire de calculer les solutions détaillées; il suffit en effet de connaître les points fixes et leur stabilité. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires.

Pour étudier la stabilité d'un point fixe, il faut étudier le comportement des orbites dans un petit voisinage de celui-ci.

Considérons le système linéaire suivant : [2][3]

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (2.1)$$

avec A matrice carrée réelle inversible à coefficients constants.

Soit le polynôme caractéristique de la matrice A : $P_A(x) = \det(A - xI) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, alors A possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2 , ces valeurs propres nous renseignent sur le type de stabilité du système (2.1) selon leur signe :

• Si λ_1 et λ_2 sont réels :

* Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ alors le point d'équilibre est instable et il est appelé *nœud instable*.

La représentation de cette situation dans le **portrait de phase** est donnée par le logiciel MATLAB en prenant comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc la figure (2.1) :

* Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre est stable et il est appelé un *nœud stable*.

La représentation de cette situation est donnée par la figure (2.2) en prenant comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

* Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$ dans ce cas Le point d'équilibre représente *un col ou un point selle*.

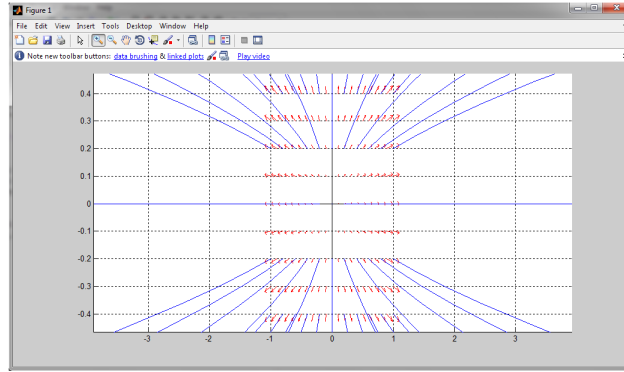


FIGURE 2.1 – Noeud instable

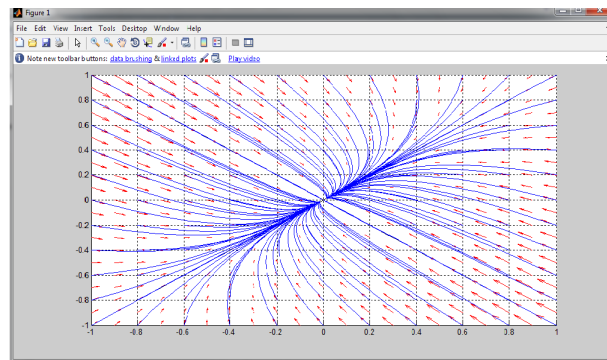


FIGURE 2.2 – Noeud stable

La représentation de cette situation est donnée par la figure (2.3) en prenant comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

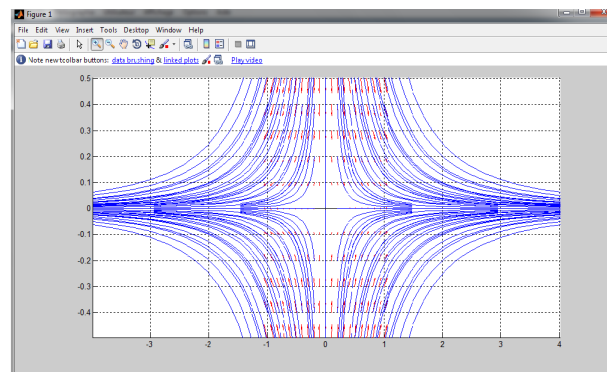


FIGURE 2.3 – Point selle

Si A est diagonalisable : ceci a lieu si tous les vecteurs sont des vecteurs propres, chaque droite qui passe par le point d'équilibre est une trajectoire, on distingue deux cas :

* Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: le point d'équilibre est *asymptotiquement instable*. On prends :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: le point d'équilibre est *asymptotiquement stable*. On prends :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La figure (2.4) représente les deux situations.

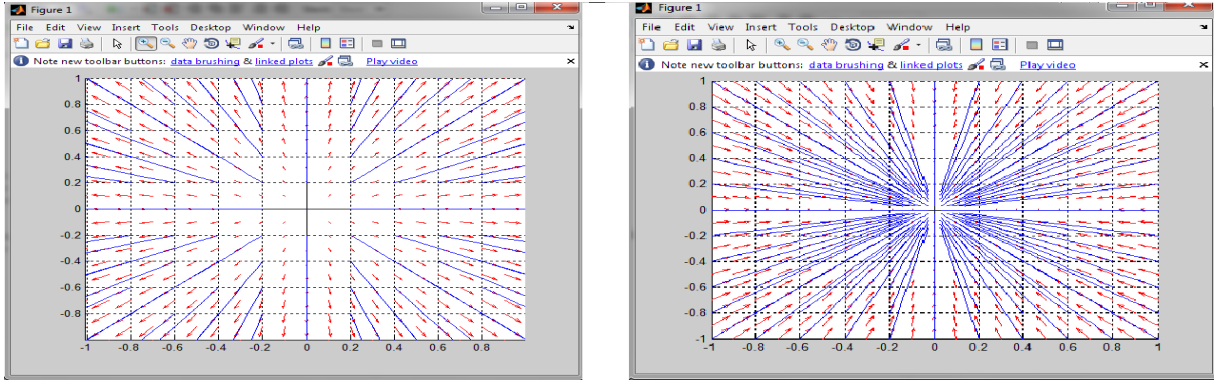


FIGURE 2.4 – Noeud singulier : instable(à gauche), Noeud singulier : stable(à droite)

Si A n'est pas diagonalisable : il existe un seul vecteur propre et donc une seule droite qui contient une trajectoire. Le point d'équilibre est dénommé *noeud dégénéré*.

* Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ le point d'équilibre est un *noeud dégénéré instable*. On prends :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ le point d'équilibre est un *noeud dégénéré stable*. On prends :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La figure (2.5) représente les deux situations :

• **Si λ_1 et λ_2 sont complexes** : On pose :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

* Si $\alpha = 0$: les trajectoires sont des ellipses fermées avec période $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Le point d'équilibre est dit un *centre*.

La représentation de cette situation est donnée par la figure (2.6) en prenant comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

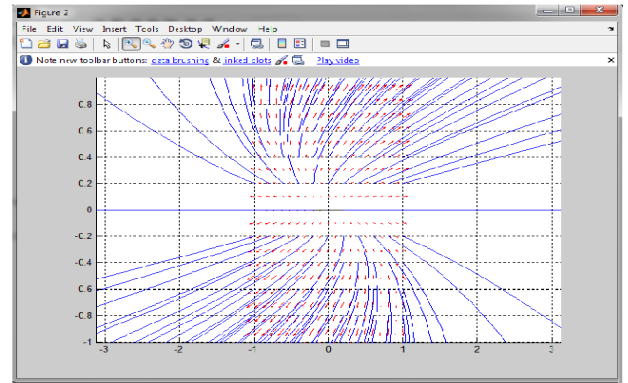
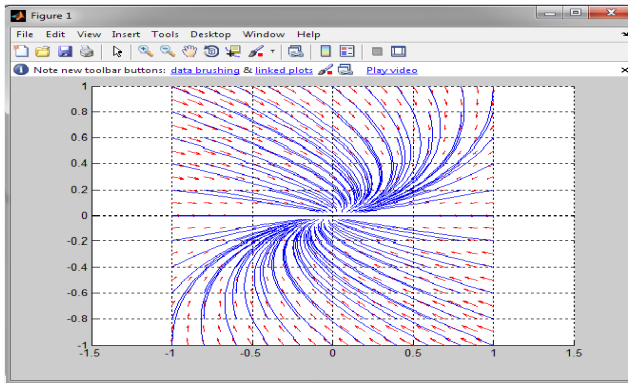


FIGURE 2.5 – Nœud dégénéré : stable(à gauche), Nœud dégénéré : instable(à droite)

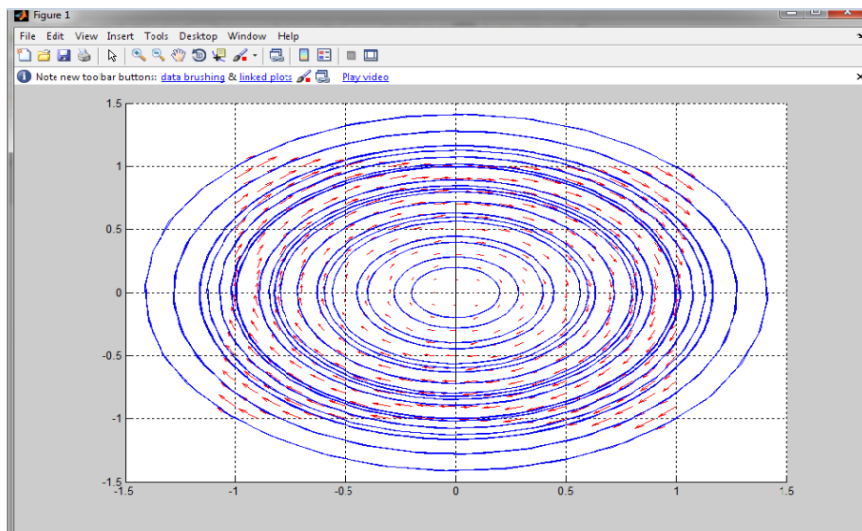


FIGURE 2.6 – Centre

- * Si $\alpha < 0$: le système est asymptotiquement stable et les trajectoires convergent vers le point d'équilibre en suivant des spirales. Le point d'équilibre est dit *foyer stable*. La représentation de cette situation est donnée par la figure (2.7) en prenant comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- * Si $\alpha > 0$: le système est instable et les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre en suivant des spirales. Le point d'équilibre est dit *foyer instable*. La représentation de cette situation est donnée par la figure (2.8) en prenant comme matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

N.B : la notion de stabilité asymptotique utilisée dans cette partie sera définie dans le chapitre 3 en dimension $n = 1$.

Remarque : Comme on ne peut pas toujours trouver des expressions faciles à manipuler de ces valeurs propres, on utilise le déterminant et la trace de la matrice A pour pouvoir prédire le

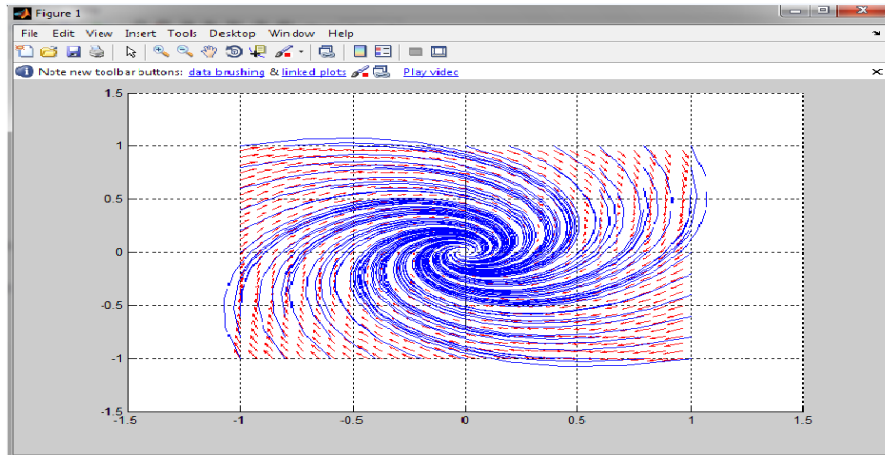


FIGURE 2.7 – Foyer stable

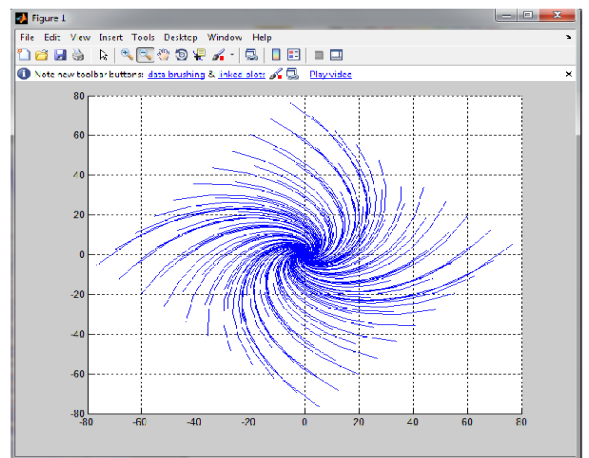
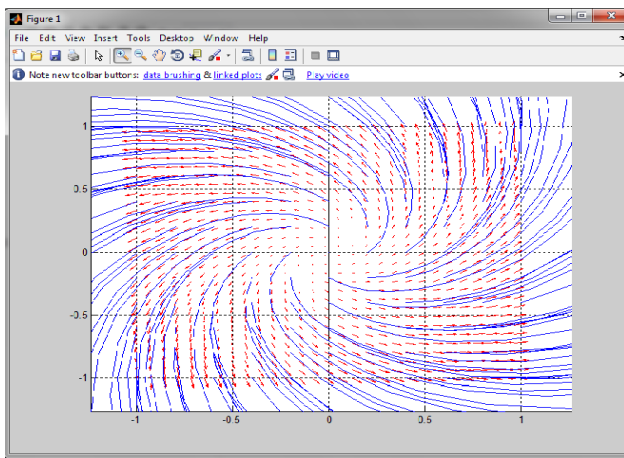


FIGURE 2.8 – Foyer instable

comportement des systèmes au voisinage des points d'équilibre .

On sait que : $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$ et $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

L'équation caractéristique peut prendre donc la forme : $P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2 = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A) = 0$.

Il en suit que : $\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}$

En se basant sur les résultats énoncés précédemment on trouve que :

- Si $\det(A) < 0$ alors on aura 2 valeurs propres réelles l'une positive et l'autre négative ce qui implique que le point d'équilibre est un *point selle* et donc instable.
- Si $\det(A) > 0$ mais $\text{tr}(A) > 0$, on distingue deux cas selon le signe du discriminant :
 - * Si $\Delta = (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$ donc la matrice A admet deux valeurs propres réelles positives d'où le point d'équilibre est *un nœud instable*.
 - * Si $\Delta < 0$, la matrice A admet deux valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle positive (car $\text{tr}(A) > 0$) donc le point d'équilibre est un *foyer instable*.
- Si $\det(A) > 0$, avec $\text{tr}(A) < 0$, on distingue aussi deux cas selon le signe du discriminant :
 - * Si $\Delta \geq 0$, la matrice A admet deux valeurs propres réelles négatives donc le point d'équilibre est un *nœud stable*.
 - * Si $\Delta < 0$, la matrice A admet deux valeurs propres complexes à partie réelle négative

donc le point d'équilibre est un *foyer stable*.

- Si $\det(A) > 0$, avec $\text{tr}(A) = 0$, le point d'équilibre est un *centre*.

L'ensemble de ces cas peut être résumé par le graphique (2.9) dans le domaine $\text{tr}(A)$, $\det(A)$ où la parabole a pour équation $(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)$.

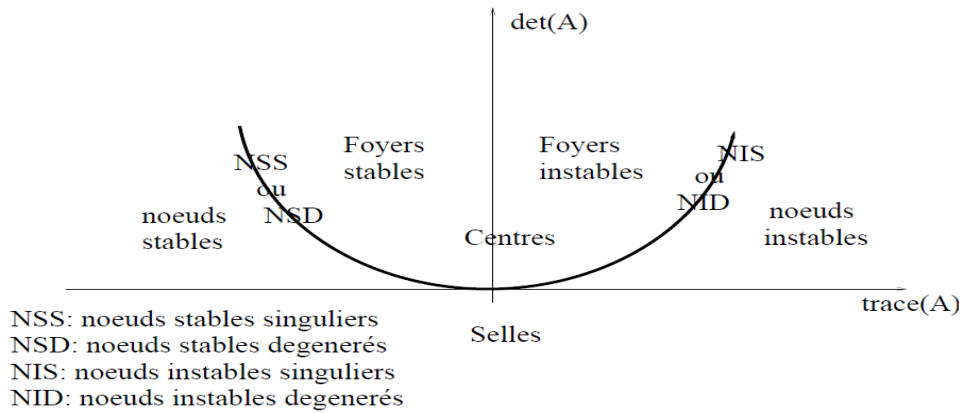


FIGURE 2.9 – Schéma explicatif résumant la notion de stabilité d'un système linéaire à deux dimensions.

2.2 La stabilité en dimension n quelconque : Critère de Routh Hurwitz

Le calcul du signe de la partie réelle des valeurs propres de A ne nécessite pas le calcul de toutes les valeurs propres, il est suffisant d'effectuer quelques tests sur les coefficients a_i du polynôme caractéristique. Un de ces tests est le test de **Routh Hurwitz** qui nous permet d'avoir des informations sur les valeurs propres sans les avoir déterminées explicitement et donc de déterminer la stabilité du système considéré.

Théorème : [4]

Soit le système linéaire $\frac{dX}{dt} = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit le polynôme caractéristique associé : $P_A(X) = \det(A - XI) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} + \dots + a_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$.

Considérons le tableau de Hurwitz qui est une matrice de taille $[n+2, E(\frac{n}{2})+1]$ de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

avec :

$$A_{11} = \frac{-\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}}{a_{n-1}}, \quad A_{12} = \frac{-\det \begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{pmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$A_{21} = \frac{-\det \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}}{A_{11}}, \quad \dots, \quad A_{ij} = \frac{-\det \begin{pmatrix} A_{i-2,1} & A_{i-2,j+1} \\ A_{i-1,1} & A_{i-1,j+1} \end{pmatrix}}{A_{i-1,1}} \quad \forall i > 2$$

Condition nécessaire pour la stabilité du système :

Tous les coefficients du polynôme caractéristique ont le même signe.

Condition suffisante pour la stabilité du système :

Tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh ont le même signe.

Une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système est que les coefficients du polynôme caractéristique et les éléments de la première colonne du tableau de Routh Hurwitz ou doivent avoir le même signe.

Remarque : la démonstration du critère est très longue et très compliquée imbriquant la notion de " Cauchy indexes" et "théorème de Sturm". Des éléments de la démonstration se trouve dans [14].

Chapitre 3

La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires

3.1 La stabilité en dimension n=1

Définition 3.1.1 : *Point d'équilibre*

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

dont la fonction f est continument dérivable. On dit que x_e est un point fixe du système (3.1) si :

$$\dot{x}_e = f(x_e) = 0. \quad (3.2)$$

Remarque : tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine puisque si x_e vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$, alors $\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) = g(z)$ et $g(0) = f(x_e) = 0$, donc l'origine est un point d'équilibre du système $\dot{z} = g(z)$.

Définition 3.1.2 : *Stabilité locale simple et asymptotique* [5]

(i) Le point d'équilibre x_e du système (3.1) est stable si : une faible perturbation l'écarte faiblement de sa position d'équilibre i.e :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x(t=0) - x_e\| \leq \eta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \epsilon \quad \forall t > 0 \quad (3.3)$$

(ii) Le point d'équilibre x_e est dit asymptotiquement stable si après une faible perturbation il revient à sa position d'équilibre quand $t \rightarrow +\infty$ i.e si x_e est stable et si :

$$\exists \rho > 0 \|x(t=0) - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e \quad (3.4)$$

(iii) Un équilibre qui n'est pas stable est dit instable.

Ces trois types d'états sont illustrés schématiquement par la figure (3.1) :

Considérons l'écart suivant entre la solution et le point d'équilibre :

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_e.$$

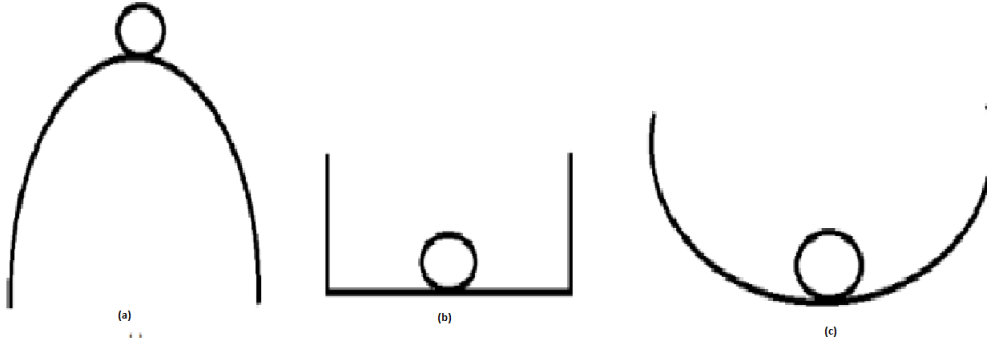


FIGURE 3.1 – (a) :instable,(b) :stable,(c) :asymptotiquement stable

En le dérivant on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon} &= \dot{x} \\
 &= f(x_e + \varepsilon) \\
 &= f(x_e) + \varepsilon f'(x_e) + \Theta(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon f'(x_e) + \Theta(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

Si $f'(x_e) \neq 0$ et si les termes en $\Theta(\varepsilon^2)$ sont négligeables, alors on peut écrire :

$$\dot{\varepsilon}(t) = f'(x_e)\varepsilon(t) \quad (3.5)$$

dont la solution croit exponentiellement si $f'(x_e) \succ 0$, donc la solution diverge d'où le point d'équilibre est instable et décroît exponentiellement si $f'(x_e) \prec 0$ et donc converge vers 0 d'où le point d'équilibre est stable .

Dans le cas particulier où $f'(x_e) = 0$, il faut pousser le développement limité jusqu'au terme d'ordre deux : $\dot{\varepsilon} = f(x_e) + \varepsilon f'(x_e) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x_e) + \Theta(\varepsilon^3)$ et refaire la même analyse.

Nous avons ici linéarisé le système dans le voisinage du point d'équilibre. Il suffit de connaître la dérivée de $f(x)$ en ce point pour statuer sur la stabilité. D'où le théorème suivant : [16]

Théorème 3.1.1 : Soit x_e un point d'équilibre du système (3.1).

1. Si $f'(x_e) < 0$ alors x_e est asymptotiquement stable.
2. Si $f'(x_e) > 0$ alors x_e est instable.
3. Si $f'(x_e) = 0$ le point x_e est non hyperbolique donc on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre.

3.2 La stabilité en dimension n quelconque

On sait déjà que l'étude de la stabilité dans le cas des systèmes non linéaires pose un problème très difficile ; en effet, en raison de leur comportement assez compliqué, les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont plus applicables. Cependant, Lyapunov et autres ont remarqué par l'étude des trajectoires des courbes intégrales au voisinage de l'équilibre que dans la majorité des cas, les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux mêmes types de

points d'équilibre des systèmes linéaires. Donc l'étude d'un système linéaire est aisée puisqu'elle se résout dans un critère purement algébrique. De ce fait, la méthode la plus classique pour la détermination de la stabilité non linéaire du point d'équilibre se réduit à la linéarisation du système en ce point.

3.2.1 La stabilité par linéarisation

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes :

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (3.6)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point d'équilibre on obtient :

$$\frac{dx}{dt} = DF(x_e).x + \Theta(|x|^2) \quad (3.7)$$

Pour répondre aux questions de stabilité, il convient de considérer le système linéarisé tangent associé à (3.6) :

$$\frac{dx}{dt} = DF(x_e).x \quad (3.8)$$

Notons que $DF(x_e)$ est la matrice jacobienne de F au point x_e .

$$DF(x_e) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x_e}.$$

La détermination de la stabilité du point d'équilibre du système (3.6) s'effectue en deux étapes :

- La première consiste à déterminer la stabilité du point d'équilibre de système linéarisé tangent (3.8) qui peut être ramené à l'origine $x = 0$ partant du fait que l'on sait déjà déterminer la stabilité linéaire à partir des valeurs propres de $DF(x_e)$.
- La deuxième étape réside dans la manière qui permet de déterminer la stabilité de x_e à partir de celle de $x = 0$. Autrement dit sous quelles conditions les systèmes (3.6) et (3.8) sont-ils équivalents ? le théorème suivant annonce la condition d'équivalence entre les deux systèmes.

Théorème 3.2.1.1 *Hartman Grobman* [6] [16]

*Ce théorème permet de réduire l'étude d'un système dynamique non linéaire au voisinage d'un point singulier **hyperbolique** à l'étude du système linéarisé tangent au voisinage de l'origine.*

Énoncé du théorème :

Si un point d'équilibre est **hyperbolique**, alors le comportement local du flot du système non linéaire au voisinage de ce point est complètement déterminé par le flot du système linéarisé tangent. On dit que **les deux systèmes sont topologiquement équivalents** (ils ont le même comportement).

3.2.2 La stabilité au sens de Lyapunov

Supposons que l'on initialise le système dynamique suivant : $\dot{x} = f(x)$ en un point voisin du point d'équilibre x_0 , la question qui se pose : qu'est ce qui se passe pour la trajectoire solution ?

Cette question est d'importance car dans la pratique les conditions initiales présentent des incertitudes, donc il faut que deux conditions initiales voisines conduisent à des trajectoires solutions voisines pour tout temps t (même pour des temps infiniment longs). Une manière naturelle d'aborder cette question consiste à résoudre l'équation différentielle et à étudier le comportement des solutions. Cependant, on ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles.

La réponse à cette question nécessite donc une description qualitative des trajectoires solutions. C'est le mathématicien Russe Lyapunov qui a établi en 1892 dans son mémoire intitulé "Problème général de la stabilité du mouvement" les fondements de la théorie moderne de la stabilité qui utilisent des fonctions auxiliaires appelées **fonctions de Lyapunov**.

Définition 3.2.2.1 : *Fonction définie positive*

Soit 0 l'origine de \mathbb{R}^n et U un voisinage de 0.

Soit V une fonction à valeurs réelles, définie sur U , telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0 \forall x \neq 0$: on dit que V est **définie positive dans U** .

Définition 3.2.2.2 : *Fonction de Lyapunov* [7]

Soit

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.9}$$

un système autonome tel que $f(0) = 0$. Une fonction V de classe C^1 définie positive sur un voisinage U de 0 est dite **fonction de Lyapunov** pour le système (3.9) si pour toute solution Φ de (3.9) on a :

$$\dot{V}(\Phi) = \frac{d}{dt}V(\Phi(t)) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \Phi}, f(\Phi) \right\rangle = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \Phi_i} f_i(\Phi) \leq 0 \tag{3.10}$$

Théorème 3.2.2.1 : (*Lyapunov*) [8][16]

Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système (3.9) et posons $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , définie positive et définie dans un voisinage U de l'origine.

Si :

(i) $\frac{dV(x)}{dt} \leq 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est donc stable.

(ii) $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est donc asymptotiquement stable.

(iii) $\frac{dV(x)}{dt} > 0$ dans $U - \{0\}$, l'origine est instable.

Les propriétés de stabilité sont dites globales si $U = \mathbb{R}^n$.

Remarque : ce théorème est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de donner une information sur le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas de conclure si on ne trouve pas une telle fonction. Un système peut avoir une infinité de fonctions de Lyapunov, par conséquent le fait qu'une fonction ne prouve pas la stabilité n'implique pas l'instabilité et de plus, il existe certaines classes de systèmes asymptotiquement stable qui ne possèdent pas une fonction de Lyapunov.

L'utilité de la méthode réside surtout dans la détermination du bassin d'attraction ; elle permet aussi de répondre aux questions de stabilité quand **la linéarisation** ne donne aucune

information. La difficulté de la recherche de la fonction V constitue un vrai handicap puisqu'on ne connaît pas de procédés pour la construction de fonctions adéquates dans le cas général.

Définition 3.2.2.3 : *Fonction de Lyapunov faible*

Une fonction V définie positive sur un voisinage U de l'origine est dite **fonction de Lyapunov faible** pour le système (3.9) si $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U - \{0\}$.

Si $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U - \{0\}$, la fonction de Lyapunov est dite **forte**.

Théorème 3.2.2.2 : *Barbashin-Krasovskii-LaSalle pour les fonctions faibles*

S'il existe une fonction de Lyapunov faible V définie dans un voisinage de l'origine pour le système dynamique (3.9) alors, si \dot{V} ne s'annule pas le long d'une quelconque trajectoire autre que le point d'équilibre, l'origine est **asymptotiquement stable**.

Exemple :

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 6x^2y \end{cases}$$

On remarque que l'origine $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre. Considérons la fonction suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

On a : $V(0, 0) = 0$ et $V(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

De plus :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ &= 2xy - 2xy - 12x^2y^2 \\ &= -12x^2y^2 \end{aligned}$$

On remarque que \dot{V} s'annule soit pour $x = 0$, soit pour $y = 0$, et elle est strictement négative partout ailleurs. Par conséquent $\dot{V} \leq 0$, c'est-à-dire V est une fonction de Lyapunov faible pour le système dynamique considéré et d'après le théorème de Lyapunov l'origine est stable.

Le long de toute trajectoire (x, y) vérifiant : $x \neq 0$ et $y \neq 0$ la dérivée \dot{V} ne s'annule pas donc d'après le théorème de LaSalle pour les fonctions faibles, on peut conclure à la stabilité asymptotique de l'origine.

Le bassin d'attraction du système est le domaine \mathbb{R}^2 puisque $\dot{V} \leq 0$ sur \mathbb{R}^2 tout entier.

Chapitre 4

Introduction à la théorie de bifurcations locales

Ce chapitre a pour but de donner des notions de base sur la théorie de bifurcations, et de donner quelques exemples d'application de cette théorie.

Les bifurcations ont lieu dès qu'on est en présence d'un modèle de processus dynamique contenant un ou plusieurs paramètres, elles trouvent des applications en physique, en chimie, en écologie, en biologie ...

On dira que nous sommes en présence **d'une bifurcation**, si un changement qualitatif des propriétés d'un système se produit lorsque l'on fait varier un de ses paramètres. Intuitivement, le changement des propriétés d'un système signifie le changement du nombre de points fixes ou de leur caractère (stabilité, attractivité ...). Si au passage d'une valeur du paramètre un tel changement se produit on dit que le système passe par **un point de bifurcation**. [9]

Définition 4.1 Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, c), \text{ avec } f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } c \text{ un paramètre.}$$

On dira qu'il y a bifurcation en c^* , si en une valeur c arbitrairement proche de c^* il existe une dynamique qualitativement différente de celle en c^* .

En d'autres termes, si l'on considère les deux systèmes :

$\dot{x} = f(x, c^*)$ et $\dot{x} = f(x, c)$, avec c proche de c^* , alors ces deux systèmes présentent des aspects différents dans le nombre de points d'équilibre et / ou de leur stabilité. On dira qu'une perturbation du paramètre donne des systèmes **topologiquement non équivalents**.

Nous traiterons par la suite quelques types de bifurcations : [15] [16]

4.1 Bifurcation selle-nœud

Considérons l'équation suivante :

$$\dot{x} = f(x, c) \tag{4.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière avec $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ (c-à-d que $(0, 0)$ est un point d'équilibre non-hyperbolique) et $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \neq 0$.

Par un développement limité au voisinage du point d'équilibre on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + c \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + \dots \\ &= Ac + Bx^2 + \dots \end{aligned}$$

avec $A = \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0)$ et $B = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$.
 Posons : $U = \frac{B}{A}x$, $\mu = \frac{B}{A}c$, $T = At$

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \frac{B}{A}\dot{x} \\ &\simeq \frac{B}{A}(Ac + Bx^2) \\ &= Bc + \frac{B^2}{A}x^2 \\ &= A\left(\frac{B}{A}c + \frac{B^2}{A^2}x^2\right) \\ &= A(\mu + U^2)\end{aligned}$$

On a $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq A(\mu + U^2)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial T} \simeq \mu + U^2}$$

La dernière équation dite forme normale de la bifurcation selle-nœud.

Exemple 4.1.1 :

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (4.2)$$

Selon le signe de c , il faut distinguer trois cas :

- Si $c < 0$: dans ce cas le système admet deux points d'équilibre de coordonnées : $(-\sqrt{-c}, 0)$ et $(\sqrt{-c}, 0)$.

La matrice jacobienne du système s'écrit :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point $(-\sqrt{-c}, 0)$, la matrice jacobienne s'écrit :

$$J(-\sqrt{-c}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{-c} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles négatives : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -2\sqrt{-c}$, d'où le point d'équilibre $(-\sqrt{-c}, 0)$ est un nœud stable.

Au point $(\sqrt{-c}, 0)$, la matrice jacobienne s'écrit :

$$J(\sqrt{-c}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{-c} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signes opposés : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2\sqrt{-c}$, d'où le point d'équilibre est un point selle donc instable.

- Si $c = 0$, le système (4.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

L'unique point fixe du système est l'origine. La matrice jacobienne associée s'écrit :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc le point d'équilibre $(0,0)$ est non hyperbolique. L'étude de la première équation montre que $x = 0$ est un point d'équilibre non hyperbolique et la deuxième équation montre que $y = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

- Si $c > 0$: dans ce cas le système (4.1) n'admet aucun point d'équilibre car $x \in \mathbb{R}$.

Cette bifurcation appelée "selle-nœud" correspond à l'apparition de deux points d'équilibre, l'un stable (un nœud) et l'autre instable (un point selle) et au point de bifurcation $c = 0$ les deux points d'équilibre disparaissent et un point non hyperbolique apparaît, qui en $c > 0$ lui même disparaît : cette bifurcation correspond donc au changement de nombre de points d'équilibre et leur stabilité.

4.2 Bifurcation transcritique

Considérons toujours l'équation $\dot{x} = f(x, c)$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et on ajoute une troisième condition $\frac{\partial f}{\partial c}(0,0) = 0$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0,0) \neq 0$.

Par un développement limité au voisinage de $(0,0)$ on obtient :

$$f(x, c) = f(0,0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + c \frac{\partial f}{\partial c}(0,0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + xc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0,0) + \dots$$

Posons :

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

et

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0,0) \neq 0$$

L'équation devient donc :

$$f(x, c) \simeq Ax^2 + Bxc \text{ d'où } \dot{x} \simeq Ax^2 + Bxc$$

Effectuons les changements :

$$U = \frac{x}{A} \text{ et } T = A^2 t \text{ et } \mu = \frac{Bc}{A^2}$$

Alors :

$$\dot{U} = \frac{\dot{x}}{A} \simeq x^2 + \frac{Bc}{A} x = A^2 U^2 + BUc$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq A^2 U^2 + BUc$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial T} \simeq U^2 + \mu U}$$

La dernière équation dite forme normale de la bifurcation transcritique .

Exemple 4.2.1 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = cx + x^2 \quad (4.3)$$

Cherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre c .

Trois cas à distinguer :

- Si $c < 0$, dans ce cas, les points d'équilibre sont solutions de l'équation $\dot{x} = x(c+x) = 0$. Cette équation admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = -c$ donc le système admet deux points d'équilibre.

On a $f'(x, c) = (cx + x^2)' = c + 2x$.

En $x = 0$, on a $f'(0, c) = c < 0$ donc le point d'équilibre $x_1 = 0$ est asymptotiquement stable.

En $x = -c$, on a $f'(-c, c) = c - 2c = -c > 0$ donc le point d'équilibre $x_2 = -c$ est instable.

- Si $c = 0$, l'équation (4.3) devient :

$$\dot{x} = x^2$$

admettant un point d'équilibre unique $x_1 = 0$ qui est non hyperbolique.

- Si $c > 0$, dans ce cas les points d'équilibre sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = -c$.
Puisque en $x = 0$: $f'(0, c) = c > 0$, alors le point d'équilibre $x_1 = 0$ est instable et en $x = -c$: $f'(-c, c) = -c < 0$, alors le point d'équilibre $x_2 = -c$ est asymptotiquement stable.

Cette bifurcation appelée "bifurcation transcritique" conserve le nombre de points d'équilibre mais leur nature change à la valeur de bifurcation $c = 0$ (l'origine qui est stable pour $c < 0$ devient instable pour $c > 0$ alors que le point d'équilibre $x_2 = -c$ passe de l'instabilité à la stabilité).

4.3 Bifurcation fourche ou "pitchfork"

Reprenons l'équation $\dot{x} = f(x, c)$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, en prenant cette fois-ci : $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$.

Par un développement limité au voisinage de l'origine on trouve :

$$\begin{aligned} f(x, c) &= f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + c \frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + xc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \\ &+ \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(0, 0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + \dots \\ &= xc \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + \dots \end{aligned}$$

Posons :

$$A = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0$$

Notre équation devient :

$$\dot{x} \simeq Ax^3 + Bxc$$

Effectuons les changements suivants : $U = \frac{x}{A}$, $T = A^3 t$ et $\mu = \frac{Bc}{A^3}$, ce qui conduit à :

$$\dot{U} = \frac{\dot{x}}{A} \simeq x^3 + \frac{Bc}{A}x = A^3 U^3 + BUc.$$

$$\text{Par suite : } \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \simeq A^3 U^3 + BUc$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial U}{\partial T} \simeq U^3 + \mu U}$$

La dernière équation dite forme normale de la bifurcation fourche (super-critique quand $A < 0$ et sous-critique quand $A > 0$).

Exemple 4.3.1 : *bifurcation fourche super-critique*

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = cx - x^3 \tag{4.4}$$

Recherchons les points d'équilibre de cette équation selon les valeurs du paramètre c . De nouveau, trois cas se présentent :

- Si $c < 0$: les points d'équilibre de cette équation sont solution de l'équation suivante : $\dot{x} = x(c - x^2) = 0$, qui admet une solution unique $x = 0$ dans \mathbb{R} .
On a $f'(x, c) = (cx - x^3)' = c - 3x^2$.
En $x = 0$: $f'(0, c) = c < 0$, d'où le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
- Si $c = 0$: l'équation (4.4) devient :

$$\dot{x} = -x^3$$

admettant un point d'équilibre unique $x = 0$, qui est non hyperbolique.

- Si $c > 0$: les points d'équilibre solutions du système :

$$\dot{x} = x(c - x^2) = 0$$

sont : $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{c}$, $x_3 = -\sqrt{c}$.

En $x = 0$: $f'(0, c) = c > 0$, donc $x_1 = 0$ est un point d'équilibre instable.

En $x = \sqrt{c}$: $f'(\sqrt{c}, c) = -2c < 0$, donc $x_2 = \sqrt{c}$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

En $x_3 = -\sqrt{c}$: $f'(-\sqrt{c}, c) = -2c < 0$, donc $x_3 = -\sqrt{c}$ est également asymptotiquement stable.

Ainsi, 0 est un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre asymptotiquement stables.

Cette bifurcation appelée "fourche ou pitchfork" super-critique correspond au changement de nombre de points d'équilibre et leur stabilité. En la valeur de bifurcation $c = 0$ le nombre de points d'équilibre passe de un à trois. Le point d'équilibre situé à l'origine qui est stable pour $c < 0$, devient instable pour $c > 0$ en s'entourant de deux points d'équilibre stables.

Remarque : il existe aussi une bifurcation dite sous-critique, illustrée par l'exemple suivant : $\dot{x} = cx + x^3$, après une étude similaire à l'exemple ci-dessus on conclut donc que cette bifurcation se caractérise par le fait que lorsqu'on traverse la valeur $c = 0$, le point d'équilibre 0 passe de stable à instable et les deux autres points d'équilibre instables pour $c < 0$ disparaissent. Donc le nombre de points d'équilibre passe de trois à un contrairement à la bifurcation super-critique.

4.4 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf est un type de bifurcation où le système passe d'un état stationnaire à un régime périodique caractérisé par la naissance **d'un cycle limite** issue d'un changement local dans les propriétés de stabilité d'un point d'équilibre.

Définition 4.4.1 Cycle limite [10]

Un cycle limite est une trajectoire périodique fermée isolée.

Une trajectoire fermée est une orbite non réduite à un point et qui revient à la condition initiale après un certain temps.

Isolée : signifie que les trajectoires voisines ne sont pas fermées, elles spiralent autour du cycle limite en s'en éloignant ou en s'en approchant.

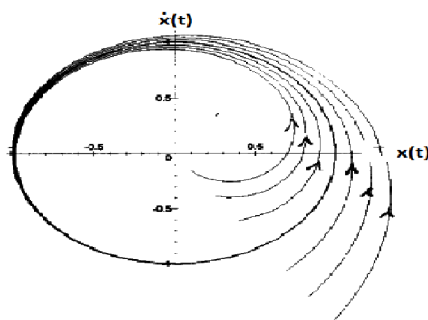


FIGURE 4.1 – Cycle limite

Si toutes les trajectoires voisines s'approchent du cycle limite, le cycle est dit stable ou attractif, sinon, il est dit instable.

Remarque :

Les cycles limites sont **des phénomènes non linéaires**, ils ne peuvent apparaître dans les systèmes linéaires (un système linéaire $\dot{x} = Ax$ peut avoir une orbite fermée mais ne sera pas isolée. En effet, si $x(t)$ est une solution périodique non constante, $\alpha x(t)$ aussi, donc $x(t)$ est entourée d'orbites fermées non réduites à un point).

Pour montrer l'existence d'un cycle limite le théorème le plus utilisé est le théorème suivant :

Théorème 4.4.1 Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) [11]

Soit le champ de vecteurs : $\frac{dx}{dt} = f(x, c)$, avec c un paramètre de bifurcation ($c \in \mathbb{R}$) et $x \in \mathbb{R}^n$ et soit x_e un point d'équilibre du système.

On considère la linéarisation suivante :

$$\frac{dx}{dt} = Df(x_e, c).x$$

avec $Df(x_e, c)$ la matrice jacobienne du système calculée au point d'équilibre.

Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle négative à l'exception d'un pair de valeurs propres complexes conjuguées $\gamma(c) \pm i\omega(c)$ qui vérifient les conditions suivantes :

(H1) Si c_0 le point de bifurcation alors ces deux valeurs propres doivent traverser l'axe imaginaire à $c = c_0$: $\gamma(c_0) = 0$, $\omega(c_0) > 0$ et $\gamma'(c_0) \neq 0$.

(H2) A $c = c_0$, il n'y a pas d'autres valeurs propres avec une partie réelle nulle.

Alors sous ces conditions, il y a naissance en $c = c_0$ de cycle limite de période $T = \frac{2\pi}{\omega(c_0)}$.

Remarque : Il existe trois cas de bifurcations de Hopf possibles :

Si $\gamma'(c_0) > 0$:

-**Bifurcation de Hopf dégénérée** : lorsque à $c = c_0$ (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour du point d'équilibre. Le point d'équilibre correspond alors à des centres.

-**Bifurcation de Hopf sur-critique** : lorsque à $c = c_0$ le point d'équilibre est asymptotiquement stable et $\exists c^* > c_0 \forall c$ vérifiant $c_0 < c < c^*$ il existe autour du point d'équilibre qui est instable un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{c - c_0}$.

-**Bifurcation de Hopf sous-critique** : lorsque à $c = c_0$, le point d'équilibre est instable et $\exists c^* < c_0 \forall c$ vérifiant $c^* < c < c_0$ il existe autour du point d'équilibre qui est asymptotiquement stable un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{|c - c_0|}$.

Si $\gamma'(c_0) < 0$: il suffit d'inverser les conclusions c-à-d que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du paramètre inférieures (resp. supérieures) à c_0 .

On illustrera les deux derniers types par des exemples :

4.4.1 Bifurcation de Hopf sur-critique

La bifurcation de Hopf sur-critique est la déstabilisation de la partie foyer stable quand les valeurs propres complexes conjuguées associées à cette partie traversent l'axe imaginaire pur pour la transformer en une partie foyer instable. Cette déstabilisation s'accompagne de la naissance d'un cycle limite stable.

Exemple 4.4.1.1 Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non linéaire}} \quad (4.5)$$

On remarque que l'origine est un point d'équilibre du système.

La matrice jacobienne du système calculée à l'origine est :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}.$$

On a $tr(A) = 2c$, $det(A) = c^2 + 1$, $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2c\lambda + (c^2 + 1)$ et donc $\Delta = -4$.

Les valeurs propres de la matrice A sont donc complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = c \pm i$. On a $Re(\lambda_{1,2}) = c$ et $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$. Lorsque le paramètre c change de signe, l'origine passe de foyer stable ($c < 0$) à foyer instable ($c > 0$) et à $c = 0$ l'origine prévoit des centres.

A $c = 0$ (point de bifurcation) la matrice jacobienne admet deux valeurs propres conjuguées purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i$ et $Re(\lambda_{1,2}(0))' = 1 \neq 0$ et donc d'après le théorème de P-A-H, le système admet un cycle limite de période $T = 2\pi$. Pour déterminer quel type de bifurcation de Hopf on cherche l'existence d'une fonction de Lyapunov.

Considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Sa dérivée s'écrit : $\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)(c - x^2 - y^2)$

à $c = 0$: $\dot{V}(x, y) = -(x^2 + y^2)^2$, \dot{V} est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction V est une fonction de Lyapunov forte. Ainsi, les centres prévues par la linéarisation ne sont pas conservés et le théorème de Lyapunov nous permet de conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $c = 0$ et donc d'après la remarque précédente il s'agit d'**une bifurcation de Hopf sur-critique** .

Afin de préciser le nombre de points d'équilibre et l'équation du cycle limite on utilise les coordonnées polaires :

Posons :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(c - r^2)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{d\tan\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{-r^2}{r^2\cos^2\theta}$$

Donc le système s'écrit en coordonnées polaires sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (4.6)$$

Selon le paramètre c , le nombre de points d'équilibre varie :

- $c < 0$: l'équation admet un point d'équilibre unique $r = 0$ qui est asymptotiquement stable.
- $c > 0$: la première équation du système (4.6) admet deux points d'équilibre : $r = 0$ qui est instable et $r = \sqrt{c}$ qui est asymptotiquement stable et il correspond à un cercle de rayon $r = \sqrt{c}$ qui représente l'équation du cycle limite parcouru à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = -1$.

4.4.2 Bifurcation de Hopf sous-critique

La bifurcation sous-critique est une déstabilisation de la partie foyer accompagnée de la naissance d'un cycle limite instable.

On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non linéaire}} \quad (4.7)$$

avec une étude similaire à la bifurcation de Hopf sur-critique on trouve :

- $c < 0$: l'origine est un point d'équilibre unique et est un foyer asymptotiquement stable entouré d'un cycle limite instable de rayon $r = \sqrt{-c}$.
- $c = 0$: l'origine est point d'équilibre unique et est instable.
- $c > 0$: l'origine est un foyer instable.

Chapitre 5

Application : modèle de Goodwin

5.1 Historique

Au début des années 1960, **Brian Goodwin** (1963-1965) a présenté un modèle mathématique décrivant un processus de régulation très fréquent dans le cadre du métabolisme, où le produit d'une réaction participe à l'inhibition de l'expression d'un gène codant pour une enzyme qui catalyse une étape de cette même réaction. Il s'agit donc d'un circuit de régulation négatif où en présence d'un co-répresseur, le répresseur inhibe la transcription de l'ADN en ARNm et donc inhibe la production du protéine enzymatique. [17]

Le modèle a été spécifiquement examiné dans le contexte des rythmes circadiens et il a été utilisé pour étudier diverses propriétés des oscillateurs circadiens tel que leur réponse aux impulsions lumineuses.

Ce modèle a pour but de décrire la transcription et la traduction de l'ARNm et du protéine ainsi que leur dégradation qui joue un rôle très important dans le contrôle de la période des oscillations.

La description et la discussion du modèle a récemment été donné par **Murray** en 1993.

Le modèle de Goodwin a été représenté sous la forme d'un système à trois équations différentielles ordinaires comme suit : [12][13]

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{k_1}{1 + Z^p} - k_4 X \\ \frac{dY}{dt} = k_2 X - k_5 Y \\ \frac{dZ}{dt} = k_3 Y - k_6 Z \end{cases} \quad (5.1)$$

avec X , Y , Z représentent respectivement les concentrations de l'ARNm, du protéine enzymatique et du répresseur.

k_1 , k_2 et k_3 représentent respectivement les taux de transcription, de translation et de l'inhibition de la transcription.

k_4 , k_5 et k_6 représentent respectivement les taux de dégradation de l'ARNm, du protéine et du répresseur.

p : mesure la coopérativité de répression.

Remarque : tous les termes du modèle sont linéaires à part le terme de répression $f_{inh} = \frac{1}{1 + Z^p}$ qui décrit l'inhibition de la transcription de l'ARNm.

La figure (5.1) représente le processus décrivant le modèle de Goodwin :

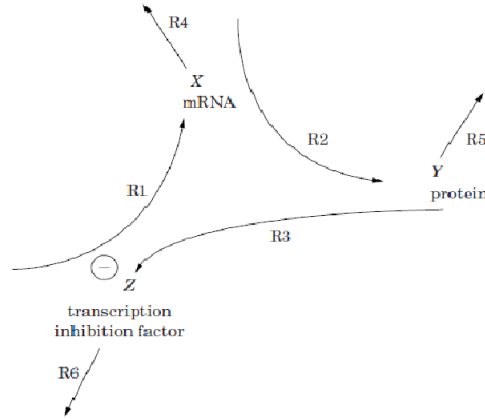


FIGURE 5.1 – modèle de Goodwin :la réaction R1 représente la formation de l'ARNm (X), la réaction R2 représente la synthèse du protéine (Y) et R3 la production du facteur d'inhibition de la transcription (Z). R4, R5 et R6 représentent les réactions de dégradation.

5.2 Étude théorique de la stabilité

Cette partie sera consacrée à l'étude de la stabilité du modèle de Goodwin et les conditions sur les paramètres du modèle qui permettent d'avoir une bifurcation de Hopf.

Afin de simplifier le système (5.1) nous introduisons les variables suivantes :

$$\begin{cases} x = \frac{k_2 k_3}{k_5 k_6} X \\ y = \frac{k_3}{k_6} Y \\ z = Z \end{cases}$$

Posons : $t' = \alpha t$, avec $\alpha = \frac{k_1 k_2 k_3}{k_5 k_6}$

Avec ces nouveaux variables le système devient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt'} = \frac{1}{1+z^p} - b_4 x \\ \frac{dy}{dt'} = b_5(x-y) \\ \frac{dz}{dt'} = b_6(y-z) \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $b_i = \frac{k_i}{\alpha}$, $\forall i \in \{4, 5, 6\}$.

Pour simplifier l'étude, on peut assumer que $b_4 = b_5 = b_6 = b$.

Cherchons les points stationnaires du système, pour cela cherchons x, y, z qui vérifient :

$$\begin{cases} \frac{1}{1+z^p} - bx = 0 \\ b(x-y) = 0 \\ b(y-z) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z \quad (5.3)$$

Donc le système (5.2) admet des points stationnaires quand $x = y = z = \zeta$, avec ζ un réel positif vérifiant : $\frac{1}{1 + \zeta^p} = b\zeta$.

La matrice jacobienne du système en ces points est :

$$J(\zeta, \zeta, \zeta) = \begin{pmatrix} -b & 0 & \frac{-p\zeta^{p-1}}{(1 + \zeta^p)^2} \\ b & -b & 0 \\ 0 & b & -b \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{p\zeta^{p-1}}{(1 + \zeta^p)^2} = (b\zeta)^2(p\zeta^{p-1}) \\ &= b^2p\zeta^{p+1} \\ &= b^2p\zeta\left(\frac{1 - b\zeta}{b\zeta}\right) \\ &= bp(1 - b\zeta) > 0 \end{aligned}$$

D'où : l'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\begin{aligned} P_J(\lambda) &= (-b - \lambda)(b + \lambda)^2 - b\left(\frac{bp\zeta^{p-1}}{(1 + \zeta^p)^2}\right) \\ &= -(b + \lambda)^3 - b^2\Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_J(\lambda) = 0 &\Rightarrow (b + \lambda)^3 + b^2\Phi = 0 \\ &\Rightarrow b + \lambda = \sqrt[3]{-b^2\Phi} \\ &\Rightarrow \lambda = -b + \sqrt[3]{-b^2\Phi} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -b - \sqrt[3]{b^2\Phi} \quad \text{ou} \quad \lambda_{2,3} = -b + \sqrt[3]{(\pm i)^2 b^2\Phi} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -b - \sqrt[3]{b^2\Phi} \quad \text{ou} \quad \lambda_{2,3} = -b + (\pm i)^{2/3} \sqrt[3]{b^3 p(1 - b\zeta)} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -b - \sqrt[3]{b^2\Phi} \quad \text{ou} \quad \lambda_{2,3} = -b + b\sqrt[3]{p(1 - b\zeta)}(\cos(\pi/3) \pm i\sin(\pi/3)) \end{aligned}$$

Écrivons le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne sous la forme suivante :

$$P_J(\lambda) = -\lambda^3 - 3b\lambda^2 - 3b^2\lambda - (b^2\Phi + b^3)$$

En utilisant le théorème de Routh Hurwitz énoncé dans le chapitre 2 pour déterminer la stabilité des points d'équilibre :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{-\det \begin{pmatrix} -1 & -3b^2 \\ -3b & -b^2\Phi - b^3 \end{pmatrix}}{-3b} = \frac{b^2\Phi - 8b^3}{3b} \quad \text{et} \quad A_{12} = 0 \\ A_{21} &= \frac{-\det \begin{pmatrix} -3b & -b^2\Phi - b^3 \\ \frac{b^2\Phi - 8b^3}{3b} & 0 \end{pmatrix}}{\frac{b^2\Phi - 8b^3}{3b}} = -b^2\Phi - b^3 \end{aligned}$$

Donc, le tableau de Routh s'écrit comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3b^2 \\ -3b & -b^2\Phi - b^3 \\ \frac{b^2\Phi - 8b^3}{3b} & 0 \\ -b^2\Phi - b^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Routh Hurwitz les points d'équilibre du système sont stables si et seulement si $b^2\Phi - 8b^3 < 0$ puisque tous les coefficients du polynôme caractéristique sont négatifs et les éléments de la première colonne du tableau de Routh sont négatifs à part l'élément correspondant à la troisième ligne qu'on connaît pas son signe et nous l'avons pris comme condition de stabilité.

$$\begin{aligned} b^2\Phi - 8b^3 < 0 &\Rightarrow b^3p(1 - b\zeta) - 8b^3 < 0 \\ &\Rightarrow -b + \frac{b}{2}\sqrt[3]{p(1 - b\zeta)} < 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{2,3}) < 0 \end{aligned}$$

Donc, le système est **stable** si et seulement si :

$$p(1 - b\zeta) < 8 \Rightarrow \boxed{b > \frac{p-8}{\zeta p}}$$

Cherchons maintenant l'existence du cycle limite :

Remarquons tout d'abord que : $b\zeta > 0$ donc $1 - b\zeta < 1$ d'où $p(1 - b\zeta) < p$, si $p \leq 8$ alors on aura toujours $p(1 - b\zeta) < 8$ donc on aura toujours la stabilité des points d'équilibre par conséquent il n'y aura pas apparition de cycle limite donc pas de bifurcation de Hopf. Pour cela : **une condition nécessaire** pour avoir la bifurcation de Hopf est : $\boxed{p > 8}$.

Vérifions les conditions d'application du théorème de Hopf énoncé dans le chapitre 4 :

On a 3 valeurs propres : $\lambda_1 < 0$ et un pair de valeurs propres complexes conjuguées qui vérifient :

(H1)

- $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(b)) = -b + \frac{b}{2}\sqrt[3]{p(1 - b\zeta)}$
 $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(b)) = 0 \Rightarrow b = \frac{p-8}{\zeta p}$

Donc le point de bifurcation est : $b_f = \frac{p-8}{\zeta p}$

D'où : $\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(b_f)) = -\frac{p-8}{\zeta p} + 2 \times \frac{p-8}{2\zeta p}$
 $\Rightarrow \boxed{\operatorname{Re}(\lambda_{2,3}(b_f)) = 0}$

- $\operatorname{Im}(\lambda_{2,3}(b_f)) = -b_f + \frac{\sqrt{3}}{2}b_f\sqrt[3]{p(1 - b_f\zeta)}$
 $= -\frac{p-8}{\zeta p} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\left(\frac{p-8}{\zeta p}\right)$
 $= \frac{p-8}{\zeta p}(\sqrt{3} - 1)$
 $p > 8 \Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}(\lambda_{2,3}(b_f)) > 0}$.

- $Re(\lambda_{2,3}(b))' = -1 + \frac{1}{2} \sqrt[3]{p(1-b\zeta)} + \frac{b}{2} \left(\frac{-p\zeta}{3\sqrt[3]{(p(1-b\zeta))^2}} \right)$

$$\begin{aligned} Re(\lambda_{2,3}(b_f))' &= -1 + 2 \times \frac{1}{2} - \frac{b_f p \zeta}{6\sqrt[3]{(p(1-b_f\zeta))^2}} \\ &= \frac{8-p}{24} \end{aligned}$$

$$p > 8 \Rightarrow \boxed{Re(\lambda_{2,3}(b_f))' \neq 0}$$

(H2) Pour $b = b_f$, il y a une troisième v.p à partie réelle non nulle.

$$\begin{aligned} \lambda_1(b_f) &= -b_f - b_f \sqrt[3]{p(1-b_f\zeta)} \\ &= -3b_f \end{aligned}$$

$$p > 8 \Rightarrow b_f = \frac{p-8}{\zeta p} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1(b_f) \neq 0}.$$

Toutes les hypothèses du théorème sont vérifiées d'où l'existence d'un cycle limite au point de bifurcation $b_f = \frac{p-8}{\zeta p}$ de période $T = \frac{2\pi}{Im(\lambda_{2,3})}$.

Au point de bifurcation : $Re(\lambda_{2,3}) = 0 \Rightarrow p(1-b\zeta) = 8$

$$\Rightarrow Im(\lambda_{2,3}) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} b \sqrt[3]{8} = \pm b\sqrt{3}$$

$$\text{donc } T = \frac{2\pi}{b\sqrt{3}}.$$

En résumé, nous pouvons conclure que :

- Si $b < \frac{p-8}{\zeta p} \Rightarrow$: l'état d'équilibre est instable.
- Si $b > \frac{p-8}{\zeta p} \Rightarrow$: l'état d'équilibre est stable.
- Si $b = \frac{p-8}{\zeta p} \Rightarrow$: le système subit une bifurcation de Hopf : il y a apparition de cycle limite de période $T = \frac{2\pi}{b\sqrt{3}}$.

Remarque :

L'étude de stabilité du cycle limite nécessite la détermination d'une fonction de Lyapunov, ce qui est assez difficile à extraire pour ce système.

Le diagramme de bifurcation illustrant ce phénomène est représenté par la figure (5.2) :

La figure (5.3) représente une simulation par le logiciel Matlab illustrant l'apparition du cycle limite au point de bifurcation $b = \frac{p-8}{\zeta p}$, en choisissant des paramètres vérifiant les deux conditions : $b\zeta = \frac{1}{1+\zeta^p}$ et $b = \frac{p-8}{\zeta p}$ on trouve : $\zeta = 1$, $p = 16$ et $b = \frac{1}{2}$ et en prenant la matrice jacobienne en ces points :

$$J(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -4 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

La figure (5.4) représente la simulation de la partie foyer stable en choisissant des paramètres vérifiant les conditions $b\zeta = \frac{1}{1+\zeta^p}$ et $b > \frac{p-8}{\zeta p}$, pour la figure (à gauche) on prends $b = \frac{1}{2}$,

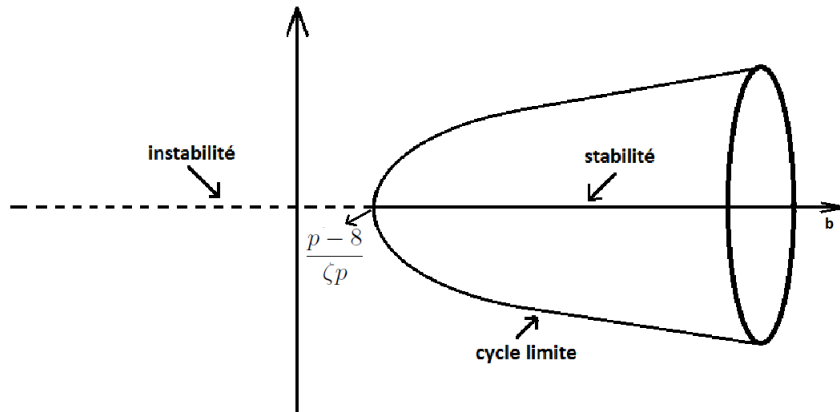


FIGURE 5.2 – Diagramme de bifurcation

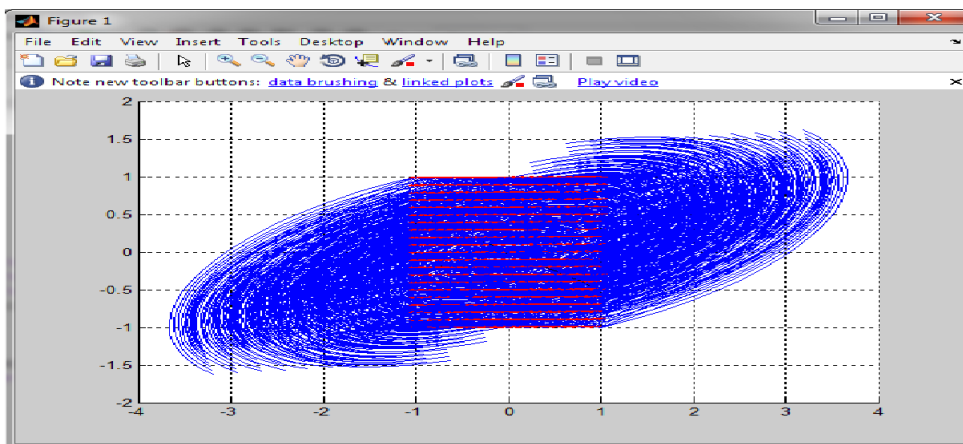


FIGURE 5.3 – Portrait de phase au point de bifurcation

$\zeta = 1$ et $p = \frac{1}{2} < 8$ et donc la matrice jacobienne en ces points est :

$$J(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/8 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Et pour la figure (à droite) on prends : $b = 1$, $\zeta = 0.84$ et $p = 9 > 8$ et donc la matrice jacobienne en ces points est :

$$J(0.84, 0.84, 0.84) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1.52 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

On remarque que la figure (5.4) représente un état d'équilibre stable car $b > \frac{p-8}{\zeta p}$ et pour $p = 9$ (la figure à droite) le cycle limite commence à apparaître car $p > 8$ contrairement à la figure à gauche où $p = \frac{1}{2} < 8$.

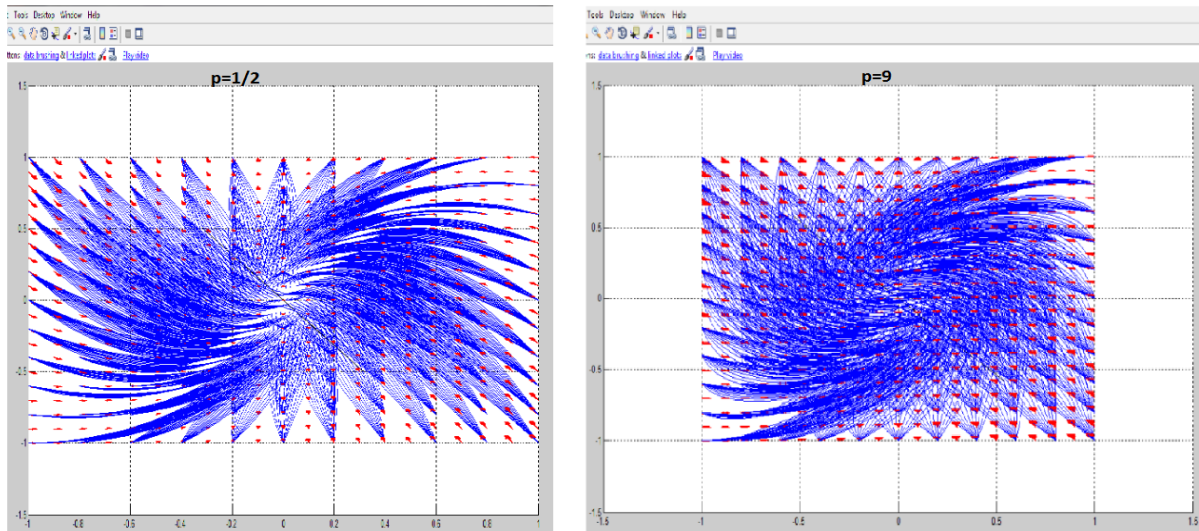


FIGURE 5.4 – Portrait de phase : foyer stable

5.3 Résolution numérique

Dans la plupart des situations biologiques, les interactions considérées sont non linéaires, ce qui conduit à des modèles différentiels généralement difficiles voire impossibles à résoudre de façon analytique. Il est alors très difficile de dériver les solutions de ces systèmes et l'on doit recourir à des « approximations numériques » et c'est l'intérêt de cette partie de ce mémoire.

5.3.1 Modèle déterministe

Il s'agit là d'approcher la solution exacte du modèle de Goodwin par un calcul des valeurs de concentrations des espèces moléculaires (ADN, ARNm, répresseur), pour cela il faut fixer les valeurs de tous les paramètres. Celles-ci étant établies expérimentalement : $k_1 = 0.3$, $k_2 = 0.3$, $k_3 = 0.3$, $k_4 = 0.27$, $k_5 = 0.5$ et $k_6 = 0.2$.

Pour résoudre numériquement le modèle en question on utilise la méthode de Runge-kutta 4 et d'Adams-Bashforth-Moulton.

On commence d'abord par présenter ces deux méthodes :

Runge-kutta 4 : est une méthode d'approximation numérique de solutions d'équations différentielles de la forme : $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Le schéma de RK4 se présente comme suit :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$\text{Où : } l_1 = f(t_n, y_n), l_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{l_1}{2}\right)$$

$$l_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{l_2}{2}\right), l_4 = f(t_n + h, y_n + hl_3).$$

L'idée est que la valeur suivante (y_{n+1}) est approchée par la somme de la valeur actuelle (y_n) et du produit de la taille de l'intervalle (h) par la pente estimée. La pente est obtenue par une moyenne de pentes :

- l_1 : la pente au début de l'intervalle.
- l_2 et l_3 : les pentes au milieu de l'intervalle.
- l_4 : la pente à la fin de l'intervalle.

La méthode de RK4 est une méthode d'ordre 4 ce qui signifie que l'erreur commise est de l'ordre de h^4 .

Adams-Bashforth-Moulton : est une méthode basée sur un schéma à pas multiples contrairement à Runge-Kutta qui n'utilise qu'un pas mais nécessite plusieurs calculs, la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton permet d'alléger les calculs tout en gardant un ordre similaire (l'ordre 4).

Le schéma d'Adams-Bashforth-Moulton (A-B-M) est une combinaison du schéma d'Adams-Bashforth qui est un schéma explicite et du schéma d'Adams-Moulton qui est un schéma implicite afin d'éviter la délicate résolution d'un système implicite de ce dernier et aussi pour obtenir une précision plus meilleure.

Les deux schémas se présentent comme suit :

Prédicteur : "Adams-bashforth" : $y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24}[55f(t_n, y_n) - 59f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, y_{n-3})]$.

Correcteur : "Adams-Moulton" : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9f(t_{n+1}, y_{n+1}^*) + 19f(t_n, y_n) - 5f(t_{n-1}, y_{n-1}) + f(t_{n-2}, y_{n-2})]$.

On passe maintenant à la résolution numérique du modèle de Goodwin par les deux méthodes (pour la méthode d'A-B-M on effectue la correction en un nombre maximal de 10 fois et les valeurs de démarrage seront calculées par RK4) en utilisant les données suivantes :

On fixe l'intervalle de temps : $[a, b] = [0, 100]$, les conditions initiales : $X_0 = 1$, $Y_0 = 1$, $Z_0 = 1$ et la coopérativité $p = 9$ et on fait varier le nombre de points de discrétisation : N .

Le système à résoudre en fixant les paramètres devient :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{0.3}{1 + Z^9} - 0.27X \\ \frac{dY}{dt} = 0.3X - 0.5Y \\ \frac{dZ}{dt} = 0.3Y - 0.2Z \end{cases} \quad (5.4)$$

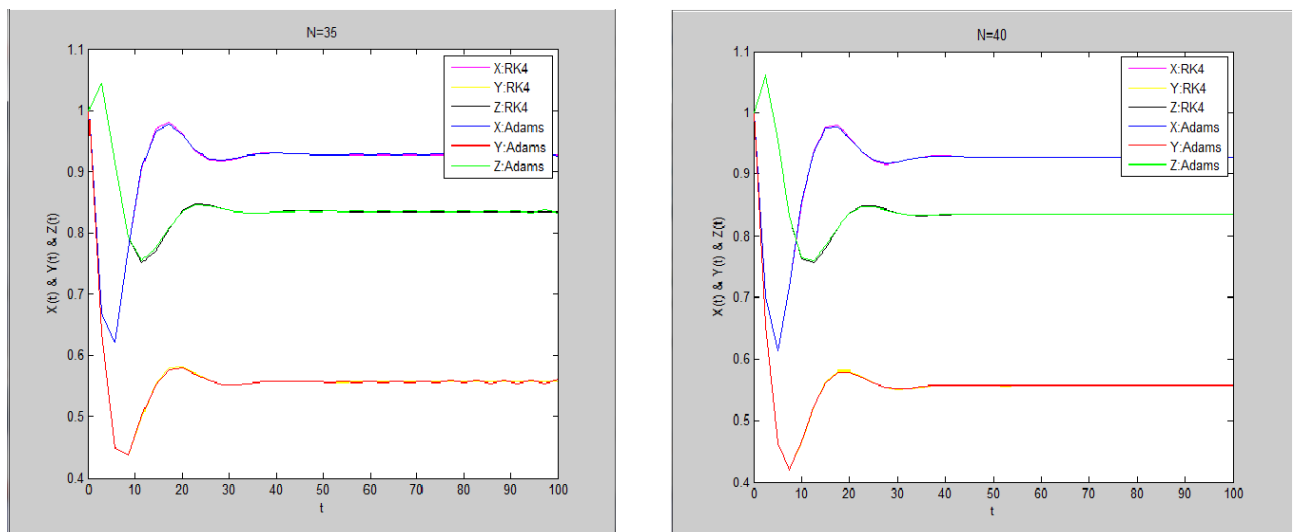


FIGURE 5.5 – Comparaison entre la solution obtenue par la méthode de RK4 et celle obtenue par A-B-M pour $N=35$ et $N=40$

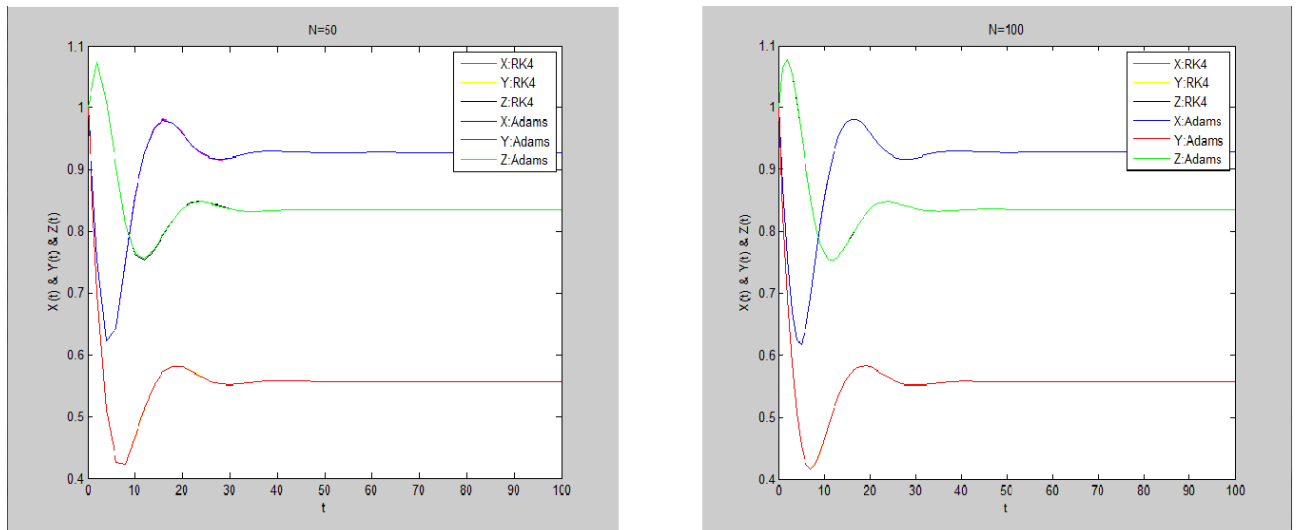


FIGURE 5.6 – Comparaison entre la solution obtenue par la méthode de RK 4 et celle obtenue par A-B-M pour $N=50$ et $N=100$

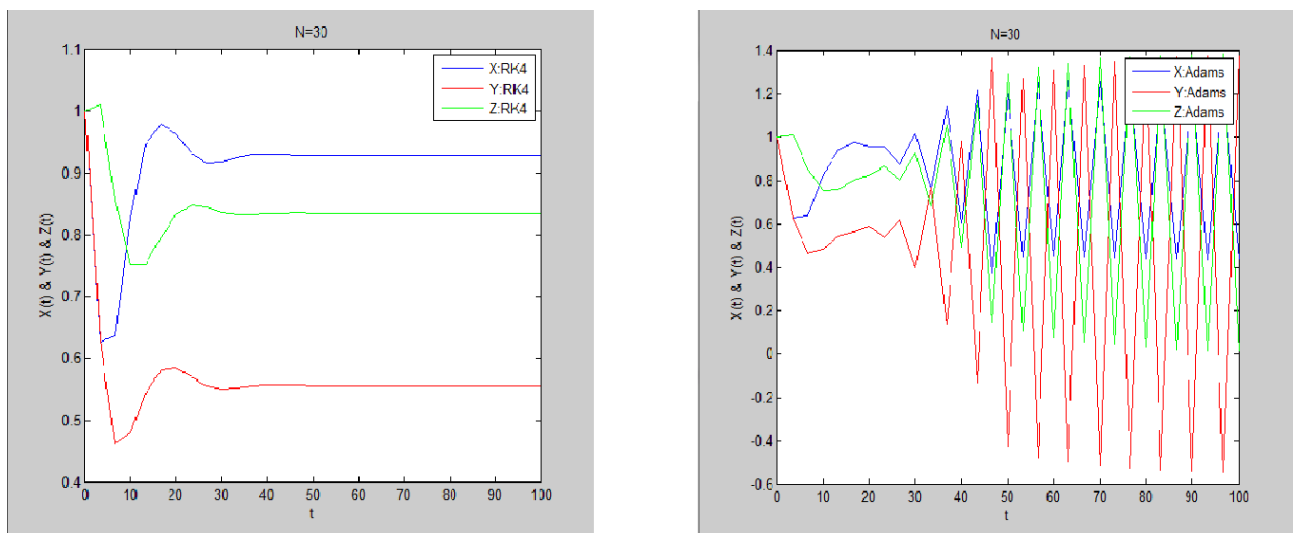


FIGURE 5.7 – La solution obtenue par la méthode de RK 4 (à gauche) et celle obtenue par A-B-M (à droite) pour $N=30$

Interprétation :

- On remarque d'après les figures (5.5) et (5.6) qu'à chaque fois que le nombre de points N augmente i.e le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{N}$ diminue, la différence entre les courbes de la solution approchée par les deux méthodes diminue et ceci vient du fait qu'un petit pas h aide à réduire l'erreur (car les deux méthodes sont convergentes) et donc augmente la précision afin de trouver des solutions numériques qui, à un pas très petit convergent vers la solution exacte et ceci explique le resserrement des courbes lorsque $N = 100$.
- La figure (5.7) montre que la méthode de RK4 reste stable même pour un nombre de points de discrétisation très petit $N = 30$, alors que la méthode d'A-B-M perd sa stabilité pour le même nombre de points de discrétisation.

- On remarque également d'après ces courbes que **le système évolue avec des oscillations amorties vers un état stationnaire stable** ce qui s'accorde avec l'étude théorique de stabilité du modèle vue dans la partie précédente.

Pour voir laquelle des deux méthodes est la plus précise on compare dans la figure (5.8) chacune des solutions obtenues par ces méthodes avec la solution obtenue par le solveur ode45 de Matlab qui donne une solution numérique plus précise basée sur les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4 et 5 :

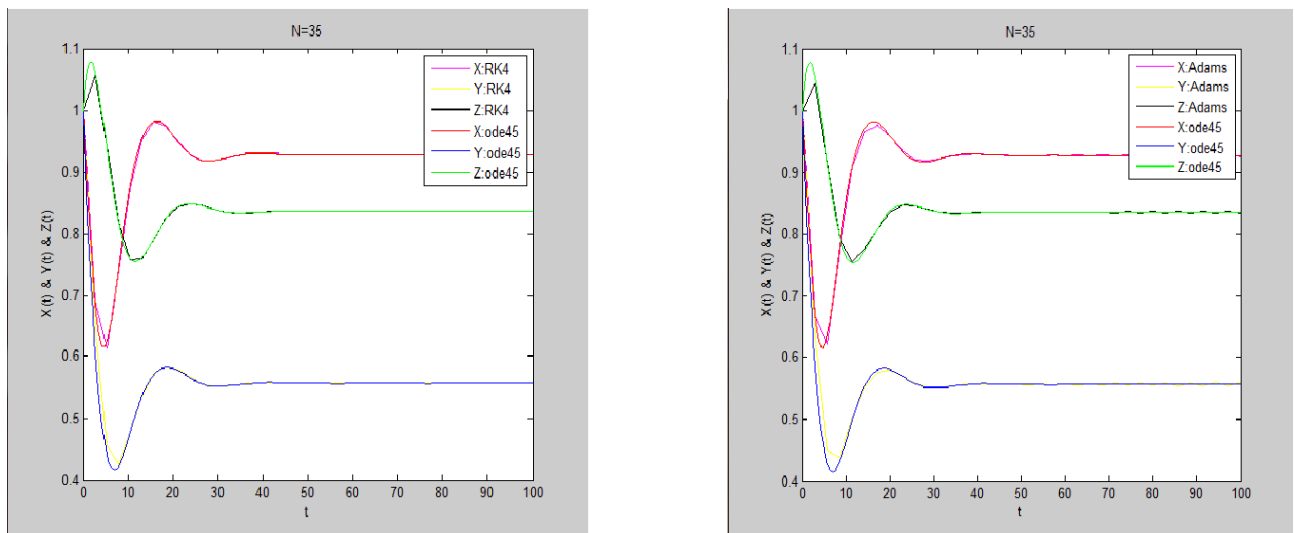


FIGURE 5.8 – Comparaison entre la solution obtenue par RK4 et l'ode45 (à gauche) et celle obtenue par A-B-M et l'ode45 (à droite) pour $N=35$

Conclusion :

La figure (5.8) montre que la courbe de la solution approchée par la méthode de RK4 est un peu plus proche de la solution obtenue par le solveur ode45 si on la compare avec la solution approchée par A-B-M pour le même nombre de points de discrétisation $N = 35$, ce qui implique que RK4 est plus précise qu'A-B-M même s'ils ont le même ordre.

5.3.2 Modèle stochastique

*Le modèle déterministe présuppose que les concentrations des molécules impliquées varient de manière continue et déterministe mais ces considérations ne sont pas toujours vraies, différents types de fluctuations peuvent affecter le déroulement temporel de nombreux processus moléculaires, par exemple le temps nécessaire à la transcription d'un gène. Pour tenir compte de tels effets, on utilise les modèles **stochastiques**.*

Contrairement au modèle déterministe ; dans cette partie, on fixera pas les paramètres du modèle, mais on prendra en compte des incertitudes sur les valeurs de ces paramètres, ces valeurs qui sont obtenues en passant par une approche expérimentale permettant de déterminer un certain nombre de valeurs de X , Y et Z en fonction du temps t , puis en résolvant un problème inverse en utilisant le modèle en question, on arrive à déterminer les valeurs de ces paramètres,

et ce sont ces résultats expérimentaux qui sont la cause de ces incertitudes.

On supposera que ces incertitudes ne dépasseront pas 5% : $k_1 = k_2 = k_3 = 0.3 \pm 0.015$, $k_4 = 0.27 \pm 0.0135$, $k_5 = 0.5 \pm 0.025$ et $k_6 = 0.2 \pm 0.01$. On utilisera pour cela l'approche de **Monte-Carlo**.

Considérons donc $N = 50$ réalisations indépendantes de paramètres aléatoires $k_i(\omega_1), k_i(\omega_2), \dots, k_i(\omega_{50}), \forall i \in \{1, \dots, 6\}$ suivant la loi uniforme.

La méthode de Monte-Carlo consiste à calculer l'espérance des solutions obtenues par RK4 pour les 50 valeurs des paramètres $k_i, \forall i \in \{1, \dots, 6\}$.

Remarque :

Le principe de la méthode est le même quelque soit la loi utilisée, on pourra par exemple utiliser la loi Gaussienne, juste au lieu d'utiliser la fonction "rand()" de la bibliothèque Matlab qui génère des variables aléatoires suivant une loi uniforme on utilisera la fonction "randn()".

On présente sur les figures (5.9) et (5.10) les courbes obtenues en comparant la solution déterministe obtenue par RK4 et l'espérance de la solution stochastique obtenue par Monte-Carlo en gardant les mêmes données utilisées dans le modèle déterministe et en changeant le nombre de points N .

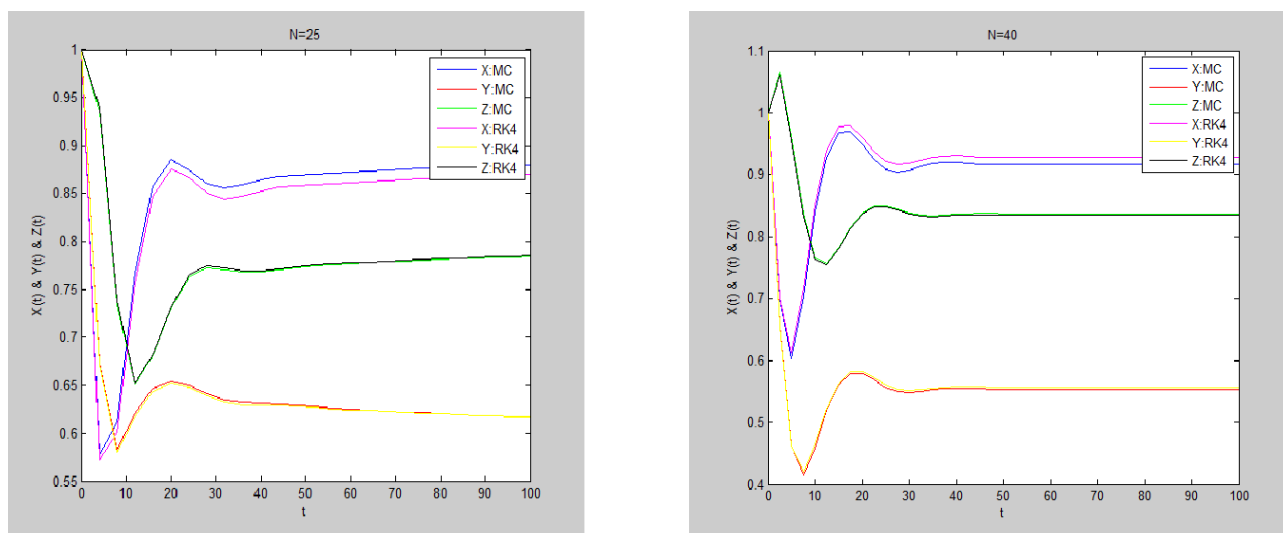


FIGURE 5.9 – Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour $N=25$ et $N=40$

On calcul pour chaque valeur N l'écart relatif "e" entre les deux solutions :

$$e = \frac{\|sol.stochastique - sol.deterministe\|_1}{\|sol.stochastique\|_1}$$

- Pour $N = 25$: $e = 0.0142$.
- Pour $N = 40$: $e = 0.0013$.
- Pour $N = 100$: $e = 6.9429 \times 10^{-4}$.
- Pour $N = 1000$: $e = 5.3587 \times 10^{-4}$.

Conclusion :

L'allure des courbes de concentrations pour les trois espèces moléculaires (représenté par X , Y et Z) en prenant en compte des incertitudes sur les paramètres du modèle (espérance de la

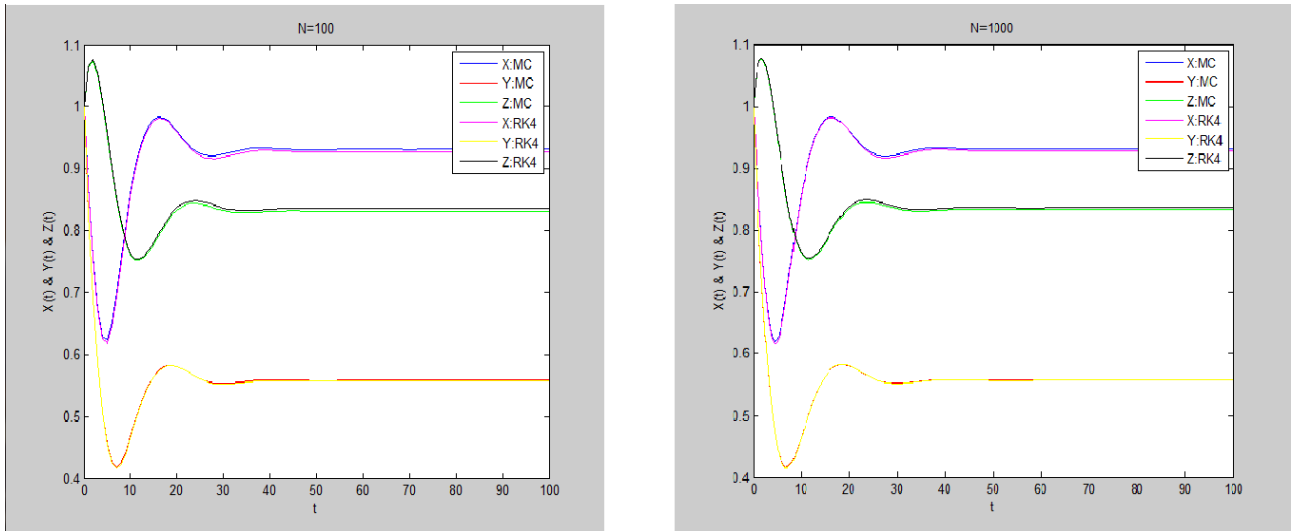


FIGURE 5.10 – Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour $N=100$ et $N=1000$

solution stochastique) ressemble approximativement à celle obtenue en fixant ces paramètres (la solution déterministe).

On peut dire donc que le comportement prédit par le modèle déterministe peut en effet être interprété comme la moyenne des comportements prédits par le modèle stochastique.

Si on prend une incertitude de 10%, on trouve les courbes représentées par les figures (5.11) et (5.12).

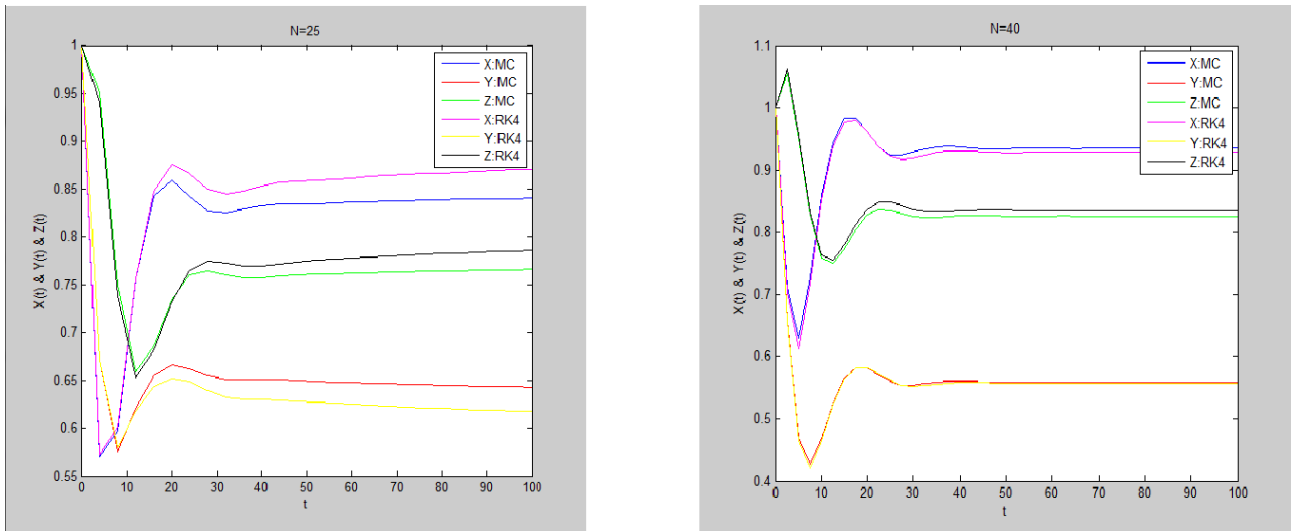


FIGURE 5.11 – Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour $N=25$ et $N=40$

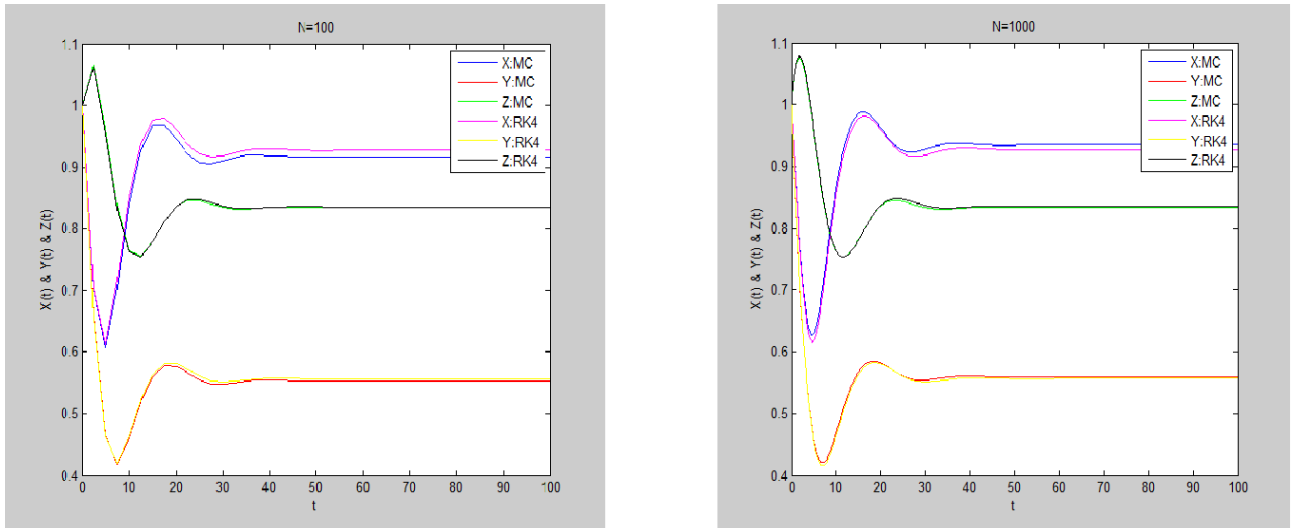


FIGURE 5.12 – Comparaison entre la solution déterministe et la solution stochastique pour $N=100$ et $N=1000$

On calcul pour chaque valeur N l'écart relatif "e" entre les deux solutions :

- Pour $N = 25$: $e = 0.0476$.
- Pour $N = 40$: $e = 0.0052$.
- Pour $N = 100$: $e = 0.0039$.
- Pour $N = 1000$: $e = 0.0020$.

Remarque :

En prenant en compte une incertitude de 10%, l'écart relatif entre la solution déterministe et l'espérance de la solution stochastique augmente par rapport au cas d'une incertitude de 5%, mais malgré ce fait on remarque que la solution stochastique s'approche considérablement de la solution déterministe en diminuant le pas "h".

Conclusion : Le comportement stochastique du modèle de régulation négative de Goodwin suit approximativement le comportement déterministe même pour une incertitude qui arrive jusqu'à 10%.

Conclusion

Au cours de notre étude, nous avons appris que les systèmes dynamiques présentent un outil mathématique qui permet de modéliser des phénomènes en plusieurs domaines, tel que la biologie. Pour cela, on s'est intéressé à l'étude de leur stabilité pour assumer la fiabilité du modèle.

Cette étude sur la stabilité a permis d'introduire différentes trajectoires solutions pour les systèmes linéaires à deux dimensions. Dans le cas de systèmes non linéaires, la notion de stabilité est plus complexe et nécessite l'utilisation de nouvelles méthodes tels que : la linéarisation, la méthode de Lyapunov ...

Un modèle peut être affecté par une variation d'un ou plusieurs paramètres, cette variation fait apparaître des changements brutaux de trajectoires, ces changements qui sont appelés "bifurcations", nous ont permis de comprendre l'évolution du système pour pouvoir contrôler la variation de ses paramètres.

Il est clair que notre étude est loin d'être complète. Il nous semble néanmoins avoir acquis les connaissances essentielles sur la stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcations, mais il reste encore de nouveaux types de bifurcations à étudier tel que la bifurcation cyclique : bifurcation pli, homocline,... De même, ce mémoire nous permettra d'entamer une nouvelle théorie appelée "la théorie du chaos" qui étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales.

Annexe

Le code pour tracer le portrait de phase en dimension 2 sur Matlab

```
figure;  
[x,y]=meshgrid(-1 :.07 :1);  
A=[0,1;-1,0];  
[V,L]=eig(A);  
lambda=diag(L);  
x1p = A(1,1)*x+A(1,2)*y;  
x2p=A(2,1)*x+A(2,2)*y;  
hold on  
quiver(x,y,x1p,x2p,'r')  
grid on  
t=-1 :0.1 :1;  
plot(V(1,1)*t,V(2,1)*t,'k');  
plot(V(1,2)*t,V(2,2)*t,'k');  
f = @(t,y) [A(1,1)*y(1)+ A(1,2)*y(2); A(2,1)*y(1)+ A(2,2)*y(2)];  
for i=-1 :.2 :1  
for j=-1 :.2 :1  
[ts,ys] = ode45(f,-1 :.1 :1,[j i]);  
plot(ys( :,1),ys( :,2),'b');  
end  
end
```

Le code pour tracer le portrait de phase en dimension 3 sur Matlab

```
figure;  
[x,y,z]=meshgrid(-1 :.1 :1);  
A=[-1/2,0,-9/4;1/2,-1/2,0;0,1/2,-1/2];  
[V,L]=eig(A);  
lambda=diag(L);  
x1p =A(1,1)*x+A(1,2)*y+A(1,3)*z;  
x2p=A(2,1)*x+A(2,2)*y+A(2,3)*z;  
x3p=A(3,1)*x+A(3,2)*y+A(3,3)*z;  
hold on  
quiver3(x,y,z,x1p,x2p,x3p,'r')  
grid on  
t=-1 :0.1 :1;  
plot3(V(1,1)*t,V(2,1)*t,V(3,1)*t,'k');  
plot3(V(1,2)*t,V(2,2)*t,V(3,2)*t,'k');  
plot3(V(1,3)*t,V(2,3)*t,V(3,3)*t,'k');  
f = @(t,y) [A(1,1)*y(1)+ A(1,2)*y(2)+A(1,3)*y(3); A(2,1)*y(1)+ A(2,2)*y(2)+A(2,3)*y(3);A(3,1)*y(1)+  
A(3,2)*y(2)+A(3,3)*y(3)];  
for i=-1 :.2 :1  
for j=-1 :.2 :1  
for k=-1 :.2 :1  
[ts,ys] = ode45(f,-1 :.1 :1,[j i k]);  
plot3(ys( :,1),ys( :,2),ys( :,3),'b');  
end  
end
```


end
end

Le code pour tracer la courbe de la solution obtenue par le solveur ode45

```
f=@(t,x)[(0.3/(1+x(3)^9))-0.27*x(1);0.3*x(1)-0.5*x(2);0.3*x(2)-0.2*x(3)];  
[t,xa]=ode45(f,[0 100],[1 1 1]);  
plot(t,xa(:,1),'r');hold on; plot(t,xa(:,2),'b');hold on; plot(t,xa(:,3),'g')
```

Le code pour tracer la courbe de la solution obtenue par RK4 sur Matlab

```
function [x,y,z]=rkutta(a,b,x0,y0,z0,N,f1,f2,f3)  
dt=(b-a)/N;  
x=zeros(1,N);  
y=zeros(1,N);  
z=zeros(1,N);  
x(1)=x0;  
y(1)=y0;  
z(1)=z0;  
for i=2 :N+1  
tn=a+dt*(i-2);  
xn=x(i-1);  
yn=y(i-1);  
zn=z(i-1);  
x1=f1(tn,xn,yn,zn);  
y1=f2(tn,xn,yn,zn);  
z1=f3(tn,xn,yn,zn);  
x2=f1(tn+0.5*dt,xn+0.5*dt*x1,yn+0.5*dt*y1,zn+0.5*dt*z1);  
y2=f2(tn+0.5*dt,xn+0.5*dt*x1,yn+0.5*dt*y1,zn+0.5*dt*z1);  
z2=f3(tn+0.5*dt,xn+0.5*dt*x1,yn+0.5*dt*y1,zn+0.5*dt*z1);  
x3=f1(tn+0.5*dt,xn+0.5*dt*x2,yn+0.5*dt*y2,zn+0.5*dt*z2);  
y3=f2(tn+0.5*dt,xn+0.5*dt*x2,yn+0.5*dt*y2,zn+0.5*dt*z2);  
z3=f3(tn+0.5*dt,xn+0.5*dt*x2,yn+0.5*dt*y2,zn+0.5*dt*z2);  
x4=f1(tn+dt,xn+dt*x3,yn+dt*y3,zn+dt*z3);  
y4=f2(tn+dt,xn+dt*x3,yn+dt*y3,zn+dt*z3);  
z4=f3(tn+dt,xn+dt*x3,yn+dt*y3,zn+dt*z3);  
x(i)=x(i-1)+dt/6*(x1+2*x2+2*x3+x4);  
y(i)=y(i-1)+dt/6*(y1+2*y2+2*y3+y4);  
z(i)=z(i-1)+dt/6*(z1+2*z2+2*z3+z4);  
end  
end
```

Le code pour tracer la courbe de la solution obtenue par A – B – M

```
function [x,y,z]=Adams3(a,b,x0,y0,z0,N,f1,f2,f3)  
dt=(b-a)/N;
```

```

x=zeros(1,N);
y=zeros(1,N);
z=zeros(1,N);
[u,v,w]=rkutta(a,a+3*dt,x0,y0,z0,3,f1,f2,f3);
x(1:4)=u;
y(1:4)=v;
z(1:4)=w;
for i=5:N+1
tn=a+dt*(i-5);
xn=x(i-1);
yn=y(i-1);
zn=z(i-1);
k1=f1(tn,x(i-4),y(i-4),z(i-4));
k2=f1(tn+dt,x(i-3),y(i-3),z(i-3));
k3=f1(tn+2*dt,x(i-2),y(i-2),z(i-2));
k4=f1(tn+3*dt,xn,yn,zn);
g1=f2(tn,x(i-4),y(i-4),z(i-4));
g2=f2(tn+dt,x(i-3),y(i-3),z(i-3));
g3=f2(tn+2*dt,x(i-2),y(i-2),z(i-2));
g4=f2(tn+3*dt,xn,yn,zn);
h1=f3(tn,x(i-4),y(i-4),z(i-4));
h2=f3(tn+dt,x(i-3),y(i-3),z(i-3));
h3=f3(tn+2*dt,x(i-2),y(i-2),z(i-2));
h4=f3(tn+3*dt,xn,yn,zn);
x(i)=xn+(dt/24)*(55*k4-59*k3+37*k2-9*k1);
y(i)=yn+(dt/24)*(55*g4-59*g3+37*g2-9*g1);
z(i)=zn+(dt/24)*(55*h4-59*h3+37*h2-9*h1);
for j=1:10
sx=x(i);
sy=y(i);
sz=z(i);
x(i)=xn+(dt/24)*(9*f1(tn+4*dt,sx,sy,sz)+19*k4-5*k3+k2);
y(i)=yn+(dt/24)*(9*f2(tn+4*dt,sx,sy,sz)+19*g4-5*g3+g2);
z(i)=zn+(dt/24)*(9*f3(tn+4*dt,sx,sy,sz)+19*h4-5*h3+h2);
if (norm(x(i)-sx,Inf)<10-12) && (norm(y(i)-sy,Inf)<10-12) && (norm(z(i)-sz,Inf)<10-12)
break
end
end
end
end

```

Le code pour tracer la courbe de la solution obtenue par Monte – Carlo

```

function [xm,ym,zm]=montecarlo(a,b,x0,y0,z0,N)
xm=zeros(1,N+1);
ym=zeros(1,N+1);
zm=zeros(1,N+1);
M=zeros(3,N+1);
vk1=0.3-0.01+0.02*rand(1,50);
vk2=0.27-0.01+0.02*rand(1,50);
vk3=0.3-0.01+0.02*rand(1,50);
vk4=0.5-0.01+0.02*rand(1,50);

```

```

vk5=0.3-0.01+0.02*rand(1,50);
vk6=0.2-0.01+0.02*rand(1,50);
for i=1 :50
f1=@(t,x,y,z)(vk1(i)/(1+z^9))-vk2(i)*x;
f2=@(t,x,y,z)vk3(i)*x-vk4(i)*y;
f3=@(t,x,y,z)vk5(i)*y-vk6(i)*z;
[x,y,z]=rkutta(a,b,x0,y0,z0,N,f1,f2,f3);
M=[x;y;z];
for j=1 :N+1
xm(j)=xm(j)+M(1,j);
ym(j)=ym(j)+M(2,j);
zm(j)=zm(j)+M(3,j);
end
end
for j=1 :N+1
xm(j)=xm(j)/50;
ym(j)=ym(j)/50;
zm(j)=zm(j)/50;
end
end

```

Bibliographie

- [1] J. BRICMONT. *Introduction à la dynamique non linéaire. Unité de Physique théorique et mathématique.*
- [2] J. CLAIRAMBAULT. *Modélisation dans le domaine biomédical(physiologie et biotechnologies). Introduction à la biologie mathématique.*
- [3] F. CARO, A. POPIER. *Stabilité des équilibres.*
- [4] A. HISTACE. *Stabilité des systèmes.*
- [5] T. DUDOK DE WIT. *Physique non-linéaire.* Université d'Orléans. Janvier 2012.
- [6] G. LAJOIE. *The Hartman-Grobman Theorem and the equivalence of linear systems.*
- [7] H. REINHARD. *Equations différentielles.* Partie 3, chapitre 4.
- [8] C. BENNANI. *Stabilisation et Estimation de l'état des systèmes. Dynamique non linéaire et Application.* Mémoire de Magister.
- [9] S. CHARLES. *Biologie Mathématique et Modélisation (M1 – aMIV).* Chapitre 2 : bifurcations dans \mathbb{R}^2 .
- [10] J. FRANCOIS. *Cycles limites.*
- [11] O. ARINO, M.L. HBID, E. AIT DADS. *Delay differential Equations and Applications.* p :247
- [12] D. THIEFFRY, HIDDE DE JONG. *Modélisation, analyse et simulation des réseaux génétiques.*
- [13] P. RUOFF, M. VINSJEVIK, S. MOHSENZADEH, L. RENSING. *The Goodwin Model : Simulating the Effect of Cycloheximide and Heat Shock on the Sporulation Rhythm of Neurospora crassa.*
- [14] P. RUOFF, M. VINSJEVIK, S. MOHSENZADEH, L. RENSING. *The Goodwin Oscillator : On the Importance of Degradation Reactions in the circadian Clock.*
- [15] J.J. ANAQNOST, C.A. DESOER. *An Elementry Proof of the Routh-Hurwitz Stability Criterion.*
- [16] S.H. STROGATZ. *Nonlinear Dynamics and Chaos,* Westview Press (2000).
- [17] J.K. HALE, H. KOCAK . *Dynamics and Bifurcations.* Springer, 1991.