UNIVERSITE SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH
FST FES
Département de mathématiques

LICENCE SCIENCES ET TECHNIQUES
MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme de licence Sciences et Techniques

Simulation numérique de la dérivée d'une fonction par extrapolation de Richardson

Réalisé par:

- *Ghita Youbi Idrissi*

Encadré par :

- *Pr. Mohamed Bellahmar*

Soutenue le 9 juin 2016 devant le jury composé de:

- *Pr. Mohamed ElKhoumssi*
- *Pr. Abdelmajid Hilali*

Année Universitaire : 2015-2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES - SAISS

B.P. 2202 - Route d'Imouzzer - FES

212 (0)5 35 61 16 86 - Fax : 212 (0)5 35 60 82 14

Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Simulation numérique de la dérivée d'une fonction par extrapolation de Richardson

Ghita Youbi Idrissi

Juin 2016

Dédicace

Je dédie ce travail avec le plus grand plaisir à :

- *Ma famille*
- *Mes cousines*
- *Mes amies*
- *Tous les membres du Club espoir*

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah soubhanou Wa ta hala

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de mon PFE :

Au début, je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude à mon encadrant ***Mr Mohamed Bellahmar*** *pour son aide et le temps qu'il m'a accordé.*

Je tiens également à remercier ***Mr Abdelmajid Hilali*** *et* ***Mr Mohamed Khoumssi*** *pour leurs acceptations d'être jury lors de ma présentation.*

Aussi, je remercie la ***FST Fès*** *de m'offrir l'opportunité de faire ce travail ainsi que tout son staff administratif et pédagogique, et tous les étudiants de la licence Maths Appliquées.*

Mes remerciements s'adressent également au doyen de la FST Fès Mr ***Mustapha LJJAALI****, ainsi qu'au coordonnateur de la filière Maths Appliquées* ***Monsieur Anisse Ouadghiri****.*

Un gros merci à ma famille pour son soutien aussi bien moral que financier et pour ses sacrifices.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou loin à la réalisation de ce travail.

Sommaire

1 Introduction **6**

2 La théorie d'interpolation **8**

2.1 Méthode directe : Vandermonde 9

2.2 Méthodes itératives: 10

2.2.1 Méthodes de Lagrange : 10

2.2.2 Méthodes de Newton-C$\hat{o}$tes : 12

2.3 Erreur d'interpolation: 14

2.3.1 Erreur de Lagrange : 14

2.3.2 Erreur de Newton-Cotes : 17

2.4 La formule de Taylor: 19

3 La dérivation **20**

3.1 Développement de Taylor: 21

3.1.1 Méthodes de différences centrées : 22

3.1.2 La dérivée d'ordre supérieure : 22

3.2 Application de l'interpolation: 23

4 Extrapolation de Richardson **26**

4.1 Procédé générale : 27

4.2 Erreur de l'extrapolation : 29

4.3 Algorithme de l'extrapolation de Richardson : 29

5 Application **31**

5.1 Théoriquement : 31

5.2 Pratiquement : Par Matlab 36

6 Conclusion **40**

Référence : **42**

Index : **43**

Chapitre 1

Introduction

Les fonctions numériques sont des procèdes qui, à un nombre, associent un nombre unique ; l'utilité des fonctions est indispensable dans tous les domaines, ainsi elles servent à déterminer les relations entre différents facteurs, en d'autre termes elles permettent de représenter l'évolution d'une grandeur dans le temps ou de décrire une grandeur qui dépend de la position de mesure dans un espace, tel que la température ou la pression en thermodynamique. Elles peuvent aussi modéliser l'influence d'un ou plusieurs paramètres sur un résultat, par exemple en biologie ou encore en chimie.

En ce qui concerne la dérivée, certes il parait que ce n'est qu'une notion abstraite. Mais, elle aussi occupe une place primordiale dans les autres sciences. Prenons le cas de physique, où elle sert à étudier le mouvement d'un objet, c'est-à-dire sa vitesse ainsi que son accélération. Aussi le cas d'économie où elle peut servir à trouver le niveau de production qui maximise le bénéfice. Egalement son utilité en biologie dans le calcul du taux de croissance ainsi que dans la prédiction de l'évolution d'une colonie de bactéries. Et tout cela ce n'est que des applications parmi tant d'autres.

Du coup, l'objectif de mon projet est d'avoir une bonne approximation de la dérivée d'une fonction numérique connue seulement en un nombre fini de points tout en utilisant la méthode d'extrapolation de Richardson.

Chapitre 2

La théorie d'interpolation

Il y a plusieurs méthodes d'approximation des fonctions, tel que l'interpolation par les fonctions splines (graphique par ordinateur), les séries de Fouriers et leurs analogue discret (fonctions périodiques), et la méthode la plus classique : l'interpolation polynomiale grâce à sa simplicité au niveau de la détermination explicite du polynôme interpolé.

L'existence du polynôme est basée sur le théorème de Weirstrass :

Toute fonction continue sur un intervalle fermé [a,b] C IR peut être approchée par un polynôme de degré n, tel que :

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, P_n : \; \forall x \in [a,b] \; \max|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$

L'interpolation polynomiale consiste à chercher une approximation d'une fonction, dont on ne connait pas l'expression analytique, à partir de (n+1) points : $x_0, \ldots, x_n$et des valeurs $y_1, \ldots, y_n$de la fonction en ces points.

Pour estimer la valeur de f en un point x quelconque, On cherche à construire un polynôme proche de la fonction f tel que pour chaque $i = \{0, \ldots n\}$: $P(x_i) = y_i$ de sorte qu'on aurait construit une approximation de la fonction f(x) par un polynôme P(x).

En ce qui concerne la construction du polynôme, il existe des méthodes directes et d'autres indirectes et chacune d'elles présente le même polynôme mais selon une base différente ainsi que des atouts et défauts distincts.

On étudie les méthodes les plus connues : la méthode de Vandermonde comme une méthode directe et la méthode de Lagrange et celle de Newton-Cotes comme méthodes itératives.

2.1 Méthode directe : Vandermonde

Puisque un polynôme de degré n s'écrit sous la forme :
$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$; La méthode de Vandermonde cherche alors à déterminer les coefficients$(a_0, \ldots, a_n)$ du polynôme qui interpole la fonction f en résolvant le système linéaire suivant :
$P_n(x_i) = y_i \; avec \; i = \{0, \ldots, n\} et \; y_i = f(x_i)$ et $\forall \, i, j \in \{0, \ldots, n\} : x_i \neq x_j$

Matriciellement, le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

D'où on obtient la matrice de Vandermonde dont le déterminant est : $\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Preuve du calcul du déterminant par récurrence :

On a la propriété pour n points :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \qquad (E)$$

Pour n = 2 : soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ $V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$ donc (E) est vraie.

Pour n ≥ 2 :

Supposons que (E) est vraie pour n points et montrons que (E) est vraie pour (n+1) points :

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \textstyle\prod_{1 \leq k \leq n} (x_{n+1} - x_k) V(x_1, \dots, x_n) \\ &= \textstyle\prod_{1 \leq k \leq n} (x_{n+1} - x_k) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= \textstyle\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

D'où la proposition (E) est vraie $\forall n \geq 2$

Remarque :

Cette méthode ne peut être utilisé que pour ≤ 3 . Enfaite, si on augmente le nombre de points, la matrice de Vandermonde devient mal conditionnée car elle est pleine et il suffit juste une petite erreur sur les coefficients ou le second membre qui peut entrainer une erreur importante sur la solution du système.

2.2 Méthodes itératives:

2.2.1 Méthodes de Lagrange :

Cette méthode permet d'interpoler une fonction f à partir de la construction d'un polynôme unique de degré $d° \leq n$ qui passe par les (n+1) points distincts donnés et qui est exprimé selon une base de polynômes L_i :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Avec les (n+1) polynômes L_i de degré n sont définis de la manière suivante :

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{i+1})}$$

Propriétés :

- On a les $L_i$vérifient les propriétés suivantes :

  * $L_i(x_k) = 0 \;\; si \; i \neq k \; et \; 0 \leq k \leq n$

  * $L_i(x_i) = 1$

Preuve :

- ***L'existence de polynôme :***

On a les L_i forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$; donc $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}\,, i = \{0, \dots, n\} \; tel \; que$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i L_i(x)$$

Si on prend : $x = x_k$ avec : $0 \leq k \leq n$, $L_i(x_k) = 0 \;\; si \; i \neq k$ et $L_k(x_k) = 1$

On aura $\alpha_k = P(x_k) = f(x_k)$

D'où $\exists P_n \; le \; polynome \; interpolant \; la \; fonction \, f \;\; tel \; que$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

- ***L'unicité du polynôme :***

Supposons Q et P deux polynômes d'interpolation de f de degrés n ;
Soit : R = Q – P donc R est de degré n

Avec $R(x_i) = Q(x_i) - P(x_i) = 0 \; \forall i \epsilon \{0, \dots, n\}$; car : $f(x_i) \approx P(x_i) = Q(x_i)$

D'où R admet (n+1) racines donc R est un polynôme nul

Conclusion : le polynôme d'interpolation est unique

Remarque :

* Le polynôme de Lagrange n'est pas récursif donc on aura besoin du calcul des coefficients du polynôme chaque fois on change le nombre de points par exemple :

- Pour : n=1 (c.-à-d. pour 2 points distincts) on a une interpolation de Lagrange linéaire :

$$P_1(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x)$$

$$= y_0\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} \qquad \text{Selon la base de Lagrange ;}$$

$$= \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x + \frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0} \qquad \text{Selon la base canonique.}$$

- Pour : n=2 (c.-à-d. pour 3 points distincts) c'est une interpolation de Lagrange parabolique :

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Selon la base de Lagrange ;

$$= \frac{(y_1-y_2)x_0+(y_2-y_0)x_1+(y_0-y_1)x_2}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}x^2 + \frac{(y_2-y_1)x_0^2+(y_0-y_2)x_1^2+(y_1-y_0)x_2^2}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}x + \frac{(y_1x_2-y_2x_1)x_0^2+(y_2x_0-y_0x_2)x_1^2+(y_0x_1-y_1x_0)x_2^2}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Selon la base canonique.

N.B : le polynôme interpolé obtenue avec la méthode de Lagrange est le même obtenue avec la méthode de Vandermonde, il est seulement exprimé selon des bases différentes.

* Pour certaines fonctions rationnelles et en choisissant (n+1) points équidistants sur un intervalle donné, on a une convergence de P(x) vers f(x) autour de l'origine mais une divergence aux bords de cet intervalle, par exemple : $g_a(x) = \frac{1}{1+a^2x^2}$ et $h_a(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ sur l'intervalle [-1,1].Ce phénomène s'appelle L'effet de Runge.

2.2.2 Méthodes de Newton-Côtes :

Cette méthode consiste à construire un polynôme selon la base de Newton qui interpole une fonction à partir de (n+1) points d'interpolation à l'aide de la notion des différences divisées et la récursivité du polynôme de Newton.

Le polynôme de Newton s'écrit sous la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

Avec $a_k = f[x_0, x_1, \dots x_k]$ la différence divisée à l'ordre k et $k = \{0, \dots, n\}$

Le calcul des différences se fait selon la méthode suivante :

Pour k=0 : $f[x_0] = f(x_0)$

Pour k=1 : $f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$

Pour k=2 : $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

Pour k=n : $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_{n-1},x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

En pratique on calcul les coefficients a_k par :

	a_0	a_1	a_2		a_n
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
...	...	...	...		
...	...	...	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	...	$f[x_0, \dots, x_n]$

Et on a la relation entre deux polynômes de Newton qui interpolent une fonction à partir de n et (n+1) points d'interpolations :

$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_{n+1}](x - x_0) \dots (x - x_n)$

Avec : $P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$

Remarque :

Si les points choisis sont équidistants on aura comme base les différences finies au lieu des différences divisées.

Et en posant $f_0 = f(x_0)$ le polynôme de Newton s'écrit :

$$P_n(x) = f_0 + s\,\nabla f_0 + s(s-1)\nabla^2 f_0 + \cdots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\nabla^n f_0$$

Avec : $0 \leq s = \frac{x-a}{h} \leq n$; $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$; $et\ \nabla^k f_i = f[x_i, \ldots, x_{i+k}]k!\,h^k$ et $x_i = x_0 + ih$

2.3 Erreur d'interpolation:

L'erreur d'interpolation est la différence entre le polynôme d'interpolation et la fonction explicite.

2.3.1 Erreur de Lagrange :

Si $P_n(x)$ est le polynôme d'interpolation d'une fonction f en utilisant les (n+1) points $x_0, \ldots, x_n$ tel que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, l'erreur d'interpolation sur l'intervalle $[x_0, x_n]$ est donnée par le théorème suivant :

> Soit $f \in C^{n+1}(I_x)$, tel que I_x est le plus petit intervalle contenant les points $x_0, \ldots, x_n\ et\ x$, on a :
>
> $$\exists \xi_x \epsilon\ I_x\ \forall x \epsilon I_x\ e_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \quad \text{(E1)}$$

Sachant que ξ_x dépend de x ; on a :

Si $f^{n+1}(\xi_x)$ est inconnue, on peut la majorer par une constante $c_{n+1} \epsilon\ I_x$ tel que :

$$|f^{n+1}(\xi_x)| \leq c_{n+1}\ \forall x \epsilon\ [x_0, x_n]$$

Rappel :

Théorème de Rolle :

Soit f une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[tel que : f(a)=f(b)

Alors : $\exists c \epsilon]a, b[$ f'(c) = 0

Cas particulier : Pour f(a) = f(b) = 0 :

Entre deux zéros de f il y a un zéro de f', donc si f s'annule (n+1) fois f$^{(n)}$s'annule 1 fois.

Preuve :

Pour $x = x_j, j = \{0, \dots, n\}$: L'égalité (E1) est vérifiée car puisque les points x_j sont des points d'interpolation alors l'erreur est nulle.

Pour $x \neq x_j, j = \{0, \dots, n\}$:

Soit la fonction en x : $\pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$;

Montrons que $e_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi(x)$

Posons la fonction en t : $h(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi(x)}\pi(t)$

On a pour $t = x_j, j = \{0, \dots, n\}$:

$$h(x_j) = 0 \ ; \ \pi(x_j) = \prod_{i=0}^{n}(x_j - x_i) = (x_j - x_0) \dots (x_j - x_n)$$

En effet $\pi(x_j) = \prod_{i=0}^{n}(x_j - x_i) = (x_j - x_0) \dots (x_j - x_n) = 0 \ ; \ j = \{0, \dots, n\}$

Et $f(x_j) = P_n(x_j)$; $j = \{0, \dots, n\}$

D'où : $h(x_j) = f(x_j) - P_n(x_j) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi(x)} \pi(x_j) = 0 \, ; j = \{0, \dots, n\}$

On a encore :

$$h(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi(x)}\pi(x) = f(x) - P_n(x) - f(x) + P_n(x) = 0$$

Donc h admet (n+2) zéros qui sont $x_0, \dots, x_n et\ x$

D'après le théorème de Rolle, on constate que $h^{(n+1)}$admet 1 seul zéro ; soit $\xi_x$ce zéro.

Or on a : $h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi(x)}\pi^{(n+1)}(t)$

Et puisque $P_n$est de degré n et π est de degré (n+1) et de facteurs unitaires

Alors $P_n^{(n+1)}(t) = 0$ et $\pi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$

Donc $h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi(x)}(n+1)!$

Et on a $h^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ et $h^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x)-P_n(x)}{\pi(x)}(n+1)!$

Donc on a l'égalité suivante :

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi(x)}(n+1)! = 0$$

D'où : $f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi(x)$

Conclusion : $e_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi(x)$

D'où l'égalité (E1) est vérifiée $\forall x \epsilon I_x$.

Remarque :

* On a dans le terme d'erreur l'expression $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ qui ne dépend que de la division $\{x_0, \dots, x_n\}$. Alors pour pouvoir réduire les effets de Runge, on cherche sur l'intervalle [a,b] la division qui minimise $L = \max_{x\epsilon[a,b]} |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$ à l'aide des polynôme de Tchebychev.

* Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes tel que :

Pour n = 0, 1, 2, … et pour $x\epsilon[-1,1]$: $T_n(x) = \cos(n\, arccosx)$

Avec : $T_0(x) = 1\,, T_1(x) = x\,, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$;

* *Lemme :* Soit q(x) un polynôme de degré n dont le coefficient de x^nest 2^{n-1} et soit $q(x) \not\equiv T_n(x)$.

Alors, $\max_{x\epsilon[-1,1]} |q(x)| > \max_{x\epsilon[-1,1]}|T_n(x)| = 1$.

Donc pour $q(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$:

$\max\limits_{x\epsilon[-1,1]} |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$ est minimal si et seulement si $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$

C.-à-d. : Si et seulement si $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right) pour\ k = 0,1, \dots, n$.

* Et si on travaille sur l'intervalle [a,b], l'expression de L est minimale parmi toutes les divisions $\{x_0, \dots, x_n\}$ si et seulement si :

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right) \; pour \;\; k = 0,1, \dots, n.$$

2.3.1 Erreur de Newton-Cotes :

On a la relation entre f(x) et les différences divisées en les x_i :

Soit $x \neq x_i \, ; i = \{0, \dots, n\}$

On a $f[x, x_0] = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ donc $f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x, x_0]$

Et on sait que $f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$

Alors $f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x, x_0, x_1]$

En continuant de remplacer les différences divisées :
$f[x, x_0, x_1], \dots, f[x, x_0, \dots, x_{n-1}]$

On aura :

$$\begin{aligned} f(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n] \\ + (x - x_0) \dots (x - x_n)f[x, x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

D'où $f(x) = P_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n)f[x, x_0, \dots, x_n]$

Donc $e_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)f[x, x_0, \dots, x_n]$ (1)

Et on a le théorème suivant :

Si $f \epsilon C^{(n)} et \; x_i ; \; i = \{0, \dots, n\}$ sont n+1 points distincts de [a,b], alors il existe ξdans le plus petit intervalle contenant les points x_i; $i = \{0, \dots, n\}$ tel que :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Preuve :

On a $e_n(x) = f(x) - P_n(x) \epsilon C^{(n)}([a,b])$

Et $e_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i) = 0$, $i = \{0, \dots, n\}$ donc e_n admet n+1 zéros Donc d'après le théorème de Rolle $\exists \xi \epsilon I_n : e_n^{(n)}(\xi) = 0$

D'où : $f^{(n)}(\xi) = P_n^{(n)}(\xi)$

Et puisque $P_n^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, \dots, x_n]$ alors : $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{P_n^{(n)}(\xi)}{n!}$

Donc $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

Remarque :

Si $f \in C^{n+1}$sur [a,b] .soit $x \neq x_i \epsilon [a,b]$; $i = \{0, \dots, n\}$

On a P_{n+1} est l'unique polynôme qui interpole f en les $x_i$et x tel que :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x, x_0, \dots, x_n]$$

D'après le théorème précédent : $\exists \zeta \epsilon I$: $f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$

Ainsi, on constate d'après (1) que :

$\exists \zeta \epsilon I$ $e_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$

2.4 La formule de Taylor:

L'interpolation avec la formule de Taylor consiste à approximer une fonction au voisinage d'un point précis x_0, mais on ne peut l'utiliser que si on avait f dérivable en x_0 jusqu'à l'ordre n, et si on avait les valeurs des dérivées nième de f en ce point; pour avoir un polynôme P de degré $d \leq n$, tel que :

$$P(x_0) = f(x_0)\ et\ P'(x_0) = f'(x_0); \dots ; P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Le polynôme P interpolant f s'écrit alors sous la forme :

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

Théorème de Taylor :

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction définies sur un intervalle I de IR, on suppose n étant un entier naturel donne, que f et ses dérivées $f, f', \dots, f^{(n)}$ sont définies et continues sur I, et $f^{(n+1)}$ définie sur I.

Pour tout couple de points a, b de I il existe un réel c, a<c<b si a<b et b<c<a si a>b tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \cdots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque :

On sait que f(x) = P(x) + E(x)

Si on prend dans la formule de Taylor b = x, a = x_0, on aura :

$$E(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Chapitre 3

La dérivation

La dérivation numérique consiste à approximer la dérivée d'une fonction par différentes méthodes numériques soit dans le cas où le calcul analytique de la dérivée est très compliquées, soit on ne connait pas la forme analytique de la fonction.

La méthode la qui semble être la plus simple est d'utiliser la définition de la dérivée au voisinage de 0 :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{i.e} \quad : f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Théoriquement, cette méthode est d'ordre 1. En effet on a la proposition suivante :

Proposition :

Soit f une fonction deux fois dérivables dont on souhaite évaluer la dérivée en x. On défini l'erreur comme $E(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$.

Pour tout h il existe $\xi \epsilon [x, x+h]\ et\ C > 0$ tels que :$|E(h)| \leq \frac{C}{2}h$

Preuve :

On a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi)$

Donc $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2!}f''(\xi)$

Supposons que $|f''| \leq C$ sur$[x, x+h]$, on aura : $|E(h)| \leq \frac{C}{2}h$.

Pratiquement, les erreurs d'arrondis empêchent la méthode de converger linéairement vers la dérivée recherchée. Pour cela on propose d'autres méthodes d'approximation numérique de la dérivée.

3.1 Développement de Taylor:

On a D'après la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

3.1.1 Méthodes de différences centrées :

On a : $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Cette méthode est d'ordre 2 et moins sensible aux erreurs d'arrondis.

En effet : soit f une fonction trois fois continûment dérivable

D'après le développement en série de Taylor, on a :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_+)}{3!}h^3 \quad (1)$$

Et

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_-)}{3!}h^3 \quad (2)$$

Avec $\xi_+ \epsilon [x, x+h] et \xi_- \epsilon [x-h, x]$.

On (1) – (2) : $f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{f'''(\xi_+)+f'''(\xi_-)}{6}h^3$

Donc : $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)}{6}h^2$

D'où $|E(h)| = |\ \frac{f'''(\xi)}{6}h^2| \leq \frac{C_2}{6}h^2$ avec $|f'''(\xi)| \leq C_2\ ;\ C_2 > 0$

* On peut augmenter l'ordre de cette méthode en 4 si on considère le polynôme de degré 3 passant par les points (x-2h), (x-h), (x+h) et (x+2h) ; avec f une fonction cinq fois continûment dérivable et on aura :

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

D'où l'erreur est tels que : $|E(h)| = |\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)| \leq |\frac{C_4}{30}h^4|$

Avec $|f^{(5)}(\xi)| \leq C_4\ ;\ C_4 > 0$.

Remarque :

Dans certains cas on n'a pas la valeur de la fonction en les points nécessaires pour appliquer cette méthode, ce qui nous conduit à chercher une autre solution qui consiste à utiliser l'interpolation polynomiale aux points disponibles afin d'approximer la dérivée par la dérivation de l'interpolé de la fonction obtenu.

3.1.2 La dérivée d'ordre supérieure :

On procède d'une manière similaire à celle au cas de dérivée première

Formule centrée du calcul de la dérivée seconde :

Proposition :

Soit f une fonction quatre fois continûment dérivable en x. On a :

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

Preuve :

On a d'après la formule de Taylor :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_+) \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_-) \quad (2)$$

Avec $\xi_- \epsilon [x-h, x]\ et\ \xi_+ \epsilon [x, x+h]$.

Donc : [(1) + (2) – 2 f(x)] nous donne :

$$f(x-h)+f(x+h)-2f(x)=f''(x)h^2+\frac{f^{(4)}(\xi_-)+f^{(4)}(\xi_+)}{24}h^4$$

Comme $f^{(4)}$ est continue par hypothèse, on peut utiliser le théorème de la valeur intermédiaire.

Il existe par conséquent $\xi\epsilon[\xi_-,\xi_+]$ tel que : $f^{(4)}(\xi)=\frac{f^{(4)}(\xi_-)+f^{(4)}(\xi_+)}{2}$

On a donc finalement : $f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$.

En ce qui concerne la 3ème et la 4ème dérivée, on prend une combinaison linéaire des développements de Taylor, pour $f(x+2h)$, $f(x+h)$, $f(x-h)$ et $f(x-2h)$

Et on a :

$$f^{(3)}(x)\approx\frac{1}{2h^3}[f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)]$$

$$f^{(4)}(x)\approx\frac{1}{h^4}[f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)]$$

3.2 Application de l'interpolation:

Le concept de cette méthode est de dériver l'approximation de f en utilisant les points donnés quand on n'a pas les valeurs de f des deux cotés de x. Par exemple, le polynôme obtenue par interpolation de Lagrange en les points : $x,\ x+h,\ x+2h$:

$$P(t)=f(x)\frac{(t-x-h)(t-x-2h)}{2h^2}+f(x+h)\frac{(t-x)(t-x-2h)}{-h^2}+f(x+2h)\frac{(t-x)(t-x-h)}{2h^2}$$

En dérivant par t, on obtient :

$$P'(t)=\frac{f(x)}{2h^2}\big((t-x-h)+(t-x-2h)\big)+\frac{f(x+h)}{-h^2}\big((t-x)+(t-x-2h)\big)+\frac{f(x+2h)}{2h^2}((t-x)+(t-x-h))$$

$$=\frac{(f(x)-2f(x+h)+f(x+2h))}{h^2}(t-x)+\frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h}$$

D'où pour t=x : $P'(x)=\frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h}\approx f'(x)$

Cette méthode est d'ordre 2

En effet, on a la proposition suivante :

Soit f (n+1) fois continument différentiable sur $[a,b]$.et soient $x_0,\ldots,x_n$ les (n+1) points donnés. Et soit $P_n$le polynôme interpolé de f en ces points.

Alors, il existe $\xi_x \epsilon [a,b]$ tel que :

E(h)=$e_n'(x) = f'(x) - P_n{}'(x)$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\pi'(x) f^{(n+1)}(\xi_x) + \frac{1}{(n+1)!}\pi(x)\frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(\xi_x)\right)$$

Avec $\pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Si $x = x_i$, $i = \{0,\ldots,n\}$: $\pi(x)$ s'annule et l'expression de l'erreur devient

E(h) $= e_n'(x) = f'(x) - P_n{}'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi'(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$

Donc en utilisant les points x, (x+h) et (x+2h), on a :

$$\pi'(t) = \left(\prod_{i=0}^{2}(t - x_i)\right)' = \big((t - x)(t - x - h)(t - x - 2h)\big)'$$

$$= \big(-3(x + h)t^2 + (6x^2 + 6xh + 2h^2)t - (x^2 + xh)(x + 2h)\big)'$$

$$= -6(x + h)t + 6x^2 + 6xh + 2h^2$$

Donc pour t = x : $\pi'(x) = -6x^2 - 6hx + 6x^2 + 6xh + 2h^2 = 2h^2$

D'où :

|E(h)| $= |\frac{1}{(n+1)!}(2h^2) f^{(n+1)}(\xi_x)| = |\frac{2f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}|h^2 \leq |\frac{2C_{2'}}{(n+1)!}|h^2$; $C_{2'} > 0$

Donc la méthode est d'ordre 2.

Si $x \neq x_i$, $i = \{0, \dots, n\}$: Il faut connaitre $\frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(\xi_x)\right)$ alors que ξ_x est inconnue

D'où on utilise la notion de différence :

$$\frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(\xi_x)\right) = \frac{d}{dx}(f[x_0, \dots, x_n, x])$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f[x_0,\dots,x_n,x+h] - f[x_0,\dots,x_n,x]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f[x_0, \dots, x_n, x, x+h]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(n+2)} f^{(n+2)}\left(\theta_{x,h}\right)$$

On doit donc se contenter d'une estimation :

$$E(h) = |e_n'(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|\pi'(x)|C_{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}|\pi(x)|C_{n+2}$$

Sachant que : $|f^{(n+1)}(\xi_x)| \leq C_{n+1}$ *et* $|f^{(n+2)}\left(\theta_{x,h}\right)| \leq C_{n+2}$; $C_{n+1} \geq 0$, $C_{n+2} \geq 0$

Chapitre 4

Extrapolation de Richardson

L'extrapolation de Richardson comporte à trouver une combinaison linéaire qui permet de se débarrasser du terme d'ordre inférieur dans l'expression de l'approximation de la dérivée afin d'augmenter l'ordre de la précision en utilisant les pas h, h/2, h/4,…etc. Pour avoir en fin de compte une série d'approximations qui converge quadratiquement vers la dérivée.

4.1 Procédé générale :

Soit $R(h)$ l'approximation de la dérivée, et supposons qu'elle admet un développement :

$R_n(h) = f'(x) + c_n h^n + c_{n+1} h^{n+1} + \cdots \qquad (1)$

Si$c_n \neq 0$, alors la méthode est d'ordre n.

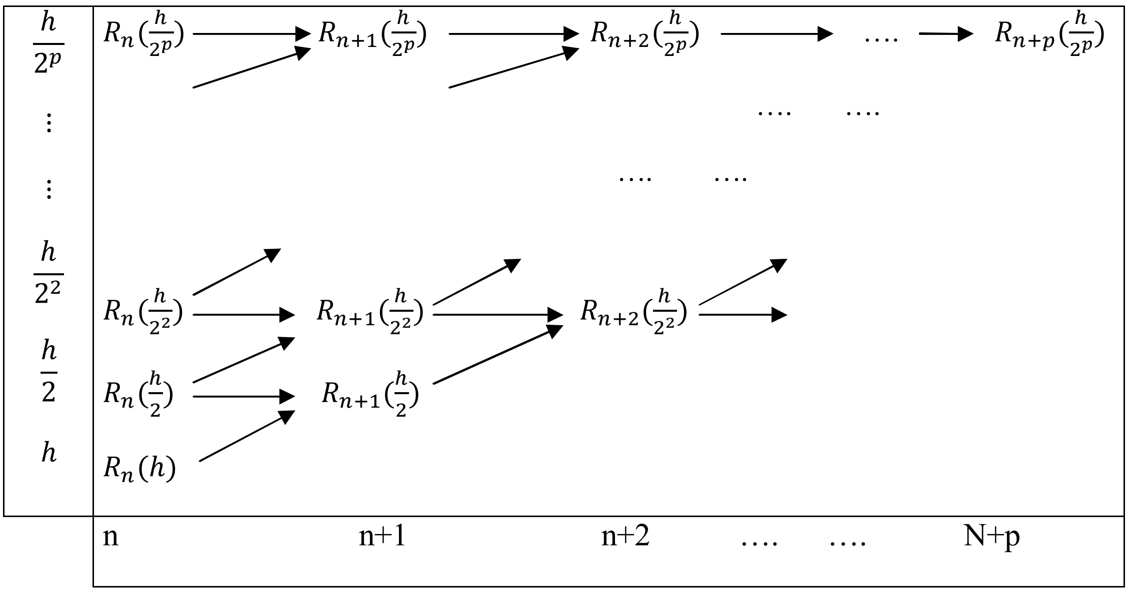
On considère $R_n(h)$ écrite pour $\frac{h}{2}$:

$R_n\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{1}{2^n} c_n h^n + \frac{1}{2^{n+1}} c_{n+1} h^{n+1} + \cdots \qquad (2)$

On effectuant la combinaison linéaire suivante: $[2^n(2) - (1)]$, on obtient :
$2^n R_n\left(\frac{h}{2}\right) - R_n(h) = (2^n - 1)f'(x) - \frac{1}{2} c_{n+1} h^{n+1} + \cdots$

i.e.: $R_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^n R_n\left(\frac{h}{2}\right) - R_n(h)}{2^n - 1} = f'(x) - \frac{1}{2(2^n-1)} c_{n+1} h^{n+1} + \cdots$

On peut donc dire que $R_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^n R_n\left(\frac{h}{2}\right) - R_n(h)}{2^n - 1}$ est une approximation de f'd'ordre au moins n+1. Et tant qu'on applique ce procédé tant qu'on aura plus de précision.



On peut appliquer ce procédé sur la méthode de l'approximation progressive come on peut l'appliquer sur la méthode des différences divisées.

- Partons de la formule des différences divisées :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

On a $R_2(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{f'''(\xi)}{6}h^2 + \cdots$ cette méthode est d'ordre 2

Et en remplaçant par $\frac{h}{2}$ on aura :

$$R_2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = f'(x) + \frac{f'''(\xi)}{6}\frac{h^2}{4} + \cdots$$

Donc : $R_3\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^2R_2\left(\frac{h}{2}\right) - R_2(h)}{2^2-1} = f'(x) - \frac{1}{2(2^2-1)}c_3h^3 + \cdots$ avec $c_3 = 0$

D'où on obtient une nouvelle approximation de f' qui est d'ordre 4:

$$R_3\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{4R_2\left(\frac{h}{2}\right)-R_2(h)}{3} = \frac{1}{3}\left(4\,\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right) \approx f'(x)$$

- De même partons de la formule de l'approximation progressive :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

On a $R_1(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}h + \cdots$

Cette méthode est d'ordre 1

Et on a : $R_1\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{\frac{h}{2}} = f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\frac{h}{2} + \cdots$

D'où : $R_2\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2R_2\left(\frac{h}{2}\right) - R_2(h)}{2-1} = f'(x) + \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^2 + \cdots$

Ainsi on a obtenu une autre approximation de f' qui est d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} R_2\left(\frac{h}{2}\right) = 2R_1\left(\frac{h}{2}\right) - R_1(h) &= 4\,\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \frac{4f\left(x+\frac{h}{2}\right) - 3f(x) - f(x+h)}{h} \approx f'(x) \end{aligned}$$

Remarque :

On peut même utiliser L'extrapolation de Richardson dans l'interpolation polynomiale et l'intégration numérique.

4.2 Erreur de l'extrapolation :

En ce qui concerne l'erreur, on a :

$R_n(h) = f'(x) + c_n h^n + \sum_{k\geq n+1} c_k h^k$ et $R_n\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) + \frac{1}{2^n} c_n h^n + \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{2^k} c_k h^k$

D'où : $2^n R_n\left(\frac{h}{2}\right) - R_n(h) = (2^n - 1)f'(x) + \sum_{k\geq n+1}(2^{n-k} - 1)c_k h^k$

Donc $R_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^n}{2^n-1}(R_n\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2^n} R_n(h)) = f'(x) + \sum_{k\geq n+1}(\frac{2^{n-k}-1}{2^n-1})c_k h^k$

Et puisque $R_{n+1}(h)$ est l'approximation def', alors :

$$E_{n+1}(h) = R_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) - f'(x) = \sum_{k\geq n+1} (\frac{2^{n-k} - 1}{2^n - 1})c_k h^k$$

Et la méthode est d'ordre au moins n+1.

4.3 Algorithme de l'extrapolation de Richardson :

On prévoit l'algorithme de l'extrapolation de Richardson à partir des premières itérations.

En effet, on a :

$$R_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^n R_n\left(\frac{h}{2}\right) - R_n(h)}{2^n-1} \qquad R_{n+2}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^{n+1} R_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right) - R_{n+1}(h)}{2^{n+1}-1} \qquad \ldots.$$

$$R_{n+1}\left(\frac{h}{2^2}\right) = \frac{2^n R_n\left(\frac{h}{2^2}\right) - R_n(\frac{h}{2})}{2^n-1} \qquad R_{n+2}\left(\frac{h}{2^2}\right) = \frac{2^{n+1} R_{n+1}\left(\frac{h}{2^2}\right) - R_{n+1}(\frac{h}{2})}{2^{n+1}-1} \qquad \ldots.$$

$$R_{n+1}\left(\frac{h}{2^i}\right) = \frac{2^n R_n\left(\frac{h}{2^i}\right) - R_n(\frac{h}{2^{i-1}})}{2^n-1} \qquad R_{n+2}\left(\frac{h}{2^3}\right) = \frac{2^{n+1} R_{n+1}\left(\frac{h}{2^3}\right) - R_{n+1}(\frac{h}{2^2})}{2^{n+1}-1} \qquad \ldots.$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$R_{n+1}\left(\frac{h}{2^p}\right) = \frac{2^n R_n\left(\frac{h}{2^p}\right) - R_n(\frac{h}{2^{p-1}})}{2^n-1} \qquad R_{n+2}\left(\frac{h}{2^p}\right) = \frac{2^{n+1} R_{n+1}\left(\frac{h}{2^p}\right) - R_{n+1}(\frac{h}{2^{p-1}})}{2^{n+1}-1} \qquad \ldots.$$

Jusqu' a ce qu'on arrive à :

$R_{n+p}\left(\frac{h}{2^p}\right) = \frac{2^{n+p-1}R_{n+p-1}\left(\frac{h}{2^p}\right) - R_{n+p-1}\left(\frac{h}{2^{p-1}}\right)}{2^{n+p-1}-1}$ Avec : $p \epsilon \mathbb{N}$

On a donc pour la $i ème\ ligne\ et\ la\ j ème\ colonne$:

$$R_{n+j}\left(\frac{h}{2^i}\right) = \frac{2^{n+j-1}R_{n+j-1}\left(\frac{h}{2^i}\right) - R_{n+j-1}\left(\frac{h}{2^{i-1}}\right)}{2^{n+j-1}-1}$$

Avec : $i, j\ \epsilon\ \mathbb{N}\ et\ i, j \leq p$

Remarque :

- Pour $p = 0$ on a : $R_n(h) = f'(x) + \sum_{k \geq n} c_k h^k$.

- On n'aura pas besoin du calcul des approximations$R_{n+j}\left(\frac{h}{2^i}\right)$ $pour\ i < j\ ;\ j = \{1, \dots, p\}$.

- A chaque itération j, l'ordre de la méthode augmente par 1.

Chapitre 5

Application

5.1 Théoriquement :

On essaye de comparer les différentes méthodes numériques de différentiation afin de voir la méthode la plus convenable et la plus rapide en convergence. En outre, on cherche à montrer le rôle important que joue la méthode de l'extrapolation de Richardson dans la convergence vers la dérivée tout en précisant les erreurs entre les approximations obtenues par les autres méthodes et la dérivée .On prend par exemples les fonctions usuelles : $e^x, \sin(x), \ln(1+x)$.

Pour chaque fonction, on calculera l'erreur obtenue par la méthode de l'approximation progressive et celle de différences centrées et on appliquera à chacune d'elles l'extrapolation de Richardson afin d'augmenter leurs ordre.

▶ f (x) = exp(x) :

Pour la méthode de l'approximation progressive, on a :

$$e^x \approx \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

D'où :

$$|E(h)| = |\frac{e^{x+h}-e^x}{h} - e^x|$$

Et on obtient au voisinage de 1, les résultats suivants :

	Approximation progressive	Extrapolation de Richardson	Extrapolation de Richardson	Extrapolation de Richardson
h	|E(h)| Ordre 1	|E(h)| Ordre 2	|E(h)| Ordre 3	|E(h)| Ordre 4
10^{-1}	0.14056026340	0.0453000000	0.0211000000	0.0104000000
10^{-2}	0.01363682654	0.0045000000	0.0021000000	0.0010000000
10^{-3}	0.00135959410	0.0004530500	0.0002114200	0.0001040300
10^{-4}	0.00013587150	0.0000453050	0.0000211420	0.0000104030
10^{-5}	0.00001359140	0.0000045304	0.0000021139	0.0000010401

Pour la méthode de différences centrées, on a : $e^x \approx \frac{e^{x+h}-e^{x-h}}{2h}$

D'où :

$$|E(h)| = |\frac{e^{x+h}-e^{x-h}}{2h} - e^x|.$$

Calcul des erreurs au voisinage de 1 :

	Par différences centrées	Extrapolation de Richardson
h	|E(h)| ordre2	|E(h)| Ordre 4
10^{-1}	0.004532735500	8.428400 10^{-12}
10^{-2}	0.000045304900	0.772720 10^{-12}
10^{-3}	0.000000453000	0.521360 10^{-12}
10^{-4}	0.000000004500	0.087503 10^{-12}
10^{-5}	0.000000000056	0.047995 10^{-12}

$f(x) = \sin(x)$:

Pour la méthode d'approximation progressive, on a :

$$\cos x \approx \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

D'où :

$$|E(h)| = \left|\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x\right|$$

Le calcul de l'erreur au voisinage de 1 donne le tableau suivant :

	Approximation progressive	Extrapolation de Richardson	Extrapolation de Richardson	Extrapolation de Richardson
h	|E(h)| Ordre 1	|E(h)| Ordre 2	|E(h)| Ordre 3	|E(h)| Ordre 4
10^{-1}	0.9823973352	0.014030469083390	0.006545164011	0.006545164011
10^{-2}	0.9823970852	0.001402457496145	0.001402457496	$6.54477822\ 10^{-4}$
10^{-3}	0.9823969952	$1.402456988631\ 10^{-4}$	$1{,}402451698\ 10^{-4}$	$6.54477433\ 10^{-5}$
10^{-4}	0.9823966952	$1.402451381116\ 10^{-5}$	$1{,}402451381110^{-5}$	$6.54477411\ 10^{-6}$
10^{-5}	0.9823964952	$1.402435613750\ 10^{-6}$	1.4024356137510^{-5}	$6.54518330\ 10^{-7}$

Pour la méthode de différences centrées, on a : $\cos x \approx \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$

D'où :

$$|E(h)| = \left|\frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h} - \cos x\right|$$

Le calcul de l'erreur par les deux méthodes au voisinage de x=1 :

	Par différences centrées	Extrapolation de Richardson
h	|E(h)| ordre2	|E(h)| Ordre 4
10^{-1}	0.9823970697	$1.676103700276599\ 10^{-12}$
10^{-2}	0.9823970602	$1.17683406102666\ \ 10^{-14}$
10^{-3}	0.9823970452	$3.541611448554249\ 10^{-15}$
10^{-4}	0.9823970252	$1.071587263368201\ 10^{-15}$
10^{-5}	0.9823970238	$1.10635944849946110^{-16}$

▶ f (x) = ln(1+x) :

Pour la méthode de l'approximation progressive, on a :

$$\frac{1}{1+x} \approx \frac{\ln(1+x+h) - \ln(1+x)}{h}$$

D'où :

$$|E(h)| = \left|\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h} - \frac{1}{1+x}\right|$$

Et on obtient au voisinage de 1 :

	Approximation progressive	Extrapolation de Richardson	Extrapolation de Richardson	Extrapolation de Richardson
h	|E(h)| Ordre 1	|E(h)| Ordre 2	|E(h)| Ordre 3	|E(h)| Ordre 4
10^{-1}	0.0120983583100	0.0041642114882010	0.004164211488201	9.56770837310^{-4}
10^{-2}	$1.245848896\ 10^{-3}$	$4.166640780507\ 10^{-4}$	$4.1666407805\ 10^{-4}$	$9.56789931\ 10^{-5}$
10^{-3}	$1.249583500\ 10^{-4}$	$4.166666443311\ 10^{-5}$	$4.1666664433\ 10^{-5}$	$9.56790324\ 10^{-6}$
10^{-4}	$1.249959000\ 10^{-5}$	$4.166681767082\ 10^{-6}$	$4.1666681767\ 10^{-6}$	$9.56790879\ 10^{-7}$
10^{-5}	$1.250000000\ 10^{-6}$	$4.166819293494\ 10^{-7}$	$4.166819293\ 10^{-7}$	$9.56669294\ 10^{-8}$

Pour la méthode de différences centrées, on a :

$$\frac{1}{1+x} \approx \frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x-h)}{2h}$$

D'où :

$$|E(h)| = \left|\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x-h)}{2h} - \frac{1}{1+x}\right|$$

Les erreurs obtenues au voisinage de x=1 :

	Par différences centrées	Extrapolation de Richardson
h	|E(h)| ordre2	|E(h)| Ordre 4
10^{-1}	$4.172927849\ 10^{-4}$	$1.748101663423540\ 10^{-11}$
10^{-2}	$4.1667291\ 10^{-6}$	$1.088018564132653\ 10^{-12}$
10^{-3}	$4.1666\ 10^{-8}$	$5.864198016070077\ 10^{-13}$
10^{-4}	$4.1\ 10^{-10}$	$1.052491427344648\ 10^{-13}$
10^{-5}	$5\ 10^{-12}$	$2.32460312265070\ 10^{-14}$

[1]

Bilan des Résultats :

Dans chacune des fonctions étudiées, on remarque que :

<u>Pour la méthode de différence centrée :</u>

Elle est d'ordre 2 et en appliquant une fois l'extrapolation de Richardson, elle devient d'ordre au moins 4 car les coefficients des puissances impaires de h sont nuls. Donc l'extrapolation de Richardson nous permet de gagner 2 ordres à chaque itération.

- Convergence rapide

<u>Pour la méthode d'approximation progressive :</u>

Elle est juste d'ordre 1, et chaque fois on applique une itération de l'extrapolation de Richardson, on augmente d'un seul ordre.

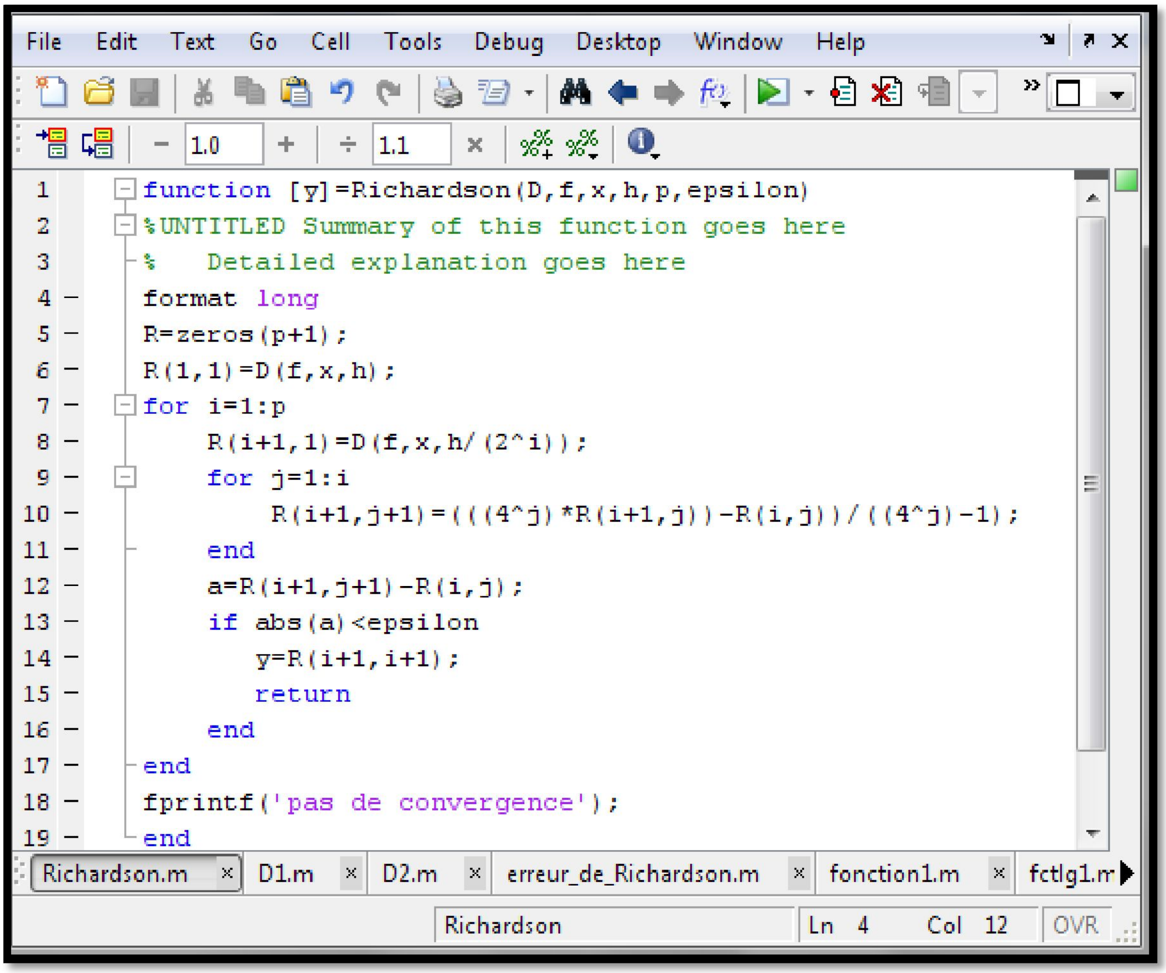
- Convergence lente par rapport à la méthode de différences centrées.

En effet, en revenant aux résultats obtenus à l'ordre 4, par exemple pour la fonction e^x, on remarque que les erreurs de l'extrapolation de Richardson appliquées à la méthode des différences centrées sont trop petites (10^{-12}) par rapport à ceux obtenues par l'application de l'extrapolation à l'approximation progressive (10^{-6}) pour de différents pas h.

[1] Pour la méthode de l'extrapolation de Richardson les calculs sont faits à l'aide du programme en Matlab.

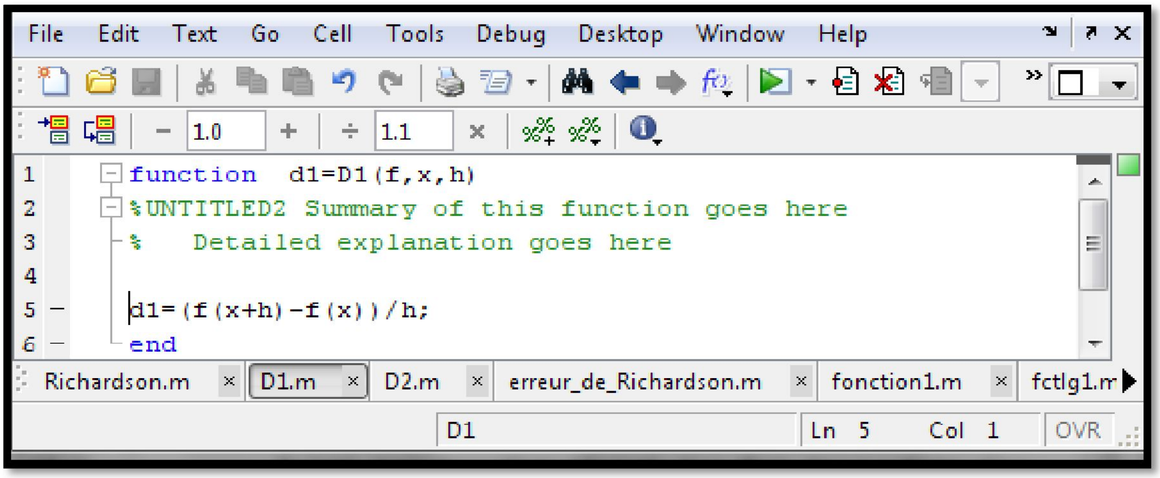
5.2 Pratiquement : Par Matlab

Cette fonction permet de calculer les différentes approximations $R_{n+j}\left(\frac{h}{2^i}\right)$ de l'extrapolation de Richardson :

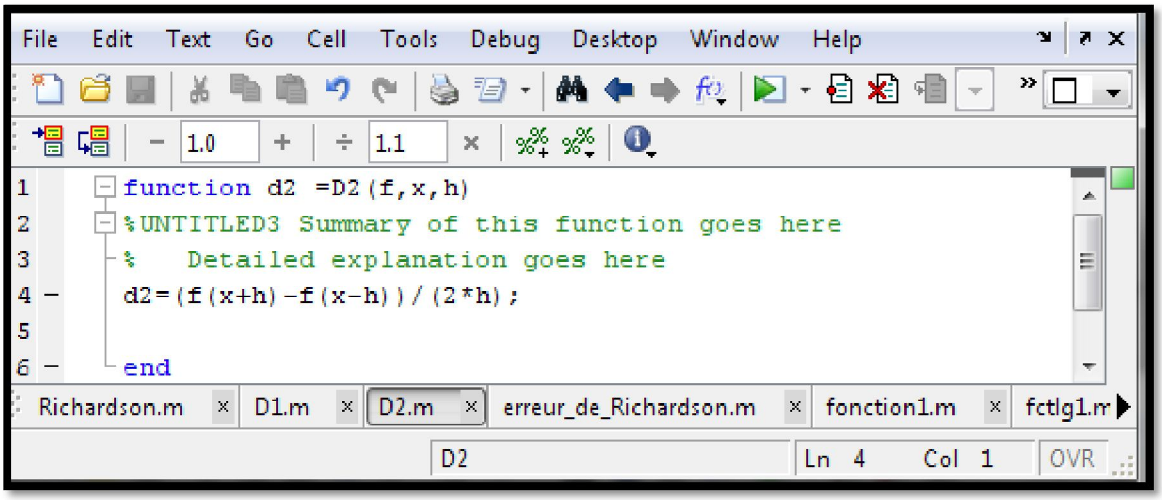


```
function [y]=Richardson(D,f,x,h,p,epsilon)
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
format long
R=zeros(p+1);
R(1,1)=D(f,x,h);
for i=1:p
    R(i+1,1)=D(f,x,h/(2^i));
    for j=1:i
        R(i+1,j+1)=(((4^j)*R(i+1,j))-R(i,j))/((4^j)-1);
    end
    a=R(i+1,j+1)-R(i,j);
    if abs(a)<epsilon
       y=R(i+1,i+1);
       return
    end
end
fprintf('pas de convergence');
end
```

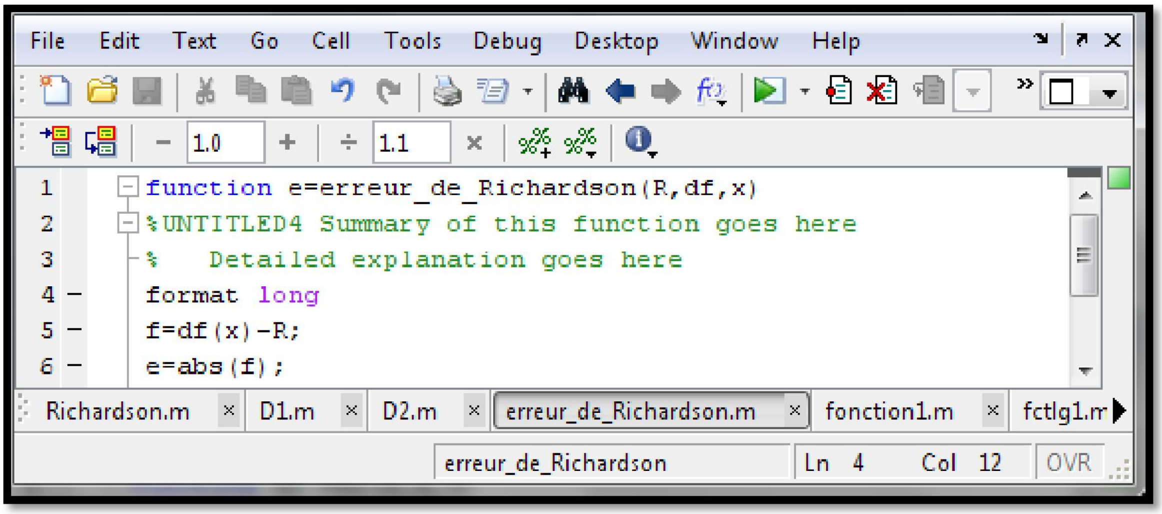
La fonction D1 permet de calculer l'approximation progressive de la dérivée :



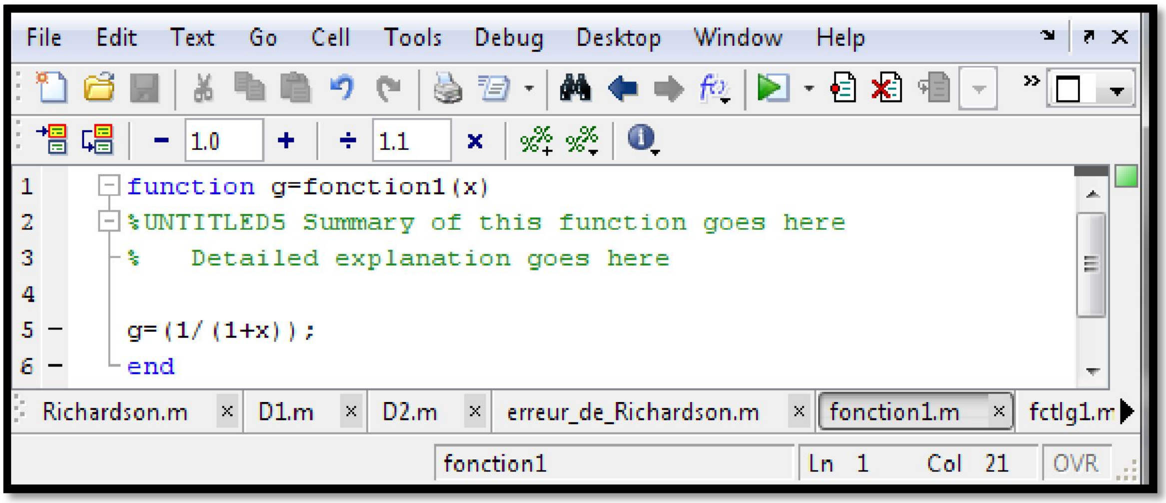
La fonction D2 permet de déterminer l'approximation de la dérivée par la méthode des différences centrées :

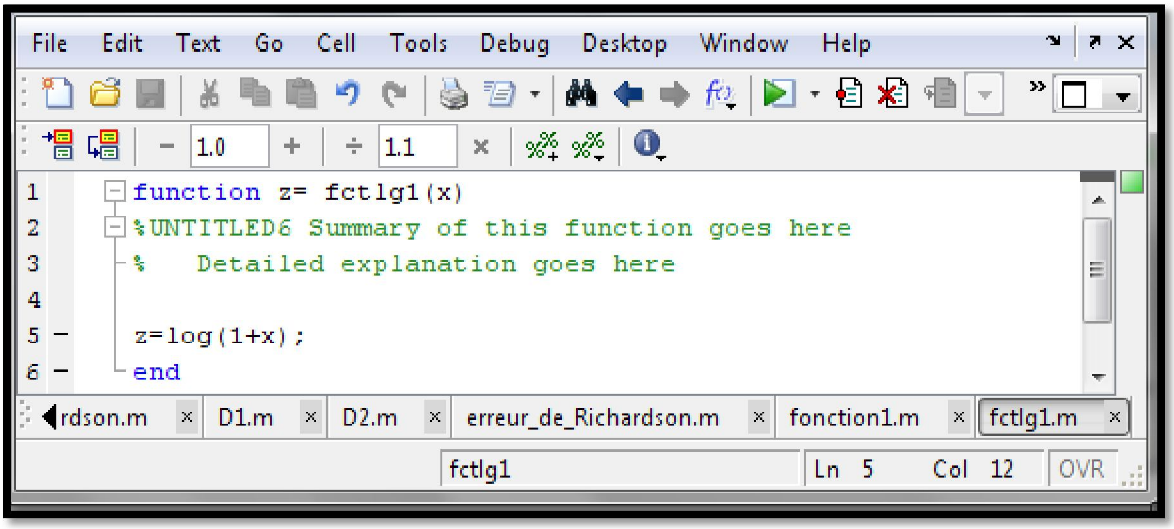


Comme son nom le désigne, cette fonction permet de calculer l'erreur de Richardson :



Les deux fonctions : fonction1 et fclg1 servent à calculer le ln (1+x) et sa dérivée $\frac{1}{1+x}$ pour les utiliser dans l'appel des fonctions Richardson et erreur_de_Richardson :





L'appel de ces fonctions dans la fenêtre de commande se fait comme suit :

- Pour le calcul d'erreur de l'extrapolation de Richardson en utilisant l'approximation progressive appliquée à la fonction e^x pour différents pas h et ordre p :

  y=Richardson (@D1, @exp, 1, h, p, epsilon)
  erreur_de_Richardson (y, @exp, 1)

- Pour le calcul d'erreur de l'extrapolation de Richardson en utilisant la méthode de différence centrée appliquée a la fonction e^x pour différents pas h et ordre p :

  y=Richardson (@D2,@exp, 1, h, p, epsilon)
  erreur_de_Richardson (y, @exp, 1)

- Pour le calcul d'erreur de l'extrapolation de Richardson en utilisant la méthode de différence centrée appliquée a la fonction $\ln(1+x)$ pour différents pas h et ordre p :

  y=Richardson (@D2,@fonction1, 1, h, p, epsilon)
  erreur_de_Richardson (y, @fctlg1, 1)

Chapitre 6

Conclusion

Certes, il y a tant de méthodes d'approximations des dérivées des fonctions numériques. Mais peu qui peuvent assurer une bonne approximation de celles-ci. L'extrapolation de Richardson fait partie de ces méthodes là. Ainsi, son aspect itératif permet de gagner d'ordre à chaque itération selon la méthode choisie comme approximation initiale de la dérivée. Et puisque le but des méthodes numériques est l'optimisation des calculs et du temps, il sera mieux de choisir l'approximation initiale de plus grand ordre afin de converger rapidement.

Cette méthode introduite au début du XX^{e} siècle par Lewis Fry Richardson, est un outil d'accélération de convergence non pas juste pour la dérivation mais encore pour l'intégration numérique, la résolution des équations différentielles et il en résulte d'autres méthodes comme celle de Romberg, de Gragg,…etc. Et bien que l'extrapolation de Richardson soit principalement utilisée par les analystes, il existe aussi des situations probabilistes dans lesquelles celle-ci s'applique, notamment dès lors que le procédé de discrétisation s'intègre au sein d'une méthode de Monte-Carlo. Cependant, il ne faut pas la confondre avec l'extrapolation linéaire qui sert à approximer une fonction en un point en dehors de l'intervalle des points données en utilisant la régression et qui entre dans le cadre de prédiction.

Enfin, on peut dire que la méthode de l'extrapolation de Richardson est la méthode la plus convenable jusqu'aujourd'hui pour l'approximation d'une dérivée numériquement puisque on peut avoir une précision parfois très supérieure pour un temps de calcul comparable.

Référence :

- *Analyse numérique, T.Dudok de Wit, Universite d'Orleans, Janvier2013.*
- *Analyse numérique, pagora 1A, Grenoble INP, Mars 2013*
- *Introduction a l'Analyse Numérique des équations différentielles chapitres 1et2, Universite Mohamed V Agdal, 2006*

Sites :

- *http ://eric.cabrol.free.fr/AnalyseNumerique/an1.html*
- *http ://www.larecherche.fr/idees/back-to-basic/simulation-numerique-01-11-2004-77311*
- *https ://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/ananum/11interpol.pdf*
- *https ://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi2.pdf*
- *http ://www.polytech-lille.fr/cours-algos-calcul-scientifique/Intnewt.swf*
- *http ://www.lamfa.u-picardie.fr/chehab/Ens/cours_interp.pdf*
- *https ://team.inria.fr/opale/files/2011/11/Anum.pdf*
- htttp://www.fsr.ac.ma/ANO/

Index :

approximation.......... 7
base.......... 10
dérivation.......... 5
différences centrées.......... 37
différences divisées.......... 14
extrapolation.......... 2
fonctions numériques.......... 7
interpolation.......... 5
Lagrange.......... 5
Matlab.......... 6
méthode.......... 8
Newton.......... 5
polynôme.......... 9
Taylor.......... 5
Vandermonde.......... 5