UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Outils mathématiques et microéconomie

Présenté par :

- Mostafa MOTIAA

Encadré par :

- Pr Mohammed ELKHOMSSI

Soutenu Le 09 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr Mohammed BELLAHMAR FSTF
- Pr Abdelmajid HILLALI FSTF
- Pr Mohammed ELKHOMSSI FSTF
- Pr Mustapha ALAMI CRMEF-Fès

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abords. A remercier Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force d'accomplir ce modeste travail.
En second lieu, je tiens à témoigner ma profonde gratitude à monsieur le professeur Mohammed ELKHOMSSI, ce fut un grand honneur de pouvoir achever ce travail sous sa direction. J'ai pu bénéficier de ses précieux conseils, de sa disponibilité et de son soutien constant pour mener à bien ce travail.
Mes vifs remerciements vont également aux professeurs :Mr. Abdelmajid HILALI,
Mr. Mohamed BELLAHMAR, Mr. Mustapha ALAMI, pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'examiner ce travail.
Enfin un grand merci à mes parents et mes frères pour le constant soutien moral et matériel qu'ils m'ont apportés pendant mes études.

Introduction

En économie, un modèle est une représentation simplifiée de la réalité économique ou d'une partie de celle-ci : par exemple la croissance, le commerce international, la monnaie, une entreprise ou un ménage. Comme dans les autres disciplines scientifiques les modèles économiques utilisent le formalisme mathématique qui permet de représenter le modèle sous forme d'équations pour le simplifier.

le premier chapitre consiste à donner une présentation de certaines notions de base sur la microéconomie , une formalisation de la technologie de production et leurs rendement d'échelle, ainsi que quelques outils d'analyse du processus de production, pour ensuite établir une modélisation du programme de producteur.
Le second chapitre vise à présenter une nouvelle notion appelée théorie des jeux, un champ mathématiques, qui à pour objet d'établir et d'étudier les principes et les règles mathématiques pouvant intervenir dans l'analyse des différents type de comportement lors des interactions stratégiques entre plusieurs preneurs de décisions, et à établir un équilibre proposé par John Nash, grand mathématicien et économiste célébré pour son travail sur la théorie économique des jeux.
Finalement, le troisième chapitre va mettre en place une application de la théorie des jeux permettant notamment de comprendre un phénomène économique qui appelé L'oligopole.

Chapitre 1

Combinaison optimale des facteurs de production

1.1 Éléments et notions de base de la microéconomie

A)Définition de la microéconomie

La microéconomie se définit comme l'étude du comportement des principaux acteurs de la société que sont les individus,les entreprises et l'état.
En effet la microéconomie tente de déterminer comment les agents déterminent leurs choix et leurs actions en fonction des signaux que leur envoient l'environnement et en particulier le marché. Le principe de rationalité des agents supposent l'existence d'objectifs déterminés. La microéconomie s'intéresse alors aux moyens que vont choisir les agents pour atteindre ces objectifs.

B)Objectif de la microéconomie

Les objectifs de la microéconomie sont de :

- Analyser et prédire le comportement d'agents dans un environnement économique, technique et social donné.
- Analyser et prédire les interactions sociales entre agents résultant de ces comportements.
- Analyser le produit de ces interactions, qu'il s'agisse d'institutions chargées de les organiser ou du résultat du jeu de mécanismes d'interaction moins formalisés comme les échanges.

C)La théorie de producteur

La théorie du producteur en microéconomie vise à répondre à certaines questions relatives à la production de biens et de services :

- Quels biens et services sont nécessaires à la production ?
- Quelles quantités de biens et de services peuvent être produites à partir d'une quantité donnée d'autres biens et services ?
- Comment est organisé le processus de production ?

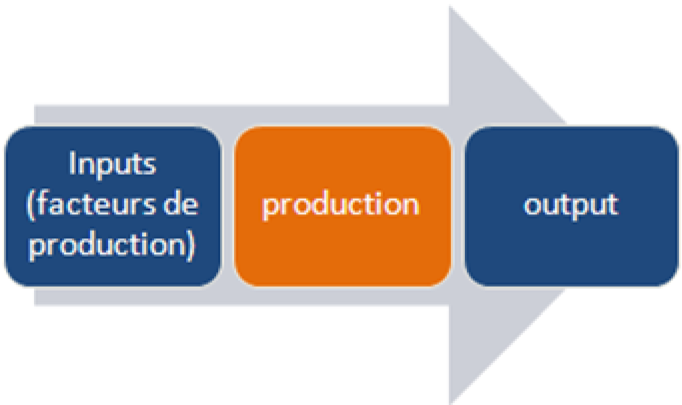
- Comment produire efficacement ?

->En résumé : que fait une firme et comment le fait-elle ?

Réponse générale à la question analysée par la théorie du producteur :

Une firme produit des biens ou services (les extrants ou les outputs) destinés à être consommées ou utilisées par d'autres entreprises; Pour cela, elle utilise des moyens ou facteurs de production(appelés intrants ou inputs). Le processus de transformation des inputs en outputs est appelée processus de production.

- Critique adressée à la microéconomie : le processus de production est considéré comme une boite noire;



Nous allons caractériser cette boîte noire selon deux dimensions :

- Technologie (possibilités de production).
- Management (qu'est-ce qu'on veut produire ?).

D'autre part l'un des objectifs du producteur est de chercher la manière la moins couteuse possible de produire un niveau déterminé d'output :

$\rightarrow$le producteur va chercher à minimiser le CT pour un niveau d'output donné.

$\rightarrow$ce niveau déterminé d'output constitue la contrainte technique donnée par la fonction de production.

1.2 Formalisation de la technologie de production

Notre première tâche consiste à modéliser la manière dont il est possible de produire un certain nombre d'unités d'un bien ou service (dont les caractéristiques sont parfaitement définies) appelé output,à partir de la transformation d'un ou plusieurs facteurs de production appelés inputs.

Une technologie de production est un processus de transformation basé sur la combinaison de multiples facteurs de production(inputs) et conduisant à l'élaboration,la confection,la réalisation d'un bien ou service(output) [1].

A)facteurs de production

Les $\langle inputs \rangle$, sont les composants utilisés dans les processus de transformation,sont des éléments de natures très différente. Il peut s'agir d'hectares de terre, de tonnes de matières premières, de kilowatts d'énergie, d'heures de travail, de temps d'utilisation de machines,etc.
Parmi tous ces inputs,il en est un que les économistes ont pris l'habitude de désigner par le terme$\langle capital \rangle$

1)Capital
En microéconomie,le capital désigne des inputs qui sont eux-mêmes des biens produits.

2)travail
Le travail est un input regroupant des éléments de natures et de qualités très variées.

B)des inputs à l'output

Modélisons maintenant la$\langle technologiedeproduction \rangle$ ou processus par lequel,en combinant un ou plusieurs inputs,on aboutit à la production d'un certain nombre d'unités d'output [1].

1) La fonction de production

On appelle fonction de production d'un output produit en quantité Q à partir de n inputs utilisés en quantité $X_1, X_2, ..., X_n$,la relation fonctionnelle qui décrit la quantité maximale d'output qu'il est possible de produire à partir de la combinaison de ces inputs.
On note cette fonction de production :

$$Q = f(X_1; X_2; ....; X_n)$$

$$\begin{aligned} f : \Re_+^n &\longrightarrow \Re_+ \\ (X_1; ..; X_n) &\longrightarrow Q \end{aligned}$$

2) cas de deux facteurs de production

Dans ce cas là,prenons la fonction de cobb-douglas qui est une fonction de production à deux facteurs de production(travail :L,capital :K) La fonction de cobb-douglas est définie par :

$$Q = AK^\alpha L^\beta \text{ où } A > 0 \text{ et } \alpha, \beta \in [0, 1]$$

avec α et β sont des paramètres positifs de distribution du produit,et ils sont correspond à la répartition des revenus entre le travail et le capital.
Q :correspond au niveau de production.
K :celui du capital.
L :celui du travail.

Analysons l'homogénéité de la fonction de cobb-douglas

$$\begin{aligned}\forall \lambda > 0 \quad ; \quad F(\lambda K, \lambda L) &= A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} A k^{\alpha} L^{\beta} \\ F(\lambda K, \lambda L) &= \lambda^{\alpha+\beta} F(K, L)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la fonction de cobb-douglas est homogène de dégrée$(\alpha + \beta)$.

♦ **Représentation graphique**

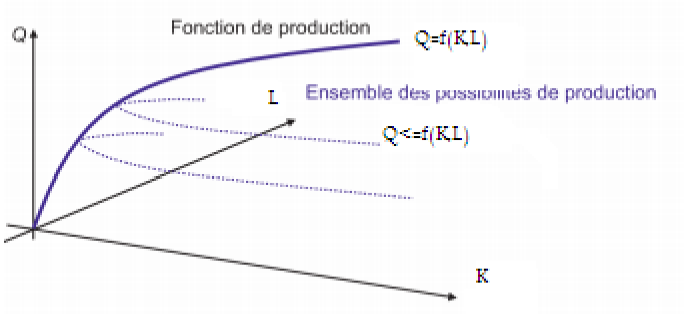


Figure 3 Fonction de production de l'output (cas de deux inputs)

La courbe apparaissent dans Cette dernière figure indique le nombre maximal d'unités d'output qu'il est possible d'obtenir pour toute quantité utilisée d'input.

C) Les productivités

Les productivités permettent de préciser la relation qui existe entre le niveau de l'output et le niveau d'utilisation de l'un des inputs,en plus elles sont issues de la fonction de production, en considérant que tous les inputs sauf un sont maintenus constants.
On distingue entre 3 types de productivités d'un input :

→ la productivité totale(PT).

→ la productivité moyenne(PM).

→ la productivité marginale(Pm).

+**Exemple** :

L	K	PT(Q)	PM($\frac{Q}{L}$)	Pm($\frac{\Delta Q}{\Delta L}$)
0	10	0	-	-
1	10	10	10	10
2	10	30	15	20
3	10	60	20	30
4	10	80	20	20
5	10	95	19	15
6	10	108	18	13
7	10	112	16	4
8	10	112	14	0
9	10	108	12	-4
10	10	100	10	-8

* **Remarques** :

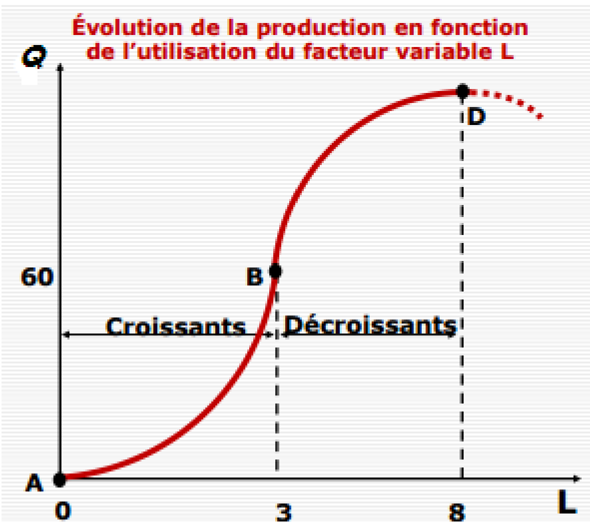
→ la production totale (PT) augmente avec le nombre de travailleurs.

→ au début, la production totale augmente rapidement.
→ Ensuite la croissance est plus lente.
→ Elle atteint un plafond à 112 unités lorsque la firme emploie 7 ou 8 travailleurs.
→ Elle baisse lorsque la firme augmente encore le nombre de travailleurs.

1) La productivité totale

La productivité totale décrit l'évolution de la production en fonction de l'utilisation du facteur variable, l'autre facteur étant maintenu fixe, d'autre part la productivité totale d'un input est une fonction qui relie la quantité totale d'output que l'on obtient et la quantité utilisée de l'input variable, la quantité de l'autre input étant constante.
En présence de deux facteurs 1 et 2 dont les quantités utilisées sont X_1 et X_2 ; si seul le facteur 1 varie
⇒ Alors,la productivité totale du facteur 1 est :

$$PT_1 = f(X_1, \overline{X_2})$$



2) La productivité moyenne PM

La productivité moyenne mesure le nombre d'unités d'output produites par unité d'input utilisée : elle donne la contribution moyenne du facteur variable à la production (l'autre facteur étant maintenu fixe).
La productivité moyenne d'un input est donc définie comme le rapport entre la productivité totale de l'input et la quantité utilisée de cet input. Formellement on a :

$$PM_i(X_1;..;X_n) = \frac{f(X_1;..;X_n)}{X_i}$$

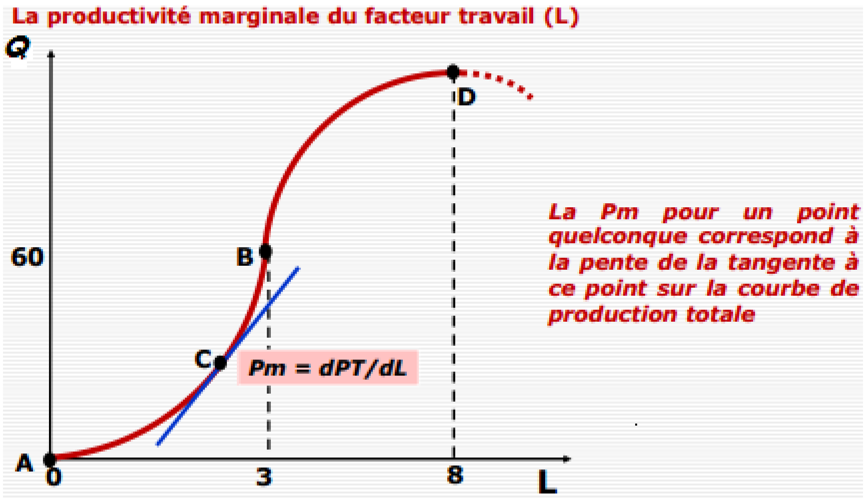
3) La productivité marginale Pm

La productivité marginale d'un facteur de production est l'accroissement de productivité totale obtenu grâce à l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce facteur, l'autre facteur étant maintenu constant.
si un seul facteur qui varie(par exemple L)de ΔL, la productivité marginale de ce facteur est :

$$Pm_L(L,K) = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{Q(L+\Delta L) - Q(L,K)}{\Delta L}$$

si $\Delta L \longrightarrow 0$ la productivité marginale de ce facteur devient :

$$Pm_L = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L}$$



généralement nous pouvons écrire que productivité marginale d'un facteur X_i est :

$$Pm_i = \frac{\partial f(X_1;..;X_n)}{\partial X_i}$$

4) Exemple :

Considérons toujours la fonction de cobb-douglas :

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

***) Productivité moyenne** :

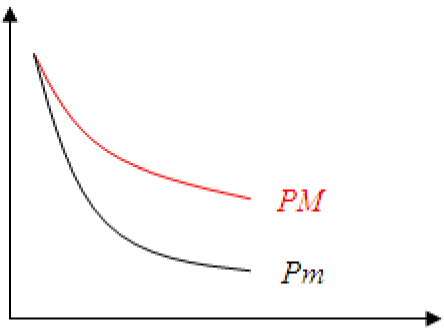
$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = AK^{\alpha-1}L^{\beta}$$
$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

***)Productivité marginale** :

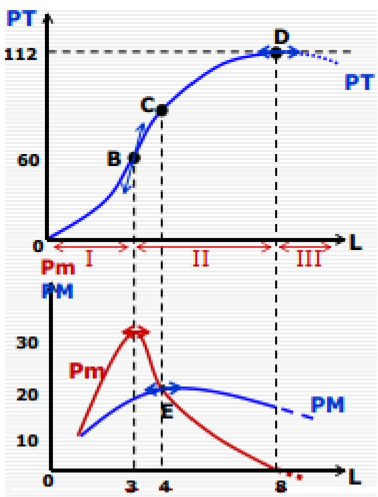
$$Pm_k = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}$$
$$Pm_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(AK^{\alpha}L^{\beta}) = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$$

***)Comparons ces deux productivités** :

$$\frac{\partial Pm_L}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(\frac{\partial Q}{\partial L}) = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = A\beta(\beta-1)k^{\alpha}L^{\beta-2} < 0$$
$$\frac{\Delta PM_L}{\Delta L} = A(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} < 0$$
$$\Rightarrow Pm_L = \beta PM_L \Rightarrow Pm_L < PM_L$$



5)Relation entre ces productivités



*** Remarques :**

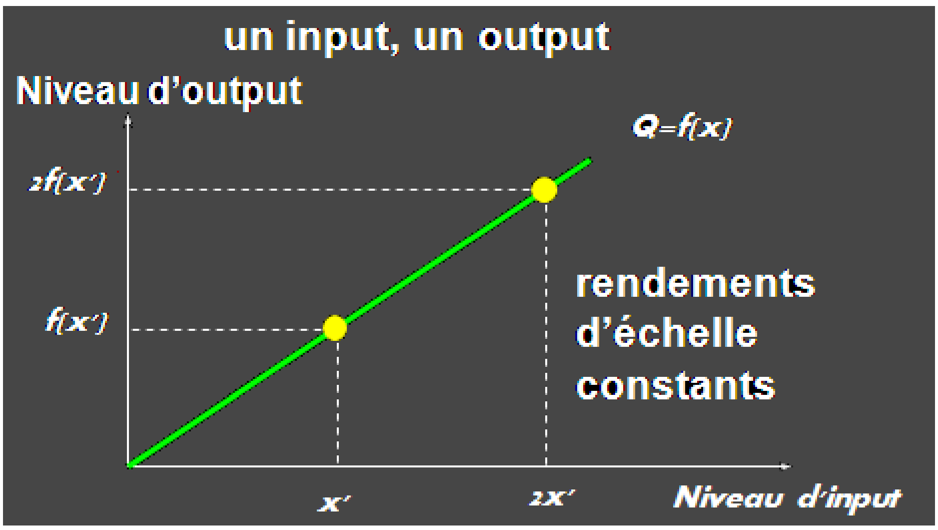
1. PM=Pm au point où PM atteint son maximum(E)
2. Pm=0 quand PT atteint son maximum(D)
3. Si Pm > PM, alors PM augmente
4. Si Pm < PM, alors PM diminue
5. Si Pm = PM (E), alors $\Delta PM = 0$
6. De 0 au point d'inflexion B(phase 1), Pm augmente et PT augmente de plus en plus vite
7. Entre B et D (phase 2), Pm diminue et la PT augmente de moins en moins vite :Pm décroissante
8. La Pm peut être négative(phase 3) et la PT décroissante : phase techniquement inefficace car on pourrait produire plus avec moins d'input variable

1.3 Rendement d'échelle

Une technologie de production est caractérisée (notamment) par ses rendements d'échelle. La notion de rendements d'échelle répond aux définitions suivantes : Si pour un niveau d'emploi $(X_1, X_2, ..., X_n)$ des n inputs :

$$f(\lambda X_1, \lambda X_2, ..., \lambda X_n) = \lambda f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

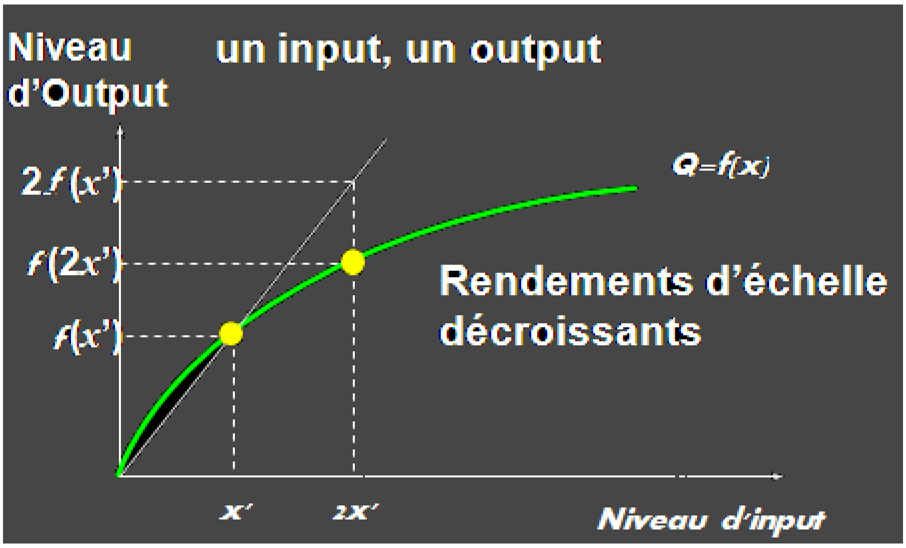
Alors la technologie décrite par la fonction de production f fait l'objet de rendement d'échelle constant.



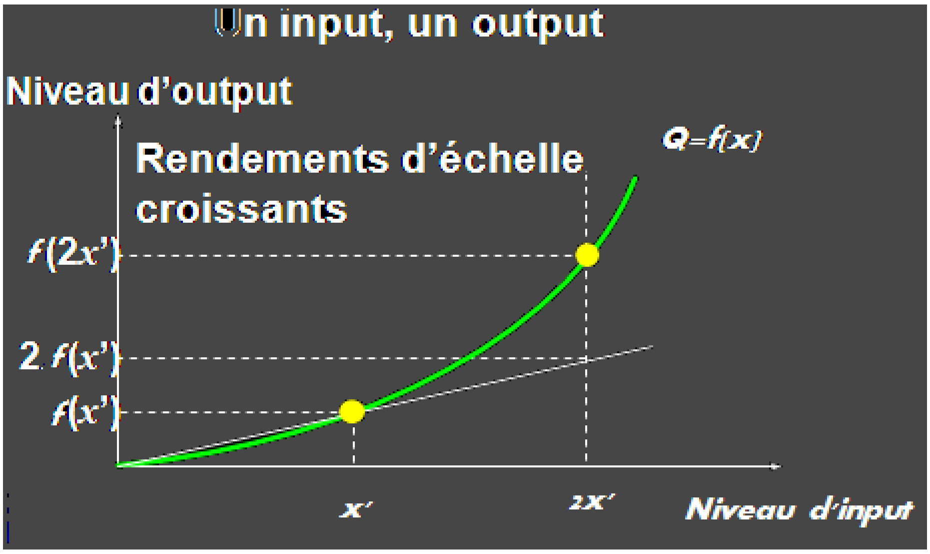
Si non si on a :

$$f(\lambda X_1, \lambda X_2, ..., \lambda X_n) < \lambda f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Alors la technologie décrite par la fonction de production f fait l'objet de rendement d'échelle décroissant.



Si non, alors la technologie décrite par la fonction de production f fait l'objet de rendement d'échelle croissant.



en projetant ceci sur la fonction de cobb-douglas on trouve :

$\longrightarrow \alpha + \beta = 1$:Rendement d'échelle constant.

$\longrightarrow \alpha + \beta > 1$:Rendement d'échelle croissant.

$\longrightarrow \alpha + \beta < 1$:Rendement d'échelle décroissant.

L'existence de rendement d'échelle croissant encourage les firmes à devenir $\ll$ *grandes* $\gg$ (voir à absorber leurs concurrents).

1.4 Problème :le programme technique de producteur "minimisation du coût"

Le producteur va chercher à minimiser le coût de production en utilisant le programme suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{X_1, X_2, \ldots.., X_n > 0} \sum\limits_{i=1}^{n} W_i X_i & \Rightarrow \text{Minimiser le cout des inputs.} \\ S.C \quad F(X_1, X_2, \ldots.., X_n) = Y & \Rightarrow \text{Sous contrainte du niveau d'output.} \end{cases} \tag{1.1}$$

→**PROBLÈME :**
supposons que la technologie d'une firme soit représentée par une fonction de production cobb-douglas :

$$y = F(K, L) = K^{(1/3)} L^{(2/3)} \text{ (les rendements d'échelle sont constant).}$$

Déterminons les demandes conditionnelle et la fonction du coût total de la firme.
→**RÉSOLUTION** :

le programme que résout la firme est :

$$\min_{K,L>0} W_K K + W_L L$$

sous contrainte que :

$$y = F(K, L) = K^{1/3} L^{2/3}$$

que l'on peut encore écrire :

$$L = \frac{y^{3/2}}{K^{1/2}} \; (1)$$

en substituant la contrainte (1) directement dans le programme de la firme, on a :

$$\min_{K>0} W_K K + W_L \frac{y^{3/2}}{K^{1/2}}$$

Une solution intérieure K^* de 1^{re} ordre :

$$W_K - \frac{W_L y^{3/2}}{2K^{*3/2}} = 0$$

que l'on peut encore écrire comme :

$$K^* = \frac{W_L}{2W_K}^{2/3} y$$

alors puisque :

$$L^* = \frac{y^{3/2}}{{K^*}^{1/2}} \text{ et } K^* = \frac{W_L}{2{W_K}^{2/3}}y$$

On trouve que la demande conditionnelle d'input 2 est :

$$L^* = \frac{y^{3/2}}{\frac{W_L}{2{W_K}^{2/3}}y}^{1/2} = \frac{2W_K}{W_L}^{1/3} y$$

d'où :

$$L^* = (\frac{2W_K}{W_L})^{1/3}y \text{ et } K^* = (\frac{W_L}{2W_K})^{2/3}y$$

$\Rightarrow$ la fonction de coût total de la firme dans ce cas :

$$\begin{aligned}
C(W_K, W_L, y) &= W_K K^*(W_K, W_L, y) + W_L^* L(W_K, W_L, y) \\
&= W_K(\frac{W_L}{2W_K})^{2/3}y + W_L(\frac{2W_K}{W_L})^{1/3}y \\
&= \frac{1}{2}^{2/3} W_K^{1/3}W_L^{2/3}y + 2^{1/3}W_K^{1/3}W_L^{2/3}y \\
C(W_K, W_L, y) &= 3(\frac{W_K W_L^2}{4})^{1/3}y.
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Le coût total moyen :

$$\begin{aligned}
CM(W_K, W_L, y) &= \frac{C(W_K, W_L, y)}{y} \\
CM(W_K, W_L, y) &= 3(\frac{W_K W_L^2}{4})^{1/3}
\end{aligned}$$

Chapitre 2

la théorie des jeux en économie

2.1 Quelques notions de théorie des jeux

La théorie des jeux est une discipline mathématique consacrée à l'étude des interactions stratégiques entre les agents. Une situation est «stratégique» lorsque la satisfaction éprouvée par un «joueur» dépend non seulement de son choix, mais aussi des choix effectués par un ou plusieurs autres individus. En théorie des jeux, la «satisfaction» éprouvée à la suite d'une décision est entendue au sens large ; il peut s'agir d'un gain ou d'une perte monétaire, d'un gain ou d'une perte en nature, de satisfaction ou d'insatisfaction morale ou physique, d'une amélioration ou d'un dommage à la santé..... pour désigner la satisfaction éprouvée par les joueurs, on utilise indifféremment les termes satisfaction, utilité,gain ou paiement.

2.2 Glossaire

A)Les définitions

Définition 1 :
Un joueur est la personne qui fait la décision dans un jeu.

Définition 2 :
Une stratégie est la spécification du comportement d'un joueur dans n'importe quelle situation.

Définition 3 :
Un jeu est une interaction entre plusieurs joueurs dont le résultat dépend des stratégies de chacun.

Définition 4 :
La récompense, est une mesure de satisfaction dans les jeux stratégiques.

Définition 5 :
Un résultat d'un jeu est pareto-efficace si c'est la meilleur résultat pour chaque joueur. Un résultat pareto-efficace ne peut pas être amélioré sans faire mal au moins un joueur.

Définition 6 :
L'idée de la meilleure réponse est de penser à une stratégie qui est le mieux que vous pouvez faire en considérant ce que des autres font.

Définition 7 :
Un joueur est dit rationnel s'il essaye de maximiser sa récompense.

Définition 8 :
Une stratégie mixte est une randomisation avec des probabilités données qui déterminent la décision du joueur.

Définition 9 :
Une stratégie pure définit une action spécifique qu'un joueur va suivre à chaque situation possible dans un jeu. Une stratégie telle ne peut pas être aléatoire.

Définition 10 :
Un jeu est à information complète si chaque joueur connait tous les autres joueurs.

Définition 11 :
Un jeu est fini si les nombres des joueurs et des stratégies sont finis.

Définition 12 :
Un jeu stratégique a n-joueurs définie par :
(1) Un ensemble. N=1,2,.....,n, des joueurs.
(2) Pour chaque joueur i, un ensemble des stratégies $S_i = (s_1, ..., s_n{}^i)$.
(3) Pour chaque joueur i, une fonction d'utilité $u_i : S_1 \times ..... \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Les joueurs ont des stratégies qui mènent aux résultats différents avec des récompenses associées.

Définition 13 :
Dans un jeu stratégique si les joueurs décident leur action simultanément, alors on va l'appeler jeu simultané. Contrairement, si les joueurs décident leurs actions l'une après l'autre, on dirais alors c'est un jeu séquentiel.[2]

B)Représentation des jeux

→ Les jeux simultanés :
On représente le jeu simultané à 2-joueurs(2 Entreprises) avec des stratégies pures finies sou la forme de la matrice des gains ci dessous :

Prix de SONY

Prix de HP		Prix du marché	Guerre de prix
	Prix du marché	20, 20	-150, -150
	Guerre de prix	-20,-150	-100,-100

On trouve 2 cas :
■ cas 1 :Ici, Les deux entreprise s'ils pratiquent le prix du marché tout le monde gagne .
⇒ situation favorable.

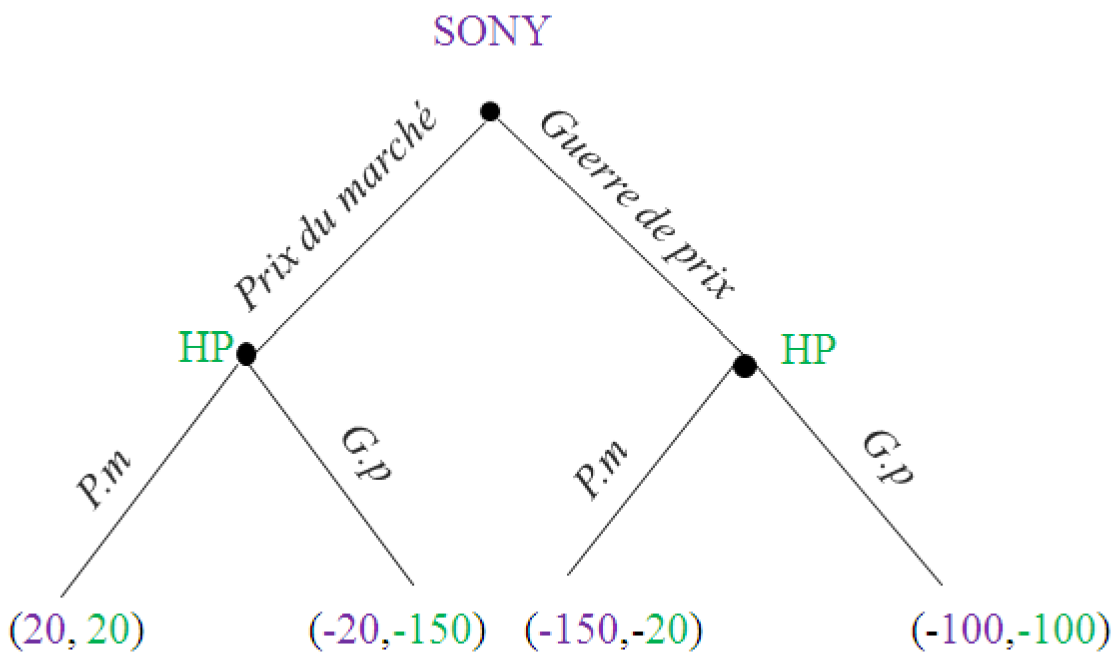
■ cas 2 : Si Les deux entreprise se lancent dans une guerre de prix, ou ils sont défirent de leurs décision tout le monde perds.
⇒ situation n'est pas favorable.

+ **Remarque** :
Le meilleur choix stratégiques pour les deux entreprises consiste à pratiquer le prix du marché, ainsi ils sont sûr de sortir gagnants.
On parle alors d'un équilibre dominant, correspondant au cas où les deux entreprises possèdent une tactique dominante.

→ Les jeux séquentiels :

D'autre part les jeux séquentiels sont représentés, en générale, sous la forme extensive, aussi appelée l'arbre de décision dont chaque point est associé au joueur qui décide. Chaque branche représente une stratégie. les récompenses de tous sont associés aux feuilles de l'arbre.

On présente le même jeu mais en mode séquentiel ci-dessous :



SONY commence au jeu et elle a deux stratégies possible guerre de pris ou pris du marché.
Après la décision de SONY, HP fait son choix entre les mêmes stratégies.

2.3 Équilibre de nash

A)Définition

J.F.Nash est un mathématicien et économiste américain a appliqué la théorie des jeux à toutes les formes d'interaction humaine. Nash a montré qu'un système poussé par le méfiance et l'égoïsme pourrait toujours y avoir un point d'équilibre dans lequel l'intérêt personnel de chacun est parfaitement équilibré l'un contre l'autre.

Un équilibre de Nash est un état dans lequel aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie en tenant compte les stratégies choisies par les autres joueurs. Chaque stratégie est une meilleure-réponse aux stratégies des autres (n-1)joueurs.[3]
Formellement, s est une équilibre de Nash si, pour $\forall i \in \mathbb{N}^*$.le choix s_i du joueur i est la meilleur réponse aux choix $\hat{s_i}$ des autres(n-1) joueurs.
($\Leftrightarrow$ pour $\forall i \in \mathbb{N}^*$ et $k_i \in S_i$,$u_i(s) \geq u_i(k_i, \hat{s_i})$ où u_i est la fonction d'utilité du joueur i.)

C)Théorème

Soit G un jeu fini. Alors il existe un équilibre de stratégies mixtes pour G.[4]

D)Comment trouver l'équilibre de Nash

L'équilibre de Nash peut être trouvé par une recherche de stratégies dominantes, par l'élimination successive de stratégies dominées, ou par l'analyse de meilleur réponse(on va la voir dans le duopole de cournot). Sur les jeux à somme nulle(un jeu où la somme des utilités de tous les joueurs égale à 0) On pourrait aussi appliquer la méthode de MinMax qui nous donne l'équilibre de Nash [6].

Exemple(La méthode de MinMAx) :

La méthode de MinMax est un concept de solution alternative pour les jeux simultanés. On ne l'applique qu'aux jeux à somme nulle. considérons cette matrice :

farid

karim

	X	Y	Z
A	3	5	7
B	1	3	4
C	4	5	6

La pire récompense de Karim de A est 3,de B est 1 et de C est 4. La pire récompense de farid de X est 4,de Y est 5 et de Z est 7.

Nous écrivons le minimum de chaque rang et le maximum de chaque colonne comme vous voyez sur la figure. Le plus grand des minimums de rang est 4 :ceci est son Maximum. Le plus bas des maximums de colonne est 4 :qui est son MinMax.

farid

karim	X	Y	Z	
A	3	5	7	Min = 3
B	1	3	4	Min = 1
C	4	5	6	Min = 4
	Max = 4	Max = 5	Max = 7	

MaxiMin = 4

MiniMax = Min {4, 5, 7} = 4

NE = (4, 4)

E)Jeu en stratégies mixtes

joueur B

Joueur A	L	R
U	(1,2)	(0,4)
D	(0,5)	(3,2)

Considérons un nouveau jeu... Existe-t-il un équilibre de Nash en stratégie pure ?
(U,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !
(U,R) est-il un équilibre de Nash ? Non !
(D,L) est-il un équilibre de Nash ? Non !
(D,R) est-il un équilibre de Nash ? Non !

Donc le jeu n'a pas d'équilibre de Nash. En revanche, ce jeu peut avoir des équilibres de Nash en stratégies mixtes.

♦Au lieu de choisir de manière exclusive entre Up ou Down, le joueur A peut attribuer à chaque stratégie des probabilités $(\Pi_U, 1-\Pi_U)$...c'est à dire que le joueur A jouera Up avec la probabilité Π_U et Down avec la probabilité $1 - \Pi_U$.

♦ Le joueur A fait un mix de stratégies pures.

♦ La distribution de probabilité$(\Pi_U, 1 - \Pi_U)$ est la stratégie mixte du joueur A.

♦ De même, le joueur B peut choisir une distribution de probabilité :$(\Pi_L, 1 - \Pi_L)$... c'est à dire que le joueur B jouera Left avec la probabilité Π_L et Right avec la probabilité $1 - \Pi_L$.

		joueur B	
		L,π_L	$R,1-\pi_L$
joueur A	U,π_U	(1,2)	(0,4)
	$D,1-\pi_U$	(0,5)	(3,2)

Si B joue Left son espérance de gains sera :
$2\Pi_U + 5(1-\Pi_U)$
Si B joue Right son espérance de gains sera :
$4\Pi_U + 2(1-\Pi_U)$

si $2\Pi_U + 5(1-\Pi_U) > 4\Pi_U + 2(1-\Pi_U)$ Alors :
B jouera seulement Left.
Mais il n'y a pas d'équilibre de Nash dans lequel B joue toujours Left.

si $2\Pi_U + 5(1-\Pi_U) < 4\Pi_U + 2(1-\Pi_U)$ Alors :
B jouera seulement Right.
Mais il n'y a pas d'équilibre de Nash dans lequel B joue toujours Right.

Donc, pour qu'il existe un équilibre de Nash, B doit être indifférent entre jouer Left ou Right ; i.e :

$$2\Pi_U + 5(1-\Pi_U) = 4\Pi_U + 2(1-\Pi_U) \Rightarrow \Pi_U = \frac{3}{5}$$

Si A joue UP son espérance de gains sera :
$\Pi_L + 0 \times (1-\Pi_L) = \Pi_L$
Si A joue Down son espérance de gains sera :
$0 \times \Pi_L + 3(1-\Pi_L) = 3(1-\Pi_L)$

si $\Pi_L > 3(1-\Pi_L)$ Alors :
A jouera toujours Up.
Mais il n'existe pas d'équilibre de Nash ou A Jouera toujours Up.

si $\Pi_L < 3(1-\Pi_L)$ Alors :
A jouera toujours Down.
Mais il n'existe pas d'équilibre de Nash ou A Jouera toujours Down.

Donc, pour qu'il existe un équilibre de Nash A doit être indifférent entre jouer Up ou Down :
$\Pi_L = 3(1-\Pi_L)$
$\Rightarrow \Pi_L = \dfrac{3}{4}$

Alors on obtient une nouvelle matrice des gains :

		Joueur B	
		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2)	(0,4)
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5)	(3,2)

Donc, le seul équilibre de Nash du jeu existe si A a une stratégie mixte (3/5, 2/5) et B a une stratégie mixte $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$.

$\Rightarrow$ Les gains seront (1,2) avec la probabilité : $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

$\Rightarrow$ Les gains seront (0,4) avec la probabilité : $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

$\Rightarrow$ Les gains seront (0,5) avec la probabilité : $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

$\Rightarrow$ Les gains seront (3,2) avec la probabilité : $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

		joueur B	
		L, $\frac{3}{4}$	R, $\frac{1}{4}$
joueur A	U, $\frac{3}{5}$	(1,2) 9/20	(0,4) 3/20
	D, $\frac{2}{5}$	(0,5) 6/20	(3,2) 2/20

Les gains espérés de A pour l'équilibre de Nash sont :
$\frac{9}{20} + 3 \times \frac{2}{20} = \frac{3}{4}$.

Les gains espérés de B pour l'équilibre de Nash sont :
$2 \times \frac{9}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 2 \times \frac{2}{20} = \frac{16}{5}$.

■ Un jeu avec un nombre fini de joueurs ayant chacun un nombre fini de stratégies a au moins un équilibre de Nash (en stratégie pure ou mixte).

Chapitre 3

Applications économiques

3.1 L'oligopole

Un oligopole est une situation dans laquelle, d'une part, l'offre est assurée par un petit nombre de vendeurs et, d'autre part, la demande est émise par un grand nombre d'acheteurs. Le modèle d'équilibre général suppose que chaque vendeur prend le prix comme une donnée. Or il existe de nombreux cas dans lequel ce n'est pas possible. Par exemple,lorsqu'un petit nombre de vendeurs est présent sur le marché, ils peuvent s'observer mutuellement et s'ils y trouvent un avantage, pourront effectivement modifier leurs tarifs. Il est important de comprendre que ceci peut se produire même en l'absence d'un accord explicite entre les producteurs.Il faut alors régler un problème complexe : comment représenter le comportement d'une ensemble d'agents économiques quand l'action de chacun d'entre eux a un effet sur les gains des autres. La première section présente la première application de l'équilibre de Nash à un problème d'économie. Réalisée par Augustin Cournot en 1838, elle consiste à prévoir les quantités qui seront produites par deux producteurs en concurrence (i.e., reliés par une fonction de demande). La deuxième section explore une autre dimension de la concurrence : celle de l'ordre dans lequel les entreprises prennent leur décision de production. Cette représentation de la concurrence, étudiée par Heinrich von Stackelberg en 1934, est parfois considérée comme plus réaliste pour étudier l'entrée des entreprises sur un marché. Par opposition à l'oligopole de Cournot, qui suppose une entrée simultanée, l'oligopole de Stackelberg suppose une entrée séquentielle des entreprises.

3.2 L'oligopole de cournot

Définition

Rappelons brièvement que la concurrence à la Cournot est une concurrence par les quantités. Les firme présentes sur le marché produisent toutes le même bien homogène et connaissent parfaitement la demande et les capacités de production de leurs concurrentes. Leur nombre est suffisamment faible pour que chacune puisse influencer le prix du marché. Un comportement stratégique devient donc possible. Sur un marché à la Cournot, toutes les firmes ont le même comportement adaptatif, qui consiste à fixer sa production en fonction des productions concurrentes. Ce processus de tâtonnement leur permet d'obtenir une production optimale, c'est-à-dire celle qui maximise leur profit.

Analyse du modèle

On présente une formalisation simplifiée du modèle on Cherchons un un équilibre de Cournot à N firmes. Le problème est le suivant :
1) Il y a N joueurs, indicés par i $\in 1, 2, ..., N$.
2) Les stratégies des joueurs sont les quantités qu'ils amènent sur le marché, elle sont notées $q_i \in A_i = \mathbb{R}^+$.
3) Les règles du jeu sont les suivantes :

(a) Le prix est déterminé par les quantités selon la fonction de demande inverse $p = a - b\sum_{i=1}^{N} q_i$.

(b) Les coûts unitaires de production des entreprises sont constants, égaux à c, $0 < c < a$.

(c) Les entreprises appliquent leurs décisions en même temps.

4) Les entreprises maximisent leur profit.

Le profit d'une entreprise i (i ∈1,2,.....,N) est définie par :

$$\Pi_i(q_1, q_2, ..., q_N) = (p - c)q_i.$$

Les conditions du premier ordre impliquent que les profits marginaux des N entreprises sont nuls :

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i}(q_1^*, q_2^*, ..., q_N^*) = 0.$$

Pour une entreprise i, on a :

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = \frac{\partial p}{\partial q_i} q_i + p - c = -bq_i + a - b(q_1 + ... + q_i + ... + q_N)p - c$$

ce qui donne les N conditions du premier ordre suivantes :

$$\text{i=1,......,N } -b(q_i^* + Q^*) + a - c = 0$$

avec

$$Q^* = \sum_{i=1}^{N} q_i^* \text{ indépendamment de i.}$$

En additionnant les N conditions du premier ordre, on obtient :

$$-b(1 + N)Q^* + N(a - c) = 0 \Leftrightarrow Q^* = \frac{N}{N+1}\frac{(a-c)}{b}.$$

On en déduit la quantité vendue par chaque producteur :

$$q_i^* = Q^* - \frac{a-c}{b}$$
$$q_i^* = \frac{1}{N+1}\frac{a-c}{b}.\forall i = 1, ..., N$$

et le prix d'équilibre :

$$p^* = a - bQ^* = \frac{a+Nc}{N+1}$$

Atomicité de modèle

L'hypothèse d'atomicité consiste à supposer que le nombre de vendeurs est infiniment grand ($N \longrightarrow +\infty$). Sous cette hypothèse , la quantité produite par chaque entreprise tend vers 0 , ce qui correspond bien à l'idée d'atomicité . Plus précisément :
$\lim_{N \longrightarrow +\infty} q_i^* = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{1}{N+1}\frac{a-c}{b} = 0$
mais la quantité totale produite tend vers la limite suivante :
$\lim_{N \longrightarrow +\infty} Q^* = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{N}{N+1}\frac{a-c}{b} = \frac{a-c}{b} = q^m$
où q^m n'est autre que la production qui maximise le bien-être. L'augmentation du nombre de producteurs permet donc ici de réduire le pouvoir de marché de chacun de sorte que sans même que les producteurs prennent le prix comme donné, leurs décisions individuelles les amènent à l'optimum social. On peut également vérifier cette propriété en étudiant le prix de marché :
$\lim_{N \longrightarrow +\infty} p^* = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{a}{N+1}\frac{Nc}{N+1} = c.$
ce prix se rapproche du coût marginal, qui n'est autre que la tarification optimale du point de vue de la société. L'augmentation du nombre de producteurs provoque donc ici une érosion du pouvoir de marché qui mène, à la limite, vers une tarification optimale pour la société. Ce type de résultat est un des fondements que l'on peut évoquer en faveur des politiques de promotion de la concurrence.

Exemple

Dans ce exemple on va étudie un cas particulier d'oligopole de cournot c'est le duopole de cournot possède les mêmes propriétés mais à deux entreprises qui rivalisent dans le même marché avec plusieurs stratégies.
les problèmes qui se posent sont :
$\longrightarrow$ Quel est l'équilibre de Nash de ce jeu (en supposant que chaque firme est motivée par la recherche du plus grand profit possible) ?
$\longrightarrow$ Quel est la combinaison de quantités produites et vendues par chacune des deux firmes qui ne donne à aucune de ces deux firmes d'incitation unilatérale à dévier ?
$\longrightarrow$ quel est le prix à l'équilibre ?
On l'examinera ceci dans l'exemple suivant :
Dans ce jeu, chaque entreprise choisit sa production indépendamment et le marché détermine le prix auquel il est vendu.

♦ Les joueurs : 2 Entreprise(NOKIA , SAMSUNG).
♦ Les stratégies : Les quantités d'un produit identique qu'ils produisent.
q_1 :la quantité de NOKIA.
q_2 :la quantité de SAMSUNG.
$\Rightarrow Q = q_1 + q_2$: La quantité totale.
Notons ces deux produit sont des substitut parfait.
♦ Le coût de production : c est la constante du coût marginale.
♦ Le prix : Soient a et b constants, on montre le prix de la manière suivante : p=a-b($q_1 + q_2$).
Cette équation nous montre que plus ces entreprise produisent, moins les produits coûtent.
♦ Les récompenses : Les profils Π_1, Π_2
$\Pi_1(q_1, q_2) = pq_1 - cq_1$
$\Pi_2(q_1, q_2) = pq_2 - cq_2$
$\Rightarrow$Le but des entreprises est de maximiser ses profit.
Dans ce problème, on va essayer de trouver la quantité de meilleur réponse de SAMSUNG par rapport à chaque choix possible de NOKIA, et vice versa. Après on verra où elles s'intérsèchent sur le dessin.
Premièrement, on remplace la fonction du prix p dans la fonction Π_1 par a-b$(q_1 + q_2)$; On obtient :

$$\Pi_1(q_1, q_2) = aq_1 - 2b{q_1}^2 - bq_1q_2 - cq_1.$$

Afin de trouver le maximum, par l'application de la condition de première ordre.

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0$$

Redifférentiant, il devient -2b<0 (b>0) donc on trouve bien un maximum à la place d'un minimum.
Alors

$$MR_1(q_2) = q_1^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2}.$$

et

$$MR_2(q_1) = q_2^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}.$$

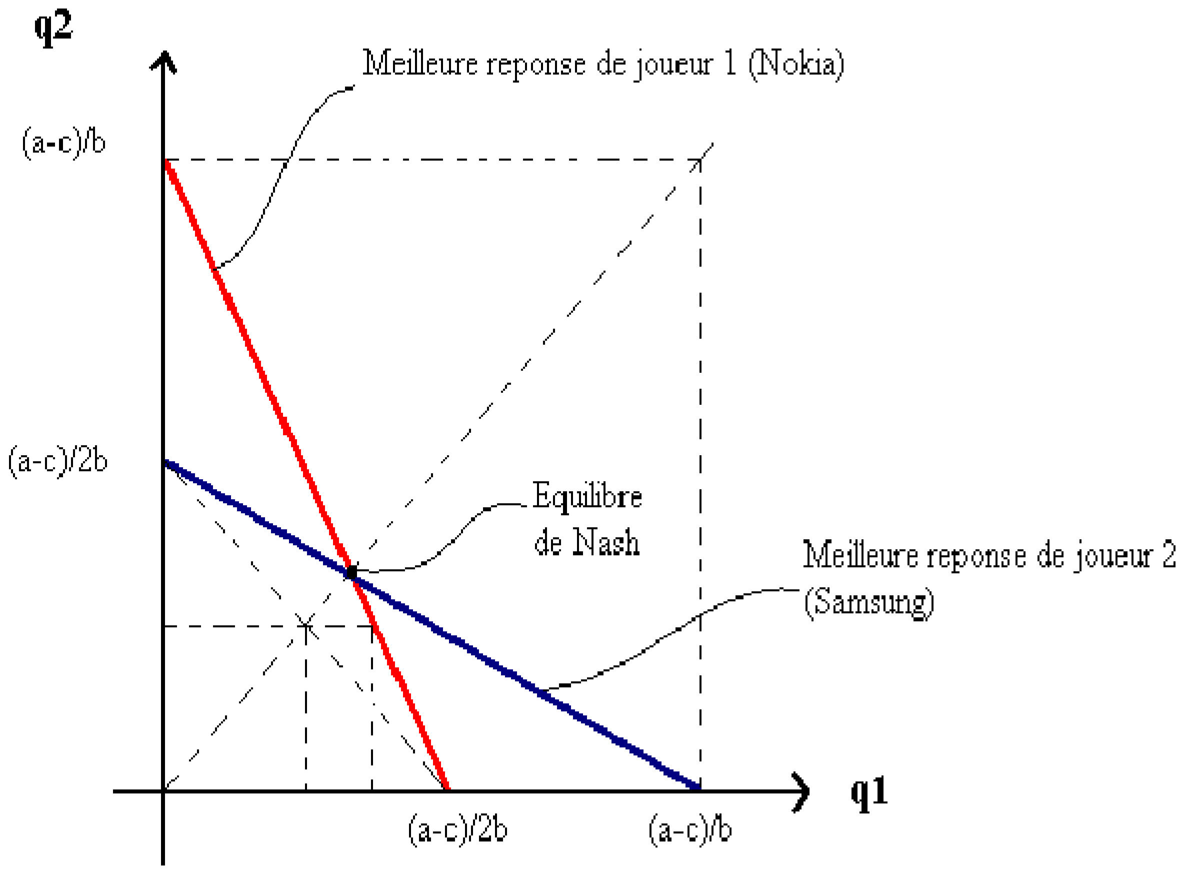
Sont de meilleurs réponse de NOKIA et SAMSUNG respectivement. Avant de décrire la figure, on trouve les points critiques :

$$q_2 = 0 \Rightarrow MR_1(0) = q_1^* = \frac{a-c}{2b} \text{ et } q_1^* = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{a-c}{b}.$$

et c'est le même pour SAMSUNG c'est à dire :

$$q_1 = 0 \Rightarrow MR_2(0) = q_2^* = \frac{a-c}{2b} \text{ et } q_2^* = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{a-c}{b}.$$

Pour trouver où ces deux fonctions de meilleur réponse coïncident, on résoudre l'égalité suivante :
$MR_1(q_2) = MR_2(q_1)$ c'est à dire la quantité produite par Samsung anticipé par Nokia, est la même quantité que Samsung produit à la fin, et vice versa.
nous trouvons que :
$q_1^* = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{q_2^*}{2}$ et $q_2^* = \dfrac{a-c}{b} - \dfrac{q_1^*}{2}$
$\Rightarrow q_1^* = \dfrac{a-c}{3b} = q_2^*$
On appelle cette quantité : la quantité de cournot.



Une paire de la forme(q_1^*, q_2^*) est un équilibre dit de Cournot-Nash.
D'autre part on a le prix de ces dernières quantités :

$$P^* = a - b(q_1^* + q_2^*)$$
$$P^* = \frac{a + 2c}{3}.$$

3.3 L'oligopole de stackelberg

Définition

L'analyse de Cournot suppose que les entreprises prennent leurs décisions de production en même temps. Ceci suppose que l'on se trouve dans la situation particulière où les producteurs sont entrés sur le marché à la même date ou prennent leurs décisions de production en même temps. En effet, dans cette situation, aucun producteur ne peut imposer sa production à un concurrent. Il en va autrement quand une entreprise peut prendre sa décision en premier. De plus, ce type de représentation est plus réaliste dans le cas suivant : un producteur est déjà installé sur le marché et réalise un profit de monopole ; ce profit élevé ne manque pas d'attirer un concurrent, puisque les marchés concurrentiels procurent moins de bénéfices que les marchés concentrés. Il nous faut donc analyser la situation où l'entrée des entreprises est séquentielle. Une première entreprise entre sur le marché, puis une deuxième etc.. Ce problème a été étudié à l'origine par Heinrich von Stackelberg (1905-1946) dans son ouvrage de 1934.
Pour résoudre ce problème, il nous faut utiliser à nouveau la récurrence vers l'amont. En effet, comme les deux producteurs vendent un bien homogène, ils doivent le vendre au même prix. Ceci implique que l'entreprise qui s'installe en premier anticipe la quantité que choisira la deuxième entreprise. Pour cette raison, on part de la deuxième période du jeu en étudiant la quantité choisie par la deuxième entreprise en fonction de la quantité déjà mise sur le marché par la première entreprise. Ensuite, on détermine la quantité choisie par la première entreprise.

Dans un premier temps, nous étudierons l'oligopole de Stackelberg.

Analyse du modèle

1) Il y a N joueurs, indicés par $i \in 1, 2, ..., N$.

2)Le jeu comporte N étapes : à la première étape, l'entreprise 1 choisit sa production, notée q_1. A la seconde étape, l'entreprise 2 choisit sa production, notée q_2, sachant que l'entreprise 1 a produit q_1 et que cette quantité n'est plus modifiable. Plus généralement,l'entreprise i choisit sa quantité q_i sachant que les entreprises qui l'on précédé ont produit $\sum_{j=1}^{i-1} q_j$ et que cette quantité n'est pas modifiable.

3) Les ensembles stratégiques sont identiques pour les N entreprises $A_1 = ... = A_N = [0, +\infty[$.

4) Les règles du jeu sont les suivantes :
(a) Le prix pratiqué sur le marché dépend de la quantité totale produite $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$, selon la fonction de demande inverse égale à : $p(Q) = a - bQ$.
(b) Le coût unitaire de chaque entreprise est donné par c, avec $c \in [0, a]$.

5) Chaque entreprise maximise son profit.
Résolvons ce cas en appliquant la récurrence vers l'amont. La dernière entreprise entrée gagne un profit qui dépend des quantités déjà vendues par toutes les entreprises entrées avant elle. Son profit est égal à :

$$\pi_N = (p - c)q_N.$$

avec

$$p = a - b\sum_{i=1}^{N} q_i.$$

La maximisation du profit amène donc cette entreprise à choisir une quantité q_N^s égale à :

$$\frac{\partial \pi_N}{\partial q_N}(q_N^s) = 0 \Leftrightarrow q_N^s = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} q_i \ (1)$$

L'entreprise précédente anticipe ce que fera l'entreprise N, elle raisonnera donc sur un prix de vente égal à :

$$\begin{aligned} p &= a - b(\sum_{i=1}^{N-1} q_i + q_N^s) \\ &= a - b(\frac{a-c}{2b} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} q_i) \\ &= \frac{a+c}{2} - \frac{b}{2}\sum_{i=1}^{N-1} q_i \end{aligned}$$

d'où sa marge :

$$p - c = \frac{a-c}{2} - \frac{b}{2}\sum_{i=1}^{N-1} q_i$$

et son profit :

$$\pi_{N-1} = \frac{1}{2}(a - c - b\sum_{i=1}^{N-1} q_i)q_{N-1}$$

l'avant-dernière entreprise fixe donc sa quantité ${q_N}^s$ de sorte que :

$$\frac{\partial \pi_{N-1}}{\partial q_{N-1}}(q_{N-1}^s) = 0 \Leftrightarrow q_{N-1}^s = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-2} q_i \ (2)$$

cette quantité est similaire à celle de la relation (1) mais décalée d'une unité (N-1 au lieu de N). En faisant la différence entre les relations (1) et (2) on obtient :

$$q_N^s - q_{N-1}^s = \frac{-1}{2}q_{N-1}^s \Leftrightarrow q_N^s = \frac{1}{2}q_{N-1}^s.$$

chaque entreprise entrante produit deux fois moins que l'entreprise qui la précède. Ceci permet d'écrire toutes les quantités en fonction de celle de la première entreprise :

$$q_i^s = \frac{1}{2}^{i-1} q_1^s \text{ , i=1,......,N (3)}$$

En utilisant les relations (1) et (3), on trouve que :

$$\begin{aligned}
q_N^s &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} q_i^s \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}^{N-1} q_1^s &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} (\frac{1}{2})^{i-1} q_1^s \\
\Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{N-1} q_1^s &= \frac{a-c}{2b} - (1-(\frac{1}{2})^{N-1}) q_1^s. \\
\Leftrightarrow q_1^s &= \frac{a-c}{2b}.
\end{aligned}$$

La première entreprise produit la quantité de monopole. Ce résultat permet d'obtenir toutes les quantités qui seront produites à l'équilibre de Stackelberg :

$$q_i^s = (\frac{1}{2})^{i-1} \frac{a-c}{2b}.$$

L'avantage au premier trait permet à chaque entreprise de produire deux fois plus que celle qui la suit. La quantité totale produite est donc égale à :

$$\begin{aligned}
Q^s &= \sum_{i=1}^{N} q_i^s \\
&= (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}^{N-1}) \frac{a-c}{2b} \\
Q^s &= (1 - \frac{1}{2}^{N}) \frac{a-c}{b}.
\end{aligned}$$

Atomicité du modèle

L'hypothèse d'atomicité a donc la conséquence suivante :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} Q^s = \frac{a-c}{b} = q^o$$

.

les entreprises produisent la quantité optimale lorsque le nombre de producteurs devient infiniment grand. On peut effectuer le même raisonnement en passant par les prix :

$$\begin{aligned}
p^s &= a - bQ^s \\
&= a - (1 - \frac{1}{2}^{N})(a-c) \\
&= c + \frac{1}{2}^{N} \underbrace{(a-c)}_{>0} > c
\end{aligned}$$

quand le nombre d'entreprises augmente, le prix de marché se rapproche du coût marginal :

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} p^s = c$$

.

Exemple

On va étudier dans ce exemple le duopole de stackelberg ce dernier est un cas particulier de l'oligopole de stackelberg.
Supposons dans un marché dans lequel deux entreprises de fabrication de voiture Mercedes et Audi en position asymétrique se font concurrence en quantité , et elles produisent et vendent à un prix unique p , tels que Mercedes est l'entreprise dominante (leader), et l'entreprise Audi est dominé (suiveur).
1)Les joueurs : deux entreprises (Mercedes,Audi)
2)Les stratégies :Les quantités d'un produit identique qu'ils produisent.

q_1 :La quantité de Audi.
q_2 :La quantité de Mercedes.
3)Le jeu comporte deux étapes : à la première étape, l'entreprise Audi choisit sa production, notée q_1. A la seconde étape, l'entreprise Mercedes choisit sa production, notée q_2, sachant que l'entreprise Audi a produit q_1 et que cette quantité n'est plus modifiable.
4)Les règles du jeu sont les suivantes :

a)Le prix pratiqué sur le marché dépend de la quantité totale produite $q = q_1 + q_2$, selon la fonction de demande inverse égale à : $p(q) = a - bq$
b)Le coût unitaire de chaque entreprise est donné par c, avec $c \in [0, a]$.
Le but des entreprises est de maximiser ses profils.

Considérons d'abord la seconde étape du jeu. A cette étape la production de la première entreprise Audi a déjà eu lieu et l'entreprise Mercedes ne peut que constater la production q_1. Le profit de Mercedes est défini par :

$$\pi_2(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2) - c)q_2$$

.
Ce profit est maximum pour la valeur q_2^s telle que :
$\dfrac{\partial \pi_2}{\delta q_2}(q_1, q_2^s(q_1)) = 0 \Leftrightarrow q_2^s(q_1) = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{q_1}{2}$.
On voit que plus l'Audi a produit, moins Mercedes a intérêt à produire. Ceci provient du fait qu'en augmentant sa quantité Mercedes fait baisser le prix.
Remontons maintenant à la première période du jeu. L'Audi anticipe que la Mercedes produira q_2^s à la seconde période. Elle utilise donc cette anticipation de quantité pour former son anticipation de prix. Le prix anticipé par l'Audi est égal à :

$$\begin{aligned} p^s(q_1 + q_2^s(q_1)) &= a - b(q_1 + q_2^s) \\ &= a - b(\frac{a-c}{2b} + \frac{q_1}{2}) \\ &= \frac{a + c - bq_1}{2}. \end{aligned}$$

Ce prix permet d'écrire le profit de l'Audi en fonction de sa seule décision de production q_1. La marge de l'entreprise est égale à :

$$p^s - c = \frac{a-c-bq_1}{2}$$

.

donc le profit s'écrit :

$\pi_1(q_1) = \pi_1(q_1, q_2^s(q_1)) = (p^s - c)q_1 = \frac{1}{2}(a-c-bq_1)q_1.$

On en déduit la condition de maximisation du profit :

$$\frac{\partial \pi_1}{\delta q_1}(q_1^s) = 0 \Leftrightarrow q_1^s = \frac{a-c}{2b}$$

.

On retrouve la production de monopole. Ce résultat est intéressant car il montre que l'Audi installée n'a pas besoin de modifier sa production si d'autres entreprises entrent à leur tour sur le marché. Ce résultat permet de trouver la quantité vendue par Mercedes :

$$q_2^s = q_2^s(q_1^s) = \frac{a-c}{4b}$$

qui est deux fois plus petite que la quantité produite par l'Audi. Il y a donc bien ici un avantage au premier trait.

En effet,les deux entreprises réalisent la même marge unitaire $p^s - c$ et Mercedes vend deux fois moins que l'Audi; le profit de Mercedes est donc deux fois plus faible que celui de l'Audi.

La quantité totale vendue sur le marché est égale à :

$$Q^s = q_1^s + q_2^s = \frac{3(a-c)}{4b}$$

;

cette quantité est supérieure à celle produite à l'équilibre de Cournot.

Le prix d'équilibre est donné par : $p^s = \frac{a+3c}{4}$.

3.4 Comparaison de duopole Cournot/Stackelberg

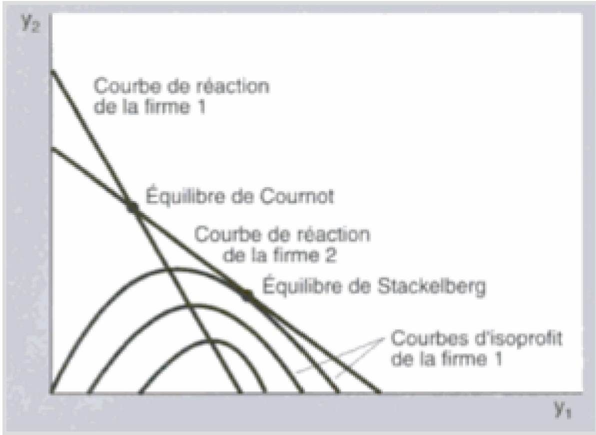
La quantité produite dans le modèle de Stackelberg est supérieure à celle produite dans le modèle de Cournot :$q^s = \frac{3(a-c)}{4b} > \frac{2(a-c)}{3b} = q^*$

La comparaison avec l'équilibre de Cournot révèle la propriété suivante :

$p^s - p^* = \frac{a+3c}{4} - \frac{a+c}{2} = \frac{c-a}{4} < 0,$

$\Rightarrow$le prix d'équilibre est plus faible avec le duopole de Stackelberg qu'avec le duopole de Cournot.

$\Rightarrow$Le prix de l'équilibre de marché est donc plus favorable pour le consommateur dans un modèle de Stackelberg.



■ Graphiquement :
► L'équilibre de Cournot-Nash se situe à l'intersection des deux courbes de réaction. L'équilibre de Stackelberg se situe au point où la courbe de réaction de l'une des deux firmes est tangente à l'une des courbes d'isoprofit de l'autre firme. (ici la firme 1 est "meneur").

Conclusion

Le but de ce projet a consiste principalement à introduire la modélisation économique qui permet de décrire les phénomènes économiques comme le processus de production avec ces outils et la théorie des jeux comme une discipline mathématique pour le traitement des comportement des agents en donnant des application en économie et notamment en économie industrielle.... etc.
J'espère avoir traité dans ce projet les points essentiels concernant le problème de Modélisation économique.
A la fin je peux dire que ce travaille représente une base de départ pour résoudre les problèmes généraux de modélisation économique.

Bibliographie

[1] Jean-Pascal Gayant, Aide-mémoire - Microéconomie, Dunod : Entreprise Gestion et Management 2014.

[2] TINNE HOFF KJELDSEN :Jhon von Neumann, *Äôs* Conception of the minimax theorem : A Journey Through Different Mathematical Contexts Springer-Verlag 2001

[3] J.F.NASH JR. :Equilibrium points in n-person games Proe.Nat.Aead.Sei.USA 36 (1950)

[4] JHON F. NASH JR : Non Cooperatif Games The annals of Mathématiques. Second Series. Volume 54, Issue 2, Sept, 1951

[5] CHARLES A HOLT et ALVIN E. ROTH : The Nash equilibrium : A perspective Departement of Economies, University of Virginia. Charlottesville. VA 22904-1182 ; and Departement of Economies and Harvard BusinessSchool. Harvard University

[6] AVINASH DIXIT et SUSAN SKEATH : games of strategy Second Edition 2004 , W :W Norton and Company,Inc

[7] Cournot, Augustin (1838). Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Hachette.