ÉTUDE COMPARATIVE DE LA MESURABILITÉ DES MULTIFONCTIONS

M'hamed EL-LOUH

Sous la direction de Mme. F. EZZAKI

15 juin 2016

REMERCIEMENT

Au terme de ce travail, Je saisie cette agréable occasion pour présenter mes chaleureux remerciements à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier vivement et profondément mon chère encadrante Madame FATIMA EZZAKI, enseignante-chercheur à la Faculté des Sciences et Technique de Fès (FSTF) et Directrice du Laboratoire Modélisation et Calcul Scientifique, département des Mathématiques, pour le privilège qu'elle m'a fait en acceptant de diriger ce travail. Sa gentillesse, sa modestie, sa riche expérience, m'ont été d'un grand soutien durant toute la période de mon projet.

Mes sincères remerciements pour les membres du Jury, Monsieur le professeur M.ETTAOUIL, Madame O.AMMOR et Madame A.RAHMOUNI HASSANI pour le temps qu'ils ont réservé afin d'évaluer ce travail.

Un grand remerciement également à mes amis qui m'ont été un grand soutien qu'ils trouvent ici mes sincères reconnaissances pour leurs encouragement et leurs soutien qui m'a aidé à aller en avant vers la réussite.

En dernier lieu de remercie ma famille, qui était toujours présente à mes cotés aux moments difficiles. Elle m'a fait confiance et elle m'a poussé à l'excellence au cours de mon cursus scolaire et universitaire.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **5**

1 La mesurabilité de multifonction à valeurs compactes entant que fonction borélienne **7**

1.1 Introduction . . . 7

1.2 Notations et Rappels . . . 7

1.3 Multifonction mesurable à valeurs dans l'ensemble des parties compactes d'un espace métrisable séparable . . . 10

1.4 Existence d'une Sélection mesurable d'une Multifonction mesurable à valeurs dans l'ensemble des parties complètes d'un espace métrisable séparable . . . 12

1.5 Graphe d'une multifonction . . . 16

1.6 Les Multifonctions mesurables à valeurs compactes convexes . . . 18

1.7 Mesurabilité dans l'espace suslin localement convexe . . . 19

2 La mesurabilité de multifonction à valeurs fermées **22**

2.1 Introduction . . . 22

2.2 Notations et Rappels . . . 22

2.3 La tribu d'Effros sur l'ensemble des fermés d'un espace métrique séparable . . . 23

2.3.1 Structure Borélienne de la tribu d'Effros . . . 24

2.3.2 Mesurabilité de l'opération enveloppe convexe fermée pour la tribu d'Effros 27

2.3.3 Un cas où la mesurabilité est conservée par intersection . . . 29

2.4 La mesurabilité pour l'appartenance . . . 33

3 Application : Relation entre l'Effros mesurabilité de multifonction et sa mesurabilité borélienne entant que fonction univoque **36**

3.1 Introduction 36
3.2 Notations et définitions 37
3.3 La Borélienne d'un hyperespace 39

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objet de ce travail est l'étude des applications mesurables multivoques. La notion de mesurabilité des multifonctions joue un rôle important dans certaines branches de l'analyse appliquée : Économie mathématique et dans la théorie de contrôle et des tests statistiques...

Dans le premier chapitre, nous donnons la mesurabilité des multifonctions au sens de Charles CASTAING [4], définie sur un espace mesurable $(T, \mathcal{T})$, à valeurs dans l'ensemble des parties compactes de X ($\mathcal{P}_K(X)$). Puis nous présentons quelques propriétés des multifonctions mesurables, et des généralités sur le graphe d'une multifonction. Notre intérêt est porté également à l'étude de quelques propriétés des multifonctions semi-continues inférieurement et supérieurement. Nous étudions aussi la notion des sélections mesurables d'une multifonction mesurable à valeurs dans l'ensemble des parties compactes d'un espace métrisable séparable.

Le deuxième chapitre est consacré à la mesurabilité des multifonctions au sens de Christian HESS [5], définie sur un espace mesurable quelconque $(\Omega, \mathcal{O})$ à valeurs fermées dans un espace métrique séparable E, nous donnons quelques définitions et notations utiles. Par la suite nous généralisons l'existence des sélections mesurables d'une multifonctions à valeurs non nécessairement compactes mais seulement fermées dans un espace métrique séparable E, en utilisant des sélections mesurables. A la fin de ce chapitre, nous étudions la conservations de la mesurabilité des multifonctions par l'opération " enveloppe convexe fermée" et la conservation de la mesurabilité par intersection finie ou dénombrable, en utilisant la représentation de Castaing des multifonctions mesurables. Nous citons aussi la notion de mesurabilité pour l'appartenance.

Le troisième chapitre est consacré à l'Effros-mesurabilité des multifonctions. Nous allons présenter des critères généraux d'une topologie $\mathcal{T}$ définie sur l'ensemble Σ des parties fermées d'un espace métrique X. Notre objectif est de démontrer que la mesurabilité d'une multifonction Γ à valeurs dans Σ n'est autre que la mesurabilité borélienne de Γ entant que fonction univoque de Ω à valeurs dans $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$.

CHAPITRE 1

LA MESURABILITÉ DE MULTIFONCTION À VALEURS COMPACTES ENTANT QUE FONCTION BORÉLIENNE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier la mesurabilité de multifonction au sens de CHARLESS Castaing sur un espace mesurable quelconque $(T, \mathcal{T})$. Nous rappelons des notions de base, quelques résultats fondamentaux sur les multifonctions, des théorème principaux concernant la mesurabilité des multifonctions.

1.2 Notations et Rappels

On considère un espace mesurable $(T, \mathcal{T})$, et X un espace métrique séparable complet et Γ une multifonction de T à valeurs dans l'ensemble des parties fermées non vides de X.
Une sélection d'une multifonction Γ est une application $\sigma : T \longrightarrow X$ tel que $\forall t$, $\sigma(t) \in \Gamma(t)$
On note par $\Gamma^{-}(B)$ l'ensemble $\{t/\Gamma(t) \cap B \neq \emptyset\}$. Et G le graphe de Γ : $\{(t,x) \in T \times X/x \in \Gamma(t)\}$
On considère les propriétés suivantes :

i) $\forall B$ borélien, $\Gamma^{-}(B) \in \mathcal{T}$.

ii) $\forall F$ fermé, $\Gamma^{-}(F) \in \mathcal{T}$.

iii) $\forall U$ ouvert, $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{T}$.

iv) il existe une suite (σ_n) de sélection mesurable de Γ tel que

$$\forall t, \Gamma(t) = \{\overline{\sigma_n(t)/n \in \mathbb{N}}\}$$

v) $\forall x \in X$, $d(x, \Gamma(.))$ est mesurable.

vi) Le graphe de Γ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X)$ avec $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne de X.

$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v) \Longrightarrow (vi)$

Γ est dite mesurable si iii) ou iv) ou v) est vérifiée.

Quand Γ est à valeurs compactes la mesurabilité de Γ est équivalente à la mesurabilité d'une application de T à valeurs dans l'ensemble des parties compactes de X muni de la métrique de Hausdorff.

Lorsque X est un espace de Fréchet et Γ est convexe à valeurs compactes, alors la mesurabilité de Γ est équivalente à $\forall x' \in X'$, $\delta^*(x', \Gamma(.))$ est mesurable.

• Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, où T est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une tribu. On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu si :

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$

ii) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow T \diagdown A \in \mathcal{T}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{T}$

• Si U est un espace topologique, la tribu borélienne $\mathcal{B}(U)$ est la plus petite tribu contenant tous les ensembles ouverts.

• Si $(T, \mathcal{T})$ et $(U, \mathcal{U})$ sont deux espaces mesurables. La tribu produit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{U}$ sur $T \times U$ est la plus petite tribu contenant tous les ensembles $A \times B$ avec $A \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{U}$.

• Si $(T, \mathcal{T})$ et $(U, \mathcal{U})$ sont deux espaces mesurables, une fonction $f : T \to U$ est dite $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$-mesurable si $\forall B \in \mathcal{U}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$

• Si U est un espace topologique une fonction $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(U))$ mesurable est appelée une fonction borélienne. Quand T et U sont à la fois espaces topologiques alors toute fonction continue est borélienne.

• Si $(T, \mathcal{T})$ est un espace mesurable et U un espace métrique nous disons que $f : T \to U$ est fortement mesurable si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

i) f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(U))$-mesurable et $f(T)$ est séparable.

ii) f est la limite simple d'une suite de fonction mesurable prenant un nombre finie de valeurs.

iii) f est la limite uniforme d'une suite de fonction mesurable prenant un nombre de valeurs dénombrable.

• Si U est un espace métrique, si (f_n) est une suite $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(U))$-mesurable (resp fortement) et $f_n \longrightarrow f$ simplement alors f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(U))$-mesurable (resp fortement).
• Si $(T, \mathcal{T})$ est un espace mesurable muni d'une mesure bornée (resp positive) définie comme suit :

$$\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R} \ (resp. \ \mu : \mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty])$$

est tel que pour toute suite d'ensemble mesurables $(A_n)_{n\geq 1}$ dénombrable et deux à deux disjoint appartenant à $\mathcal{T}$

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

Une mesure positive est σ-fini si T est l'union d'une suite dénombrable d'ensemble mesurable de mesure finie.
• Si μ est une mesure positive sur $(T, \mathcal{T})$ on dit qu'un sous-ensemble N de T est négligeable s'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.
Le μ-complétion de $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{T}$ et les ensembles négligeables, Il est désignée par $\mathcal{T}_\mu$, la mesure μ admet un unique extension de $\mathcal{T}_\mu$.

Théorème 1.1
La topologie de Hausdorff sur les parties compactes de X notée $\mathcal{P}_K(X)$ est engendrée par l'ensemble

$$\{K \in \mathcal{P}_K(X)/K \subset U\}$$

et

$$\{K \in \mathcal{P}_K(X)/K \cap V \neq \emptyset\}$$

où U et V sont des ouverts.
Une base de voisinage de K_0 est donnée par

$$\{K/K \subset U, K \cap V_1 \neq \emptyset, ..., K \cap V_n \neq \emptyset\}$$

Où $(U, V_1, ..., V_n)$ sont des ouverts contenant K_0.

Théorème 1.2
Si X est un espace métrique séparable la tribu borélienne $\mathcal{P}_K(X)$ (avec la topologie de Hausdorff) est engendrée par des ensembles

$$\{K \in \mathcal{P}_K(X)/K \subset U\}$$

(U ouvert) et il est également engendré par les ensembles.

$$\{K \in \mathcal{P}_K(X)/K \cap V \neq \emptyset\}$$

où V est un ouvert.

Définition 1.1

• *Soit* Γ *une multifonction d'un espace topologique* X *dans un espace topologique* Y*, et soit* $x_0 \in X$ *on dit que* Γ *est semi-continue inférieurement en* x_0 *si pour tout ouvert* U *rencontrant* $\Gamma(x_0)$*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que :*

$$x \in V \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x) \cap U \neq \emptyset$$

• *Soit* Γ *une multifonction d'un espace topologique* X *dans un espace topologique* Y*, et soit* $x_0 \in X$ *on dit que* Γ *est semi-continue supérieurement en* x_0 *si pour tout ouvert* U *contenant* $\Gamma(x_0)$*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que :*

$$x \in V \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x) \subset U$$

Définition 1.2

Espace polonais : est un espace métrisable à base dénombrable.

1.3 Multifonction mesurable à valeurs dans l'ensemble des parties compactes d'un espace métrisable séparable

Dans cette partie, on considère $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace métrique séparable.

Définition 1.3

Une multifonction Γ *de* T *à valeurs dans l'ensemble des parties compactes de* X *est dite mesurable si elle est mesurable entant que fonction de* T *dans* $\mathcal{P}_K(X)$ *où* $\mathcal{P}_K(X)$ *est muni de la tribu borélienne associée à la topologie de Hausdorff.*

Théorème 1.3

Avec les hypothèses de la définition, Γ *est dite mesurable si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*

a) $\forall$ U *ensemble ouvert de* X.

$$\Gamma^-(U) = \{t \in T / \Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

b) $\forall$ F *un ensemble fermé de* X.

$$\Gamma^-(F) = \{t \in T / \Gamma(t) \cap F \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

Preuve 1.1

En utilise le théorème (1.2)

a)- On remarque que ;

$$\Gamma^{-}(U) = \Gamma^{-1}(\{K \in \mathcal{P}_K(X)/K \cap U \neq \emptyset\}).$$

D'après le théorème (1.2) $\{K/K \cap U \neq \emptyset\}$ *est un ensemble borélien. Donc si* Γ *est mesurable a) est vraie. L'inverse est vrai d'après le théorème* (1.2) *la tribu borélienne sur* $\mathcal{P}_K(X)$ *est engendrée par des ensembles.*

$$\{K \in \mathcal{P}_K(X)/K \cap U \neq \emptyset\}$$

b)- Pour prouver Γ *mesurable* $\Longleftrightarrow$ *b est vitrifiée en effet :*

Il suffit de remarquer que

$$\Gamma^{-}(F) = \complement_T \Gamma^{-1}(\{K/K \subset X \diagdown F\} = \{t/\Gamma(t) \not\subset X \diagdown F\} = \{t/\Gamma(t) \cap F \neq \emptyset\}$$

Corollaire 1.1

Soit T *est un espace topologique et* Γ *une multifonction de* $T \longrightarrow \mathcal{P}_K(X)$, *si* Γ *est semi-continue supérieurement (où semi-continue inférieurement) alors* Γ *est mesurable (suivant la tribu borélienne* $\mathcal{B}(T)$ *).*

Preuve 1.2

Si Γ *est s.c.s. alors pour tout fermé* F, $\{t/\Gamma(t) \subset X \diagdown F\}$ *est ouvert, donc* $\Gamma^{-}(F) \in \mathcal{B}(T)$. *Si* Γ *est s.c.i. alors pour tout ouvert* U, $\{t/\Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\}$ *est ouvert, donc* $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{B}(T)$.

Proposition 1.1

- *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *deux multifonctions mesurables à valeurs compactes alors la multifonction* $t \longmapsto \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$ *est mesurable.*
- *Si* (Γ_n) *est une suite de multifonction mesurable à valeurs compactes alors* $t \longmapsto \cap_n \Gamma_n(t)$ *est mesurable, et si* $\overline{\cup_n \Gamma_n(t)}$ *est compacte,* $t \longmapsto \overline{\cup_n \Gamma_n(t)}$ *est mesurable.*

Preuve 1.3

1)− *Montrons que* $(K_1, K_2) \longmapsto K_1 \cap K_2$ *de* $(\mathcal{P}_K(X))^2$ *dans* $\mathcal{P}_K(X)$ *est borélien. Soit* U *un ensemble ouvert dans* X, *montrons que* $\{(K_1, K_2)/K_1 \cap K_2 \subset U\}$ *est un ouvert.*

En effet :

Si $K_1^0 \cap K_2^0 \subset U$, $K_1^0 - U$ *et* $K_2^0 - U$ *sont disjoints. Alors il existe deux ensembles ouverts* U_1 *et* U_2 *tel que* $K_i^0 - U \subset U_i \quad (i = 1, 2)$ *et* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Par le théorème (1.1) *on a*

$$\{(K_1, K_2)/K_1 \subset U_1 \cup U, K_2 \subset U_2 \cup U\}$$

Est un voisinage de (K_1^0, K_2^0).

Pour un tel (K_1, K_2) *on a*

$$K_1 \cap K_2 \subset (U_1 \cup U) \cap (U_2 \cup U) = U$$

Par conséquent, par le théorème (1.2) $(K_1, K_2) \longmapsto K_1 \cap K_2$ est borélien donc $t \longmapsto \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$ est mesurable.
2)$-$ *En appliquant la première partie de cette démonstration on obtient $\Gamma'_n = \Gamma_0 \cap ... \cap \Gamma_n$ est mesurable. Mais Γ'_n converge vers $\cap_n \Gamma_n$ pour la distance de Hausdorff. donc $t \longmapsto \cap_n \Gamma_n(t)$ est mesurable.*
3)$-$ *Soit U un ouvert de X alors*

$$\{t \ / \ \overline{\underset{n}{\cup} \Gamma_n(t)} \cap U \neq \emptyset\} = \{t \ / \ \underset{n}{\cup} \Gamma_n(t) \cap U \neq \emptyset\}$$
$$= \underset{n}{\cup} \ \{t \ / \Gamma_n(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

Donc d'après le théorème (1.3) $\overline{\cup_n \Gamma_n(.)}$ est mesurable.

1.4 Existence d'une Sélection mesurable d'une Multifonction mesurable à valeurs dans l'ensemble des parties complètes d'un espace métrisable séparable

Définition 1.4
Soit $\Gamma : T \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Une fonction $\sigma : T \longrightarrow X$ sera dite une sélection de Γ si $\sigma(t) \in \Gamma(t)$ pour tout t.

Théorème 1.4
Soit X un espace métrique séparable, $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, Γ une multifonction de T à valeurs dans l'ensemble des parties complètes et non vides de X. Si pour tout ensemble ouvert U de X

$$\Gamma^-(U) = \{t \in T / \Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

Alors Γ admet une sélection mesurable.

Preuve 1.4
Soit $\{x_n\}$ un ensemble dénombrable dense dans X. Nous définissons une suite de fonction mesurable en supposant un nombre dénombrable de valeurs (σ_p) par récurrence avec les propriétés

$$d(\sigma_p(t), \Gamma(t)) < 2^{-p}, \ d(\sigma_{p+1}(t), \sigma_p(t)) < 2^{-p+1}$$

Posons $\sigma_0(t) = x_n$ si n et le plus petit entier tel que :

$$\Gamma(t) \cap B(x_n, 2^0) \neq \emptyset$$

Ainsi σ_0 est mesurable, en effet :

$$\sigma_0^{-1}(x_n) = \Gamma^-(B(x_n, 2^0)) - \underset{m<n}{\cup} \Gamma^-(B(x_m, 2^0)).$$

Supposons σ_p choisi soit $T_i = \sigma_p^{-1}(x_i)$, si $t \in T_i$

$$\Gamma(t) \cap B(x_i, 2^{-p}) \neq \emptyset.$$

Posons sur T_i, $\sigma_{p+1}(t) = x_n$. Si n est le plus entier tel que

$$\Gamma(t) \cap B(x_i, 2^{-p}) \cap B(x_n, 2^{-(p+1)}) \neq \emptyset.$$

Alors σ_{p+1} est mesurable, $d(\sigma_{p+1}(t), \Gamma(t)) < 2^{-(p+1)}$ et

$$d(\sigma_{p+1}(t), \sigma_p(t)) \leq 2^{-p} + 2^{-(p+1)} \leq 2^{-p+1}$$

Donc σ_p est une suite de Cauchy, comme $\Gamma(t)$ est complète et $d(\sigma_p(t), \Gamma(t)) \longrightarrow 0$ alors $\sigma_p(t)$ est une suite dans $\Gamma(t)$, par suite $\sigma(t)$ la limite de $(\sigma_p(t))$ est une sélection de Γ.

Théorème 1.5

Sous la même hypothèse du théorème précédent, il existe une suite (σ_n) de sélection mesurable de Γ tel que pour tout t,

$$\Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)/n \in \mathbb{N}\}}$$

Preuve 1.5

Soit $\{x_n\}$ une suite dense dans X. Pour $(n, i) \in \mathbb{N}^2$ l'ensemble

$$T_{n,i} = \{t \in T/\Gamma(t) \cap B(x_n, 2^{-i}) \neq \emptyset\}$$

est mesurable par hypothèse. Soit $\Gamma_{n,i}$ la multifonction de T à valeurs complète non vide de X définie par :

$$\Gamma_{n,i}(t) = \begin{cases} \Gamma(t) \cap B(x_n, 2^{-i}) \neq \emptyset \ \ si \ \ t \in T_{n,i} \\ \Gamma(t) \ \ si \ \ t \in T \diagdown T_{n,i} \end{cases} \tag{1.1}$$

Chacune des multifonctions $\overline{\Gamma_{n,i}}$ est mesurable, En effet :
Soit U un ouvert

$$\overline{\Gamma_{n,i}^-} U = \{t/\overline{\Gamma_{n,i}}(t) \cap U \neq \emptyset\} = \{t/\Gamma_{n,i}(t) \cap U \neq \emptyset\}$$

est mesurable car on a :

$$\Gamma_{n,i}^- U = \{t \in T_{n,i}/\Gamma(t) \cap (B(x_n, 2^{-i}) \cap U) \neq \emptyset\} \cup \{t \in T \diagdown T_{n,i}/\Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

Donc d'après théorème (1.4) $\overline{\Gamma_{n,i}}$ à une sélection mesurable $\sigma_{n,i}$.
Montrons que $\Gamma(t) = \{\overline{\sigma_{n,i}(t)}\}$ en effet :
Soit $x \in \Gamma(t)$ et $\varepsilon > 0$, soit i tel que $2^{-i} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et n tel que $d(x_n, x) < 2^{-i}$ donc, $t \in \Gamma^-(B(x_n, 2^{-i}))$ et $\sigma_{n,i}(t) \in \overline{B(x_n, 2^{-i})}$ donc $d(\sigma_{n,i}(t), x_n) \leq 2^{-i}$
D'où

$$d(\sigma_{n,i}(t), x) \leq d(\sigma_{n,i}(t), x_n) + d(x_n, x) \leq 2^{-i} + 2^{-i} \leq \varepsilon$$

Théorème 1.6
1)-Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace polonais, et Γ de T à valeurs dans l'ensemble des parties fermées non vides de X. Si pour tout ouvert U dans X, $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{T}$. Alors Γ admet une suite de sélection mesurable (σ_n) tel que $\Gamma(t) = \{\overline{\sigma_n(t)}\}$.
2)- Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace métrique séparable, et Γ de T à valeurs dans l'ensemble des parties compactes non vides de X. Si Γ est mesurable, alors Γ admet une suite de sélection mesurable (σ_n) tel que $\Gamma(t) = \{\overline{\sigma_n(t)}\}$.

Preuve 1.6
Soit d une distance sur X compatible avec la topologie et pour laquelle E soit complet. Soient $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite dense dans X Pour $(n, i) \in \mathbb{N}^2$ l'ensemble

$$T_{n,i} = \{t \in T / \Gamma(t) \cap B(x_n, 2^{-i}) \neq \emptyset\}$$

est mesurable par hypothèse. Soit $\Gamma_{n,i}$ la multifonction de T à valeurs complète non vide de X définie par :

$$\Gamma_{n,i}(t) = \begin{cases} \Gamma(t) \cap B(x_n, 2^{-i}) \neq \emptyset \ si \ \ t \in T_{n,i} \\ \Gamma(t) \ \ si \ \ t \in T \diagdown T_{n,i} \end{cases} \tag{1.2}$$

Chacune des multifonctions $\overline{\Gamma_{n,i}}$ est mesurable, En effet :
Soit U un ouvert

$$\overline{\Gamma_{n,i}^{-}} U = \{t / \overline{\Gamma_{n,i}}(t) \cap U \neq \emptyset\} = \{t / \Gamma_{n,i}(t) \cap U \neq \emptyset\}$$

est mesurable car on a :

$$\Gamma_{n,i}^{-} U = \{t \in T_{n,i} / \Gamma(t) \cap (B(x_n, 2^{-i}) \cap U) \neq \emptyset\} \cup \{t \in T \diagdown T_{n,i} / \Gamma(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

Donc d'après théorème (1.4) $\overline{\Gamma_{n,i}}$ à une sélection mesurable $\sigma_{n,i}$.
Montrons que $\Gamma(t) = \{\overline{\sigma_{n,i}(t)}\}$ en effet :
Soit $x \in \Gamma(t)$ et $\varepsilon > 0$, soit i tel que $2^{-i} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et n tel que $d(x_n, x) < 2^{-i}$ donc, $t \in \Gamma^{-}(B(x_n, 2^{-i}))$ et $\sigma_{n,i}(t) \in \overline{B(x_n, 2^{-i})}$ donc $d(\sigma_{n,i}(t), x_n) \leq 2^{-i}$
D'où

$$d(\sigma_{n,i}(t), x) \leq d(\sigma_{n,i}(t), x_n) + d(x_n, x) \leq 2^{-i} + 2^{-i} \leq \varepsilon$$

Théorème 1.7
Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace métrique séparable et Γ de T à valeurs dans l'ensemble des parties complètes non vides de X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{T}$ *pour tout ouvert* U.

b) $d(x, \Gamma(.))$ *est mesurable pour tout* $x \in X$.

c) Γ *admet une suite de sélection mesurable* (σ_n) *tel que :*

$$\Gamma(t) = \{\overline{\sigma_n(t)}\}$$

Preuve 1.7
$a \Longrightarrow c$ est le théorème (1.5)
$c \Longrightarrow b$ Car on a

$$d(x, \Gamma(t)) = \inf\{d(x, \sigma_n(t))/n \in \mathbb{N}\}$$

$b \Longrightarrow a$ En remarque que

$$\{t/d(x, \Gamma(t)) < r\} = \Gamma^-(B(x, r))$$

Mais tout ouvert U est une réunion des suites des boules $B(x_n, r_n)$. Donc

$$\Gamma^-(U) = \bigcup_n \Gamma^-(B(x_n, r_n))$$

est mesurable si b est vrai.
$a \Longrightarrow b$ Par la formule suivante

$$\{t/d(x, \Gamma(t)) < r\} = \Gamma^-(B(x, r))$$

et $c \Longrightarrow a$ par la formule

$$\Gamma^-(U) = \bigcup_n \sigma_n^{-1}(U)$$

Définition 1.5
Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace métrique séparable et Γ de T à valeurs dans l'ensemble des parties complètes de X. Alors Γ est dite mesurable si

$$T_0 = \{t/\Gamma(t) = \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

et si sur $T \diagdown T_0$, Γ possède des propriétés de théorème précédent.

Proposition 1.2
Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace métrique et Γ de T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$. Alors si $\Gamma^-(F) \in \mathcal{T}$ pour tout fermé F, alors $\Gamma^-(U) \in \mathcal{T}$ pour tout ouvert U.

Preuve 1.8
Pour tout ouvert U on posant $F_n = \{x \in X/d(x, X \diagdown U) \geq \frac{1}{n}\}$ $(n \geq 1)$ alors

$$U = \bigcup_n F_n$$

et

$$\Gamma^-(U) = \bigcup_n \Gamma^-(F_n)$$

Proposition 1.3
1)- Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, X un espace localement compact polonais, et Γ de T à valeurs dans $\mathcal{P}_f(X)$. Si $\Gamma^-(U) \in \mathcal{T}$ pour tout ouvert U, alors $\Gamma^-(F) \in \mathcal{T}$ pour tout fermé F.
2)-Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace métrisable et Γ de T à valeurs dans $\mathcal{P}_k(X)$. Si $\Gamma^-(U) \in \mathcal{T}$ pour tout ouvert U, alors $\Gamma^-(F) \in \mathcal{T}$ pour tout fermé F.

Preuve 1.9

1)-Si F est fermé, $F = \cup_n K_n$ des suites des compactes K_n alors $\Gamma^-(F) = \cup_n \Gamma^-(K_n)$. Supposons K est compact est montrons que $\Gamma^-(K) \in \mathcal{T}$. Le compactifiée d'Alexandroff $\widetilde{X}$ de X est métrisable, alors pour $(n \geq n_0)$

$$K_n = \{x \in \widetilde{X}/d(x, K) \leq \frac{1}{n}\}$$

est contenu dans X, et compact.
Soit (σ_n) une suite de sélection mesurable de Γ d'après théorème (1.5)

$$\Gamma^-(K) = \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_m \sigma_m^{-1}(K_n)$$

Si $t \in \Gamma^-(K)$, $\Gamma(t) \cap K \neq \emptyset$ implique pour tout $n \geq n_0$, $\Gamma(t) \cap \mathring{K}_n \neq \emptyset$ et par conséquent il existe m tel que $\sigma_m(t) \in K_n$.
Inversement, si

$$t \in \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_m \sigma_m^{-1}(K_n)$$

Alors pour tout n, $\Gamma(t) \cap K_n \neq \emptyset$. Soit $x_n \in \Gamma(t) \cap K_n$, alors la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est contenant dans K_{n_0}. Soit x la limite de (x_n). Alors $x \in \cap K_n = K$ et $x \in \Gamma(t)$.

2)- Si F est fermé, posons

$$U_n = \{x/d(x, F) < \frac{1}{n}\}$$

Alors

$$\Gamma^-(F) = \bigcap_n \Gamma^-(U_n)$$

qui entrainera la mesurabilité de Γ. Car si $t \in \Gamma^-(F)$ et $x \in \Gamma(t) \cap F$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$$t \in \bigcap_n \Gamma^-(U_n).$$

Inversement, soient $t \in \cap_n \Gamma^-(U_n)$ et $x_n \in \Gamma(t) \cap U_n$. Puisque $\Gamma(t)$ est compacte, on peut extraire une sous-suite x_{n_k} convergeant vers $x \in \Gamma(t)$, et l'on a :

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} d(x_{n_k}, U) = d(x, U) = 0.$$

D'où $x \in \Gamma(t) \cap U$, d'où $t \in \Gamma^- U$.

1.5 Graphe d'une multifonction

Définition 1.6
Étant donnée une multifonction Γ d'un espace topologique T vers un espace topologique X, on définit le graphe $G(\Gamma)$ de Γ par :

$$G(\Gamma) = \{(t,x) \in T \times X / x \in \Gamma(t)\}.$$

Lemme 1.1
Soient T et X deux espaces topologiques et soit $(\Gamma_i, i \in I)$ une famille de multifonctions de graphe ouvert de T dans X. Alors la multifonction

$$\Gamma : t \longmapsto \bigcap_{i \in I} \Gamma_i(t)$$

De T dans X est de graphe ouvert si I est fini.

Preuve 1.10
Soient $G(\Gamma_i)$ le graphe de Γ_i, $i \in I$ et $G(\Gamma)$ le graphe de Γ on a :

$$G(\Gamma) = \{(t,x) \in T \times X / x \in \bigcap_{i \in I} \Gamma_i(t)\} = \bigcap_{i \in I} G(\Gamma_i).$$

Si les ensembles $G(\Gamma_i)$ sont ouverts, il est de même de l'intersection finie des $G(\Gamma_i)$.

Lemme 1.2
Soient T et X deux espaces topologiques et soit $(\Gamma_i, i \in I)$ une famille de multifonction de graphe fermé de T dans X. Alors la multifonction

$$\Gamma : t \longmapsto \bigcup_{i \in I} \Gamma_i(t)$$

De T dans X est de graphe fermé si I est fini.

Preuve 1.11
Soient $G(\Gamma_i)$ le graphe de Γ_i, $i \in I$ et $G(\Gamma)$ le graphe de Γ on a :

$$G(\Gamma) = \{(t,x) \in T \times X / x \in \bigcup_{i \in I} \Gamma_i(t)\} = \bigcup_{i \in I} G(\Gamma_i)$$

Si les ensembles $G(\Gamma_i)$ sont fermés, il est de même de la réunion finie des $G(\Gamma_i)$.

Lemme 1.3
Soit $(T, \mathcal{T})$ est un espace mesurable, X un espace métrique séparable, U un espace métrisable et $\phi : T \times X \longrightarrow U$. nous supposons que ϕ est mesurable dans T et continue dans X. Alors ϕ est mesurable.

Proposition 1.4
Si $(T, \mathcal{T})$ est un espace mesurable, X un espace métrique séparable, et Γ de T à valeurs dans l'ensemble des parties complètes de X, alors le graphe de Γ appartient à $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X)$.

Preuve 1.12
On peut supposer $\Gamma(t)$ non vide pour chaque t. le graphe G de Γ est

$$G = \{(t, x) \in T \times X / d(x, \Gamma(t)) = 0\}$$

Mais la fonction $d(x, \Gamma(.))$ est mesurable, ainsi par la suite de lemme précédent $(t, x) \longmapsto d(x, \Gamma(t))$ est mesurable, et $G \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X)$.

1.6 Les Multifonctions mesurables à valeurs compactes convexes

Lemme 1.4
Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, Z un espace métrique séparable et $f : T \longrightarrow Z$ tel que pour tout $z \in Z$, $d(z, f(.))$ est mesurable alors f est mesurable.

Théorème 1.8
Soit $(T, \mathcal{T})$ un espace mesurable, E un espace vectoriel métrisable séparable localement convexe, et Γ de T à $\mathcal{P}_{ck}$. Alors Γ est mesurable si et seulement si la fonction d'appui $\delta^*(x'/\Gamma(.))$ sont mesurables.

Preuve 1.13
Si Γ est mesurable,

$$T_0 = \{t/\Gamma(t) = \emptyset\} \in \mathcal{T}$$

Si $\delta^*(x'/\Gamma(.))$ est mesurable alors

$$T_0 = \{t/\delta^*(0/\Gamma(t)) = -\infty\} \in \mathcal{T}$$

Donc on peut supposer $\Gamma(t)$ non vides. Si Γ est mesurable, par théorème (1.5) il existe une suite de sélection mesurable (σ_n), tel que

$$\Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}$$

Donc

$$\delta^*(x'/\Gamma(t)) = \sup_n < x', \sigma_n(t) >$$

est une fonction mesurable en t. Inversement on suppose $\delta^*(x'/\Gamma(.))$ est mesurable. Il existe une suite croissante de semi-norme (p_n) qui définit la topologie de E. Soit h_n une semi-distance de

Hausdorff associée à (p_n). On a la distance sur $\mathcal{P}_{ck}$,

$$H(A,B) = \sum 2^{-n} \frac{h_n(A,B)}{1+h_n(A,B)}$$

On peut montrer que : pour tout $A \in \mathcal{P}_{ck}$ $\quad t \longmapsto H(A,\Gamma(t))$ est mesurable. Donc d'après le lemme précédent, il est suffisant de prouver la mesurabilité de $h_n(A,\Gamma(.))$. Mais la semi-distance s'écrit sous la forme

$$h_n(A,B) = \sup\{|\delta^*(x'/A) - \delta^*(x'/B)| x' \in V_n^0\}$$

Avec $V_n = \{x/p_n(x) \leq 1\}$.
L'ensemble V_n^0 est équicontinue, donc compact pour cette topologie de convergence uniforme sur les ensembles compacts de E.
Soit $\{x'_n\}$ un ensemble dénombrable dense dans V_n^0. de plus $\delta^*(./A)$ et $\delta^*(./\Gamma(t))$ sont continues pour la topologie on a :

$$h_n(A,\Gamma(t)) = \sup_n |\delta^*(x'_n/A) - \delta^*(x'_n/\Gamma(t))|$$

Donc il est mesurable dans t.

1.7 Mesurabilité dans l'espace suslin localement convexe

Définition 1.7
Un espace suslin est un espace topologique séparé tel qu'il existe un espace polonais P et une fonction continue de P vers S.

Lemme 1.5
Soit E un espace topologique suslin et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonction continue à valeurs réelles qui sépare les points de E. Alors il existe une sous-famille $(f_i)_{i\in D}$ dénombrable qui sépare encore des points de E.

Lemme 1.6
Soit E un espace de Hausdorff localement convexe et (e'_n) une suite dans E' qui sépare les points de E. Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires à coefficients rationnels de (e'_n) est un sous-ensemble dénombrable dense de E'.

Preuve 1.14

Pour toute topologie de l'espace vectoriel topologique sur E', la fermeture de H est un espace vectoriel. Donc si H_1 désigne l'espace vectoriel engendré par (e'_n), $\overline{H} = \overline{H_1}$.
Mais comme H_1 est convexe sa fermeture pour $\mathcal{T}(E', E)$ (la plus forte topologie des espaces localement convexes séparés) est la même que sa fermeture pour $\sigma(E', E)$. Mais pour $\sigma(E', E)$, $\overline{H_1} = E'$ parce que l'espace orthogonal $H_1^{\perp}$ et $\{\emptyset\}$.

Lemme 1.7

Soit E un espace de séparé localement convexe et E' son dual muni de la topologie de Mackey. Soit f une fonction propre convexe sur E', finie et continue en un point $x_0 \in E'$. Soit D un sous ensemble dense de E'. Alors

$$\inf\{f(y')/y' \in E'\} = \inf\{f(x')/x' \in D\}$$

Proposition 1.5

Soit E un espace séparé localement convexe et (x'_n) une suite dense dans E' pour $\mathcal{T}(E', E)$, et K un ensemble convexe fermé faiblement localement compact de E qui ne contient pas de droite. Alors

$$K = \bigcap_n \ \{x \in E/ \ < x'_n, x > \leq \ \delta^*(x'_n/K)\}$$

Preuve 1.15

On pose $f = \delta^*(./K)$ par le lemme précédent appliqué à f avec $D = \{x'_n/n \in \mathbb{N}\}$ nous avons

$$\begin{aligned}\delta(x/K) &= -\inf\{\delta^*(x'/K) - < x', x > /x' \in E'\} \\ &= -\inf\ \{\delta^*(x'_n/K) - < x'_n, x > /n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\ \{< x'_n, x > -\delta^*(x'_n/K)/n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}x \in K &\iff \delta(x/K) \leq 0 \\ &\iff \forall n, < x'_n, x > -\delta^*(x'_n/K) \leq 0\end{aligned}$$

Proposition 1.6

Soit E un espace suslin localement convexe, $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesurable, Γ une multifonction de T à valeurs dans l'ensemble des parties convexes fermées faiblement localement compactes de E qui ne contiennent pas de droite, Σ de T à valeurs dans l'ensemble convexe fermée de E. Si

$$\forall x' \in E', \delta^*(x'/\Sigma(t)) \leq \delta^*(x'/\Gamma(t)) \quad \mu - presque\ partout.$$

Alors $\Sigma(t) \subset \Gamma(t)$ *$\mu-$ presque partout.*

Preuve 1.16
Par le lemme (1.6) *il existe une suite dense* (x'_n) *dans* E' *muni de la topologie* $\mathcal{T}(E', E)$. *Pour tout* n *nous avons*

$$\Sigma(t) \subset \{x \in E / < x'_n, x > \leq \delta^*(x'_n/\Gamma(t))\} \quad \mu - \textit{presque partout.}$$

Alors d'après la proposition précédente on a $\Sigma(t) \subset \Gamma(t)$ $\mu-$ *presque partout.*

CHAPITRE 2

LA MESURABILITÉ DE MULTIFONCTION À VALEURS FERMÉES

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier la mesurabilité des multifonctions au sens de Christian HESS définie sur $(\Omega, \mathcal{O})$ à valeurs dans l'ensemble des parties fermées d'un espace métrique séparable E. Nous rappelons quelque notions de base, des résultats fondamentaux sur les multifonction et des théorèmes principaux concernant la mesurabilité des multifonctions.

2.2 Notations et Rappels

On se donne un espace mesurable quelconque $(\Omega, \mathcal{O})$ et un espace métrique séparable E dont la distance est notée d. Pour tout sous-ensemble F de E et pour tout x de E on posera

$$d(x, F) = inf[d(x, y) : y \in F]$$

La fonction $d(., F)$ est la fonction distance à F, $\overline{F}$ désignera la fermeture topologique de F et $\overset{\circ}{F}$ son intérieur topologique.

On notera $\mathcal{B}(E)$ la tribu borélienne de E et $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fermés de E.

Dans le cas où E est un espace vectoriel topologique (e.v.t) métrisable séparable on notera $\mathcal{F}_c(E)$ l'ensemble des parties convexes fermées de E.

Sur $\mathcal{F}(E)$ on considère la tribu $\mathcal{F}^-$ engendrée par les parties de la forme

$$\mathcal{F}^-(U) = \{F \in \mathcal{F}(E)/F \cap U \neq \emptyset\}$$

Où U décrit l'ensemble des ouverts de E, la tribu $\mathcal{F}^-$ est la tribu d'Effros sur $\mathcal{F}(E)$.

Une application X de Ω dans $\mathcal{F}(E)$ sera souvent appelée multifonction à valeurs fermées.

X est dite mesurable si la tribu $X^{-1}(\mathcal{F}^-)$ est contenue dans $\mathcal{O}$. Autrement dit si X est mesurable de $(\Omega, \mathcal{O})$ dans $(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}^-)$. Alors pour tout ouvert U de E le sous ensemble $X^{-1}(\mathcal{F}^- U)$ noté aussi $X^-(U)$ appartienne à $\mathcal{O}$.

Le domaine de X noté $domX$, est le sous ensemble de Ω défini par :

$$domX = \{\omega \in \Omega/X(\omega) \neq \emptyset\}$$

Une section ou sélection d'une multifonction X est une application f de Ω dans E, telle que pour tout ω dans $domX$, $f(\omega)$ appartienne à $X(\omega)$.

Pour toute multifonction mesurable X à valeurs complètes dans E. Il existe une section f de X qui est mesurable de $domX$ dans E.

On appelle représentation de Castaing de la multifonction mesurable X une suite $(f_k)_{k \geq 1}$ de sections mesurables de X vérifiant, quelque soit ω dans $domX$

$$X(\omega) = \{\overline{f_k(\omega)/\ k \geq 1}\}$$

.

Proposition 2.1
Si X est une multifonction à valeurs complètes non vides dans un espace métrique séparable E alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

a) X est mesurable

b) il existe une représentation de Castaing de X

c) pour tout x dans E (ou seulement dans une partie dénombrable dense) la fonction positive $d(x, X(.))$ est mesurable.

2.3 La tribu d'Effros sur l'ensemble des fermés d'un espace métrique séparable

On va d'abord montrons que la tribu d'Effros est la tribu borélienne d'une topologie métrisable séparable sur E. On verra ensuite, lorsque E est un e.v.t métrisable séparable, que l'opération "enveloppe convexe fermée" est mesurable de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}_c(E)$.

Définition 2.1

• ***filtre*** *: On appelle filtre sur un ensemble E tout partie non vide F de $\mathcal{F}(E)$ vérifiant les axiomes :*

a) Si $A \in F$ et $A \subset B$, $B \in F$.

b) Si $A, B \in F$, alors $A \cap B \in F$.

c) $\emptyset \notin F$.

• ***structure uniforme*** *: On appelle structure uniforme sur un ensemble E une structure constituée par la donnée d'un ensemble U de parties de $E \times E$ qui satisfait aux axiomes a) et b) et aux axiomes suivants.*

i) l'intersection des ensembles de F est la diagonale Δ.

ii) $V \in F$ entraine $V^{-1} \in F$.

iii) Pour tout $V \in F$ correspond un ensemble $V_1 \in F$ tel que $V_1^2 \subset V$.

• ***espace uniforme*** *: est un ensemble E, muni de la structure uniforme donnée et de la structure topologique qu'elle détermine.*

2.3.1 Structure Borélienne de la tribu d'Effros

Pour tout x dans E on définit l'écart $\mathcal{D}_x$ sur $\mathcal{F}(E)$ en posant $\forall F_1, F_2$.

$$\mathcal{D}_x(F_1, F_2) = \begin{cases} |d(x, F_1) - d(x, F_2)| \ si \ \ F_1 \ \ ou \ \ F_2 \ \ est \ \ non \ \ vide \\ 0 \ sinon \end{cases} \tag{2.1}$$

La structure uniforme engendrée par les écarts $\mathcal{D}_x$ est notée δ_u et la topologie associée sera notée δ.

Théorème 2.1

Soit E un espace métrique séparable la tribu d'Effros $\mathcal{F}^-$ est la tribu borélienne de la topologie δ qui est métrisable séparable sur $\mathcal{F}(E)$.Cette topologie est celle de la convergence simple des fonctions distances.

Preuve 2.1

Montrons d'abord que δ est métrisable séparable. Désignons par D une partie dénombrable dense de E. La famille des fonctions distances $d(., F)$ où F décrit $\mathcal{F}(E)$ est équicontinue. Pour cette famille la topologie de la convergence simple sur E est donc équivalente à celle de la convergence simple sur D, ce qui prouve que la topologie δ est engendrée par une famille dénombrable d'écart elle est donc bien métrisable.

On va maintenant montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(D)$ des parties finies de D est dense dans $\mathcal{F}(E)$ pour δ. Soit F_1 dans $\mathcal{F}(E)$, ε positif et M une partie finie de D on doit prouver l'existence de F dans $\mathcal{P}_f(D)$ tel que

$$\sup_{x\in M} \mathcal{D}_x(F_1, F) = \sup_{x\in M} |d(x, F_1) - d(x, F)| < \varepsilon \quad (*)$$

Si $F_1 = \emptyset$ il suffit de prendre $F = \emptyset$. Si $F_1 \neq \emptyset$ on peut trouver, $\forall x \in M$, un élément $g(x)$ de F_1 vérifiant :

$$d(x, F_1) \leq d(x, g(x)) < d(x, F_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall x \in M$, $\exists f(x)$ de D, appartenant à $B(g(x), \frac{\varepsilon}{2})$ ce qui implique que :

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, g(x)) + d(g(x), f(x)) \\ &\leq d(x, F_1) + \varepsilon \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\geq d(x, g(x)) - d(g(x), f(x)) \\ &\geq d(x, F_1) - \frac{\varepsilon}{2} > d(x, F_1) - \varepsilon \end{aligned}$$

Dans ces conditions si l'on pose $F = \{f(x)/x \in M\}$
On voit que $F \in \mathcal{P}_f(D)$ et qu'il vérifie, $\forall x \in M$

$$d(x, F) \leq d(x, f(x)) < d(x, F_1) + \varepsilon$$

Par ailleurs pour tout x dans M, $\exists y$ dans M tel que $d(x, F) = d(x, f(y))$ d'où en utilisant les relations ci-dessus :

$$\begin{aligned} d(x, F) &\geq d(x, g(y)) - d(g(y), f(y)) \\ &\geq d(x, F_1) - \frac{\varepsilon}{2} > d(x, F_1) - \varepsilon \end{aligned}$$

La relation $(*)$ est donc satisfaite ce qui prouve la séparabilité.
Montrons maintenant que $\mathcal{F}^- = \mathcal{B}(\delta)$. D'après la première partie de la démonstration la topologie δ est métrisable séparable, par conséquent la tribu $\mathcal{B}(\delta)$ est engendrée par la famille dénombrable des boules

$$V(F_1, r, x) = \{F \in \mathcal{F}(E)/\mathcal{D}_x(F_1, F) < r\}$$

Qui sont ouvertes pour la topologie δ. Donc on a l'égalité :

$$\mathcal{F}^- B(x, r) = \{F \in \mathcal{F}(E)/d(x, F) < r\}$$

Valable pour tout x, r montre que les applications $F \longrightarrow d(x, F)$ sont mesurables de $(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}^-)$ dans $\mathbb{R}$ et par suite que les boules $V(F_1, r, x)$ appartiennent à $\mathcal{F}^-$. On déduit l'inclusion $\mathcal{B}(\delta) \subset$

$\mathcal{F}^-$

Inversement on note que le singleton $\{\emptyset\}$ est fermé pour δ est qu'il appartient donc à $\mathcal{B}(\delta)$. On a aussi pour tout $B(x,r)$ de E :

$$\mathcal{F}^- B(x,r) = V(\{x\}, r, x) \quad (**)$$

Ce qui prouve que le premier membre de $(**)$ appartient à $\mathcal{B}(\delta)$. Enfin puisque tout ouvert U de E s'écrit :

$$U = \bigcup_{n\geq 1} B_n$$

Où les B_n sont des boules ouvertes, et puisque

$$\mathcal{F}^- U = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}^- B_n$$

alors $\mathcal{F}^- \subset \mathcal{B}(\delta)$

Remarque 2.1

On a vu au cours de la démonstration précédente que la tribu $\mathcal{F}^-$ est aussi engendrée par les applications $d(x,.)$ où x décrit E ou D.

Par ailleurs, si l'on pose $D = \{x_n / n \geq 1\}$ on voit qu'une distance $\mathcal{D}$ qui métrise la topologie δ, peut être définie en posant pour tout F_1, F_2 dans $\mathcal{F}(E)$

$$\mathcal{D}(F_1, F_2) = \sum_{n\geq 1}^{n} 2^{-n} min[1, |d(x_n, F_1) - d(x_n, F_2)|]$$

Corollaire 2.1

Une multifonction X définie sur Ω, à valeurs fermées dans E, est mesurable si et seulement si elle est limite simple sur Ω pour la topologie δ d'une suite de multifonctions $\mathcal{O}$-mesurables étagées.

Corollaire 2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et $\sigma-$finie, on note $\mathcal{O}_\mu$ la tribu complétée de $\mathcal{O}$ pour la mesure μ. Soit également E un espace métrisable séparable. Si X est une multifonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{O}_\mu)$ dans $(\mathcal{C}, \mathcal{F}^-)$ où $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{F}(E)$, complète pour la structure uniforme δ_μ alors il existe une application $\mathcal{O}$-mesurable Y telle que pour tout μ-presque tout ω dans Ω on ait $Y(\omega) = X(\omega)$.

Preuve 2.2

D'après le corollaire précédent il existe une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ d'application $\mathcal{O}_\mu$-mesurable étagées telle que pour tout ω dans Ω :

$$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

la limite ayant pour la topologie δ. Or pour tout entier $n \geq 1$ X_n s'écrit :

$$X_n = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{B_i^n} F_i^n$$

Où les k_n sont des entiers positifs, où les F_i^n sont dans $\mathcal{F}(E)$ où les B_i^n sont dans $\mathcal{O}_\mu$ et où $\chi_{B_i^n}$ désigne la fonction indicatrice de B_i^n. Cette notations est néanmoins commode pour indiquer que X_n prend la valeur F_i^n en tout point de B_i^n. Elle sera encore utilisée la mesure μ étant σ-finie on sait que pour tout i, $n \geq 1$. Il existe A_i^n dans $\mathcal{O}$, tel que $\mu(A_i^n \Delta B_i^n) = 0$. On pose alors pour tout $n \geq 1$.

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{A_i^n} F_i^n$$

Puisque les Y_n sont $\mathcal{O}$-mesurables, et à valeurs dans $\mathcal{C}$, l'ensemble R de convergence de la suite(Y_n) appartient à $\mathcal{O}$ de plus $\mu(\Omega \setminus R) = 0$
En fin si l'on pose $\forall \omega$ dans Ω

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} Y_n(\omega) & si \quad \omega \in R \\ F \quad sinon \end{cases} \tag{2.2}$$

Où F est un élément dans $\mathcal{F}(E)$.

2.3.2 Mesurabilité de l'opération enveloppe convexe fermée pour la tribu d'Effros

On désigne encore par $(\Omega, \mathcal{O})$ un espace mesurable quelconque, on suppose que E est un e.v.t métrisable séparable. On sait que si X et Y sont deux multifonctions mesurables à valeurs complètes non vides dans E, alors les multifonctions $\overline{X+Y}$ et $\overline{coX}$ sont aussi mesurables.
L'espace E étant à base dénombrable, E^n l'est aussi et tout ouvert de E^n est réunion dénombrable de pavés ouverts : $\prod_{i=1}^{n} U_i$ Où les U_i sont des ouverts de E. Ceci montre que la tribu $\mathcal{F}_n^-$ est aussi engendrée par les parties de la forme $\mathcal{F}^-(\prod_{i=1}^{n} U_i)$.
Par ailleurs, on considère sur l'ensemble produit $\mathcal{F}(E)^n$ la tribu produit $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}^-$. Cette tribu est engendrée par les parties de la forme $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}^-(U_i)$ Où les U_i sont des ouverts de E. Dans ces conditions l'application j_n de $\mathcal{F}(E)^n$ dans $\mathcal{F}(E^n)$ définie pour tout $(F_1, F_2, ..., F_n)$ de $\mathcal{F}(E)^n$ par :

$$j_n(F_1, F_2, ..., F_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i$$

Est une bijection bimesurable de $\mathcal{F}(E)^n$ sur le sous-ensemble de $\mathcal{F}(E^n)$ constitué par les pavés fermés. En effet :
Il est claire que j_n est bijective de plus pour tout suite $(U_1, U_2, ..., U_n)$ d'ouverts de E on a :

$$j_n^{-1}(\mathcal{F}^-(\prod_{i=1}^{n} U_i)) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}^-(U_i)$$

et aussi

$$j_n(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}^-(U_i)) = \mathcal{F}^-(\prod_{i=1}^{n} U_i)$$

Lemme 2.1
Soit E un e.v.t métrisable séparable. Alors pour tout entier positif n et pour tout $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, l'application

$$f_n : (F_1, F_2, ..., F_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$$

est mesurable de $(\mathcal{F}(E)^n, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}^-)$ dans $(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}^-)$

Preuve 2.3
Soit w_n l'application de E^n dans E définie $\forall x = (x_1, ..., x_n)$ dans E^n par

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

On a alors pour tout ouvert U de E :

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(\mathcal{F}^-(U)) &= \{(F_1, F_2, ..., F_n)/w_n(\prod_{i=1}^{n} F_i) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{(F_1, F_2, ..., F_n)/\prod_{i=1}^{n} F_i \cap w_n^{-1}(U) \neq \emptyset\} \\ &= j_n^{-1}(\mathcal{F}^-(w_n^{-1}(U))) \end{aligned}$$

De la continuité de w_n on déduit le résultat.

Proposition 2.2
Si E est un e.v.t métrisable séparable alors l'application "enveloppe convexe fermée", que l'on note $\overline{co}$ est mesurable de $(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}^-)$ dans lui-même.

Preuve 2.4
On note S_n l'ensemble des éléments $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de $\mathbb{Q}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et $\alpha_i \geq 0$ pour tout $i = 1, ..., n$. On désigne par L l'ensemble dénombrable

$$L = \underset{n \geq 1}{\cup} \{n\} \times S_n$$

On voit alors que l'enveloppe convexe fermée de toute partie F de E peut s'écrire

$$\overline{co}F = \underset{\ell \in L}{\cup} g_\ell(F)$$

Où l'on posé pour tout $\ell = (n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ dans L

$$g_\ell(F) = \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F}$$

Or, si l'on note k_n l'application mesurable de $(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}^-)$ dans $(\mathcal{F}(E)^n, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}^-)$ définie pour tout fermé F de E par

$$k_n(F) = (F, F, ..., F) \text{ avec (} n \text{ coordonnées),}$$

On voit que :

$$g_\ell(F) = f_n(k_n(F))$$

Compte tenu du lemme précédent g_ℓ est donc mesurable de $(\mathcal{F}(E), \mathcal{F}^-)$ dans lui-même. On en déduit enfin que l'application $\overline{co}$ l'est aussi.

Corollaire 2.3
Soit E un e.v.t métrisable séparable. Si X et Y sont deux multifonctions mesurables à valeurs fermées dans E alors les deux multifonctions $\overline{X+Y}$ et $\overline{coX}$ sont mesurables.

2.3.3 Un cas où la mesurabilité est conservée par intersection

On désigne par E un espace métrique séparable dont la distance est notée d. Si X est une multifonction mesurable à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$ et W un ouvert quelconque de E, alors la multifonction Z définie sur Ω par :

$$Z(\omega) = \overline{X(\omega) \cap W}$$

Est mesurable à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$.

Proposition 2.3
Soit E un espace métrique séparable, X une multifonction mesurable à valeurs complètes dans E et Γ une multifonction à valeurs dans E vérifiant:

a) Pour tout ω dans Ω, $\Gamma(\omega)$ est un ouvert tel que:

$$\overset{\circ}{\overline{\Gamma(\omega)}} = \Gamma(\omega)$$

b) Pour tout x dans E l'ensemble

$$\Gamma^-\{x\} = \{\omega \in \Omega / x \in \Gamma(\omega)\}$$

appartient à $\mathcal{O}$. Dans ces conditions, la multifonction Z définie pour tout ω par:

$$Z(\omega) = \overline{X(\omega) \cap \Gamma(\omega)}$$

est mesurable.

Preuve 2.5
On doit montrer que, pour tout ouvert U de E, le sous-ensemble

$$Z^{-}(U) = \{\omega \in \Omega / Z(\omega) \cap U \neq \emptyset\}$$

appartient à $\mathcal{O}$. Mais U étant ouvert, un élément ω de Ω appartient à $Z^{-}(U)$ si et seulement si $\overline{X(\omega)} \cap \Gamma(\omega) \cap U$ est non vide, ou encore puisque $\Gamma(\omega)$ est ouvert si et seulement si $\overline{X(\omega) \cap U} \cap \Gamma(\omega)$ est non vide. Or on a remarqué au début que la multifonction

$$\omega \longmapsto \overline{X(\omega) \cap U}$$

était mesurable. Ses valeurs étant complètes elle admet une représentation de Castaing $(f_n)_{n \geq 1}$ ce qui permet d'écrire l'égalité:

$$Z^{-}(U) = \bigcup_{n \geq 1} \{\omega \in \Omega / f_n(\omega) \in \Gamma(\omega)\}$$

Par conséquent il suffit de montrer que, pour tout application g mesurable de $(\Omega, \mathcal{O})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$, les sous-ensembles:

$$A = \{\omega \in \Omega / g(\omega) \in \Gamma(\omega)\}$$

Appartient à $\mathcal{O}$.

Lemme 2.2
Soit E un e.v.t séparé, F une partie convexe fermée de E, C une partie convexe fermée d'intérieur non vide et D une partie dense de F. Si l'on suppose que $\overset{\circ}{C} \cap F$ est non vide alors $\overset{\circ}{C} \cap D$ et a fortiori, $C \cap D$ sont dense dans $C \cap F$.

Preuve 2.6
Soit x dans $C \cap F$ et V un voisinage ouvert de l'origine de E. D'après une propriété topologique classique des ensembles convexes on a

$$\overline{\overset{\circ}{C}} = C$$

D'où l'on déduit :

$$(x + V) \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$$

Soit alors y dans $\overset{\circ}{C} \cap F$. L'intervalle semi ouvert $[y, x[$ est contenu dans le convexe $F \cap \overset{\circ}{C}$. En outre il rencontre $x + V$ car, V étant absorbant, l'intersection de $x + V$ avec la droite passant par x et y est un intervalle ouvert contenant x. Ainsi on a

$$(x + V) \cap \overset{\circ}{C} \cap F \neq \emptyset$$

Ce qui montre que l'ouvert $(x + V) \cap \overset{\circ}{C}$ rencontre F, donc aussi D. Autrement dit on a

$$(x + V) \cap \overset{\circ}{C} \cap D \neq \emptyset$$

Proposition 2.4
Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ un espace mesurable, E un e.v.t métrisable séparable, X et Y deux multifonctions mesurables à valeurs convexes fermées non vides dans E. On suppose en outre que :

a) X est à valeurs complètes.

b) Pour tout ω dans Ω l'intérieur de $Y(\omega)$ est non vide et rencontre $X(\omega)$.

Dans ces conditions la multifonction $Z = X \cap Y$ est mesurable.

Preuve 2.7
Pour tout ω dans Ω posons

$$\Gamma(\omega) = \overset{\circ}{Y}(\omega)$$

et montrons que la multifonction Γ vérifie les hypothèses a) et b) de la proposition précédente. On a ici dom$\Gamma = \Omega$ et $\Gamma(\omega)$ est bien un ouvert non vide de E. De plus, $\Gamma(\omega)$ étant convexe car $Y(\omega)$ est convexe, la relation

$$\overline{\overset{\circ}{\Gamma(\omega)}} = \Gamma(\omega)$$

Ce qui montre que l'hypothèse a) est satisfaite. En ce qui concerne l'hypothèse b) on note que l'appartenance d'un élément x de E à $\overset{\circ}{Y}(\omega)$ équivaut à l'existence d'un entier $j \geq 1$ tel que

$$B(x, \frac{1}{j}) \subset Y(\omega)$$

Mais si D est une partie dénombrable dense de E cette dernière inclusion est réalisée si et seulement si

$$D \cap B(x, \frac{1}{j}) \subset Y(\omega)$$

Par conséquent on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-}\{x\} &= \{\omega \in \Omega / x \in \overset{\circ}{Y}(\omega)\} \\
&= \{\omega \in \Omega / D \cap B(x, \frac{1}{j}) \in Y(\omega)\} \\
&= \{\omega \in \Omega / y \in D \cap B(x, \frac{1}{j}), y \in Y(\omega)\} \\
&= \bigcup_{j \geq 1} \bigcap_{y \in D \cap B(x, \frac{1}{j})} Y^{-}\{y\}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Gamma^{-}\{x\}$ appartient à $\mathcal{O}$ et donc que l'hypothèse b) de la proposition précédente est vérifiée avec $\Gamma = \overset{\circ}{Y}$. On déduit la mesurabilité de la multifonction

$$\omega \longrightarrow \overline{X(\omega) \cap \Gamma(\omega)}$$

Mais cette dernière n'est autre que $Z = X \cap Y$ car grâce au lemme précédent on a l'égalité :

$$X(\omega) \cap Y(\omega) = \overline{X(\omega) \cap \Gamma(\omega)}$$

On va maintenant indiquer un procédé simple qui permet de construire des multifonctions mesurables à valeurs fermées. On considère un espace topologique séparé et séparable E et G une fonction numérique définie sur $\Omega \times E$ qui vérifie :

a) Pour tout x dans E, $G(.,x)$ est mesurable.

b) Pour tout ω dans Ω, $G(\omega,.)$ est semi-continue supérieurement.

On définit alors la multifonction Γ à valeurs ouvertes en posons pour tout ω :

$$\Gamma(\omega) = \{x \in E / G(\omega, x) < 0\} \quad (*)$$

Puis la multifonction Y à valeurs fermées par

$$Y(\omega) = \overline{\Gamma(\omega)} \quad (**)$$

Lemme 2.3
Si E est un espace topologique séparé et séparable alors la multifonction Y définie par $(*)$ et $(**)$ est mesurable.

Preuve 2.8
On désigne par D une partie dénombrable dense de E. Pour tout ouvert U de E on observe que

$$Y^{-}(U) = \Gamma^{-}(U)$$

De plus, $\Gamma(\omega)$ étant ouvert sur G on voit que $\Gamma(\omega)$ rencontre U si et seulement si il rencontre $U \cap D$. D'où

$$Y^{-}(U) = \bigcup_{x \in D \cap U} \{\omega \in \Omega / G(\omega, x) < 0\}$$

Donc d'après a) on a $Y^{-}(U)$ est mesurable.

Exemple 2.1
Soit E un espace métrique séparable. Si g est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{O})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$ et r une fonction mesurable positive on voit en posant pour tout (ω, x) dans $\Omega \times E$

$$G(\omega, x) = d(x, g(\omega)) - r(\omega)$$

La multifonction Y définie pour tout ω par

$$Y(\omega) = \overline{\{x \in E / d(x, g(\omega)) < r(\omega)\}}$$

Est mesurable.
Plus généralement si T est une multifonction mesurable à valeurs fermées dans E en posant

$$G(\omega, x) = d(x, T(\omega)) - r(\omega)$$

On voit que la multifonction Y définie par

$$Y(\omega) = \overline{\{x \in E / d(x, T(\omega)) < r(\omega)\}}$$

Est mesurable.

Enfin soit E un e.v.t localement convexe (e.l.c) métrisable séparable p une semi-norme continue et d l'écart associée. Si X est une multifonction mesurable à valeurs fermées dans E, si la multifonction Γ est définie $\forall\omega$ dans Ω par :

$$\Gamma(\omega) = \{x \in E / d(x, T(\omega)) < r(\omega)\}$$

Et si T est à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$, on déduit de ce qui précède que la multifonction Z telle que

$$Z(\omega) = \overline{X(\omega) \cap \Gamma(\omega)}$$

Est mesurable.

Définition 2.2

Soit E un e.l.c E' son dual topologique et X une multifonction définie sur Ω à valeurs convexes fermées dans E. On dit que X est scalairement mesurable si $\forall x'$ dans E' la fonction numérique

$$\omega \longmapsto S(x', X(\omega)) = sup[< x', x > / x \in X(\omega)]$$

Est mesurable.

Lemme 2.4

Soit E un e.l.c métrisable séparable X une multifonction mesurable à valeurs complètes dans E et g' une application scalairement mesurable de Ω dans E'.

Dans ces conditions la multifonction numérique $\omega \longmapsto S(g'(\omega), X(\omega))$ est mesurable.

Preuve 2.9

D'après la proposition(2.1) on sait que X admet une représentation de Castaing $(f_n)_{n\geq 1}$. On a $\forall\omega$ dans $domX$:

$$S(g'(\omega), X(\omega)) = \sup_{n\geq 1} < g'(\omega), f_n(\omega) >$$

chaque f_n étant mesurable de $(\Omega, \mathcal{O})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$ elle peut être approchée par une suite de fonction étagées $(f_n^k)_{k\geq 1}$. On peut donc écrire $\forall n, \omega$:

$$< g'(\omega), f_n(\omega) >= \lim_{k\to+\infty} < g'(\omega), f_n^k(\omega) >$$

La mesurabilité scalaire de g' permet de voir que pour tout n, k la multifonction réelle $\omega \longmapsto < g'(\omega), f_n^k(\omega) >$ est mesurable.

2.4 La mesurabilité pour l'appartenance

Définition 2.3
Soit E un ensemble quelconque et X une multifonction définie sur Ω, à valeurs dans E. On dit que X est mesurable pour l'appartenance si $\forall x$ dans E le sous-ensemble :

$$X^{-}\{x\} = \{\omega \in \Omega / x \in X(\omega)\}$$

appartient à $\mathcal{O}$.

Remarque 2.2
Si X est mesurable pour l'appartenance la multifonction "complémentaire" de X l'est aussi. Si $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de multifonctions mesurables pour l'appartenance alors les multifonctions

$$\bigcup_{k\geq 1} X_k$$

et

$$\bigcap_{k\geq 1} X_k$$

le sont aussi.

Proposition 2.5
Soit E un espace topologique à base dénombrable d'ouverts et X une multifonction à valeurs dans E.

i) On suppose X à valeurs fermées. Si X est mesurable pour l'appartenance alors la multifonction $\mathring{X}$ l'est aussi et dom$\mathring{X}$ appartient à $\mathcal{O}$.

ii) On suppose X à valeurs ouvertes. Si X est mesurable pour l'appartenance alors la multifonction $\overline{X}$ l'est aussi.

Preuve 2.10
On désigne par $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts de E et par D une partie dénombrable partout dense. Quel que soit x dans E on note $\mathcal{B}_x$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{B}$ qui contiennent x, $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages ouverts de x. Les deux affirmations du i) se déduisent respectivement des deux égalités :

$$\begin{aligned}(\mathring{X})^{-}\{x\} &= \{\omega \in \Omega / x \in \mathring{X}(\omega)\} \\ &= \bigcup_{U\in\mathcal{B}_x} \{\omega \in \Omega / D \cap U \subset X(\omega)\} \\ &= \bigcup_{U\in\mathcal{B}_x} \bigcap_{y\in D\cap U} X^{-}\{y\}.\end{aligned}$$

$$dom\mathring{X} = \bigcup_{U\in\mathcal{B}} \bigcap_{y\in D\cap U} X^{-}\{y\}$$

Pour le ii) on utilise l'égalité

$$(\overline{X})^{-}\{x\} = \bigcap_{U\in\mathcal{B}_x} \bigcup_{y\in D\cap U} X^{-}\{y\}$$

Proposition 2.6

Soit E un espace topologique séparable, D une partie dénombrable partout dense et X une multifonction à valeurs dans E.

i) Si X est mesurable pour l'appartenance et à valeurs ouvertes, alors elle est mesurable.

ii) Si de plus E est métrisable et si X est une multifonction mesurable à valeurs fermées dans E, alors elle est mesurable pour l'appartenance.

Preuve 2.11

Le point i) résulte de l'égalité

$$X^{-}(U) = \bigcup_{x \in D \cap U} X^{-}\{x\}$$

Valable pour tout ouvert U de E.

pour le ii) on note que si d est une distance définissant la topologie de E, alors on peut écrire $\forall x$ dans E,

$$X^{-}\{x\} = \{\omega \in \Omega / d(x, X(\omega)) = 0\}$$

Ce qui, d'après la proposition (2.1) X est mesurable pour l'appartenance.

Proposition 2.7

Soit E un espace métrisable séparable et X une multifonction à valeurs fermées dans E, qui vérifie quel que soit ω dans Ω

$$\overline{\overset{\circ}{X}}(\omega) = X(\omega)$$

Dans ces conditions les deux affirmations suivantes sont équivalentes

a) X est mesurable.

b) X est mesurable pour l'appartenance.

CHAPITRE 3

APPLICATION : RELATION ENTRE L'EFFROS MESURABILITÉ DE MULTIFONCTION ET SA MESURABILITÉ BORÉLIENNE ENTANT QUE FONCTION UNIVOQUE

3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons énoncer et démontrer l'Effros-mesurabilité des multifonctions sur les parties fermées d'un espace topologique X, noté $CL(X)$, muni de la topologie de Wijsman $\mathcal{T}_W$ et de la topologie de Hausdorff $\mathcal{T}_H$.

Soit X un espace topologique et soit Ω un ensemble, on note par Γ la multifonction de Ω à valeurs dans 2^X et si on désigne par Γ une fonction univoque on la note par $\widehat{\Gamma}$ définie de $\Omega \longrightarrow 2^X$ avec 2^X : ensemble des parties fermées de X. On note par $< \Omega, \mathcal{O} >$ un espace mesurable.
Une multifonction Γ est dite mesurable si pour chaque sous-ensemble ouvert V de X on a :

$$\{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{O}.$$

On écrit pour chaque sous-ensemble ouvert V de X

$$V^- = \{A \in 2^X : A \cap V \neq \emptyset\}.$$

Γ est dite aussi mesurable si $\widehat{\Gamma}^{-1}(V^-) \in \Omega$ pour chaque sous-ensembles ouverts V.
On désigne par $\mathcal{E}(2^X)$ la plus petite tribu contenant $\{V^- : V \textit{ ouvert de } X\}$. Alors la mesurabilité de Γ est $\widehat{\Gamma}^{-1}(\Delta) \in \Omega$ pour chaque $\Delta \in \mathcal{E}(2^X)$.
La tribu $\mathcal{E}(2^X)$ est appelée la tribu d'Effros, est pour cette raison la mesurabilité de Γ est appelée Effros mesurabilité.

3.2 Notations et définitions

Dans cette partie nous donnons quelques notations utiles par la suite.
Soit $< X, d >$ un espace métrique, et on note par $CL(X)$ (resp $K(X)$) ensembles des parties fermées (resp compactes) non vides de X. Encore 2^X sera ensembles des parties fermées de X contenant $\emptyset$.

- Si $\Sigma \subset 2^X$ et Σ est muni de la topologie $\mathcal{T}$, alors $< \Sigma, \mathcal{T} >$ est appelé un hyperespace.
- Si $\Sigma \subset CL(X)$ et $\mathcal{T}_0$ est la topologie sur Σ, alors on dit que la topologie $\mathcal{T}$ sur $\Sigma \cup \{\emptyset\}$ est une extension de $\mathcal{T}_0$ à condition que $\{\emptyset\}$ est fermé relativement à $\mathcal{T}$ et la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur Σ coïncide avec $\mathcal{T}_0$.
- Clairement si $\mathcal{T}$ est une extension de $\mathcal{T}_0$, alors $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$.
- Pour $x \in X$ et $A \in CL(X)$, on a $d(x, A)$ la distance de x à A. Si $A \subset X$ et $\varepsilon > 0$ on écrit $S_\varepsilon[A]$ sous la forme $\{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\}$.

Soit A, B dans $CL(X)$ l'écart entre A et B est défini par la formule

$$D(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B).$$

Encore pour A, B dans $CL(X)$ l'excès entre A et B est défini par la formule

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

La distance de Hausdorff de A à B est définie par la formule

$$H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Sinon,

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset S_\varepsilon[A] \textit{ et } A \subset S_\varepsilon[B]\}.$$

La topologie de l'hyperespace résultante sur $CL(X)$ sera notée $\mathcal{T}_H$ dans la suite. Nous adoptons également la convention $d(x, \emptyset) = \infty$ pour $x \in X$. D'après cette dernière formule, pour $A \in CL(X)$, On a donc $e(A, \emptyset) = D(A, \emptyset) = \infty$, et aussi $e(\emptyset, A) = 0$ pour $A \in CL(X)$.

Définition 3.1
La topologie de Wijsman $\mathcal{T}_W$ sur $CL(X)$ est la topologie la moins fine engendrée par la famille $\{d(x,.) : x \in X\}$. Autrement dit la topologie de Wijsman dans $CL(X)$ est la topologie de la convergence simple des fonctions distances.

Théorème 3.1
Soit $< X, d >$ un espace métrique, et soit Σ et Δ deux ensembles des parties fermés non vides. Soit $\mathcal{T}$ la topologie la moins fine sur Σ donnée par la famille $\mathcal{R}$ des fonctions réelles sur Σ, où $\mathcal{R}$ est soit $\{D(B,.) : B \in \Delta\}$ ou $\{e(B,.) : B \in \Delta\}$ ou $\{e(.,B) : B \in \Delta\}$.
Supposons $\overline{\Delta}$ est la fermeture de Δ au sens de $\mathcal{T}_H$. Alors $\mathcal{T}$ est inchangée si Δ est remplacé par $\overline{\Delta}$ dans la famille $\mathcal{R}$.

Preuve 3.1
Considérons le cas où $\mathcal{R} = \{e(B,.) : B \in \Delta\}$, les autres cas sont semblables. Soit $\mathcal{T}_1$ une topologie la moins fine engendrée par $\{e(B,.) : B \in \overline{\Delta}\}$.
Clairement, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.
Supposons maintenant $A_0 \in \Sigma$ et $B_0 \in \overline{\Delta}$, posons deux cas :

i) $e(B_0, A_0) < \infty$.

ii) $e(B_0, A_0) = \infty$.

Dans le premier cas, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $B \in \Delta$ avec $H(B, B_0) < \frac{\varepsilon}{3}$, de sorte que pour chaque $A \in CL(X)$, nous avons par les inégalités triangulaires $|e(B,A) - e(B_0,A)| < \frac{\varepsilon}{3}$. il en résulte que

$$A_0 \in \{A \in \Sigma : |e(B,A) - e(B_0,A)| < \frac{\varepsilon}{3}\} \subset \{A \in \Sigma : |e(B_0,A) - e(B_0,A_0)| < \varepsilon\}.$$

dans le deuxième cas, soit α finie et choisir $B \in \Delta$ avec $H(B, B_0) < 1$. Alors

$$A_0 \in \{A \in \Sigma : e(B,A) > \alpha + 1\} \subset \{A \in \Sigma : e(B_0,A) > \alpha\}.$$

Cela prouve que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$.

Maintenant soit Σ un ensembles des parties fermés. Compatible avec l'introduction, la tribu d'Effros $\mathcal{E}(\Sigma)$, c'est la plus petite tribu de Σ engendrée par les parties de la forme $\{A \in \Sigma : A \cap V \neq \emptyset\}$, où V un sous ensembles ouverts de X.
Si Σ est muni de la topologie $\mathcal{T}$, alors la borélienne déterminée sur $\mathcal{T}$ sera notée $\mathcal{B}(\Sigma)$.
Si $\Sigma \subset CL(X)$ nous définissons $\mathcal{E}'(\Sigma)$ et $\mathcal{B}'(\Sigma)$ par les formules suivantes :

$$\mathcal{E}'(\Sigma) = \{\Delta \cup \{\emptyset\} : \Delta \in \mathcal{E}(\Sigma)\}, \ \mathcal{B}'(\Sigma) = \{\Delta \cup \{\emptyset\} : \Delta \in \mathcal{B}(\Sigma)\}.$$

3.3 La Borélienne d'un hyperespace

Notre intérêt est de trouver des topologies sur 2^X pour lesquels les tribus $\mathcal{E}(2^X)$ et $\mathcal{B}(2^X)$ coïncident.

Lemme 3.1
Soit $< X, d >$ un espace métrique et soit Σ un ensemble non vides de 2^X, muni de la topologie $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{B}(\Sigma)$ la tribu borélienne de $\mathcal{T}$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathcal{E}(\Sigma) = \mathcal{B}(\Sigma)$.

ii) $< \Omega, \mathcal{O} >$ *est un espace mesurable et*

$$\Gamma : \Omega \longrightarrow X$$

à valeurs dans Σ, alors Γ est une multifonction mesurable si et seulement si $\widehat{\Gamma} : \Omega \longrightarrow \Sigma$ est une fonction univoque mesurable à valeurs dans $(\Sigma, B(\Sigma))$.

Preuve 3.2
i) $\Rightarrow$ ii) par hypothèse, soit V un ouvert de X, on a $\{A \in \Sigma : A \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}(\Sigma)$, et

$$\{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \cap V \neq \emptyset\} = \widehat{\Gamma}^{-1}(\{A \in \Sigma : A \cap V \neq \emptyset\}).$$

Ainsi, la mesurabilité de $\widehat{\Gamma}$ implique la mesurabilité de Γ.
D'autre part si Γ est une multifonction mesurable, alors pour chaque $\Delta \in \mathcal{E}(\Sigma)$ on a $\widehat{\Gamma}^{-1}(\Delta) \in \mathcal{O}$ par i) signifié que pour chaque $\Delta \in \mathcal{B}(\Sigma)$ on a $\widehat{\Gamma}^{-1}(\Delta) \in \mathcal{O}$ alors $\widehat{\Gamma}$ est mesurable.
ii) $\Rightarrow$ i) supposons que n'a pas i). Si $\mathcal{E}(\Sigma) \subset \mathcal{B}(\Sigma)$, soit $\Gamma :< \Sigma, \mathcal{B}(\Sigma) > \longrightarrow < X, d >$ définie par $\Gamma(A) = A$. Alors $\widehat{\Gamma}$ est mesurable, mais Γ n'est pas mesurable. D'autre part, si $\mathcal{B}(\Sigma) \subset \mathcal{E}(\Sigma)$ et soit $\Gamma :< \Sigma, \mathcal{E}(\Sigma) > \longrightarrow < X, d >$ définie par $\Gamma(A) = A$, Alors Γ est mesurable, mais $\widehat{\Gamma}$ n'est pas mesurable.

Définition 3.2
Soit $< X, d >$ un espace métrique, et soit Σ, Δ_1, Δ_2 et Δ_3 des ensembles de $CL(X)$. La topologie $\mathcal{T}$ sur Σ est la topologie la moins fine définie par $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \{D_d(B, .) : B \in \Delta_1\} \cup \{e_d(B, .) : B \in \Delta_2\} \cup \{e_d(., B) : B \in \Delta_3\}$$

La topologie $\mathcal{T}$ est dite dénombrablement engendrée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) La fermeture de $\Delta_1 \cup \Delta_2$ par la topologie métrique de Hausdorff contient tous les singletons.

b) La topologie est engendrée par certaines sous familles dénombrables de $\mathcal{R}$.

Théorème 3.2
Soit $< X, d >$ un espace métrique séparable et soit Σ une famille d'ensembles des parties fermées non vides de X. Supposons $\mathcal{T}$ est une topologie dénombrablement engendrée sur Σ induite par la famille

$$\mathcal{R} = \{D(B,.) : B \in \Delta_1\} \cup \{e(B,.) : B \in \Delta_2\} \cup \{e(.,B) : B \in \Delta_3\}.$$

Alors la topologie $\mathcal{T}$ est à base dénombrable et métrisable sur Σ contenant $\mathcal{T}_W$, et $\mathcal{E}(\Sigma) = \mathcal{B}(\Sigma)$.

Preuve 3.3
Montrons d'abord que $\mathcal{T}$ contenant $\mathcal{T}_W$. On note par $\overline{\Delta}$ la fermeture de Δ par la topologie métrique de Hausdorff et $X_i = \{x \in X : \{x\} \in \overline{\Delta}_i\}$, $i = 1, 2$ On a $X_1 \cup X_2 = X$. Puisque $d(x,.) = D(\{x\},.) = e(\{x\},.)$ par la continuité de $d(x,.)$ en déduit que $\mathcal{T}_W \subset \mathcal{T}$. Puisque $\mathcal{T}_W$ est séparée, donc $\mathcal{T}$ est également séparée. Comme $\mathcal{T}$ est dénombrablement engendrée par $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{T}$ est à base dénombrable. Donc métrisable par le théorème de métrisation d'Urysohn.
Donc $\mathcal{E}(\Sigma) \subset \mathcal{B}(\Sigma)$ car $\mathcal{T}_W \subset \mathcal{T}$. Chaque ouvert V de X est une réunion dénombrable des boules ouvertes, $\{S_{\varepsilon_n}[x_n] : n \in \mathbb{Z}^+\}$

$$\text{et} \quad \{A \in \Sigma : A \cap V \neq \emptyset\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{A \in \Sigma : d(x_n, A) < \varepsilon_n\} \in \mathcal{B}(\Sigma).$$

Pour l'autre inclusion, comme la topologie est à base dénombrable, il suffit de montrer que chaque élément de la base de $\mathcal{T}$ sont dans $\mathcal{E}(\Sigma)$. Puisque $\mathcal{E}(\Sigma)$ est une tribu, alors montrons que $\mathcal{E}(\Sigma)$ contient tout les ensembles de la forme

$$\{A \in \Sigma : D(B,A) < \alpha\} \quad (B \in \Delta_1, \alpha > 0).$$

$$\{A \in \Sigma : e(B,A) > \alpha\} \quad (B \in \Delta_2, \alpha > 0).$$

$$\{A \in \Sigma : e(A,B) < \alpha\} \quad (B \in \Delta_3, \alpha > 0).$$

On a pour $B \in \Delta_1$,

$$\{A \in \Sigma : D(B,A) < \alpha\} = \{A \in \Sigma : A \cap S_\alpha[B] \neq \emptyset\} \in \mathcal{E}(\Sigma).$$

et pour $B \in \Delta_3$,

$$\{A \in \Sigma : e(A,B) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{A \in \Sigma : A \subset \overline{S_{\alpha - \frac{1}{n}}}[B]\} \in \mathcal{E}(\Sigma).$$

Pour $B \in \Delta_2$, soit $\{b_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ un sous ensemble dénombrable dense dans B. Alors

$$\begin{aligned}\{A \in \Sigma : e(B,A) > \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{A \in \Sigma : d(b_n, A) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A \in \Sigma : A \subset \{x : d(A, b_n) \geq \alpha + \frac{1}{i}\}\} \in \mathcal{E}(\Sigma)\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}(\Sigma) \subset \mathcal{E}(\Sigma)$.

Supposons d'abord que $\Sigma \subset CL(X)$, et $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\Sigma \cup \{\emptyset\}$. Σ muni de la topologie induite, nous obtenons $\mathcal{B}(\Sigma)$. nous avons l'intention de montrer que $\mathcal{E}(\Sigma) = \mathcal{B}(\Sigma)$ implique $\mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$, à condition que $\{\emptyset\}$ est un sous-ensemble borélien de $< \Sigma \cup \{\emptyset\}, \mathcal{T} >$.

Lemme 3.2
Soit $< X, d >$ un espace métrique, soit $\Sigma \subset CL(X)$, et $\mathcal{T}$ une topologie sur $\Sigma \cup \{\emptyset\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\{\emptyset\} \in \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$.

ii) $\mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{B}(\Sigma) \cup \mathcal{B}'(\Sigma)$.

Preuve 3.4
i) $\Longrightarrow$ ii) D'après ce qui précède on a $\mathcal{B}(\Sigma) \cup \mathcal{B}'(\Sigma)$ est une tribu sur le sous ensemble de $\Sigma \cup \{\emptyset\}$. D'abord si $\Delta \in \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$ et $\emptyset \notin \Delta$, alors Δ est l'intersection de Σ avec le sous ensemble borélien de $\Sigma \cup \{\emptyset\}$ de sorte que $\Delta \in \mathcal{B}(\Sigma)$. Autrement $\Delta = (\Delta - \{\emptyset\}) \cup \{\emptyset\} \in \mathcal{B}'(\Sigma)$. Ainsi

$$\mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\}) \subset \mathcal{B}(\Sigma) \cup \mathcal{B}'(\Sigma).$$

Pour l'autre inclusion $\mathcal{B}(\Sigma) \subset \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$, car $\Sigma \in \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$. Par conséquent, chaque $\Delta \in \mathcal{B}(\Sigma)$, nous avons $\Delta \cup \{\emptyset\} \in \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$. Alors

$$\mathcal{B}(\Sigma) \cup \mathcal{B}'(\Sigma) \subset \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\}).$$

ii) $\Longrightarrow$ i) on a $\emptyset \in \mathcal{B}(\Sigma)$, alors

$$\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \in \mathcal{B}'(\Sigma) \subset \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\}).$$

Lemme 3.3
Soit $< X, d >$ un espace métrique, soit $\Sigma \subset CL(X)$. Alors

$$\mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{E}(\Sigma) \cup \mathcal{E}'(\Sigma).$$

Preuve 3.5
Premièrement on a $\{\emptyset\} \in \mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$ *et*

$$\Sigma = \{A \in \Sigma \cup \{\emptyset\} : A \cap X \neq \emptyset\} \in \mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\}).$$

et on a $\mathcal{E}(\Sigma) \subset \mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$ *car pour chaque ouvert* V *de* X *nous avons :*

$$(*) \quad \{A \in \Sigma \cup \{\emptyset\} : A \cap V \neq \emptyset\} = \{A \in \Sigma : A \cap V \neq \emptyset\}.$$

De se qui précède, on obtient $\mathcal{E}(\Sigma) \cup \mathcal{E}'(\Sigma) \subset \mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$.
Pour l'autre inclusion d'après $(*)$ *montre que toute tribu de sous ensembles de* $\Sigma \cup \{\emptyset\}$ *contenant* $\mathcal{E}(\Sigma)$ *doit également contenir* $\mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$. *Alors on a*

$$\mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\}) \subset \mathcal{E}(\Sigma) \cup \mathcal{E}'(\Sigma).$$

Théorème 3.3
Soit $< X, d >$ *un espace métrique, soit* $\Sigma \subset CL(X)$. *Supposons que* $\mathcal{T}$ *est la topologie sur* $\Sigma \cup \{\emptyset\}$ *telle que* $\mathcal{E}(\Sigma) = \mathcal{B}(\Sigma)$. *Alors* $\mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{B}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$ *si et seulement* $\{\emptyset\}$ *est un sous ensembles borélien de* $\Sigma \cup \{\emptyset\}$.

Preuve 3.6
La condition suffisante est une conséquence des deux derniers lemmes, alors que la nécessité provient de $\{\emptyset\} \in \mathcal{E}(\Sigma \cup \{\emptyset\})$.

Théorème 3.4
Soient $< X, d >$ *un espace métrique,* $\Sigma \subset CL(X)$ *et* $< \Omega, \mathcal{O} >$ *un espace mesurable. Supposons* $\mathcal{T}_0$ *est une topologie sur* Σ *telle que* $\mathcal{E}(\Sigma) = \mathcal{B}(\Sigma)$, *et* $\mathcal{T}$ *est l'extension de* $\mathcal{T}_0$ *sur* $\Sigma \cup \{\emptyset\}$. *Supposons* $\Gamma :< \Omega, \mathcal{O} > \longrightarrow X$ *est une multifonction à valeurs dans* $\Sigma \cup \{\emptyset\}$. *Alors* Γ *est une multifonction mesurable si et seulement si* $\widehat{\Gamma} : \Omega \longrightarrow \Sigma \cup \{\emptyset\}$ *est une fonction univoque mesurable à valeurs dans* $(\Sigma \cup \{\emptyset\}, \mathcal{T})$.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dons ce travail, nous avons étudié la mesurabilité des multifonctions à valeurs dans les parties compactes et dans les parties fermées d'un espace mesurable quelconque.

Nous avons distingué entre la mesurabilité des multifonctions au sens de C.CASTAING et au sens de C.HESS, pour le premier cas l'auteur a travaillé sur les parties compactes, par contre dans le deuxième cas l'auteur a consacré son travail aux parties fermées. C.HESS a défini la tribu d'Effros dont le but de faciliter la mesurabilité des multifonctions à valeurs dans l'ensemble des parties fermées d'un espace métrique séparable X. Il a prouvé que la mesurabilité de cette dernière peut être traité entant que fonction univoque.

Dans la dernière partie nous avons traité toujours le même problème avec l'approche de BEER où il a démontré l'équivalence entre la mesurabilité d'une multifonction à valeurs fermées entant que fonction univoque et la coïncidence de la tribu d'Effros et une tribu Borélienne.

Comme la tribu Borélienne nécessite la connaissance de la topologie nous avons définie plusieurs type de topologies sur les ensembles convexes fermées d'un espace métrique X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Lechicki and S. Levi, Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space, Bull. Un. Mat. Ital. 5-B 435-452, (1987).

[2] B. Cornet, Topologies sur les fermés d'un espace métrique, Cahiers de Mathématiques de Décision, n 7309, Université Paris Dauphine, (1973).

[3] C. Berge, Espaces topologiques (fonction multivoque, Dunod), paris (1966).

[4] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in math, Springer(1977).

[5] C. Hess, Sur la mesurabilité des multifonctions, Montpellier (1986).

[6] C. Hess, Sur les multifonctions à valeurs fermées dans un espace de Fréchet, Cahiers de Mathématiques de la Décision, n 8108, Université Paris Dauphine, (1981).

[7] C. Hess, Contributions à l'étude de la mesurabilité, de la loi de probabilité, et de la convergence des multifonctions, thèse d'état, Montpellier, 1986.

[8] G. Beer, Topologie on closed and closed convex sets and the Effros measurability of set valued functions, Montpellier (1991).

[9] G. Beer, On Mosco convergence of convex set, Bull. Australian Math. Soc. 38 239-253, (1988).

[10] G. Beer, Support and distance functionals for convex sets, Numer. Func. Anal. Optim. 15-36, 10(1989).

[11] G. Beer, The Slice topology for convex functions : a viable extension of Mosco convergence to nonreflexive space, sem.d'Anal. Convexe Montpellier (1991), exposé 3.

[12] G. Beer and J. Borwein, Mosco convergence and reflexivity, Proc.Amer.Math. Soc. 427-436, 109(1990).

[13] H. Attouh, Variational convergence for functions and operators, Pitman, New York (1984).

[14] J. Borwein and S.Fitzpatrick, Mosco convergence and the Kadec property, Proc.Amer.Math.Soc. 428-443, 106(1990).

[15] J. D. Dauer et F.S. Van Vleek, Measurable selectors of multifunctions and applications, Math. Systeme theory, 7 p. 367-376 (1974).

[16] N. Bourbaki, Topologie général, Ch. IX, Réimpression inchangée de l'édition originale de 1974.

[17] R. Wijsman, Convergence of sequence of convex sets, cones, and functions, Trans.Amer.Math.Soc. 32-45, 123(1966).

[18] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solution of variational inequalities, Advances in Math. 510-585, 3(1969).

[19] V. Toma, quelques problèmes de mesurabilité des multifonctions, Séminaire d'analyse convexe de Montpellier, exposé n 6, (1983).

[20] LEESE. S.J. Multifonctions of Suslin type. Bull. Austr. Math. Soc. II(1974) 395-411.

UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques

ETUDE COMPARATIVE DE LA MESURABILITE DES MULTIFONCTIONS

Réalisé par: **EL-LOUH M'hamed**

Encadré par: **Pr.EZZAKI Fatima**

Soutenu le 15 juin 2016

Devant le jury composé de:

- Pr. AMMOUR Ouafae	Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EZZAKI Fatima	Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr.ETTAOUIL Mohammed	Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr.RAHMOUNI HASSANI Aziza	Faculté des Sciences et Techniques de Fès

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES