UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Titre

Algèbre bilinéaire et applications

Présenté par :

- Aymane choukri

Encadré par :

- Pr. Azzeddine EL BARAKA

Soutenu Le 14 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr. Anisse OUADGHIRI
- Pr. Omar SIDKI

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Table des matières

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail. En second lieu, je tiens à remercier mon encadrant Mr . Azzeddine El Baraka, pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail. Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions. Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

INTRODUCTION

En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, une forme bilinéaire est un type particulier d'application qui, à deux vecteurs d'un espace vectoriel chacun (sur un certain corps commutatif, le même pour les deux espaces vectoriels), associe un scalaire (c'est-à-dire un élément de ce corps).

Les formes bilinéaires interviennent dans de nombreux domaines des mathématiques. Elles forment une vaste classe d'outils utilisés pour résoudre des questions de natures très diverses.

L'adjonction d'une forme bilinéaire bien choisie est source de formalisations de géométries. L'exemple le plus célèbre est peut-être celui des espaces euclidiens pour les espaces vectoriels sur le corps de nombres des réels dans le cas de la dimension finie. Cette forme bilinéaire appelée produit scalaire joue alors le même rôle que la forme bilinéaire canonique entre l'espace et son dual, permettant une formalisation plus concrète et plus facile d'accès. Cette partie est traitée au chapitre 1.

Il n'est pas le seul exemple, un équivalent existe pour les nombres complexes. Un autre en dimension infinie existe avec les espaces préhilbertiens comportant un cas particulier essentiel, l'espace de Hilbert. En dimension finie, le choix d'une forme bilinéaire ayant d'autres propriétés permet de construire d'autres géométries. L'espace de Minkowski est construit à l'aide d'une approche de cette nature. Il offre un cadre géométrique à la théorie de la relativité restreinte. Cette partie est traitée au chapitre 2.

L'influence des formes bilinéaires dans la géométrie ne se limite pas à la formalisation de nouveaux espaces. La relation entre certaines surfaces comme les quadriques et les formes bilinéaires est profonde. L'apport des différents outils provenant de l'algèbre linéaire permet une classification générale et pour une dimension quelconque. Cette partie est traitée au chapitre 4.

Chapitre 1

Formes bilinéaires et Formes qudratiques

1.1 Généralités sur les formes bilinéaires

On suppose que le corps de base $\mathbb{k}$ est $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1.1 Défnition d'une forme bilinéaire

Définition 1.1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Une application $b : E \times E \to \mathbb{k}$ est dite forme bilinéaire sur E si pour tout $y \in E$ l'application $x \mapsto b(x, y)$ est linéaire de E dans $\mathbb{k}$ et pour tout $x \in E$ l'application $y \mapsto b(x, y)$ est linéaire de E dans $\mathbb{k}$, c'est à dire vérifiant :*

Pour tous x,$x^{'}$,y,$y^{'} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

1) $b\left(x + x^{'}, y\right) = b\,(x, y) + b\left(x^{'}, y\right)$
2) $b\,(\lambda x, y) = \lambda\, b\,(x, y)$
3) $b\left(x, y + y^{'}\right) = b\,(x, y) + b\left(x, y^{'}\right)$
4) $b\,(x, \lambda y) = \lambda\, b\,(x, y)$

Exemples 1.1.1.1

1) $E = \mathbb{k}$.La multiplication $(x, y) \mapsto xy$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{k} \times \mathbb{k}$.

2) $E = \mathbb{R}^2$.Le produit scalaire usuel

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

3) $E=C([0,1],\mathbb{R})$ .Notons $C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de$[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

L'application

$E\times E \rightarrow \mathbb{R}$

$b:\ (f,g)\mapsto \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ est une forme bilinéaire sur E.

Remarque 1.1.1.1 *L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel sur $\Bbbk$ que l'on note $Bil(E,\Bbbk)$.*

1.1.2 Matrice associée à une forme bilnéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\Bbbk$ muni d'une base $B=(e_1,...,e_n)$ et b une forme bilinéaire sur E .

$$\text{Soit}\quad x,y\in E,\ x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\ y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j,$$

$$\text{alors}\quad b(x,y)=b\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jb(e_i,e_j).$$

Soit la matrice $M_B(b)=(b(e_i,e_j))_{i,j}\in M_n(\Bbbk)$

On a la définition suivante :

Définition 1.1.2.1 *La matrice $M_B(b)=(b(e_i,e_j))_{i,j}$ est appelée la matrice associée à la forme bilinéaire b dans la base B.*

Exemple 1.1.2.1 *Soit $E=\mathbb{R}^3$,et $B=(e_1,e_2,e_3)$ sa base canonique.*

Soit $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$

$(x,y)\ \mapsto 2x_1y_1-3x_2y_2-x_3y_3$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Cherchons la matrice associée à la forme bilinéaire f.

En effet

Ona $e_1=(1,0,0)\,,\ e_2=(0,1,0)\,,\ e_1=(0,0,1)\,.$

On trouve $f(e_1,e_1)=2,\ f(e_1,e_2)=0,\ f(e_1,e_3)=0$: la première ligne de la matrice de f est donc 2 0 0.

De plus, $f(e_2,e_1)=f(e_2,e_3)=f(e_3,e_1)=f(e_3,e_2)=0,\ f(e_2,e_2)=-3,\ f(e_3,e_3)=-1.$

$$\text{Finalement, la matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1.2.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension fine , $B=(e_1,...,e_n)$ une base de E et b une forme bilnéaire sur E. Posons $A=M_B(b)$.*

Alors $\quad b(x,y) = {}^tXAY \quad$ *Où* $\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *sont les matrices respectives des vecteurs x et y dans la base B.*

Preuve :

$$\text{Soit } x,y\in E, \text{ avec } x=\sum_{i=1}^{n} x_i ei \text{ et } y=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

$$\text{On a } b(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1} b(e_i,e_j)\,y_j\right)$$

$$\text{et avec : } \qquad AY = \left(\sum_{j=1} b(e_i,e_j)\,y_j\right)_{1\le i\le n}$$

$$\text{Donc} \qquad {}^t\text{XAY} = {}^t\text{X(AY)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1} b(e_i,e_j)\,y_j\right).$$

D'où le résultat.

Corollaire 1.1.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*

(i) Soit B une base de E. L'application $\phi : b \mapsto M_B(b)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Bil(E,\mathbb{k})$ dans $M_n(\mathbb{k})$.

(ii) $\quad dim(Bil(E,K)) = n^2$.

Preuve. (i) Soient $b,b^{'}\in Bil(E,\mathbb{k})$ *et* $\lambda,\mu\in\mathbb{k}$.Vérifions que ϕ est linéaire

On a $M_B\left(\lambda b+\mu b^{'}\right)=\left(\left(\lambda b+\mu b^{'}\right)(e_i,e_j)\right)_{i,j}=\lambda\left(b(e_i,e_j)\right)_{i,j}+\mu\left(b^{'}(e_i,e_j)\right)_{i,j}$.
D'où $\phi\left(\lambda b+\mu b^{'}\right)=\lambda\phi(b)+\mu\phi\left(b^{'}\right)$.

Si $\phi(b)=0$ alors b est nulle $\left(b(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(e_i,e_j)=0\right)$.Donc ϕ est injectif.

On vérifie aisément que pour tout $A\in M_n(\mathbb{k})$, l'application b définie sur $E\times E$ par b$(x,y)={}^t$XAY , où X $=M_B(x)$ et Y $=M_B(y)$, appartient à $Bil(E,\mathbb{k})$ et que $M_B(b)=A$.Il en résulte que ϕ est surjectif.

(ii) On a dim $M_n(\mathbb{k})=n^2$, donc d'après l'assertion (i) $\; dim(Bil(E,K))=n^2$.

1.1.3 Changement de base

Théorème 1.1.3.1 *Soient $B=(e_1,...,e_n)$ et $B'=\left(e_1',...,e_n'\right)$ deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soit b une forme bilinéaire sur E.Soit $M_B(b)=(b(e_i,e_j))_{i,j=1...,n}$ la matrice de b dans la base B et $N_{B'}(b)=\left(b\left(e_i',e_j'\right)\right)_{i,j=1...,n}$ la matrice de b dans la base B'.*

Alors $\quad N={}^tPMP$

Preuve Soient $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i=\sum_{j=1}^{n}x_j'e_j'$, $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i=\sum_{j=1}^{n}y_j'e_j'$ deux vecteurs de E

et X,Y $\left(\text{resp } X',Y'\right)$ les matrices colonnes de leurs coordonnées dans B $\left(resp\ B'\right)$
Alors $X=PX'$, $Y=PY'$ (formules de changement de bases).

$$\begin{aligned}
\text{On a } b(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_ib(e_i,e_j)={}^t\mathrm{XMY}={}^t\left(\mathrm{PX}'\right)\mathrm{M}\left(\mathrm{PY}'\right)={}^t\mathrm{X}'{}^t\mathrm{PMPY}' \\
&= {}^t\mathrm{X}'\left({}^t\mathrm{PMP}\right)\mathrm{Y}' \\
\text{Or } b(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i'y_j'b\left(e_i',e_j'\right)={}^t\mathrm{X}'\mathrm{NY}'
\end{aligned}$$

D'où $\qquad \mathrm{N}={}^t\mathrm{PMP}$

1.1.4 Forme bilinéaire et dualité

Soit $b:E\times E\to\Bbbk$ une forme bilinéaire.Pour tout $y\in E$ fixé,

L'application

$$\begin{aligned}
b(.,y):E&\to\Bbbk \\
x&\mapsto b(x,y)
\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\Bbbk$. c'est-à-dire un élément du dual E^*.

Proposition 1.1.4.1 (i) *L'application*

$$\begin{aligned}
\varphi_b:E&\to E^* \\
x&\mapsto b(x,.)
\end{aligned}\qquad \textit{est linéaire.}$$

(ii) *Si E est de dimension finie et $B=(e_1,...,e_n)$ est une base de E.*

Alors la matrice de b dans E est égale à la matrice de $\varphi_b:E\to E^*$ où E^* est muni de la base duale $B^*=(e_1^*,..,e_n^*)$.

Preuve.(i) Pour tous $x_1$et x_2 dans E et tous λ et μ dans $\Bbbk$ on a, pour tout $y \in E$:

$$\varphi_b(\lambda x_1 + \mu x_2)(y) = b(\lambda x_1 + \mu x_2,\, y) = \lambda b(x_1, y) + \mu b(x_2, y) = \lambda\varphi_b(x_1)(y) + \mu\varphi_b(x_2)(y)$$

$$= (\lambda\varphi_b(x_1) + \mu\varphi_b(x_2))(y).$$

D'où $\varphi_b(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda\varphi_b(x_1) + \mu\varphi_b(x_2)$. Donc φ_b est linéaire.

(ii) Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $B^* = (e_1^*, .., e_n^*)$ sa base duale de E^* définit par :

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, e_j^*(x) = x_j \left(e_j^* \text{ est une forme linéaire sur } E\right)$$

On a : $\forall x \in E,\ \varphi_b(e_j)(x) = b(.,e_j)(x) = b(x, e_j) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i b(e_i, e_j) e_j^*$

Montrons que $\varphi_b(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_j)$

On a $\forall x \in E$ $\left(\sum_{i=1} b(e_i, e_j) e_i^*\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_j) e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_j) x_i = \varphi_b(e_j)(x)$

Donc $\varphi_b(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_j) e_i^*$

On déduit que la matrice de φ_b, quand on choisit $(e_1, ..., e_n)$ base de E et $(e_1^*, ..., e_n^*)$ base de E^*,c'est la matrice $(b(e_i, e_j))_{i,j}$ de la forme bilinéaire b dans $(e_1, ..., e_n)$.

Remarque 1.1.4.1 *De même , l'application*

$$\begin{aligned} \psi_b : E &\to E^* \\ y &\mapsto b(.,y) \qquad \text{est linéaire.} \end{aligned}$$

Et la matrice de b dans E est égale aussi la matrice de $\psi_b : E \to E^*$.

1.1.5 Rang d'une forme bilinéaire

Définition 1.1.5.1 *Le rang d'une forme bilniéaire b sur un espace vectoriel de dimension finie E est le rang de la matrice $M_B(b)$ de cette forme dans toute base de E.*

Exemple 1.1.5.1 *Soit* $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_2 + x_2y_3 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1$$

est une forme bilnéaire sur $\mathbb{R}^3$,et soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrons que le $rg\,(b) = 3$.Soit $\mathrm{M}_B\,(b)$ la matrice associeé à cette forme qui s'écrit se forme :

$$\mathrm{M}_B\,(b) = \begin{pmatrix} b\,(e_1, e_1) & b\,(e_1, e_2) & b\,(e_1, e_3) \\ b\,(e_2, e_1) & b\,(e_2, e_2) & b\,(e_2, e_3) \\ b\,(e_3, e_1) & b\,(e_3, e_2) & b\,(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a d'aprés la défintion le $rg\,(b) = rg\,(M_B\,(b))$ .Donc calculons le rg de la matrice $M_B\,(b)$ par la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3^{'} = L_3 + 2L_1 \end{matrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3^{''} = L_3^{'} + L_2 \end{matrix}$$

Or $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3.$ D'où $rg\,(b) = 3$.

Théorème 1.1.5.1 *Le rang de la matrice d'une forme bilinéaire ne dépend pas de la base choisie.*

Preuve. Soit n, m, p et ^{t}p les endomorphisme de E de matrices N, M, P, ^{t}P dans une base choisie. p et ^{t}p sont des automorphismes de E car det P = det ^{t}P $\neq 0$.
On a $rg\ N = \dim n\,(E) = \dim\,({}^t\mathrm{pmp}\,(E)) = \dim\,({}^t\mathrm{pm}\,(E)) = \dim\,(m\,(E)) = rg\ m.$
Donc $$rang\ N = rang\ M.$$

1.2 Formes bilinéaires symétriques

Définition 1.2.0.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, et soit b une forme bilinéaire sur E.*

1) On dit que b est symétrique si on a :
$\forall x, y \in E \quad b\,(x, y) = b\,(y, x)\,.$

2) On dit que b est anti-symétrique si on a :
$\forall x, y \in E\ b\,(x, y) = -b\,(y, x)$

3) On dit que b est alternée si on a :
$\forall x \in E\ b\,(x, x) = 0.$

Exemples 1.2.0.1 *1) $E = \mathbb{R}^2$.L'application*

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{avec } X = (x_1, x_2) \text{ et } Y = (y_1, y_2)$$
$$(X, Y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$$

est une forme bilinéaire symétrique, sur E. Vérifions la symétrie.En effet,

On a $b(Y, X) = y_1x_1 + y_2x_2 = x_1y_1 + x_2y_2 = b(X, Y)$.Donc cette forme est symétrique

2) $E = M_n(\mathbb{R})$. L'application

$$b : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(A, B) \mapsto Trace(AB)$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

3) $E = \mathbb{R}[X]$. L'application

$$b : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)\, Q(t)\; dt$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E.

4) $E = \mathbb{R}^2$.L'application

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{où } x = (x_1, x_2) \text{ et } y = (y_1, y_2).$$
$$(x, y) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2 - x_1y_1 + x_2y_2$$

est une forme bilinéaire altérnée. Vérifions.

On a pour tout $x \in E$ $b(x, x) = x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$.Donc cette forme bilinéaire est altérnée.

Proposition 1.2.0.1 *Soient E un espace vectoriel de dimention finie, Posons $A = M_B(b)$. La forme bilnéaire b est symétrique si et seulement si la matrice A est symétrique (${}^tA = A$).*

Preuve Si b est symétrique on a $a_{ij} = b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = a_{ji}$. Donc ${}^tA = A$.
Réciproquement supposons que A soit symétrique . Pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a $b(y, x) = {}^t$YAX. Or la matrice ^{t}XAY$\in M_{1,1}(\mathbb{k})$ est égale à sa transposée (elle ne possède qu'un seul coefficient).
D'où $b(y, x) = {}^t\mathrm{YAX} = {}^t({}^tYAX) = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{A}{}^t({}^t\mathrm{Y}) = {}^t\mathrm{XAY} = b(x, y)$.

Remarque 1.2.0.1 *L' ensemble des formes bilinéaires symétrique noté $BS(E, \mathbb{k})$ est un sous-espace vectoriel de $Bil(E, \mathbb{k})$.*

Proposition 1.2.0.2

(i) Soit B une base de E. L'application $\phi' : b \mapsto M_B(b)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $BS(E, \mathbb{k})$ sur l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n symétriques *à* éléments dans $\mathbb{k}$, *noté* $S_n(\mathbb{k})$

(ii) $\dim\left(BS\left(E,\Bbbk\right)\right)=\frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve.(i) on a $BS\left(E,\Bbbk\right)$ est un sous-espace vectoriel de $Bil\left(E,\Bbbk\right)$ .et on sait que $S_n\left(\Bbbk\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n\left(\Bbbk\right)$ .Donc d'après le corolaire1.1.2.1 ϕ'est la réstriction de ϕ à $BS\left(E,\Bbbk\right)$ et comme ϕ est linéaire et injectif alors ϕ'l'est aussi.On vérifie aisément que pour tout $A\in S_n\left(\Bbbk\right)$, l'application f définie sur $E\times E$ par $f\left(x,y\right)={}^t\mathrm{XAY}$, où $\mathrm{X}=\mathrm{M}_B(x)$ et $\mathrm{Y}=\mathrm{M}_B\ (y)$,appartient à $BS\left(E,\Bbbk\right)$ et que

$\mathrm{M}_B(f)=\mathrm{A}$.Il en résulte que ϕ' est surjectif.
(ii) On a dim $S_n(\Bbbk)=\frac{n(n+1)}{2}$, donc d'après l'assertion (i) $\dim(BS(E,K))=\frac{n(n+1)}{2}$.

1.2.1 Formes quadratiques

Lemme 1.2.1.1 *Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un $\Bbbk-$espace vectoriel E. Pour tout $x\in E$, posons $q\left(x\right)=b\left(x,x\right)$. Alors on a :*

(i) $\forall x\in E\ \ \forall\lambda\in\Bbbk\ \ q\left(\lambda x\right)=\lambda^2q\left(x\right).$
(ii) $\forall\left(x,y\right)\in E^2\ b\left(x,y\right)=\frac{1}{2}\left(q\left(x+y\right)-q\left(x\right)-q\left(y\right)\right)=\frac{1}{4}\left(q\left(x+y\right)-q\left(x-y\right)\right).$

Preuve. (i) Soit $x\in E$, on a $\forall\lambda\in\Bbbk\ q\left(\lambda x\right)=b\left(\lambda x,\lambda x\right)=\lambda b\left(x,\lambda x\right)=\lambda^2q\left(x\right).$
(ii) On a:
$q\left(x+y\right)=b\left(x+y,x+y\right)=b\left(x,x\right)+b\left(x,y\right)+b\left(y,x\right)+b\left(y,y\right)=q\left(x\right)+q\left(y\right)+2b\left(x,y\right).$
En remplaçant y par $-y$ on trouve :
$q\left(x-y\right)=q\left(x\right)+q\left(-y\right)+2b\left(x,-y\right)=q\left(x\right)+q\left(y\right)-2b\left(x,y\right).$
D'où le résultat.

Définitions 1.2.1.1 *Soit b une forme bilinéaire symétrique sur un $\Bbbk$-espace vectoriel E.*

1) On appelle forme quadratique associée à b l'application de E dans $\Bbbk$, notée q_b, définie par $\mathrm{q}_b\left(x\right)=b\left(x,x\right)$, pour tout $x\in E$.
2) Une application q de E dans $\Bbbk$ est une forme quadratique s'il existe b, forme bilinéaire symétrique sur E telle que $q=q_b$.

Notation : On note $Q\left(E\right)$ l' ensemble des formes qudratiques sur E.

Remarques 1.2.1.1

1) Une forme quadratique q n'est pas linéaire, car on a $q\left(\lambda x\right)=\lambda^2q\left(x\right).$
2) L'ensemble $Q\left(E\right)$ est un espace vectoriel sur $\Bbbk$.

Exemples 1.2.1.1 *1)* $E=\mathbb{R}^3$. *Soit* $x=(x_1,x_2,x_3)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^3$.

L'application
$$\begin{array}{l} q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto x_1^2-x_2^2+x_1x_3-x_1x_2 \end{array}$$
est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

2) $E=\mathbb{R}^n$. Soit $x=(x_1,...,x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $(a_{ij})_{ij}\in M_n(\mathbb{R})$
L'application
$$\begin{array}{l} q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{k} \\ \quad x \mapsto \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_{ij})_{ij}\ x_ix_j \end{array}$$
est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

.

3) $E=\mathbb{R}[X]$. Soit $t\in\mathbb{R}$.
L'application
$$\begin{array}{l} q:\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ \quad P \ \mapsto P(t)^2 \end{array}$$
est une forme quadratique sur E.

4) $E=M_n(\mathbb{k})$.
L'application
$$\begin{array}{l} q:M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k} \\ \quad A \ \mapsto Trace(A^2). \end{array}$$
est une forme quadratique sur E.

Remarque 1.2.1.1 *Soit* $E=\mathbb{R}^3$.*Où* $x=(x_1,x_2,x_3)$ *est un vecteur de* E. *Soit par exemple* $q(x)=x_1^2-x_2^2+x_1x_3-x_1x_2$.*On peut l'ecrire sous la forme :* $q(x)=x_1^2-x_2^2+\frac{1}{2}x_3x_1+\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{1}{2}x_2x_1-\frac{1}{2}x_1x_2$. *q est dite écrite sous forme symétrique.*

Définition 1.2.1.1 *la forme bilinéaire symétrique b admettant q pour forme quadratique associée, est unique , on l'appelle la forme polaire de q .*

Exemple 1.2.1.1 $E=\mathbb{R}^3$.

Soit $q(x)=x_1^2-x_2^2+x_1x_3-x_1x_2$.*Avec* $x=(x_1,x_2,x_3)$.*Calculons la forme polaire B associée à q. On écrit* $q(x)=x_1^2-x_2^2+\frac{1}{2}x_3x_1+\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{1}{2}x_2x_1-\frac{1}{2}x_1x_2$.

Alors sa forme polaire est :

$$b(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\frac{1}{2}x_3y_1+\frac{1}{2}x_1y_3-\frac{1}{2}x_2y_1-\frac{1}{2}x_1y_2.$$

Proposition 1.2.1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimention finie n.*

(i) L'application $\theta: b\mapsto q_b$ est un isomorphisme de $BS(E,\mathbb{k})$ sur $Q(E)$.

(ii) $\dim(Q(E))=\frac{n(n+1)}{2}$.

Preuve .D'après le lemme précédent, l'application $\theta : b \mapsto q_b$ est une bijection entre l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E et l'ensemble des formes quadratiques sur E. vérifions la linéarité de θ.
En effet :
Soient $b, b' \in BS(E, \mathbb{k})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$.et $x \in E$
On a $q_{\lambda b+\mu b'}(x) = \left(\lambda b + \mu b'\right)(x, x) = \lambda b(x, x) + \mu b'(x, x) = \lambda\ q_b(x) + \mu q_{b'}(x)$
$= \lambda q_b + \mu q_{b'}(x)$
Donc $q_{\lambda b+\mu b'} = \lambda q_b + \mu q_{b'}$ *i.e.* $\theta\left(\lambda b + \mu b'\right) = \lambda\theta(b) + \mu\theta\left(b'\right)$
Il en résulte l'assertions (i).
(ii) D'après le corollaire 1.2.0.1 on a $\dim(BS(E, \mathbb{k})) = \frac{n(n+1)}{2}$, et comme l'espace vectoriel $BS(E, \mathbb{k})$ est isomorphe à l'espace vectoriel $Q(E)$, on a $\dim(Q(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 1.2.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, muni d'une base B. On appelle matrice de $q \in Q(E)$ relativement à B la matrice de sa forme polaire b : $M_B(q) = M_B(b)$.*

Remarque 1.2.1.2 *Si E est muni d' une base B, pour tout $x \in E$, On a :*

$$q(x) = {}^t\mathrm{X}\ M_B(q)\ \mathrm{X} \ \text{ avec } \mathrm{X} = M_B(x).$$

Exemples 1.2.1.2 *Soient $E = \mathbb{R}^3$, B une base de E et b une forme bilinéaire symétrique sur E*

telle que $M_B(b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La forme quadratique q associée a pour expression :

$$q(x) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

Définition 1.2.1.3 *Un polynôme P à n variables à coefficients réels est dit homogène de degré 2 s'il s' écrit sous la forme :*

$$P(X_1, ..., X_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_iX_j\ ,\ \ a_{ij}\ \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.2.1.1 *Une application q de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si et seulement si elle s'exprime à l'aide d'une polynôme homogène de degré 2 en fonction des coordonnés $(x_1, ..., x_n)$ du vecteur $x \in E$ dans la base $B = (e_1, ..., e_n)$.*

Preuve. Soit B une base de E.

$\Longrightarrow$) Si q une forme quadratique de matrice $M_B(q) = (a_{ij})_{i,j} \in BS(E, \Bbbk)$,

$$\text{alors }, q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i \prec j} a_{ij}\, x_i x_j$$

Donc q est un polymôme homogéne de degré 2 en $(x_1, ..., x_n)$.

$\Longleftarrow$) Soit $q : E \to \Bbbk$ qui s'exprime comme un polynôme homogène de degré 2

$$\text{c'est-à-dire : } q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i^2 + 2 \sum_{i \prec j} b_{ij} x_i x_j\ ,\ b_i\ ,\ b_{ij} \in \Bbbk$$

Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ la matrice symétrique définie par : $\begin{cases} a_{ii} = b_i\ ,\ i = 1, ..., n \\ a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} b_{ij}\ ,\ i \neq j \end{cases}$.

$$\text{Alors } {}^t\text{XAX} = \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i^2 + 2 \sum_{i \prec j} b_{ij} x_i x_j \quad .$$

Soit b la forme bilinéaire symétrique associée à A dans la base B, alors $q(x) = b(x, x)$.
Donc q une forme quadratique sur E.
On a comme remarque :

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i y_i + \sum_{i \prec j} b_{ij} x_i y_j$$

On passe de $q(x)$ à $b(x, y)$ en remplaçant x_i^2 par $x_i y_i$ et $2x_i x_j$ par $x_i y_j$.

1.3 Orthogonalité

Définitions 1.3.0.2 *Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel , q une forme quadratique sur E et b sa forme polaire.*

1) On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux pour q (ou pour b) si $b(x, y) = 0$. On note $x \perp y$

2) On dit qu'une famille $(x_1, ..., x_n)$ de E est orthogonale pour q si pour tout couple (i, j) avec i $\neq$ j , les vecteurs x_i et x_j sont orthogonaux pour q.

3) On dit que deux parties A et B sont orthogonales pour q si on a $b(x, y) = 0$, pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.

4) Pour toute partie A de E on appelle orthogonal de A pour q, l'ensemble, noté $A^{\perp}$ des vecteurs de E orthogonaux à A. On a donc : $A^{\perp} = \{ x \in E\,; \forall y \in A\ b(x, y) = 0\}$.On utilisera aussi la locution q-orthogonal(ou même simplement orthogonal) à la place de orthogonal pour q.

Proposition 1.3.0.2 *Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et q une forme quadratique sur E.*

(i) Pour toute partie A de E, $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) $\forall (A, B) \in (P(E))^2\ A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

(iii) $\forall \in A \in P(E)\ \ A^{\perp} = (\text{Vect}(A))^{\perp}$.

(iv) $\{0\}^{\perp} = E$.

(v) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F \subset F^{\perp\perp}$.

Preuve. Soit b la forme polaire de q.
(i) Clairement 0 appartient à $A^{\perp}$. Soient x et y dans $A^{\perp}$, λ et μ dans $\mathbb{k}$.
Pour tout $a \in A$, on a $b(\lambda x + \mu y, a) = \lambda b(x, a) + \mu b(y, a) = 0$.
Donc $\lambda x + \mu y$ appartient à $A^{\perp}$.
(ii) Soit $y \in B^{\perp}$. Pour tout $a \in A$, on a $b(y, a) = 0$ car $a \in B\,(A \subset B)$. Donc $y \in A^{\perp}$.
(iii) D'aprés l'assertion précédente, l'inclusion $A \subset Vect(A)$, implique $(Vect(A))^{\perp} \subset A^{\perp}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit x $\in A^{\perp}$.Tout vecteur $y \in Vect(A)$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de A, c'est-à-dire qu'il existe $a_1, ..., a_n$ dans A et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans $\mathbb{k}$ tel que :

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i. \\ \text{D'où } b(x, y) &= b\left(x, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b(x_i, a_i) = 0. \text{ Donc } x \in\ (Vect(A))^{\perp}. \end{aligned}$$

(iv) Pour tout $x \in E$, on a $b(x, 0) = 0$ par linéarité de b par rapport à la deuxième variable.

(v) Pour tout $x \in F$ et pour tout $y \in F^{\perp}$, on a $b(x, y) = 0$. Donc $x \in F^{\perp\perp}$.

Définition 1.3.0.4 *Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et b sa forme polaire.*

1) On appelle noyau de q (ou de b), noté $N(q)$, l'orthogonal de E pour q. On a donc :
$$N(q) = E^{\perp} = \{\ y \in E\ ;\ \forall x \in E \quad b\,(x, y) = 0\}.$$

2) On dit que q (ou b) est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$ $\left(E^{\perp} = \{0\}\right)$ dans le cas contraire $\left(E^{\perp} \neq \{0\}\right)$ on dit que q (ou b) est dégénérée.

3) On dit qu'un vecteur $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$.

4) On appelle cône isotrope de q, l'ensemble, noté $C(q)$, des vecteurs isotropes pour q

5) On dit que q (ou b) est définie si $C(q) = \{0\}$.

Exemples 1.3.0.3 *1) Soient $E = R^3$ et q une forme qudratique sur E .*

Soit $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
Alors $b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ est le produit scalaire usuel.
On a $N(q) = \{0\}$. Le cône isotrope $C(q)$ est réduit à $\{0\}$. La forme quadratique q est non dégénérée et définie.

2) Soient $E = R^2$ et q une forme qudratique sur E .

Soit $q((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2$. Alors $b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$, d'où $N(q) = \{0\}$. La forme quadratique est non dégénérée. Le cône isotrope C(q) est la réunion de la droite $\triangle$ d'équation $x_1 - x_2 = 0$ et de la droite $\triangle'$ d'équation $x_1 + x_2 = 0$. La forme quadratique q est non définie.

Remarque 1.3.0.3 *On a évidemment $N(q) \subset C(q)$, mais l'inclusion peut-être stricte $(Exemple\,(1.3.0.3), 2))$. De plus on remarque que $C(q)$ n'est pas en général un sous-espace vectoriel.*

Définition 1.3.0.5 *Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E.* $rg\,(q) = \dim\,(E) - \dim\,(N(q))\,.$

Théorème 1.3.0.2 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur E. Soient B une base de E et $A = M_B(q)$.*

(i) Soient $x \in E$ et $X = M_B(x)$. Alors $x \in N(q) \Longleftrightarrow AX = 0$.

(ii) $rang(q) = rang(A)$.

(iii) q est non dégénérée si et seulement si $det A \neq 0$.

Preuve.*Soient* $B = (e_1, ..., e_n)$ *et* $x \in E$, avec $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$.

(i) Par bilinéarité de b forme polaire de q, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in N(q) &\Longleftrightarrow \forall i \in \{1, 2..., n\} \quad b(e_i, x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, 2..., n\} \ \sum_{j=1}^{n} x_j b(e_i, e_j) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, 2..., n\} \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad AX = 0 \end{aligned}$$

(ii) D'après l'assertion précédente et le théorème du $rang$, on a :

$$dim(N(q)) = dim(Ker(A)) = dim(E) - rang(A).$$

D'où $\qquad rang(q) = dim(E) - dim(N(q)) = rang(A).$

(iii) q est non dégénérée si et seulement si $dim(N(q)) = 0$, autrement dit, si et seulement si $rg(A) = n$,ce qui est équivalent à $det A \neq 0$.

1.3.1 Formes non dégénérées

Théorème 1.3.1.1 *Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E de dimension finie.*

L'application

$$\begin{aligned} \varphi_b : E &\to E^* \\ x &\mapsto b(x, .) \end{aligned} \qquad \text{est un isomorphisme.}$$

Preuve. Pour tous $x_1$et x_2 dans E et tous λ et μ dans $\mathbb{k}$ on a, pour tout $y \in E$:

$$\begin{aligned} \varphi_b(\lambda x_1 + \mu x_2)(y) &= b(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda b(x_1, y) + \mu b(x_2, y) = \lambda \varphi_b(x_1)(y) + \mu \varphi_b(x_2)(y) \\ &= (\lambda \varphi_b(x_1) + \mu \varphi_b(x_2))(y). \end{aligned}$$

D'où $\varphi_b(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \varphi_b(x_1) + \mu \varphi_b(x_2)$. Donc φ_b est linéaire.
Montrons que φ_b est injective. Soit $x \in E$ tel que $\varphi_b(x) = 0$. Alors pour tout $y \in E$, on a $\varphi_b(x)(y) = b(x, y) = 0$. Par conséquent $x \in N(q)$ qui est réduit à $\{0\}$ car b est non dégénérée . Donc $x = 0$.
Comme $dim(E^*) = dim(E)$, l'application linéaire φ_b injectivede E dans E^* est aussi surjective, c'est donc un isomorphisme.

Corollaire 1.3.1.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique non dégénérée sur E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*

(*i*) $dim(F) + dim(F^{\perp}) = dim(E)$.

(*ii*) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Preuve. Reprenons les notations du théorème précédent.
(*i*) Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F,que nous complétons en une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E.Désignons par $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale de B.Soit $x \in E$, la forme linéaire $\varphi_b(x) = b(x, .)$ se décompose en :

$$\varphi_b(x) = \sum_{i=1}^{n} b(x, .)(e_i)\, e_i^* = \sum_{i=1}^{n} b(x, e_i)\, e_i^*.$$

Comme F = Vect$(e_1, ..., e_p)$, le vecteur x est q-orthogonal à F si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2, ...p\}$, $b(x, e_i) = 0$.C'est-à-dire : $x \in F^{\perp} \Longleftrightarrow \varphi_b(x) \in Vect\left(e_{p+1}^*, ..., e_n^*\right)$. D'où : $\varphi_b\left(F^{\perp}\right) = Vect\left(e_{p+1}^*, ..., e_n^*\right)$ .comme φ_b est un isomorphisme, on déduit
$dim(F^{\perp}) = dim(\varphi_b\left(F^{\perp}\right)) = dim\,\left(Vect\left(e_{p+1}^*, ..., e_n^*\right)\right) = n - p = dim(E) - dim(F)$.

(*ii*) On a déjà prouvé que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Comme nous sommes en dimension finie, il suffi de montrer que ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension pour obtenir l'égalité. Or
$dim((F^{\perp})^{\perp}) = dim(E) - dim(F^{\perp}) = dim(E) - (dim(E) - dim(F)) = dim(F)$

Remarque 1.3.1.1 *En général F et $F^{\perp}$ne sont pas supplémentaires $\left(F \cap F^{\perp} \neq \{0\}\right)$. Reprenons l'exemple 2) de 2.3.4 : $E = \mathbb{R}^2$ et q telle que $q((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_2^2$,et soit $F = \mathbb{R}(1, 1)$. Alors (x_1, x_2) appartient à $F^{\perp}$ si et seulement s'il est q-orthogonal à $(1, 1)$ c'est -à-dire si $x_1 - x_2 = 0$. Donc $F^{\perp} = F$.*

Définition 1.3.1.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .*

♦ On dit que F est isotrope si $F \cap F^{\perp} \neq \{0\}$.
♦ On dit que F est totalement isotrope si $F \subseteq F^{\perp}$.

Théorème 1.3.1.2 *Si F est non isotrope$\left(i.e\ F \cap F^{\perp} = \{0\}\right)$ alors $F \oplus F^{\perp} = E$.*

Preuve. $*$ Si q est non dégénérée alors d'aprés le corolaire 1.3.1.1 on a:
$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E = n$. Or $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim\left(F \oplus F^{\perp}\right)$ donc $F \oplus F^{\perp} = E$.
$*$ Cas général : Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de F qu'on prolonge en une base $(e_1, ..., e_n)$

de E.

$$\text{Soit } y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in F^{\perp} \Longleftrightarrow b(e_i, y) = 0 \ \forall i \in \{1, ..., p\} \Longleftrightarrow b\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} b(e_i, e_j)\, y_i = 0 \ \forall i \in \{1, ..., p\}.$$

Donc on a un systeme de p équations à n inconnues $(p \leq n)$ linéaire et homogène.
Soit r le rang de la matrice $(b(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq p\ ,\ 1 \leq j \leq n}$. Les variables principales $y_1, ..., y_r$et les autres non principales $y_{r+1}, ..., y_n$ (arbitraires) .

$$\text{On a alors (1) } \forall j \in \{1, ..., r\},\ y = \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_{jk}\ y_{k+r},\ \text{ où } \lambda_{jk} \in \mathbb{k};\ \text{ d'où :}$$

$$y \in F^{\perp} \Longleftrightarrow y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \text{ et les } y_j \text{ vérifiant (1) .}$$

$$\Longleftrightarrow y = \sum_{j=1}^{r} y_j e_j + \sum_{k=1}^{n-r} y_{k+r} e_{k+r} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n-r} \lambda_{jk}\ y_{k+r}\right) e_j + \sum_{k=1}^{n-r} y_{k+r} e_{k+r}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-r} y_{k+r} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_{jk}\ y_j + e_{k+r}\right) = \sum_{k=1}^{n-r} y_{k+r}\ v_k \text{ ,où les } y_{k+r}$$

sont arbitraires et v_k bien détérminées.
$*$ les $(v_1, ..., v_{n-r})$ engendrent $F^{\perp}$ et sont libres donc c'est une base de $F^{\perp}$, et $\dim F^{\perp} = n - r$.Or $r \leq p \leq n$, donc $\dim F^{\perp} \geq n - p$.
On a $\dim F \oplus F^{\perp} = p + n - r \geq p + n - p = n$.d'autre part $\dim F \oplus F^{\perp} \leq n$ alors $\dim F \oplus F^{\perp} = n$. D'où $F \oplus F^{\perp} = E$.

1.3.2 Bases orthogonales

Définitions 1.3.2.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E.*

1) On dit qu'une base $B = (e_1, ..., e_n)$ est orthogonale pour q si $b(e_i, e_j) = 0\ \forall\ i \neq j$.

2) On dit qu'une base $B = (e_1, ..., e_n)$ est orthonormale pour q si $b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.
Autrement dit : $\begin{cases} b(e_i, e_j) = 1\ \forall i = j. \\ b(e_i, e_j) = 0\ \forall i \neq j. \end{cases}$

Proposition 1.3.2.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme qudratique q , $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale. Les conditons suivantes sont équivalentes :*

(i) B est une base q-orthogonale .

(ii) $M_B(q)$ est diagonale .

(iii) q est combinaison linéaire des carrés des formes linéaires e_i^*.

Preuve. Soit b la forme polaire de q.
$(i) \Longrightarrow (ii)$ Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, posons $a_i = q(e_i) = b(e_i, e_i)$. Par hypothése, pour $i \neq j$,

on a $b(e_i, e_j) = 0$.Il en résulte que $M_B(q) = M_B(b) = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Par hypothése $M_B(q) = Diag(a_1, ..., a_n)$ .Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E,

on a $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i (e_i^*)^2 (x)$, car $x_i = e_i^*(x)$; d'ou $q = \sum_{i=1}^{n} a_i (e_i^*)^2$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ si $q = \sum_{k=1}^{n} a_k (e_k^*)^2$, alors sa forme polaire b est définie , pour tout $(x, y) \in E^2$

par $b(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k^*(x) e_k^*(y)$ .Par conséquent , si $i \neq j$ on a :

$$b(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k^*(e_i) e_k^*(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{ki} \delta_{kj} = 0.$$ la base B est donc $q - orthogonale$.

Remarque 1.3.2.1 *Si B est une base q-orthogonale, l'expression de q dans cette base*

est simple : $q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$

Le noyau de q est engendré par les vecteurs e_i tels que $a_i = 0$ et le $rang$ q est le nombre de a_i non nuls.

Corollaire 1.3.2.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q , $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ la base duale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) B est une base q-orthonormale ;

(ii) $M_B(q) = I_n$;

(iii) $q = \sum_{i=1}^{n} (e_i^*)^2$

Preuve. En reprenant la démonstration précédente on remarque que l'on a en plus $q(e_i) = a_i = 1$, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Théorème 1.3.2.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.Alors pour toute forme qudratique q , il existe une base orthogonale pour q.*

Preuve. Récurence sur n
$*$ $n = 1$: $E = Vect(e_1)$ avec $e_1 \neq 0$ alors $\{e_1\}$ est une base orthogonale pour q.
$*$ supposons le théorème vrai pour les espaces de $dim \leq n$ et soit E de dimension $n + 1$.
$\triangleright$ Si $q = 0$ alors toute base est orthogonale pour q.
$\triangleright$ Si $q \neq 0 \Longrightarrow \exists\ e_{n+1} \in E$ telle que $q(e_{n+1}) \neq 0$.Soit $F = Vect(e_{n+1}) = \Bbbk e_{n+1}$.On a F est non isotrope $\big($c'est à dire $F \cap F^\perp = \{0\}\big)$ en effet , Soit $x \in F \cap F^\perp \Longrightarrow x = \lambda e_{n+1}$ $(\lambda \in \Bbbk)$ et $x \perp e_{n+1} \Longrightarrow b(x, e_{n+1}) = 0 \Longrightarrow \lambda b(e_{n+1}, e_{n+1}) = 0 \Longrightarrow \lambda q(e_{n+1}) = 0 \Longrightarrow$ $\lambda = 0 \Longrightarrow x = 0$.
D'après le théorème 1.3.1.1 on a $E = F \oplus F^\perp$. Donc $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = n$.
La restriction de q à $F^\perp$ (*sous-espace vectoriel* de E) est encore une forme qudratique sur $F^\perp$, et on applique l'hypothèse de réccurence à $F^\perp$: il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de $F^\perp$ orthogonale pour la restriction de q à $F^\perp$. Donc $(e_1, ...e_n, e_{n+1})$ est une basede E orthogonale pour q.

1.4 Réduction des formes quadratiques

Réduire une forme quadratique q, c'est déterminer une base q-orthogonale relativement à laquelle la matrice de q est la $\ll$ plus simple possible $\gg$. La réduction dépend du corps de base. Etudions tout d'abord les formes quadratiques dans le cas complexe.

Théorème 1.4.0.2 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe un entier $r \in \{0, 1, ..., n\}$ et une base $B = (e_1, ..., e_n)$ orthogonale pour q tels que $q(e_i) = 1$ pour $i \leq r$ et $q(e_i) = 0$ pour $i \succ r$. L'entier r est le rang de q et ne dépend donc pas de la base B.*

Preuve . Soit $\left(e_1^{'},...,e_n^{'}\right)$une base de E orthogonale pour q. Posons $a_i = q(e_i)$ pour tout $i \in \{1,...,n\}$ Nous avons déjà remarqué que le rang r de q est le nombre de a_i non nuls.Quitte à réordonner la base nous pouvons supposer que $a_i \neq 0$ pour $i \leq r$ et $a_i = 0$ pour $i \succ r$ Tout nombre complexe admettant une racine carrée, pour $i \leq r$, soit $b_i \in \mathbb{C}$ tel que $b_i^2 = a_i$. Posons enfin, $e_i = \frac{1}{b_i}e_i^{'}$ pour pour $i \leq r$ et $e_i = e_i^{'}$ pour $i \succ r$. Alors $(e_1,...,e_n)$ est une base orthogonale pour q et de plus $q(e_i) = q\left(\frac{1}{b_i}e_i^{'}\right) = \left(\frac{1}{b_i}\right)^2 q(e_i^{'}) = \frac{a_i}{a_i} = 1$, pour $i \leq r$ et $q(e_i)$ $= q(e_i^{'}) = 0$, pour $i \succ r$.

Remarque 1.4.0.2 *L'expression de q dans une telle base est trés simple puisque :*

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \text{ et } M_B(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corollaire 1.4.0.2 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormale pour q si et seulement si q est non dégénérée.*

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition précédente car q est non dégénérée si et seulement si $r = n$.

Etudions maintenant le cas des formes quadratiques dans le cas réel.

Théorème de Sylvester 1.4.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E.Il existe des entiers s et t une base $B = (e_1,...,e_n)$ orthogonale pour q tels que $q(e_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq s$,$q(e_i) = -1$ pour $s \prec i \leq s+t$ et $q(e_i) = 0$ pour $s+t < i \preceq n$.De plus le couple (s,t) ne dépend pas de la base choisie et $s+t = rg(q)$.*

Preuve. Soit $\left(e_1^{'},...,e_n^{'}\right)$une base de E orthogonale pour q. Posons $a_i = q(e_i^{'})$,pour tout $i \in \{1,...,n\}$. Nous avons déjà remarqué que le rang r de q est le nombre de a_i non nuls. Quitte à réordonner la base nous pouvons supposer que $a_i > 0$ pour $i \leq s$, $a_i < 0$ pour $s < i \leq r$ et $a_i = 0$ pour $i > r$. Posons $t = r - s$ et on pose :

$$e_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_i}}e_i^{'} \text{ si } 1 \leq i \leq s, \\ \frac{1}{\sqrt{-a_i}}e_i^{'}\text{si } s \leq i \leq r, \\ e_i^{'} \qquad \text{si } r > i, \end{cases}$$

Il est clair que $(e_1,...,e_n)$ est une base possédant les propriétés voulues. Reste à prouver l'unicité du couple (s,t). Soit une autre base $(f_1,...,f_n)$ orthogonale pour q telle que $q(f_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq s'$, $q(f_i) = -1$ pour $s' < i \leq s'+t'$ et $q(f_i) = 0$ pour$i > s'+t'$. Notons F le sous-espacevectoriel engendré par les vecteurs $e_1,...,e_s$ et G le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $f_{s'+1},...,fn$. Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in F \cap G$. Ce vecteur se décompose en :

$$x = \sum_{i=1}^{s} x_i e_i = \sum_{j=s'+1}^{n} y_i f_i.\text{D'où, d'une part } \mathrm{q}(x) = q\left(\sum_{i=1}^{s} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 \geq 0 \text{ et}$$

d'autre part $\mathrm{q}(x)=q\left(\sum_{j=s'+1}^{n} y_i f_i\right) = \sum_{j=s'+1}^{s'+t'} -\left(y_i^2\right) \leq 0$.Donc $\mathrm{q}(x)=0$ et par suite

$x_i = 0$, pour tout $i \in \{1, ..., s\}$. Il en résulte que $x = 0$. Les sous-espaces vectoriels F et G étant en somme directe, on a $dim(F)+dim(G) \leq dim(E)$, c'est à dire $s+n-s' \leq n$ D'où $s \leq s'$. En échangeant le rôle des deux bases, on obtient $s\prime \leq s$. Ainsi $s = s'$. Comme par ailleurs $s+t = rang(q) = s'+t'$, il vient $t = t'$.

Définition 1.4.0.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E. On appelle signature de q, le couple (s,t) défini dans le théorème précédent. On note $sgn(q) = (s,t)$.*

Remarque 1.4.0.3 *Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel de dimension finie n, de signature (s,t) . Il existe une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que*

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$$

q est non dégénérée si et seulement si $s+t=n$.

Corollaire 1.4.0.3 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et q une forme quadratique sur E. Il existe une base orthonormale pour q si et seulement si la signature de q est $(n,0)$.*

Preuve.

$\Longrightarrow$) Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale pour q et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, donc$:

$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, d'après la remarque 1.4.0.2 on déduit que $s = n$ et $t = 0$,

d'où q a pour signature $(n,0)$.

$\Longleftarrow$) Si $sgn(q) = (n,0) \Longrightarrow q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.Donc il existe

une base orthonormale pour q.

Définitions 1.4.0.2 *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée.*

1) On dit On dit que b (ou q) est définie positive (respectivement définie négative), si pour tout $x \in E\backslash\{0\}$ on a $q(x) > 0$ (respectivement $q(x) < 0$).

2)On dit On dit que b (ou q) est positive (respectivement négative), si pour tout $x \in E$ on a $q(x) \geq 0$ (respectivement $q(x) \leq 0$).

Corollaire 1.4.0.4 *Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est définie positive si et seulement si sa signature est de la forme $(r, 0)$*

Preuve.

$\Longrightarrow$)Par l'absurde : si $q(x) > 0$ et de signature (s, t), alors $q(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i^2$.

On prend $x_1 = \cdots = x_P = 0$ et $x_{s+1} = \cdots = x_{s+t} \neq 0$, d'où $q(x) < 0$ avec $x \neq 0$ contradiction.

$\Longleftarrow$) Si $\operatorname{sgn}(q) = (r, 0)$, alors il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ orthonormale telle que :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0. \; Où \; x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

1.4.1 Méthode de Gauss

Proposition 1.4.1.1 *Pour toute forme qudratique définie sur un espace vectoriel E de dimension n il existe r formes linéaires $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ sur E linéairement indépendantes telle que*

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{k} \; \forall x \in E \; q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \varphi_i^2(x)$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E.
pour $n = 1$: q(x) $= \lambda x^2$ avec $\varphi_1(x_1) = x_1$.
Supposons que la proprostion vraie pour n-1 variables et montrons là pour q à n variables :
$*$ Premier cas : q contient un terme en x_i^2, par exemple x_1^2. On peut alors écrire:
$q(x) = a_1 x_1^2 + 2 \; L(x_2, ..., x_n) x_1 + Q(x_2, ..., x_n)$,

avec $a_1 \in \mathbb{R}^*, L$ polynôme homogène de degré 1 en fonction de $x_2, ..., x_n$, c'est -à-dire de la forme $L(x_2, ..., x_n) = \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ et Q une forme quadratique en $x_2, ..., x_n$. D'où
$q(x) = a_1 \left(x_1 + \frac{L(x_2,...,x_n)}{a_1}\right)^2 - \frac{L(x_2,...,x_n)^2}{a_1} + Q(x_2, ..., x_n)$.

Par hypothése de récurrence, la forme quadratique $q^{'}$ définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$ par

$$q^{'}(x) = -\tfrac{L(x_2,\ldots,x_n)^2}{a_1} + Q(x_2,...,x_n).$$

se décompose en $q^{'} = \sum_{j=2}^{r} a_j l_j^2$ où $l_2,...,l_r$ sont des formes linéaires indépendantes dans $(\mathbb{R}^{n-1})^*$.

Pour $j \in \{2,3...,n\}$, Notons φ_1 la forme linéaire sur E qui à $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, associe $l_j(x_2,...,x_n)$ et φ_1 la forme linéaire définie par $\varphi_1(x) = x_1 + \frac{L(x_2,\ldots,x_n)}{a_1}$.

On a alors $q = \sum_{j=2}^{r} a_j \varphi_j^2$. Il reste à montrer que la famille $(\varphi_j)_{j=1\ldots n}$ est libre dans E^*. Soit $q = \sum_{j=2}^{r} \lambda_j \varphi_j = 0$ une combinaison linéaire nulle des (φ_j). On a d'abord $\sum_{j=2}^{r} \lambda_j \varphi_j(e_1) = \lambda_1 = 0$. Puis , pour tout $(x_2,...,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, en posant $z = \sum_{i=2}^{n} x_i e_i$,

il vient $\sum_{j=2}^{r} \lambda_j \varphi_j(z) = \sum_{j=2}^{r} \lambda_j l_i(x_2,...,x_n) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{j=2}^{r} \lambda_j l_i = 0$. Comme les formes linéaires $l_2,\ldots,l_r$ sont indépendantes , on en déduit que $\lambda_j = 0$,pour tout $j \in \{2,3,\ldots r\}$.

$*$ Deuxiéme cas : q ne contient aucun terme en x_i^2.si $q=0$ il n'y a rien à faire,

on peut supposer , par exemple , que q contient x_1x_2. On peut alors écrire :

$$q(x) = ax_1x_2 + L_1(x_3,...,x_n)x_1 + L_2(x_3,...,x_n) + Q(x_3,...,x_n),$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$, L_1et L_2 polynômes homogénes de degré 1 en fonction de $x_3,...,x_n$ et q une forme qudratique en $x_3,...,x_n$. D'où en posant $y = (x_3,...,x_n)$, on a :

$$q(x) = a\left(\left(x_1 + \frac{L_2(y)}{a}\right)\left(x_2 + \frac{L_1(y)}{a}\right) - \frac{L_1(y)L_2(y)}{a^2}\right) + Q(y).$$

Or

$$4\left(x_1 + \frac{L_2(y)}{a}\right)\left(x_2 + \frac{L_1(y)}{a}\right) = \left(x_1 + x_2 + \frac{(L_1+L_2)(y)}{a}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{(L_2-L_1)(y)}{a}\right)^2.$$

Notons $\varphi_1$et $\varphi_2$les formes linéaires sur E définies par $\varphi_1(x) = x_1 + x_2 + \dfrac{(L_1 + L_2)(y)}{a}$ et

$\varphi_2(x) = x_1 - x_2 + \frac{(L_2 - L_1)(y)}{a}$.

Par hypothése de récurrence, la forme quadratique q$^{'}$ définie sur $\mathbb{R}^{n-2}$ par :

$$q^{'}(x) = Q(x_3, ..., x_n) - \frac{L_1(x_3, ..., x_n) L_2(x_3, ..., x_n)}{a}$$

se décompose en $q' = \sum_{j=3}^{r} a_j l_j^2$, où $l_3, \ldots, l_r$ sont des formes linéaires indépendantes dans $(\mathbb{R}^{n-2})^*$.

Pour tout $j \in \{3, 4, ...r\}$, notons φ_j, la forme linéaire sur E qui à $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, associe $l_j(x_3, ..., x_n)$. On obtient alors $q = \frac{a}{4}\varphi_1^2 - \frac{a}{4}\varphi_2^2 + \sum_{j=3}^{r} a_j \varphi_j^2$. Il reste à montrer que la famille $\left(\varphi_j\right)_{j=1...n}$ est libre dans E^*. Soit $\sum_{j=3}^{r} \lambda_j \varphi_j = 0$ une combinaison linéaire nulle des $\left(\varphi_j\right)$. On a d'abord $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi_j(e_1) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi_j(e_2) = \lambda_1 - \lambda_2 = 0.$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.Puis pour tout $(x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on posant $z = \sum_{i=3}^{n} x_i e_i$, il vient $\sum_{j=3}^{r} \lambda_j \varphi_j(z) = \sum_{j=3}^{r} \lambda_j l_j(x_3, ..., x_n) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{j=3}^{r} \lambda_j l_j = 0$. comme les formes linéaires $l_3, \ldots, l_r$ sont indépendantes, on en déduit que $\lambda_j = 0$, pour tout $j \in \{2, 3..., r\}$.

Remarque 1.4.1.1 *Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E qui se décompose en :*

$$q = \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i^2, \textit{ avec } \ a_1, ..., a_r \textit{ non nuls dans } \mathbb{R} \textit{ et } \varphi_r, ..., \varphi_r \textit{ formes linéaires}$$

indépendantes dans E^*, alors la signature de q est (s, t) où s est le nombre de a_i tel que $a_i \succ 0$ et t le nombre de a_i tels que $a_i \prec 0$.

Exemples 1.4.1.1 *Soit $E = \mathbb{R}^3$. Où $x = (x_1, x_2, x_3)$ est un vecteur de E*

1) Soit q_1 définie par $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.
Il y a un terme en x_1^2,considérons cette expresion comme un trinôme du second degré en x_1 :

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_1^2 + 2(-x_2 + 2x_3)x_1 + (2x_2^2 + 8x_3^2) \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2 + (2x_2^2 + 8x_3^2) \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 \end{aligned}$$

Posons $\varphi_1(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$et $\varphi_2(x) = x_2 + 2x_3$.Ces deux formes linéaires sont indépendantes et le calcul précédent prouve que $q_1 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$.
On a donc $sgn(q_1) = (2, 0)$. De plus $rang(q_1) = 2 + 0 = 2$. Complétons (φ_1, φ_2) pour obtenir une base B_0^*de $(\mathbb{R}^3)^*$,par exemple $\varphi_2(x) = x_3$.
Cherchons une base orthogonale $(B_0 = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3)$ pour $\mathrm{q}_1$dont B_0^* est sa base duale.En effet.
Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\varphi_i(a_1) = \begin{cases} \varphi_1(a_1) = \alpha - \beta + 2\gamma = 1; \\ \varphi_2(a_1) = \beta + 2\gamma = 0 \\ \varphi_3(a_1) = \gamma = 0 \end{cases},$$

donc après le calcul on trouve $a_1 = (1, 0, 0)$.

$$\varphi_i(a_2) = \begin{cases} \varphi_1(a_2) = \alpha - \beta + 2\gamma = 0; \\ \varphi_2(a_2) = \beta + 2\gamma = 1 \\ \varphi_3(a_2) = \gamma = 0 \end{cases},$$

on trouve $a_2 = (1, 1, 0)$.

$$\varphi_i(a_3) = \begin{cases} \varphi_1(a_3) = \alpha - \beta + 2\gamma = 0; \\ \varphi_2(a_3) = \beta + 2\gamma = 0 \\ \varphi_3(a_3) = \gamma = 1 \end{cases},$$

on trouve $a_3 = (-4, -2, 1)$.

Donc $\mathrm{B}_0 = (a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (-4, -2, 1))$ Constitue une base q_1-orthogonale.

2) Soit q_2 définie par $q_2(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$.
Il n'y a pas de carrés dans cette expression, mais un terme en x_1x_2 ; en considérant cette expresion comme un polynôme du premier degré enx_1 , puis en x_2 on peut écrire : $q_2(x) = (x_2 + x_3)x_1 + 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_3)x_2 + x_1x_3$. D'où

$$\begin{aligned} q_2(x) &= (x_2 + x_3)(x_1 + 2x_3) - 2x_3^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left((x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - (x_1 - x_2 + x_3)^2\right) - 2x_3^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2$$

Posons $\psi_1(x) = x_1 + x_2 + 3x_3$, $\psi_2 = x_1 + x_2 + x_3$, $\psi_3 = x_3$, ces trois formes linéaires sont indépendantes et le calcul précédent prouve que $q_2 = \frac{1}{4}\psi_1^2 - \frac{1}{4}\psi_2^2 - 2\psi_3^2$.

On a donc $sgn\,(q_2) = (1, 2)$. De plus $rang(q_2) = 1 + 2 = 3$.

Cherchons une base orthogonale ($B_0 = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$) pour q_1 dont B_0^* est sa base duale.En effet.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\psi_i(a_1) = \begin{cases} \psi_1(a_1) = \alpha - \beta + 3\gamma = 1; \\ \psi_2(a_1) = \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \psi_3(a_1) = \gamma = 0 \end{cases},$$

donc après le calcule on trouve $a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\psi_i(a_2) = \begin{cases} \psi_1(a_2) = \alpha - \beta + 3\gamma = 0; \\ \psi_2(a_2) = \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ \psi_3(a_2) = \gamma = 0 \end{cases},$$

on trouve $a_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$\psi_i(a_3) = \begin{cases} \psi_1(a_3) = \alpha - \beta + 2\gamma = 0; \\ \psi_2(a_3) = \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \psi_3(a_3) = \gamma = 1 \end{cases},$$

on trouve $a_3 = (2, -1, 1)$.

Donc$B_0 = \left(a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), a_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), a_3 = (2, -1, 1)\right)$. Constitue une base q_2-orthogonale.

Chapitre 2

Espaces euclidiens et Groupe orthogonal

Dans toute cette partie le corps de base sera $\mathbb{R}$.

2.1 Espaces euclidiens

2.1.1 Produit scalaire

Définitions 2.1.1.1 *Soit E un espace vectoriel réel.*

1) On appelle produit scalaire sur E, noté généralement $\langle\ ,\rangle$ toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
2) On dit que E est un espace préhilbertien réel s'il est muni d'un produit scalaire.
3) On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Propriétés 2.1.1.1 *Le produit scalaire$\langle\ ,\rangle$ est muni à des propriétés suivantes :*

- $\forall (x,y) \in E^2\ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle .$
- $\forall (x,y,z) \in E^3\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\ \langle \lambda x + \mu z\ ,\ y\rangle = \lambda \langle x,y\rangle + \mu \langle z,y\rangle .$
- $\forall x \in E \quad \langle x,x\rangle \succeq 0.$
- $\forall x \in E\ \ (\langle x,x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0) .$

Exemples 2.1.1.1 *1) $E = C([a,b],\mathbb{R})$, avec $a < b$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire définit par : $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$.*

La symétrie de l'application est immédiate et le caractére bilinéaire est conséquence de la linéarité de l'intégrale. Pour tout $f \in E$ on a $\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(t)\,dt \succeq 0$ par positivité de l'intégrale.De plus, comme f^2 est une fonction continue et positive, la nullité de l'intégrale ne peut se produire que si $f^2 = 0$, c'est à dire $f = 0$.

2) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un espace euclidien.

le produit scalaire usuel est une forme bilinéaire symétrique définie ; elle est clairement positive.

3) $\mathbb{R}^n[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)\, Q(t)\, dt$, avec a < b, est un espace euclidien.Les justifications sont les mêmes que pour l'exemple (a) sauf pour le caractère défini qui nécessite un argument supplémentaire. En effet ,si $\langle P, P\rangle = 0$ on déduit comme précédemment que pour tout $t \in [a, b]$ ona $P(t) = 0$; il faut alors remarquer que le polynôme P admet un nombre infini de racines et est donc le polynôme nul(Un polynôme de degré d admet au plus d racines).

Théorème 2.1.1.1 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

(i) $\quad |\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \ \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$;

(ii) *l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont liés.*

Preuve . (i) Puisque le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique positive, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq &\ \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &\leq \langle x, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle + 2\ \langle x, \lambda y\rangle \\ &\leq \lambda^2 \langle y, y\rangle + 2\lambda \langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle\ . \end{aligned}$$

Ce trinôme à coefficients réels, étant positif ou nul pour toute valeur de λ , son discriminant doit être négatif ou nul $i.e$ $4\left(\langle x, y\rangle\right)^2 - 4\langle y, y\rangle \langle x, x\rangle \leq 0$. D'où l'inégalité.

(ii) Si x est nul alors x et y sont liés et il est clair que l'on a égalité. Supposons maintenant $x \neq 0$; on a donc $\langle x, x\rangle \neq 0$. Si x et y sont liés, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et on a d'une part, $|\langle x, y\rangle| = |\lambda \langle x, x\rangle| = |\lambda| \langle x, x\rangle$,

d'autre part $\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \ \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \left(\lambda^2 \langle x, x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \langle x, x\rangle$ .D'où une égalité.

Réciproquement, supposons que l'on ait l'égalité. Posons $\alpha = \dfrac{\langle x\ ,\ y\rangle}{\langle x\ ,\ x\rangle}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \langle y - \alpha x\ ,\ y - \alpha x\rangle &= \langle y, y\rangle + \alpha^2 \langle x, x\rangle - 2\alpha \langle x, y\rangle \\ &= \langle y, y\rangle + \frac{\langle x\ ,\ y\rangle^2}{\langle x\ ,\ x\rangle} - 2\frac{\langle x\ ,\ y\rangle^2}{\langle x\ ,\ x\rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle y, y\rangle - \frac{\langle x\ ,\ y\rangle^2}{\langle x\ ,\ x\rangle} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le produit scalaire étant une forme bilinéaire symétrique définie, il en résulte que $y = \lambda x$,c'est à dire que x et y sont liés.

Exemples 2.1.1.2

1) $E = \mathbb{R}^n$. Soient $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ deux vecteurs de E.
L'inégalité de Schwarz se traduit par

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i yi\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2) $E = C([a,b], \mathbb{R})$. soit $f\ ,\ g \in E$.
L'inégalité de Schwarz se traduit par

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Corollaire 2.1.1.1 (*Inégalité de Minkowski*)*Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\rangle)$. Alors*

(i) $\langle x+y\ ,\ x+y\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y\ ,\ y\rangle^{\frac{1}{2}}$

(ii) l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont positivement liés ($i.e.$ $x = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = \lambda x$).

Preuve.(i) On a

$$\begin{aligned} \langle x+y\ ,\ x+y\rangle &= \langle x\ ,\ x\rangle + \langle y\ ,\ y\rangle + 2\langle x\ ,\ y\rangle \\ &\leq \langle x\ ,\ x\rangle + \langle y\ ,\ y\rangle + 2\left|\langle x\ ,\ y\rangle\right| \\ &\leq \langle x\ ,\ x\rangle + \langle y\ ,\ y\rangle + 2\langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\ ,\ y\rangle^{\frac{1}{2}}\ (Cauchy - Schwarz) \\ &\leq \left(\langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y\ ,\ y\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^2. \end{aligned}$$

(ii) Si x = 0 alors x et y sont positivement liés et il est clair que l'on a égalité. Supposons donc $x \neq 0$.

Si y = λ x avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors :
$\langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y\ ,\ y\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}} + |\lambda|\langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}} = (1+\lambda)\langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}}$ et
$\langle x+y\ ,\ x+y\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x+\lambda x\ ,\ x+\lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left((1+\lambda)^2\langle x\ ,\ x\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = (1+\lambda)\langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Réciproquement, supposons que l'on ait une égalité dans l'inégalité de Minkowski. Dans la démonstration de (i), toutes les inégalités doivent être des égalités. On doit donc avoir d'une part, égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$, et d'autre part $\langle x\ ,\ y\rangle = |\langle x\ ,\ y\rangle|$ ce qui impose $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Corollaire 2.1.1.2 *Soit* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien réel. L'application* $\|\|$ *de*E *dans* $\mathbb{R}^+$ *définie par* $\parallel x \parallel = \langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}}$ *est une norme sur* E.

Preuve. Le produit scalaire étant une forme bilinéaire symétrique définie positive, pour tout $x \in E$, on a l'équivalence : $\parallel x \parallel = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$\parallel \lambda x \parallel = \langle \lambda x\ ,\ \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \langle x\ ,\ x\rangle^{\frac{1}{2}}\right) = |\lambda| \parallel x \parallel$. L'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire.

Définition 2.1.1.1 *Soit* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien. On appelle norme euclidienne la norme définie dans le corollaire précédent.*

Proposition 2.1.1.1 *(Identité du parallélogramme) Soient* x *et* y *des vecteurs d'un espace préhilbertien réel* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$. *Alors*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y\ ,\ x+y\rangle + \langle x-y\ ,\ x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x\ ,\ y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x\ ,\ y\rangle \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).\end{aligned}$$

Proposition 2.1.1.2 *Soit* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien réel. Pour tous* x *et* y *dans*

E on a les formules de polarisation :

$$\langle x\ ,\ y\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$\langle x\ ,\ y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right).$$

Preuve. Ce n'est que la réecriture des formules établies dans le lemme 1.2.1.1

Remarques 2.1.1.1 .

a) La forme quadratique q associée à un produit scalaire est le carré de la norme euclidienne : $\forall x \in E\ q(x) = \|x\|^2$.

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz se traduit par $|\langle x\ ,\ y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

c) Les formules de polarisation permettent de calculer le produit scalaire à partir de la norme ; on a : $\langle x\ ,\ y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$.

d) On appelle espace de Hilbert réel tout espace préhilbertien réel, complet pour la norme issue du produit scalaire. Un espace euclidien est un cas particulier d'espace de Hilbert, puisque tout espace vectoriel normé ($i.e$ $(E\ ,\|\|)$) de dimension finie est complet.

2.1.2 Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens réels

Rappels 2.1.2.1 *Soit* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien réel.*

• *On dit que deux vecteurs* x *et* y *de* E *sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.*

• *Soit* A *une partie de* E*. On appelle orthogonal de* A*, noté* $A^{\perp}$*, l'ensemble des vecteurs de* E *orthogonaux à tout vecteur de* A*.* $A^{\perp}=\{\ x\in E\ ;\forall a\in A\ \langle x\ ,\ y\rangle=0\}$.

• *Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une famille de* E*.on dit que cette famille est orthogonale si pour tous* i *et* j *distincts dans* I*, les vecteurs* e_i *et* e_j *sont orthogonaux. Si de plus* $\|e_i\|=1$ *pour tout* $i\in I$*, on dit que la famille est orthonormale.*

Exemples 2.1.2.1

1) Dans le cas de l'espace $E=C([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f\ ,\ g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\left(t\right)g\left(t\right)dt$, considérons les fonctions $f_k:x\mapsto\sin\left(kx\right)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^{*}$. Alors la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^{*}}$est orthonormale : En effet

$$\begin{aligned}\langle f_k\ ,\ f_l\rangle&=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left(kt\right)\sin\left(lt\right)dt=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{cos(kt-lt)-cos(kt+lt)}{2}dt\\&=\tfrac{1}{2\pi}\left[\frac{sin((k-l)t)}{k-l}-\frac{sin((k+l)t)}{k+l}\right]_0^{2\pi}=0\ \text{ si } k\neq l\\&=\tfrac{1}{2\pi}\left[t-\frac{sin(2kt)}{2k}\right]_0^{2\pi}=1\ \text{ si }\ k=l.\end{aligned}$$

2) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ grâce au produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormale.

Théorème de Pythagore 2.1.2.1 *Soit* x *et* y *des vecteurs d'un espace préhilbertien réel* E*. Alors* x *et* y *sont orthogonaux si et seulement si* $\|x+y\|=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Preuve. On a $\|x+y\|=\|x\|^2+\|y\|^2+2\left\langle x\ ,\ y\right\rangle$ .D'où l'équivalence :

$$\|x+y\|=\|x\|^2+\|y\|^2\Longleftrightarrow\langle x\ ,\ y\rangle=0.$$

Proposition 2.1.2.1 *Soit* $(e_j)_{j=1,..,d}$ *une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Alors cette famille est libre.*

Preuve .*Si* $\sum_{j=1}^{d} \lambda_j e_j$ *est une combinaison linéaire nulle,alors pour tout* $i \in \{1, ..., d\}$

on a

$$\left\langle e_i \ , \ \sum_{j=1}^{d} \lambda_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \langle e_i \ , \ e_j \rangle = \lambda_i \langle e_i \ , \ e_i \rangle = \lambda_i \|e_i\|^2 = 0.\text{D'où } \lambda_i = 0 \text{ car} \|e_i\| \neq 0.$$

La réciproque de la proposition précédente est fausse. Cependant à partir d'une famille libre, nous pouvons construire une famille orthogonale ; c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.1.2.1 ***(Procédé d'orthogonalisation de Schmidt)***

Soit $(f_i)_{i=1,...,d}$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E.

$$\text{Posons } e_1 = f_1 \text{ est } e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \ e_i \ , \ f_{k+1} \rangle}{\langle \ e_i \ , e_i \rangle} e_i, \text{ pour tout } k \in \{1, ..., d-1\}.$$

Alors la famille $(e_i)_{i=1,...,d}$ est orthogonale et de plus pour tout entier $k \in \{1, ..., d-1\}$, on a $vect\{e_1, ..., e_k\} = vect\{f_1, ..., f_k\}$.

Preuve. Montrons que nous pouvons construire e_k possédant les propriétés voulues par récurrence. Pour $k = 1$ c'est évident. Supposons la construction faite jusqu'au *rang* k.Puisque $\dim vect\{e_1, ..., e_k\} = \dim vect\{f_1, ..., f_k\} = k$, la famille $(e_i)_{i=1,...,d}$ est libre et donc $\langle \ e_i \ , e_i \rangle \neq 0$.Le vecteur e_{k+1} est bien défini par la formule de l'énoncé. Pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle \ e_j \ , e_{k+1} \rangle &= \left\langle e_j \ , \ \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \ e_i \ , \ f_{k+1} \rangle}{\langle \ e_i \ , e_i \rangle} e_i \right\rangle \\
&= \langle \ e_j \ , f_{k+1} \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \ e_i \ , \ f_{k+1} \rangle}{\langle \ e_i \ , e_i \rangle} \langle \ e_j \ , e_i \rangle \\
&= \langle \ e_j \ , f_{k+1} \rangle - \langle \ e_j \ , f_{k+1} \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La famille $(e_i)_{i=1,...,k+1}$ est orthogonale.
Par définition e_{k+1} appartient à $vect\{f_{k+1}, e_1, ..., e_k\}$ qui, par hypothése de récurrence, est égal à $vect\{f_{k+1}, f_1, ..., f_k\}$. Donc $vect\{e_1, ..., e_{k+1}\} \subset vect\{f_1, ..., f_{k+1}\}$. comme on a

également $f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \ e_i \ , \ f_{k+1} \rangle}{\langle \ e_i \ , e_i \rangle} e_i + e_{k+1}$,on déduit de même l'inclusion inverse.

Corollaire 2.1.2.1 *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhil berti en réel admet une base orthonormale. En particulier tout espace euclidien posséde (au moins) une base orthonormale.*

Preuve. Soit $(e_i)_{i=1,...,d}$ une base du sous-espace vectoriel F de dimension finie. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, nous obtenons $(e_i)_{i=1,...,d}$ qui est une base orthogonale.Il suffit de poser $e_i^{'} = \frac{1}{\|e_i\|} e_i$, pour obtenir une base orthonormale de F. Dans le cas d'un espace euclidien E, il suffit d'appliquer le résultat à E lui-même.

a) Dans le corollaire précédent la matrice de passage de la base (f_i) à la base orthonormale $(e_i^{'})$ est triangulaire supérieure, car $vect\{e_1^{'}, ..., e_k^{'}\} = vect\{f_i, ..., f_k\}$.

b) Dans une base orthonormale $(e_i)_{i\in\{1,...,n\}}$, le produit scalaire des vecteurs

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \text{ a pour expression } \langle x\ ,\ y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Exemple 2.1.2.1 *Dans l'espace* $\mathbb{R}^3$, *muni du produit scalaire canonique, considérons les vecteurs*

$v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (1, 3, 0)$, $v_3 = (1, -1, 5)$.

On a $\det(v_1, v_2, v_3) = 9$, *de sorte que* (v_1, v_2, v_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *Appliquons à cette base l'algorithme de Gram-Schmidt. On obtient successivement*

$e_1 = v_1$, $e_2 = v_2 - \frac{\langle v_2\ ,\ e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 = \left(-\frac{1}{6}\ ,\frac{2}{3}\ ,\frac{7}{6}\right)$,

$e_3 = v_3 - \frac{\langle v_3\ ,\ e_1\rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle v_3\ ,\ e_2\rangle}{\|e_2\|^2} e_2 = \left(\frac{27}{11}\ , -\frac{9}{11}\ ,\frac{9}{11}\right)$;

la base orthonormée associée à la base orthogonale (e_1, e_2, e_3) *est*

$$\begin{cases} e_1^{'} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,\frac{2}{\sqrt{6}}\ ,-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ e_2^{'} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{11}}\ ,\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{11}}\ ,\frac{7\sqrt{6}}{6\sqrt{11}}\right) \\ e_3^{'} = \left(-\frac{3\sqrt{11}}{11}\ ,-\frac{\sqrt{11}}{11}\ ,\frac{\sqrt{11}}{11}\right) \end{cases}.$$

Exemple 2.1.2.2 *On munit l' espace vectoriel* E, *des polynômes de degré au plus 2, du produit scalaire*

$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x) Q(x)\, dx$ *et l' on considère sa base canonique*

$P_1(X) = 1$, $P_2(X) = X$, $P_3(X) = X^2$.

l'algorithme de Gram-Schmidt, appliqué au système (P_1, P_2, P_3), *fournit la base orthogonale* (Q_1, Q_2, Q_3) *suivante :*

$Q_1 = P_1 = 1$, $Q_2 = P_2 - \frac{\langle P_2\ ,\ Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 = X - \frac{1}{2}$,

$Q_3 = P_3 - \frac{\langle P_3\ ,\ Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2} Q_1 - \frac{\langle P_3\ ,\ Q_2\rangle}{\|Q_2\|^2} Q_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.

La base orthonormée associée à la base orthogonale (Q_1, Q_2, Q_3) *est formée des polynômes* $1,\ \sqrt{3}(2X - 1)$, $6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$.

Proposition 2.1.2.2 *Soient* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien et* $(e_1,...,e_n)$ *une base orthonormale de* E.

$$\text{Si } x\in E \text{ tel que } x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i \text{ alors } \forall i\in\{1,2,...,n\},\ x_i=\langle x\ ,\ e_i\rangle$$

Preuve. $\langle x\ ,\ e_j\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}x_ie_i\ ,\ e_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i\delta_{ij}=x_j$

Théorème 2.1.2.2 *soit* $(E\ ,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien . Si* F *un sous-espace vectoriel de* E, *alors* $E=F\oplus F^{\perp}$.

Preuve. On a vu que si F est non isotrope $\left(i.e\ F\cap F^{\perp}=\{0\}\right)$ alors $E=F\oplus F^{\perp}$.
Soit $x\in F\cap F^{\perp}\Longrightarrow \|x\|^2=\langle x,x\rangle=0\Longrightarrow \|x\|=0\Longrightarrow x=0$.

2.1.3 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de représentation de Riesz . 2.1.3.1 *Soit* E *un espace euclidien.*
(i) *Pour tout* $x\in E$, *l'application* $\varphi_x:y\mapsto\langle x\ ,\ y\rangle$ *est une forme linéaire sur* E.
(ii) *L'application* $\phi:x\mapsto\varphi_x$ *est un isomorphisme de* E *dans* E^*

Preuve. Le produit scalaire étant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, donc on peut appliquer le théorème 1.3.1.1(Chapitre 1) .

Corollaire 2.1.3.1 *Soient* E *et* F *des espaces euclidiens et* $u\in\mathcal{L}(E,F)$. *Il existe une unique application linéaire* u^* *de* F *dans* E *telle que :*

$$\forall x\in E\ \forall y\in F\quad \langle u(x)\ \ ,\ y\rangle_F=\langle x\ ,\ u^*(y)\rangle_E\,.$$

Preuve. Soit y appartenant à F. L'application $x\mapsto\langle y\ ,\ u(x)\rangle$ appartient à E^*.D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur, que nous noterons u*(y) tel que pour tout $x\in E$ on ait $\langle u^*(y)\ \ ,\ x\rangle=\langle y\ ,\ u(x)\rangle$., soit encore en utilisant la symétrie $\langle u(x)\ \ ,\ y\rangle=\langle x\ ,\ u^*(y)\rangle$. Ceci prouve l'existence et l'unicité de u^*. Il reste à montrer que u^* est linéaire. Soient y et z dans F, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in E$ on a :

$$\begin{aligned}\langle x\ ,\ u^*(\lambda y+\mu z)\rangle&=\langle u(x)\ \ ,\ \lambda y+\mu z\rangle\\&=\lambda\langle u(x)\ \ ,\ y\rangle+\mu\langle u(x)\ \ ,\ z\rangle\\&=\lambda\langle x\ ,\ u^*(y)\rangle+\mu\langle x\ ,\ u^*(z)\rangle\\&=\langle x\ ,\ \lambda u^*(y)+\mu u^*(z)\rangle\,.\end{aligned}$$

D'où $u^*(\lambda y+\mu z)=\lambda u^*(y)+\mu u^*(z)$.

Définition 2.1.3.1 *L'application linéaire u^* définie dans le corollaire précédent est appelée l'adjoint de u.*

Proposition 2.1.3.1 *Soient E, F et G des espaces euclidiens.*

(i) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a $u^{**} = u$.

(ii) L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire bijective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$.

(iii) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $v \in \mathcal{L}(F, G)$ on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

(iv) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a : $Ker(u^*) = (Im(u))^\perp$ et $Im(u^*) = (Ker(u))^\perp$.

(v) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base orthonormale de E. Relativement à la base B, la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u : $M_B(u^*) =^t (M_B(u))$.

Preuve. (i) Pour tous x dans E et y dans F on a :

$$\langle y \ , \ (u^*)^*(x) \rangle = \langle u^*(y) \ , \ x \rangle = \langle y \ , \ u\,(x) \rangle .$$

D'où $u^{**} = u$.
(ii) Soient u et v dans $\mathcal{L}(E, F)$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. On a pour tous x et y dans F :

$$\begin{aligned} \langle x \ , (\lambda u + \mu v)^*(y) \rangle &= \langle (\lambda u + \mu v)\,(x) \ , \ y \rangle \\ &= \lambda \langle u\,(x) \ , \ y \rangle + \mu \langle v\,(x) \ , \ y \rangle \\ &= \lambda \langle x \ , \ u^*\,(y) \rangle + \mu \langle x \ , \ v^*\,(y) \rangle \\ &= \langle x \ , \lambda \ u^*(y) + \mu \ v^*(y) \rangle . \end{aligned}$$

D'où $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda \ u^* + \mu \ v^*$.
Le caractére surjectif résulte de l'assertion (i), de plus $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(F, E)$ ont même dimension et par suite l'application u $\mapsto$ u* est bijective.
(iii) Pour tous $x \in E$ et $z \in G$ on a :

$$\langle v \circ u\,(x) \ , \ z \rangle = \langle u\,(x)\,, \ v^*\,(z) \rangle = \langle x \ , u^* \circ v^*\,(z) \rangle .$$

D'où $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*\,(z)$

(iv) Pour tout $y \in F$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} y \in Ker(u^*) &\Longleftrightarrow \forall x \in E \ \ \langle u^*\,(y) \ , \ \mathrm{x} \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in E \ \langle y \ , \ \mathrm{u}\,(x) \rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow y \in (\mathrm{Im}\,(u))^\perp . \end{aligned}$$

D'où Ker (u*) = (Im(u))$^\perp$.
En l'appliquant cette égalité à u*, on obtient $Ker(u) = (Im(u^*))^\perp$.
D'où $(Ker(u))^\perp = (Im(u^*))^{\perp\perp} = Im(u^*)$.

(v) Soient $A = M_B(u)$ et $A' = M_B(u^*)$. pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$, a'_{ij} est la i^{eme} composante de $u^*(e_j)$ dans la base $(e_i)_{i\in\{1,...,n\}}$ donc d'après la proposition 1.1.2.2
$a'_{ij} = \langle e_i , u^*(e_j)\rangle = \langle u(e_i) , e_j\rangle = \langle e_j , u(e_i)\rangle = a_{ji}$.

2.1.4 Endomorphisme symétrique

Définition 2.1.4.1 *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. On dit que u est autoadjoint ou symétrique si $u^* = u$.*

On note $S(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques sur E.

Remarque 2.1.4.1 *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors u est symétrique si et seulement si dans une (ou toute) base orthonormale, sa matrice est symétrique.*

Proposition 2.1.4.1 *Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.*

(i) Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

(ii) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Preuve. (i) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. Pour tous $x \in E_\lambda(u)$ et y $\in E_\mu(u)$, on a

$$\mu\langle x , y\rangle = \langle x , u(y)\rangle = \langle u^*(x) , y\rangle = \langle u(x) , y\rangle = \langle u(x) , y\rangle = \lambda\langle x , y\rangle.$$

Comme $\lambda \neq \mu$ on a donc $\langle x , y\rangle = 0$.
(ii) Supposons que $u(F) \subset F$. Soit y $\in$ $F^{\perp}$. Pour tout $x \in F$ on a :
$\langle u(y) , x\rangle = \langle y , u(x)\rangle = 0$ car $u(x) \in F$ et y$\in F^{\perp}$.
Donc $u(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.

Lemme 2.1.4.1 *Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe dans E une droite ou un plan stable par u.*

Preuve. Si u possède un vecteur propre x alors la droite engendrée par x est stable par u. Sinon u ne possède pas de valeur propre et son polynôme minimal π_u n'a pas de racines réelles. Par conséquent π_u se factorise dans $\mathbb{R}$ en produit de polynômes irréductibles de degré 2. On peut donc écrire $\pi_u = (X^2 + aX + b)Q$.Par minimalité du degré de π_u le polynôme Q n'est pas annulateur pour u et il existe un vecteur $y \in E$ tel que $Q(u)(y) \neq 0$.
Posons $z = Q(u)(y)$ et $P = vect\{z , \mathrm{u}(z)\}$.Comme u ne possède pas de vecteur propre, u(z) n'est pas colinéaire à z et P est un plan. On a :
$0 = \pi_u(u)(y) = (u^2 + au + bId_E)\,Q(u)(y) = (u^2 + au + bId_E)(z)$.
D'où $\mathrm{u}^2(z) = -au(z) - bz$ appartient à P et par suite P est stable par u.

Théorème 2.1.4.1 *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'endomorphisme u est symétrique.

(ii) Il existe une base orthonormale qui diagonalise u.

Preuve. $(i) \Longrightarrow (ii)$ La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de E.
Si $n = 1$ c'est évident.
Si $n = 2$. Soit B une base orthonormale de E. Alors $M_B(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$
et le polynôme caractéristique de u est $X^2 - (a+d)X + ad - b^2$. Son discrimant $\triangle$ vaut $(a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$. Si $b = 0$ la propriété est clairement établie, sinon $\triangle > 0$ et u admet deux valeurs propres distinctes.Par conséquent u est diagonalisable.
D'après la proposition les sous-espaces propres de u sont orthogonaux et il existe donc une base orthonormale qui diagonalise u.
Soit $n > 2$ et supposons la propriété vraie jusqu'au $rang$ $n-1$. Soient E un espace euclidien de dimension n et u $\in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. D'après le lemme précédent u admet au moins un sous-espace stable F de dimension $d = 1$ ou 2. Désignons par v l'endomorphisme de F défini par restriction de u. Cet endomorphisme est symétrique car :
$\forall (x, y) \in F^2 \ \langle v(x) \ , y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x \ , u^*(y)\rangle = \langle x \ , u(y)\rangle = \langle x \ , v(y)\rangle .$
Il existe donc une base orthonormale $\mathrm{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq d}$ de F qui diagonalise v. Autrement dit, il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ tel que $u(e_i) = v(e_i) = \lambda_i e_i$, pour $1 \leq i \leq d$.
Posons $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{\perp}$. D'après la Proposition , G est stable par u. Désignons par w l'endomorphisme de G défini par restriction de u. Comme pour v, cet endomorphisme est symétrique. Puisque $dim(G) = n - d \leq n - 1$, l'hypothèse de récurrence s'applique à w et il existe une base orthonormale $\mathrm{B}'' = (e_j)_{d+1 \leq i \leq n}$ de G qui diagonalise w. Autrement dit, il existe $\lambda_{d+1}, \ . \ . \ . \ , \lambda_n$ réels tels que $u(e_j) = w(e_j) = \lambda_j e_j$ pour $d + 1 \leq j \leq n$.
Il est clair que $B = (e_i, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E qui diagonalise u.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ Soit B une base orthonormale qui diagonalise u. La matrice de u relativement à la base B étant diagonale, elle est symétrique et par conséquent u est symétrique.

Corollaire 2.1.4.1 *Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.*

Preuve. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Considérons $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et B la base canonique. Désignons par u l'endomorphisme de E tel que $M_B(u) = M$. Cet endomorphisme est symétrique ; d'après le théorème précédent, il existe une base orthonormale B′ qui diagonalise u. Il existe donc une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Remarque 2.1.4.2 *Le résultat précédent est faux si le corps de base est* $\mathbb{C}$ *: La matrice* $A=\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ *est symétrique mais* A *n'est pas diagonalisable ; en effet son polynôme caractéristique est* $X^2-2X+1=(X-1)^2$ *et le sous-espace propre relatif à la valeur propre* 1 *est de dimension* 1*, car* $A \neq I_2$ *.*

Exemple 2.1.4.1 *On considère la matrice* $M=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

On souhaite déterminer une matrice P *orthogonale et une matrice* D *diagonale telle que* $M=PDP^t$*. La matrice* M *étant symétrique on peut affirmer sans aucun calcul qu'elle est diagonalisable en base orthonormée.*

$*$ *Valeurs propre :* $P_M(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 3 \\ -1 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ -1 & 3 & \lambda+2 \end{vmatrix} C_3 \leftarrow C_3+C_2$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 \text{ - } L_3$$

$$\begin{aligned} &=(\lambda+2)\left((\lambda-5)(\lambda-4)-2\right) \\ &=(\lambda+2)\left(\lambda^2-9\lambda+18\right) \\ &=(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de M *sont -2, 3 et 6.*

Vecteurs propres :

$MX=-2X \iff \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$ *. Donc* $E_{-2}=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R}\right\}$

$$=Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$MX=3X \iff \begin{cases} x=z \\ x=-z \end{cases}$ *. Donc* $E_3=\left\{\begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R}\right\}$

$$= Vect\left(\left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)\right).$$

$$MX = 6X \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2z \\ y = -z \end{array}\right. . \ E_6 = \left\{\left(\begin{array}{c} 2z \\ -z \\ z \end{array}\right) / z \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= Vect\left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right)\right).$$

On pose $f_1 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$, $f_2 = \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right)$, $f_3 = \left(\begin{array}{c} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right)$. *Donc on vérifie aisément que* $f_1, f_2,$ *et* f_3 *sont orthogonaux et* $\|f_1\| = \|f_2\| = \|f_3\| = 1$.

conclusion :

La famille (f_1, f_2, f_3) *est une base orthonormée de vecteurs propres. On a donc* $M = PDP^t$ *avec :*

$$D = \left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \qquad P = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right).$$

2.2 Groupe orthogonal

Dans toute cette partie E désigne un espace euclidien.

2.2.1 Isométries d'un espace euclidien

Définition 2.2.1.1 *Une isométrie (ou application orthogonale) de* E *est une application* $u : E \to E$ *qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :*

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad \langle u(x)\ ,\ u(y)\rangle = \langle x\ ,\ y\rangle .$$

On note $O(E)$ *l'ensemble des isométries linéaires de* E.

Exemples 2.2.1.1 *L'identité et son opposé* (*i.e* Id *et* $-Id$) *sont des isométries. Lorsque* E *est de dimension* 1, *on a* $O(E) = \{Id, -Id\}$

Remarque 2.2.1.1 *Une isométrie conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire que pour tous* x, y *dans* E, *on a :*

$$\langle x\ ,\ y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u(x)\ ,\ u(y)\rangle = 0.$$

Théorème 2.2.1.1 *Une application* $u : E \to E$ *est une isométrie si, et seulement si, elle est linéaire et conserve la norme, c'est-à-dire que :*

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Preuve. Si u est linéaire et conserve la norme, on déduit alors de l'identité de polarisation qu'elle conserve le produit scalaire et c'est une isométrie. En effet et, pour tous x, y dans E, on a :

$$\begin{aligned}\langle u(x)\ ,\ u(y)\rangle &= \tfrac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) \text{ (linéarité)}\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \text{ (conservation de la norme)}\\ &= \langle x\ ,\ y\rangle .\end{aligned}$$

Réciproquement, si u est une application de E dans E qui conserve le produit scalaire, il est clair qu'elle conserve la norme. Il nous reste à montrer qu'elle est linéaire. Pour x, y dans E et λ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\|u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)\|^2 &= \|u(x+\lambda y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \lambda^2\|u(y)\|^2 +\\ &\quad -2\left(\langle u(x+\lambda y)\ ,\ u(x)\rangle + \lambda\langle u(x+\lambda y)\ ,\ u(y)\rangle\right)\\ &\quad + 2\lambda\langle u(x)\ ,\ u(y)\rangle\\ &= \|x+\lambda y\|^2 + \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2\\ &\quad -2\left(\langle x+\lambda y\ ,\ x\rangle + \lambda\langle x+\lambda y\ ,\ y\rangle\right) + 2\lambda\langle x\ ,\ y\rangle\\ &= 2\|x\|^2 + 2\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x\ ,\ y\rangle\\ &\quad -2\|x\|^2 - 4\lambda\langle x\ ,\ y\rangle - 2\lambda\|y\|^2 + 2\lambda\langle x\ ,\ y\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$ et u est linéaire.

On peut aussi utiliser une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E.Comme u conserve le produit scalaire, la famille $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée et c'est une base de E. Pour tout $x \in E$, on a alors :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(x)\ ,\ u(e_i)\rangle\, u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x\ ,\ e_i\rangle\, u(e_i),$$

et la linéarité des applications $x \mapsto \langle x\ ,\ e_i\rangle$ entraîne celle de u.

Remarque 2.2.1.2 *Une application $u : E \to E$ qui conserve la norme n'est pas nécessairement linéaire et n'est donc pas une isométrie en général. Par exemple pour $e \in E$ de norme égale à 1, l'application $u : x \mapsto \| x \|\, e$ conserve la norme et n'est pas linéaire ($u(-x) = u(x) \neq -u(x)$ pour $x \neq 0$).*

Théorème 2.2.1.2 *Une isométrie est un automorphisme de E et $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$ ($GL(E) = \{$ bijections linéaires de E sur E $\}$).*

Preuve. Soit $u \in O(E)$. Pour $x \in \ker(u)$, $\|u(x)\| = \|x\| = 0$ et $x = 0$. Donc $\ker(u) = \{0\}$
et u ce qui équivaut à dire que u est un automorphisme de E puisqu'on est en dimension finie. On a $Id \in O(E)$ et pour u, v dans $O(E)$, x dans E, on a :

$$\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|$$

$$\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$$

donc $u \circ v$ et u^{-1} sont dans $O(E)$. L'ensemble $O(E)$ est donc bien un sous-groupe de $GL(E)$.
On dit, dans le cas où E est de dimension finie, que $O(E)$ est le groupe orthogonal de E.

Théorème 2.2.1.3 *Soit u une isométrie de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors son orthogonal $F^{\perp}$ est aussi stable par u.*

Preuve. Comme u est injective, on a $dim(u(F)) = dim(F)$ et avec $u(F) \subset F$, on déduit que $u(F) = F$. Pour $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$, on a :
$\langle u(x)\ ,\ u(y)\rangle = \langle x\ ,\ y\rangle = 0.$
Donc $u(x) \in (u(F))^{\perp} = F^{\perp}$.

Théorème 2.2.1.4 *Soient $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E. L'application u est une isométrie si, et seulement si, elle transforme B en une base $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$ orthonormée de E.*

Preuve. Supposons que $u \in O(E)$. Avec $\langle u(e_i)\ ,\ u(e_j)\rangle = \langle e_i\ ,\ e_j\rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, on déduit que $u(B) = (u(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est orthonormé. Il en résulte que $u(B)$ est libre et c'est une base puisque formé de $n = dim(E)$ vecteurs.
Réciproquement supposons que $u \in \mathcal{L}(E)$ transforme B en une base $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$

orthonormée de E.On a alors pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ dans E :

$$\|u(x)\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$$

D'où $u \in O(E)$.

2.2.2 Matrices réelles orthogonales

Proposition 2.2.2.1 *Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormale de E.*

Posons $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$, $B = (b_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$, $\xi_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$et\ \eta_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$. *Alors* $\left(\left\langle \xi_j\ ,\ \eta_j \right\rangle\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}} = {}^tAB.$

$$\textbf{\textit{Preuve.}}\ \left(\left\langle \xi_j\ ,\ \eta_j \right\rangle\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}} = \left(\left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k\ ,\ \sum_{k=1}^{n} b_{kj}e_k \right\rangle\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj}\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$$
$$= (a_{ji})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\,(b_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$$
$$= {}^tAB.$$

Théorème 2.2.2.1 *Soient $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E et u une application linéaire de E dans E de matrice A dans B. L'application u est une isométrie si, et seulement si, ${}^tAA = A^tA = I_n$.*

Preuve. Supposons que $u \in O(E)$. En notant ${}^tAA = (\alpha_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ et en utilisant les notations qui précèdent on a, pour $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\alpha_{ij} = \left\langle \xi_i\ ,\ \xi_j \right\rangle = \langle u\,(e_i)\ ,\ u\,(e_j)\rangle = \langle e_i\ ,\ e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Ce qui signifie que ${}^tAA = I_n$. La matrice A est donc inversible d'inverse ${}^tA$ et en conséquence,on a aussi $A^tA = I_n$.

Réciproquement, si ${}^tAA = A^tA = I_n$, on a alors pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\langle u\,(e_i)\ ,\ u\,(e_i)\rangle = \left\langle \xi_i\ ,\ \xi_j \right\rangle = \delta_{ij},$$

ce qui signifie que $u(B)$ est une base orthonormée de E et $u \in O(E)$.

Définition 2.2.2.1 *On appelle matrice orthogonale, une matrice réelle A telle que ${}^tAA = A^tA = I_n$.*

Remarques 2.2.2.1 *1) On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.*

2) Il revient au même de dire qu'une matrice orthogonale est une matrice inversible A d'inverse ${}^tA$. Le théorème précédent nous dit qu'une application linéaire u de E dans E est une isométrie si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée quelconque de E est orthogonale. Mais attention, ce résultat est faux pour une base non orthonormée. Par exemple l'application $(x, y) \mapsto (-x, y)$ est orthogonale et sa matrice dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.et A est non orthogonale car ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \neq I_2$.

Théorème 2.2.2.2 *Pour toute matrice A dans $O_n(\mathbb{R})$, on a $det(A) = \pm 1$ et $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

Preuve. De $det(A) = det(^tA)$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $^tAA = A^tA = I_n$ pour $A \in O_n(\mathbb{R})$, on déduit que $(det(A))^2 = 1$ et $det(A) = \pm 1$.Il en résulte que $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Comme $I_n \in O_n(\mathbb{R})$ et pour A, B dans $O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}.$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = {}^tB^tA = {}^t(AB)$$

on en déduit que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Notation et rappel : On note :

$$O_n^+(\mathbb{R}) = \{\ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}$$
$$O_n^-(\mathbb{R}) = \{\ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid det(A) = -1\},$$

et on dit que les éléments de $O_n^+(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales positives et les éléments de $O_n^-(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales négative.

On rappelle que si A=$((a_{ij}))_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ est une matrice carrée d'ordre n, la matrice des cofacteurs de A est la matrice $C = ((c_{ij}))_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ où $c_{ij} = (-1)^{i+j}\ det(A_{ij})$,en notant A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ déduite de A en supprimant la ligne numéro i et la colonne numéro j. On a alors :

$$A{\cdot}^tC = {}^tC{\cdot}A = det(A)\ I_n,$$

et dans le cas où A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^tC$.

Théorème 2.2.2.3 *Si* $A \in O_n^+(\mathbb{R})\,(resp\ A \in O_n^-(\mathbb{R}))$ *, on a alors* $A = C\ (A = -C)$ *, où* C *est la matrice des cofacteurs de* A*.*

Preuve. Soit $A \in O_n^+(\mathbb{R})$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^tC = {}^tC = {}^tA, \text{ d'ou } C = A$$

De même pour $A \in O_n^-(\mathbb{R})$

2.2.3 Isométries directes, indirectes (Orientation de l'espace)

Théorème 2.2.3.1 *Pour toute isométrie* $u \in O(E)$ *, on a* $det(u) = \pm 1$*.*

Preuve. On a $det(u) = det(A)$ où A est la matrice de u dans une base orthonormée et $u \in O(E)$ si, et seulement si, $A \in O_n(\mathbb{R})$, ce qui entraîne $det(A) = \pm 1$.

Notation :

$$\mathrm{O}^+(E) = \{\ u \in O(E)\ /\ det(u) = 1\} = SO(E)\ (\text{ les rotations de } E)$$
$$\mathrm{O}^-(E) = \{\ u \in O(E)\ /\ det(u) = -1\}\,(\text{les symétries de } E)$$

et on dit que les éléments de $O^+(E)$ sont les automorphismes orthogonaux positifs ou les isométries directes ou les rotations vectorielles et les éléments de $O^-(E)$ sont des automorphismes orthogonaux négatifs.

Théorème 2.2.3.2 $O^+(E)$ *est un sous-groupe distingué de* $O(E)$*.*

Preuve. $*$ Soit $u, v \in O^+(E)$.
On a $\det(u \circ v)^{-1} = \det u \cdot (\det v)^{-1} = 1$.
Or $\quad u \circ v^{-1} \in O(E) \Rightarrow u \circ v^{-1} \in O^+(E) \Rightarrow O^+(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$.
$*$ Soit $u \in O^+(E)$ et $v \in O(E)$.
Donc on a $\det(vuv^{-1}) = \det v \cdot \det u \cdot (\det v)^{-1} = 1 \Rightarrow vuv^{-1} \in O^+(E) \Rightarrow O^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$.
Cas particulier :

$$\text{Soit } E = \mathbb{R}^n \text{ muni de la norme } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ où } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \text{ avec}$$

$(e_1, ..., e_n)$ une base $(orthonormale)$ canonique.
on note : $O(\mathbb{R}^n) = O(n)$ groupe orthogonal réel.
$O^+(\mathbb{R}^n) = SO(n)$ groupe spécial orthogonal.

Chapitre 3

Formes hermitiennes et espaces hermitiens

Dans l'étude des formes hermitiennes, nous serons beaucoup plus bref qu'au chapitre1 et chapitre 2 car beaucoup de démonstrations et de notions s'inspirent des mêmes principes.

3.1 Forme hermitienne

Dans cette partie E un espace vectoriel de dimension n sur C.

Définition 3.1.0.1 *1) Une application f de E dans $\mathbb{C}$ est dite forme semi-linéaire(ou forme anti-linéaire) si :*

$\forall x, y \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et* $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

2) Une application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ est dite forme sesquilinéaire si :

$*\ \forall y \in E : h(.,y)$ *est linéaire c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} h\left(x+x^{'},y\right) = h(x,y) + h\left(x^{'},y\right) \\ h(\lambda x, y) = \lambda h(x,y) \end{cases} \quad \text{pour tous } x, x^{'} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

$*\forall x \in E : h(.,x)$ *est semi-linéaire c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} h\left(x,y+y^{'}\right) = h(x,y) + h\left(x,y^{'}\right) \\ h(x, \lambda y) = \overline{\lambda} h(x,y) \end{cases} \quad \text{pour tous } y, y^{'} \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

3) On dit que h est une forme hermitienne si de plus on a :
$\overline{h(y,x)} = h(x,y)$.

Exemples 3.1.0.1 (*forme sem-linéaire*)
1) $E = \mathbb{C}$.

L' application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$z \mapsto \overline{z}$
est une forme semi-linéaire sur $\mathbb{C}$. *Vérifions .*
on a : $f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{C}$
$f(\lambda x) = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda} \times \overline{x} = \overline{\lambda} f(x) \ \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$
2) $E = \mathbb{C}[X]$.
L'application $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$
$P \mapsto \overline{P(z_0)} \quad$ *où* $z_0 \in \mathbb{C}$
est une forme semi-linéaire sur $\mathbb{C}[X]$. *Pour tous* $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$.
On a : $f(P+Q) = \overline{(P+Q)(z_0)} = \overline{P(z_0) + Q(z_0)} = \overline{P(z_0)} + \overline{Q(z_0)}$
$= f(P) + f(Q)$.
$f(\lambda P) = \overline{(\lambda P)(z_0)} = \overline{\lambda P(z_0)} = \overline{\lambda} \times \overline{P(z_0)} = \overline{\lambda} \ f(P) \quad \forall P \in \mathbb{C}[X]$ *et*

Exemples 3.1.0.2 *1)* $E = \mathbb{C}^2$.
L' application $h : \quad \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$
$(z_1, z_2) \mapsto z_1 \overline{z_2}$
est une forme sesquilinéaire et de plus est une forme hermitienne.
Vérifions.
Pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $z_1, z_2, z_1^{'}, z_2^{'} \in E$ *on a :*
$h\left(z_1 + z_1^{'}, z_2\right) = \left(z_1 + z_1^{'}\right) \overline{z_2} = z_1 \overline{z_2} + z_1^{'} \overline{z_2} = h(z_1, z_2) + h\left(z_1^{'}, z_2\right)$
$h(\lambda z_1, z_2) = (\lambda z_1) \overline{z_2} = \lambda z_1 \overline{z_2} = \lambda h(z_1, z_2)$.
$h(z_1, z_2 + z_2^{'}) = z_1 \left(\overline{z_2 + z_2^{'}}\right) = z_1 \left(\overline{z_2} + \overline{z_2^{'}}\right) = z_1 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2^{'}} = h(z_1, z_2) + h\left(z_1, z_2^{'}\right)$
$h(z_1, \lambda z_2) = z_1 \overline{\lambda z_2} = z_1 \overline{\lambda} \overline{z_2} = \overline{\lambda} h(z_1, z_2)$ *donc* h *est une forme sesquilinéaire.*
Pour tout $z_1, z_2 \in E$,*on a* $h(z_2, z_1) = z_2 \overline{z_1} = \overline{\overline{z_2} z_1} = \overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{h(z_1, z_2)}$ *donc* h *est une forme hermitienne.*
2) $E = \mathbb{C}^n$. *Soit* $(e_1, ..., e_n)$ *une base*
L'application $h : \quad \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad$ *où* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,
$y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, *avec* $(e_1, ..., e_n)$ *la base canonique de* E,
est une forme hermitienne sur E.

3.1.1 Matrice d'une forme hermitienne

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base sur E et h une forme hermitienne de E .

$$\text{Soit} \ \ x, y \in E, \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i ei, \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

$$\begin{aligned}\text{alors}\quad h(x,y) &= b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i ei, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i} h(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_i} h_{ij}.\end{aligned}$$

avec $h_{ij} = h(e_i, e_j)$.
Soit la matrice $H_B(h) = (h_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$
de plus, h est une forme hermitienne, on a $h(e_j, e_i) = \overline{h(e_i, e_j)}$.
C'est-à-dire ${}^t\overline{H_B(h)} = H_B(h)$.

Définition 3.1.1.1 *On appelle matrice hermitienne, tout élément H de$M_n(\mathbb{C})$ tel que ${}^t\overline{H} = H$.*

Exemple 3.1.1.1 *Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Donc H est hermitienne car ${}^t\overline{H} = H$.*

3.1.2 Changement de base

Théorème 3.1.2.1 *Soient $B = (e_1, ..., e_n)$ et $B' = (e_1', ..., e_n')$ deux bases de E et P la matrice de passage de Bà B'. Soit h une forme hermitienne sur E.Soit $H_B(h) = (h(e_i, e_j))_{i,j=1...,n}$ la matrice de h dans la base B et $H'_{B'}(b) = \left(h\left(e_i', e_j'\right)\right)_{i,j=1...,n}$ la matrice de h dans la base B'.*

$$\text{Alors}\qquad H' = {}^tPH\overline{P}$$

Preuve Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j', y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{j=1}^{n} y_j' e_j'$ deux vecteurs de E

et X, Y (resp X', Y') les matrices colonnes de leurs coordonnées dans B $(resp\ B')$
Alors $X = PX', Y = PY'$ (formules de changement de bases).

$$\begin{aligned}\text{On a } h(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} h(e_i, e_j) = {}^t\mathrm{X}H\overline{\mathrm{Y}} = {}^t\left(\mathrm{PX}'\right)\mathrm{H}\overline{\left(\mathrm{PY}'\right)} = {}^t\mathrm{X}'{}^tPH\overline{P}\overline{\mathrm{Y}}' \\ &= {}^t\mathrm{X}'\left({}^tPH\overline{P}\right)\overline{\mathrm{Y}}' \\ \text{Or } h(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i'\overline{y_j'} b\left(e_i', e_j'\right) = {}^t\mathrm{X}'H'\overline{\mathrm{Y}}'\end{aligned}$$

$$\text{D'où}\qquad \mathrm{H}' = {}^tP\mathrm{H}\overline{P}$$

3.1.3 Rang d'une forme hermitienne

Définition 3.1.3.1 *Le rang d'une forme hermitienne h sur un espace vectoriel de dimension finie E est le rang de la matrice $H_B(h)$ de cette forme dans toute base de E.*

Théorème 3.1.3.1 *Le rang de la matrice d'une forme hemetienne ne dépend pas de la base choisie.*

Preuve. C'est la même preuve que le chapitre1.

3.1.4 Forme hermitienne et Forme quadratique

Définition 3.1.4.1 *Soit h une forme hermitienne sur E.*

On appelle forme quadratique complexe associée à h et on note q_h l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie par : $q_h(x) = h(x, x) \in E$.

Proposition 3.1.4.1 *Soit h une forme hermitienne sur E.*

(i) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $q_h(\lambda x) = |\lambda|^2 q_h(x)$.

(ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $4h(x, y) = q_h(x + y) - q_h(x - y) + iq_h(x + iy) - iq_h(x - iy)$

Preuve. (i) On a : $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $q_h(\lambda x) = h(\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda} h(x, x) = |\lambda|^2 q_h(x)$.

(ii) Pour tous $x, y \in E$, on a :

$h(x + y, x + y) - h(x - y, x - y) + ih(x + iy, x + iy) - ih(x - iy, x - iy) = h(x, x) + h(x, y) +$

$h(y, x) + h(y, y) - h(x, x) + h(x, y) + h(y, x) - h(y, y) + ih(x, x) + h(x, y) - h(y, x) + ih(y, y)$

$-ih(x, x) + h(x, y) - h(y, x) - ih(y, y) = 4h(x, y)$

3.1.5 Orthogonalité

Définitions 3.1.5.1 *Soit h une forme hemitienne sur E .*

1) On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux pour h si $h(x, y) = 0$. On note $x \perp y$

2) Pour toute partie A de E on appelle orthogonal de A pour h, l'ensemble, noté $A^\perp$ des vecteurs de E orthogonaux à A. On a donc : $A^\perp = \{ x \in E\,;\, \forall a \in A\ h(x, y) = 0\}$

Proposition 3.1.5.1 *Soit h est une forme hemitienne sur E*

(i) *Pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*

(ii) $\forall (A, B) \in (P(E))^2$,$A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.

(iii) $\forall \in P(E)$, $A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$.

(iv) $\{0\}^{\perp} = E$.

(v) *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F \subset F^{\perp\perp}$.*

3.1.6 Forme non dégénérée

Définitions 3.1.6.1 *1) On dit que h est non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$ $\left(E^{\perp} = \{0\}\right)$ dans le cas contraire $\left(E^{\perp} \neq \{0\}\right)$ on dit que h est dégénérée.*
2) La forme hermitinne h est non dégénérée si rang $h = \dim_{\mathbb{C}}(E) = n$.

Corollaire 3.1.6.1 *Soient F un sous-espace vectoriel sur E et h une forme hermitienne non dégénérée. Alors :*
(i) $dim(F) + dim(F^{\perp}) = dim(E)$.

(ii) $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Théorème 3.1.6.1 *Si h est une forme hermitienne quelconque et si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ alors $E = F \oplus F^{\perp}$.*

3.1.7 Base orthogonale et orthonormale

Définition 3.1.7.1 *Soit h est une forme hermitienne.*
1) On dit qu'une base $B = (e_1, ..., e_n)$ est orthogonale pour h si $h(e_i, e_j) = 0$ $\forall$ $i \neq j$.
2) On dit qu'une base $B = (e_1, ..., e_n)$ est orthonormale pour h si $h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Théorème 3.1.7.1 *Si h est une forme hermitienne, il existe toujours une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E orthogonale pour h.*

Preuve. voir chapitre 1

Remarque 3.1.7.1 *Il n'existe pas toujours une base orthormée pour h.*

Corollaire 3.1.7.1 *Pour toute forme hermitienne h, il existe une base $(e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle on a :*

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \overline{y_i} \text{ où } r = rang\ h \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R}^*$$

Preuve. voir chapitre 1

3.1.8 Réduction des formes hermitiennes

Théorème de Sylvester 3.1.1 *Soit h une forme hemetienne sur E.Il existe des entiers s et t une base $B = (e_1, ..., e_n)$ orthogonale pour h tels que $h(e_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq s$,$h(e_i) = -1$ pour $s \prec i \leq s \leq t$ et $h(e_i) = 0$ pour $s + t < i \preceq n$.De plus le couple (s, t) ne dépend pas de la base choisie et $s + t = rg(h)$.*

Preuve.

Définition 3.1.8.1 *soit h une forme hermitienne sur E. On appelle signature de h, le couple (s, t) défini dans le théorème précédent. On note $sgn(q) = (s, t)$*

Remarque 3.1.8.1 *Soit h une forme quadratique sur E de signature (s, t) .Il existe une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que*

$$h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ , \sum_{i=1}^{n} x e_i\right) = \sum_{i=1}^{s} x_i \overline{x_i} - \sum_{i=s+1}^{s+t} x_i \overline{x_i}$$

q est non dégénérée si et seulement si $s + t = n$.

Corollaire 3.1.8.1 *Soit h une forme hermitienne sur E. Alors il existe une base orthonormale pour q si et seulement si q est non dégénérée.*

Corollaire 3.1.8.2 *Soit h une forme hermitienne sur E. Il existe une base orthonormale pour h si et seulement si la signature de h est $(n, 0)$.*

Définitions 3.1.8.1 *1) On dit On dit que h est définie positive (respectivement définie négative), si pour tout $x \in E \backslash \{0\}$ on a $h(x, x) > 0$ (respectivement $h(x, x) < 0$).*

2) On dit que h est positive (respectivement négative), si pour tout $x \in E$ on a $h(x, x) \geq 0$ (respectivement $h(x, x) \leq 0$).

Corollaire 3.1.8.3 *Une forme hermitinne h sur E est définie positive si et seulement si sa signature est de la forme $(n, 0)$.*

3.2 Espace hermitien

3.2.1 Produit hermitien

Définitions 3.2.1.1 *1) On appelle produit hermitien ou produit scalaire hermitien sur E, toute application sesquilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, notée $(x, y) \longmapsto \langle x, \ y \rangle$, telle que :*

- $\forall x, y \in E \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ *(symétrie hermitienne)*.

- $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$.

$\bullet \forall x \in E \ \ \langle x, x \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0.$

2) On dit qu'un espace vectoriel complexe E est un espace préhilbertien complexe s'il est muni d'un produit hermitien. On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Théorème 3.2.1.1 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien complexe $(E, \langle \ , \rangle)$. Alors*

$(i) \quad |\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \ \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$;

(ii) *l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont liés.*

Corollaire 3.2.1.1 (*Inégalité de Minkowski*)*Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien complexe $(E, \langle \ , \rangle)$. Alors :*

$\langle x + y \ , \ x + y\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x \ , \ x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y \ , \ y\rangle^{\frac{1}{2}}$

Corollaire 3.2.1.2 *Soit $(E \ , \langle \ , \ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\| \ x \ \| = \langle x \ , \ x\rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E.*

Proposition 3.2.1.1 *(Identité du parallélogramme) Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E \ , \langle \ , \ \rangle)$. Alors*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Remarque 3.2.1.1 *On appelle espace de Hilbert complexe tout espace préhilbertien complexe, complet pour la norme issue du produit scalaire. Un espace hermitien est un cas particulier d'espace de Hilbert, puisque tout espace vectoriel normé (i.e $(E \ , \|\|)$) de dimension finie est complet.*

3.2.2 Orthogonalité dans les espaces préhilbertiens complexes

Définition 3.2.2.1 *Soit $(E \ , \langle \ , \ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe.*

On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Théorème de Pythagore 3.2.2.1 *Soit x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. Alors x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Proposition 3.2.2.1 *Soit $(e_j)_{j=1,..,d}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien complexe. Alors cette famille est libre.*

Définition 3.2.2.2 *soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de E.on dit que cette famille est orthogonale si pour tous i et j distincts dans I, les vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux. Si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, on dit que la famille est orthonormale .*

Théorème 3.2.2.1 ***(Procédé d'orthogonalisation de Schmidt)***

Soit $(f_i)_{i=1,\dots,d}$ une famille libre d'un espace préhilbertien complexe E.

$$\text{Posons } e_1 = f_1 \text{ est } e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle\ e_i\ ,\ f_{k+1}\rangle}{\langle\ e_i\ , e_i\rangle} e_i, \text{ pour tout } k \in \{1,\dots,d-1\}.$$

Alors la famille $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ est orthogonale et de plus pour tout entier $k \in \{1,\dots,d-1\}$, on a $$vect\{e_1,\dots,e_k\} = vect\{f_1,\dots,f_k\}.$$

Corollaire 3.2.2.1 *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilberti en complexe admet une base orthonormale. En particulier tout espace hermitien posséde (au moins) une base orthonormale.*

Remarques 3.2.2.1 *a) Dans le corollaire précédent la matrice de passage de la base (f_i) à la base orthonormale $\left(e_i^{'}\right)$ est triangulaire supérieure, car $vect\{e_1^{'},\dots,e_k^{'}\} = vect\{f_i,\dots,f_k\}$.*

b) Dans une base orthonormale $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, le produit scalaire des vecteurs

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \text{ a pour expression } \langle x\ ,\ y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 .$$

Théorème 3.2.2.2 *soit $(E\ , \langle\ ,\ \rangle)$ un espace hermitien .si F un sous-espace vectoriel de E,alors $E = F \oplus F^{\perp}$.*

3.2.3 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème de représentation de Riesz . 3.2.3.1 *Soit E un espace hermitien.*

(i) Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi_x : y \mapsto \langle x\ ,\ y\rangle$ est une forme linéaire sur E.

(ii) L'application $\phi : x \mapsto \varphi_x$ est semi-linéaire et bijective de E dans E^*.

Corollaire 3.2.3.1 *Soient E et F des espaces hermitiens et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Il existe une unique application linéaire u^* de F dans E telle que :*

$$\forall x \in E \; \forall y \in E \quad \langle u(x) \; , \, y \rangle = \langle x \; , \, u^*(x) \rangle \, .$$

Définition 3.2.3.1 *L'application linéaire u^* définie dans le corollaire précédent est appelée adjoint de u.*

Soit u un endomorphisme d'un espace hermitien. On dit que u est auto-adjoint ou hermitien si $u^* = u$.

Proposition 3.2.3.1 *Soient E, F et G des espaces euclidiens.*

(i) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a $u^{**} = u$.

(ii) L'application $u \mapsto u^*$ est linéaire bijective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$.

(iii) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $v \in \mathcal{L}(F, G)$ on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.

(iv) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a : $Ker(u^*) = (Im(u))^{\perp}$ et $Im(u^*) = (Ker(u))^{\perp}$.

(v) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base orthonormale de E. Relativement à la base B, la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u : $M_B(u^*) =^t (M_B(u))$.

Définition 3.2.3.2 *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{\mathbb{C}}(m, n)$. On appelle matrice transconjuguée (ou matrice adjointe) de A la matrice $A^* = {}^t\overline{(A)} = \overline{{}^tA} = (\overline{a_{i,j}})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in M_{\mathbb{C}}(n, m)$*

Définition 3.2.3.3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ .La matrice telle que $A = A^*$ est dite hermitienne*

Remarque 3.2.3.1 *Soit u un endomorphisme d'un espace hermitien. Alors u est hermitien si et seulement si dans une (ou toute) base orthonormale, sa matrice est hermitienne.*

Proposition 3.2.3.2 *Soit u un endomorphisme hermitien d'un espace hermitien E.*

(i) Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

(ii) Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Théorème 3.2.3.1 *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'endomorphisme u est hermitien.

(ii) Il existe une base orthonormale qui diagonalise u.

Corollaire 3.2.3.2 *Toute matrice hermitienne est diagonalisable.*

Chapitre 4

Applications des formes quadratiques

4.1 Endomorphismes symétriques et formes quadratiques

Dans toute cette section, E désignera un espace euclidien de dimension n $\succeq 1$, $S(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques sur E et $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

Proposition 4.1.0.3 *Soit E un espace euclidien. L'application qui à tout $S \in S(E)$, associe q_S définie par : $\forall x \in E$ $q_S(x) = \langle x \ , \ S(x)\rangle$ est un isomorphisme entre S(E) et Q(E) .*

De plus, si B est une base orthonormale de E alors $M_B(S) = M_B(q_S)$.

Preuve. Soit $S \in S(E)$. Puisque S est symétrique, l'application $f_{q_S} : (x, y) \mapsto \langle x \ , \ S(y)\rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique associée est q_S .

Pour tous S et T dans $S(E)$ et tous λ et μ réels on a, pour tout $x \in E$:

$\langle x \ , \ (\lambda S + \mu T)(x)\rangle = \lambda \langle x \ , \ S(x)\rangle + \mu \langle x \ , \ T(x)\rangle = (\lambda q_S + \mu q_T)(x)$.

D'où $q_{\lambda S+\mu T} = \lambda q_S + \mu q_T$.

Si $q_S = 0$ $(i.e. \forall x \in E \ q_S(x) = 0)$

Soient B=$(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E et $A = M_B(S)$. On a alors

$a_{i,j} = \langle e_i \ , \ S(e_j)\rangle = f_{q_S}(e_i, e_j)$ $(S(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \ , \ S(e_j)\rangle e_i)$ pour tous i et j dans $\{1, 2.., n\}$.

D'où $M_B(S) = M_B(f_{q_S}) = M_B(q_S)$.

Corollaire 4.1.0.3 *Soient E un espace euclidien et $S \in S(E)$. Alors Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall x \in E$ $\langle x \ , \ S(x)\rangle \succeq 0$

(ii) Toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles

(iii) q_S est une forme quadratique positive.

preuve. L'assertion (i) résulte immédiatement de la proposition précédente.
(ii) L'équivalence (a)$\Longleftrightarrow$(c) résulte également immédiatement de la proposition précédente (a) $\Longrightarrow$ (b) Soit λ une valeur propre de S. Il existe $y \neq 0$ tel que $S(y) = \lambda y$. Alors $0 \leq \langle y\ ,\ S\left(y\right)\rangle = \langle y\ ,\ \lambda y\rangle = \lambda \|y\|^2$. D'où $\lambda \succeq 0$.
(b) $\Longrightarrow$ (a) Soit B=$(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale qui diagonalise S. D'après l'hypoth'ese $M_B(S) = Diag\left(\lambda_1, ..., \lambda_n\right)$ avec $\lambda_i \succeq 0$, pour tout i$\in \{1, ..., n\}$.Tout $x \in E$

se décompose en $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, d'où $\mathrm{S}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i$ et $\langle x\ ,\ S\left(x\right)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \succeq 0$

Corollaire 4.1.0.4 *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} q \textit{ positive} & \Longleftrightarrow & Sp(A) \in \mathbb{R}^{+} \\ q \textit{ définie positive} & \Longleftrightarrow & Sp(A) \in \mathbb{R}^{+*} \\ q \textit{ définie négative} & \Longleftrightarrow & Sp(A) \in \mathbb{R}^{-*} \end{array}$$

q ni positive ni négative $\Longleftrightarrow$ *A a deux valeurs propres non nulles de signes opposés.*

4.1.1 Formes quadratiques et les extremums

Définition 4.1.1.1 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$, un point $a \in U$ pour lequel $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\}$ et est appelé un point critique de f.*

Définition 4.1.1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 .La hessienne de f en un point a est la matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a\right)\right)_{i,j}$ .C'est la matrice d'une forme quadratique :*

$$q\left(h_1, ...h_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\left(a\right) h_i^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a\right) h_i h_j.$$

Proposition 4.1.1.1 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est C^2 et $a \in U$ un point critique de f. On note q la forme quadratique associée a la hessienne de f on a alors :*
(i) Si q définie positive , alors f admet un minimum relatif en a.

(ii) Si q définie négative , alors f admet un maximum relatif en a

(iii) Si q n'est ni positive ni négative, alors f n'admet pas d'extremum relatif en a.

Preuve. (i) Si q est une forme quadratique défnie positive alors :
$\forall h \in \mathbb{R}^n$ $h \neq 0$, q$(h) > 0$ Comme la sphére unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on en déduit que $\alpha = \inf_{\|h\|=1}$q$(h) > 0$. Ainsi lorsque h tend vers 0, on a :
$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2}\left(q\left(h\right) + o\left(\|h\|^2\right)\right) = \frac{\|h\|^2}{2}\left(q\left(\frac{h}{\|h\|^2}\right) + o\left(1\right)\right).$

Ainsi $f(a+h)-f(a)\succeq \frac{\|h\|^2}{2}(\alpha+o(1))$. comme $\alpha+o(1)\succeq 0$ sur un voisinage de $h=0$, on en déduit que $f(a+h)\succeq f(a)$ sur ce voisinage.
(ii) Se ramène que cas (i)en considérant $-f$.
(iii) Si q n'est ni positive ni négative alors dans une certaine base on a :
q$(h)=x_1^2+\cdots+x_P^2-x_{P+1}^2\cdots-x_r^2$ avec$p\succeq 1$ et $r-p\succeq 1$
et $f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}\left(q(h)+o(\|h\|^2)\right)$.
Dons la direction $vect\,(0,...0,1,...,1)$ on a q$(h)\leq 0$ donc $f(a+h)\leq f(a)$ alors que dans la direction $vect\,(1,...1,0,...,0)$ on a q$(h)\succeq 0$ donc $f(a+h)\geq f(a)$. Donc a n'est pas un extremum relatif.

Exemple 4.1.1.1 *Soit* $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+xyz-z+y$. *Les points critiques de* f *sont les solutions du systéme*

$$\begin{cases} x+yz=0 \\ xz+1=0 \\ xy-1=0 \end{cases};$$

de sorte que l'unique point critique de f *est* $(1,1,-1)$. *Le développement de Taylor de* f *en ce point s'obtient en calculant l'expression* $f(1+h,1+k,-1+l)$; *elle vaut* $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}h^2+hl+kl-hk+\varepsilon(h,k,l)(h^2+k^2+l^2)$.

La disparition des termes du premier degré n'est pas un miracle, c'est simplement la confirmation du fait que $(1,1,-1)$ *est un point critique. Il nous reste alors à étudier le signe du forme quadratique* $q(h,k,l)=\frac{1}{2}h^2+hl+kl-hk$.

Une première méthode consiste à étudier la matrice symétrique associée à q. Il s'agit de

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A *sont 1,* $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Si* v *et* v' *sont des vecteurs propres de* A, *associés respectivement aus valeurs propres 1 et* -$\frac{\sqrt{3}}{3}$, *on a*

$q(v)=\|v\|^2$ *et* $q(v')=$-$\frac{\sqrt{3}}{3}\|v'\|^2$. *Comme la formes quadratique q. change le signe alors la fonction* f *n'admet pas d'extremum au point critique* $(1,1,-1)$.

Une seconde méthode c'est la méthode de Gauss qu'on a déjà étudée au chapitre 1.Cela nous donne

$$\begin{aligned} q(h,k,l) &= \tfrac{1}{2}\left(h^2+2h(l-k)\right)+kl \\ &= \tfrac{1}{2}(h+l-k)^2-\tfrac{1}{2}l^2-\tfrac{1}{2}k^2+2kl \\ &= \tfrac{1}{2}(h+l-k)^2-\tfrac{1}{2}(k-2l)^2+\tfrac{3}{2}l^2, \end{aligned}$$

d'où

$$q(1,1,0)=-\tfrac{1}{2}\ \textit{et}\ q(1,0,0)=-\tfrac{1}{2}$$

Exemple 4.1.1.2 *Pour* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, *On pose* $f(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+xz+\frac{1}{2}y^2+z^2$.

Déterminons les extremas de f. *En effet*

On a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x+z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=y \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=x+2z \end{cases}$. *Donc après la résolutions de ce systéme suivant :*

$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ *. On trouve un seul point critique :* $(0,0,0)$.

de plus on a $H_f\left(0,0,0\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Donc $H_f\left(0,0,0\right)$ *est définie poitive (les valeurs propres sont 1* ,$\frac{3\sqrt{5}}{2}$ *et* $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ *positives)*
D'où $(0,0,0)$ *est un minimum pour* f

4.2 Les coniques

4.2.1 Réduction de l'équation d'une conique

Définition 4.2.1.1 *Une conique* (C) *est une courbe du plan donnée dans le plan euclidien* $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ *par une équation* (E) : $ax^2+by^2+2cxy+dx+ey+f=0$ *, où* $(a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6$ *et* $(a,b,c)\neq 0$.

Remarque 4.2.1.1 *On peut écrire* (E) *sous la forme :* (E) : $q(x,y)+L\left(x,y\right)=f$ *où* q *est une forme quadratique non nul et* L *est une forme linéaire sur* $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4.2.1.1 *Soit* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\in S_n\left(\mathbb{R}\right)$ *muni de deux valeurs propres réelles* λ *et* μ *. Si* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *est une base orthonormée de vecteurs propres tel que* $A\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{u}$ *et* $A\overrightarrow{v}=\mu\overrightarrow{v}$, *alors l'équation de* (C) *dans le répère orthonormée* $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ *est de la forme :*
$\left(E'\right)$: $\lambda x'^2+\mu y'^2+gx'+hy'+f=0$.

Preuve. On peut supposer que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ ont même orientations (en echangent $\overrightarrow{u}$et $\overrightarrow{v}$ ou rem

On a $X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\equiv M\left(x,y\right)\equiv\overrightarrow{OM}=x\ \overrightarrow{i}+y\ \overrightarrow{j}\in(C)\Longleftrightarrow\left({}^tX\right)AX+\left(d\ \ e\right)X+f=0.$

Soit P la matrice de passage de $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ donc P est orthogonale et

$D={}^tPAP$ c'est-à-dire que $A={}^tP^{-1}DP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Or : $P\in O\left(n\right)\Longrightarrow P^{-1}={}^tP\Longrightarrow A=PD{}^tP.$

On a : $M\in(C)\Longleftrightarrow{}^tX\left(PD{}^tP\right)X+\left(d\ \ e\right)X+f=0$

$\Longleftrightarrow{}^t\left({}^tPX\right)D\left({}^tPX\right)+\left(d\ \ e\right)X+f=0$.

Or ${}^tPX=P^{-1}X$ est le vecteur colonne des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

Notons $X'=P^{-1}X=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $(g\ h)=\left(d\ \ e\right)P$.

D'où $M\in(C)\Longleftrightarrow\lambda x'^2+\mu y'^2+gx'+hy'+f=0.$

4.2.2 Classification des coniques

On peut classer les coniques selon la signature de q. En changeant eventuellement le signe des deux membres, on peut supposer $sgn\,(q)$ est $(2,0)$,$(1,1)$ ou $(1,0)$.
On peut trouver une base orthogonale pour q dans laquelle l'equation devient :
$\lambda X^2 + \mu Y^2 + gX + hY + f = 0.$

Théorème 4.2.2.1 *Soient C une conique et q la forme quadratique associée alors :*
1. Si $sgn\,(q) = (2,0)$ alors C est une ellipse ou $\emptyset$ ou $\{0\}$.
2. Si $sgn\,(q) = (1,1)$ alors C est une hyperbole ou deux droites sécantes
3. Si $sgn\,(q) = (1,0)$ alors C est une parabole qui peut dégénérer en une droite ou en 2 droites parallèles.

Preuve. 1. On a $sgn\,(q) = (2,0)$ donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. En posant $x = X + \frac{g}{2\lambda}$ et $y = Y + \frac{h}{2\mu}$ on obtient $\lambda x^2 + \mu y^2 = k$, si $k > 0$,on a donc l'équation d'une ellipse. si $k < 0$ alors C est l'ensemble vide, si $k = 0$ alors C se réduit a un point $\{0\}$.
2. On a $sgn\,(q) = (1,1)$ par exemple $\lambda > 0$ et $\mu < 0$. En posant $x = X + \frac{g}{2\lambda}$ et $y = Y + \frac{h}{2\mu}$ on obtient $\lambda x^2 + \mu y^2 = k$.Donc si $k \neq 0$, on pose $A = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ et $B = \sqrt{\frac{-k}{\mu}}$ pour avoir $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$. Sinon on a $\lambda x^2 + \mu y^2 = 0$ d'ou $\left(\sqrt{\lambda}x - \sqrt{-\mu}y\right)\left(\sqrt{\lambda}x - \sqrt{-\mu}y\right) = 0$ qui sont deux droites sécantes.
3. On a $sgn\,(q) = (1,0)$, dans ce cas $\lambda\mu = 0$ par exemple $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$ en posant $x = X + \frac{g}{2\lambda}$ et $y = -hY + f + \frac{g^2}{4\lambda}$ on obtient $\lambda x^2 = y$ si h$\neq 0$ d'ou une parabole et $\lambda X^2 + gX - f = 0$. Sinon donc une droite ou 2 droites paralléles dans le cas dégénéré

Exemple 4.2.2.1 *Soit (C) la conique d'equation :*
(E) $481x^2 + 384xy + 369y^2 + 2118x - 324y - 2124 = 0.$
dans un repére orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan euclidien .

L'application $(x,y) \mapsto 481x^2 + 384xy + 369y^2$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 481 & 192 \\ 192 & 396 \end{pmatrix}$ de valeur propres 225 et 625 .

Les sous-espaces propres associés sont engendrés par $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ et $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$ respectivement .
On normalise ces vecteurs, on pose $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$,$\overrightarrow{v}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Soit $M(x,y)_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$ et $M\left(x', y'\right)_{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$,on effectue alors le changement de repère : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Ainsi dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'équation de la conique devient :
$\left(E'\right)$ $225\ x'^2 + 625y'^2 + 1530x' + 1500y' - 2124 = 0.$
Cette équation équivalent à :
$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} - 1 = 0.$ *où* $X = \left(x' + \frac{17}{5}\right)$, $Y = \left(y' + \frac{6}{5}\right)$.

On pose $q(X,Y)=\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{9}$. *Donc q est un forme qudratique sur* $\mathbb{R}^2$.
on a $sgn\,(q)=(2,0)$ *et comme* $1>0$ *Alors* (C) *est une ellipse de centre* $I\left(-\frac{17}{5},-\frac{6}{5}\right)$.

4.3 Les quadriques

E un espace euclidien de dim 3.

4.3.1 Principe de réduction des quadriques

Soit $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$un repére orthonormé de E.
On désigne par Q l'ensemble des points M(x,y,z) dans $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ tels que :
(E) $ax^2+by^2+cz^2+2eyz+2fzx+gx+hy+iz+j=0$.
Q est appelé une quadrique. Avec $(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j)\in\mathbb{R}^{10}$ et $(a,b,c,d,e,f)\neq 0$.
Soient $A=\begin{pmatrix} a & d & f\\ d & b & e\\ f & e & c\end{pmatrix}\in S_n(\mathbb{R})$ et $X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ le vecteur colonne de comosantes de M. On a :

$$M\in\text{Q}\Longleftrightarrow {}^tXAX+(g\ h\ i)\,X+j=0.$$

Comme pour les coniques , en diagonalisant A on obtient le Théorème suivant :

Théorème 4.3.1.1 *Soit* α,β,γ *les valeurs propres réelle de A, et* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ *une base orthonormée de vecteurs propres de A associés resp à* α,β *et* γ .
On note $\left(x',y',z'\right)$ *les coordonnés de M dans la base* $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$.
Alors l'équation de Q dans le repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ *est de la forme :*
$\left(E'\right)$ $\alpha x'^2+\beta y'^2+\gamma z'^2+kx'+ly'+mz'+j=0$.

Remarque 4.3.1.1 *La factorisation canonique permet de réduire encore plus* $\left(E'\right)$. *Cette opération correspond à un changement d'origine c'est-à-dire se forme :*
$\frac{\left(x'-cte\right)^2}{cte^2}\pm\frac{\left(y'-cte\right)^2}{cte^2}\pm\frac{\left(z'-cte\right)^2}{cte^2}+cte=0$

4.3.2 Classification des quadriques

Comme les coniques,on peut classer les quadriques selon la signature de q. En changeant eventuellement le signe des deux membres, on peut supposer que $sgn\,(q)$ est $(3,0)$ ou $(2,1)$ ou $(2,0)$ ou $(1,1)$ ou $(1,0)$.

D'après le Théorème 3.5.1.1, on peut trouver une base orthonormale pour q dans laquelle l'équation devient : $\alpha X^2+\beta Y^2+\gamma Z^2+kX+lY+mZ=j$

Théorème 4.3.2.1 *Soit Q une quadrique non vide et qui ne se réduit pas à un point, et q la forme quadratique associée, alors :*

1. Si $sgn\,(q) = (3,0)$ alors Q est une ellipsoïde
2. Si $sgn\,(q) = (2,1)$ alors Q est un hyperboloïde à deux nappes, à une nappe ou un cône
3. Si $sgn\,(q) = (2,0)$ alors Q est une paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique.
4. Si $sgn\,(q) = (1,1)$ alors Q est une paraboloïde hyperbolique ou un cylindre hyperbolique.
5. Si $sgn\,(q) = (1,0)$ alors Q est un cylindre parabolique ou deux plans paralléles.

Preuve. 1. Si $sgn\,(q) = (3,0)$ alors $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ on pose $x = X + \frac{K}{2\alpha}$, $y = Y + \frac{l}{2\beta}$, $z = Z + \frac{m}{2\gamma}$ et $h = j - \frac{K}{4\alpha} - \frac{l}{4\beta} - \frac{m}{4\gamma}$, donne $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = h$, où $\alpha = \frac{1}{A^2}$, $\beta = \frac{1}{B^2}$ et $\gamma = \frac{1}{C^2}$.si $h > 0$ On trouve l'équation d'un ellipsoïde.

2 . Si $sgn\,(q) = (2,1)$ alors par exemple $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma < 0$ on pose $x = X + \frac{K}{2\alpha}$, $y = Y + \frac{l}{2\beta}$, $z = Z + \frac{m}{2\gamma}$ et $h = j - \frac{K}{2\alpha} - \frac{l}{2\beta} - \frac{m}{2\gamma}$, donne $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = h$, où $\alpha = \frac{1}{A^2}$, $\beta = \frac{1}{B^2}$ et $\gamma = -\frac{1}{C^2}$. Soit $h > 0$, alors on a l'équation d'un hyperboloïde à une nappe, si $h = 0$ on a un cône et si $h < 0$ on a un hyperboloïde à deux nappes.

3. Si $sgn\,(q) = (2,0)$ alors par exemple $\alpha > 0$, $\beta < 0$ et $\gamma = 0$ on pose $x = X + \frac{K}{2\alpha}$, $y = Y + \frac{l}{2\beta}$, si $m = 0$ alors l'équation devient $\alpha x^2 + \beta y^2 = h$ avec $h = j + \frac{K}{4\alpha} + \frac{l}{4\beta}$. C'est donc un cylindre elliptique. Sinon, l'équation devient $\alpha x^2 + \beta y^2 = z$ avec $z = j - mZ + \frac{K}{4\alpha} + \frac{l}{4\beta}$ c'est donc une paraboloïde elliptique.

4. Si $sgn\,(q) = (1,1)$ alors par exemple $\alpha > 0$, $\beta < 0$ et $\gamma = 0$ Par les mêmes changements de variable que le cas précédent on obtient $\alpha x^2 + \beta y^2 = h$ d'où $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = h$ qui est un cylindre hyperbolique ou alors $\alpha x^2 + \beta y^2 = z$ d'où $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = h$ qui est une paraboloïde hyperbolique.

5. Si $sgn\,(q) = (1,0)$ alors par exemple $\alpha > 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$ on pose $x = X + \frac{k}{2\alpha}$ et $y = h - lY - mZ + \frac{k^2}{2\alpha}$ pour obtenir $\alpha x^2 = y$ qui est une cylindre parabolique si l ou m non nul ou sinon deux plans paralléles avec $\alpha x^2 = h$

Exemple 4.3.2.1 *Soit $P(x,y,z) = -7x^2 + 25y^2 + 7z^2 + 48xz + 5x$.*

L'application $(x,y) \mapsto -7x^2 + 25y^2 + 7z^2 + 48xz$ est une forme qudratique a pour matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

les valeurs propre de A sont : 25(double) et -25. $Ker\,(A - 25I)$ est le plan d'équation $-4x + 3z = 0$, $Ker(A + 25I)$ la droite engendrée par le vecteur $(-4,0,3)$. Vioci une base orthonormée formée de vecteurs propres de A :

$$\begin{cases} v_1 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) \\ v_2 = (0,1,0) \\ v_3 = \left(\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \end{cases}.$$

Dans cette base,on a :

$P(x,y,z) = 25x^{"2} + 25y^{"2} - 25z^{"2} + 3x^{"} - 4z^{"}$

$\qquad = 25\left(x^{"} + \frac{3}{50}\right)^2 + 25y^{"2} - 25\left(x^{"} + \frac{2}{25}\right)^2 + \frac{7}{100}.$

Les coordonnées privilégiées sont $x^{'} = x^{"} + \frac{3}{50}$, $y^{'} = y^{"}$, $z^{'} = z^{"} + \frac{2}{25}$*, l'origine du repére privilégie*

$\Omega\left(\frac{7}{250}, 0, -\frac{24}{125}\right).$

Discutons l'aspect de la surface S_k *d'équation* $P(x,y,z) = k$*. Dans le repère privilégié, l'equation de* S_k *est*

$25x^{'2} + 25y^{'2} - 25z^{'2} = k - \frac{7}{100}.$

On pose $q\left(x^{'}, y^{'}, z^{'}\right) = 25x^{'2} + 25y^{'2} - 25z^{'2}$*, où* q *est une forme qudratique sur* $\mathbb{R}^3$*. alors on a* $sign(q) = (2,1)$ *. Donc discutons suivant* $k - \frac{7}{100}$

$\triangleright$ *Pour* $k \succ \frac{7}{100}$, S_k *est un hyperboloïde à une nappe ;*

$\triangleright$ *Pour* $k \prec \frac{7}{100}$, S_k *est un hyperboloïde à deux nappes ;*

$\triangleright$ *Pour* $k = \frac{7}{100}$, S_k *est un cône à base circul*

Conclusion

Dans ce travail on a défini les notions les plus importans dans l'algébre bilinéaire comme :
– Les formes bilinéaires et les formes quadratiques
– La notion des bases orthogonales et des bases orthonormales
– La notion de produit scalaire en dimention finie ou infinie
– la notion d'isométries d'un espace euclidien
– Les formes hermitiennes
– Espace hermitien ou espaces de Hilbert
Enfin j'ai terminé mon travail par donner quelques applications des formes qudratiques.

Bibliographie

[1] Jacqueline LEONG-FRRAND et Jean-Marie ARNAUDIÈS, Cours de mathématique Tome 1 Algébre, Dunod 1986.

[2] Polycopié de Jean-François Havet, Algèbre bilinéaire et géométrie euclidienne, Janvier 2013.

[3] Valérie COLLET, MATHS Toute la deuxième année, ellipses.