Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques de Fès
Département de Mathématiques

Projet de Fin d'Etudes

Licence Sciences et Techniques MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

Titre :

Limites inférieure et supérieure et leurs applications

Encadré par :

- Pr. Ouadghiri Anisse

Réalisé par :

- Ziati Oussama

Soutenu le Vendredi 10 Juin 2016 devant le jury composé de :

- Pr. Ouadghiri Anisse
- Pr. Najib Mahdou
- Mme. Rahmouni Aziza

Année universitaire : 2015/2O16

Dedicace

Je dédie ce modeste travail à ceux que j'ai de plus chers.

À ceux qui ont sacrifié de leur vie et de leur temps.

À mes chérs parents que dieu les gardent pour leurs soutien matériel.

À mes frères pour leurs affection fraternelle.

À mes chérs amis et à tous mes enseignants.

Enfin, à tous ceux qui vont lire ce modeste travail.

Remerciements

Je ne saurais ouvrir ce rapport sans avoir à remercier tous ceux qui, par leurs conseils et leur dévouement, m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Mes remerciements et ma gratitude vont à Mr Ouadghiri Anisse, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de ce travail. Mes vifs remerciements également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Sommaire

Introduction

Les limites supérieures et inférieures sont deux notions fondamentales dans l'étude d'une suite réelle. Ces deux notions généralisent la notion de limite, elles sont définies pour n'importe quelle suite (ayant ou non une limite) et coïncident avec la notion de limite lorsque celle-ci existe.

D'abord, dans le premier chapitre, on va définir la notion de valeur d'adhérence d'une suite qui est en relation avec les limites supérieures et inférieures, les opérations sur ces limites et ses applications pour résoudre le problème de convergence d'une suite numérique.

Ainsi, on s'intéresse à la formule d'Hadamard qui est un résultat d'analyse qui détermine le rayon de convergence d'une série entière, et qui se détermine à partir de la limite supérieure.

Ensuite, le troisième chapitre concerne la limite supérieure et inférieure d'une fonction et l'importance de ces limites dans la continuité d'une fonction.

Finalement, le quatrième chapitre traitera des limites supérieure et inférieure d'une suite ensemble, afin de définir une notion de convergence pour suite d'ensembles.

1 Limite supérieure et inférieure d'une suite numérique :

1.1 Généralités.

Commençons par des rappels sur les suites et quelques définitions de base.

Définition 1 :

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\to u_n \end{aligned}$$

Une suite numérique est notés $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

Définition 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

· constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

· croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

· décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.

· monotone losqu'elle est croissante ou décroissante.

Définition 3 :

Une suite (u_n) est dite majorée (resp.minorée) losque :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M \text{ (resp.} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M).$$

Une suite minorée et majorée est dite bornée.

Propriété 1 :

Soit (u_n) une suite numérique.

$$(u_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M.$$

Définition 4 :

Soit (u_n) une suite numérique.

· On dit que la suite (u_n) converge vers un réel α et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \alpha$, si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow | u_n - \alpha| \leq \varepsilon$

· On dit qu'une suite numérique diverge losqu'elle n'est pas convergente.

Propriété 2 :

. Si une suite numérique converge, alors elle est bornée.

. Soit (u_n) une suite numérique.

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} | u_n - \alpha| = 0$$

Propriété 3 :

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites numérique.

Si : $\quad * \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : u_n \leq w_n \leq v_n.$

$* \ (u_n)$ et (v_n) soient convergentes.

$* \ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = a.$

Alors (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n) = a$.

Propriété 4 :

. Si une suite numérique est croissante et majorée, alors elle est convergente.

. Si une suite numérique est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Définition 5 :

. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un réel M est la **borne supérieure** de E si M est le plus petit des majorants de E. On note alors $M = \sup E$.

. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Un réel m est la **borne inférieure** de E si m est le plus grand des minorants de E. On note alors $m = \inf E$.

1.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

1.2.1 Suites extraites-Valeurs d'adhérence d'une suite numérique.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Une **sous-suite** ou **suite extraire** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $v_k = u_{\Phi(n)}$, $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, étant une application strictement croissante.

Lemme :

Si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, est une application strictement croissante, alors $\phi(n) \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

On démontre par récurrence sur n que l'inégalité (H_n) : $\phi(n) \geq n$.
Par hypothèse, $\phi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\phi(0) \geq 0$, ce qui montre (H_0). Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On suppose que pour cet entier n, l'inégalité (H_n) est vérifiée. Alors la croissance stricte de ϕ montre que $\phi(n+1) > \phi(n) \geq n$, ce qui entraîne que $\phi(n+1) \geq (n+1)$, où on reconnaît (H_{n+1}).

Théorème :

Si une suite (u_n) converge vers l, toute suite extraite de (u_n) converge vers l.

Preuve :

On a : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq u_n \leq l + \varepsilon$.

Mais ϕ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$.

Ainsi, on a : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + l \leq u_{\phi(n)} \leq l + \varepsilon$.

D'où la conclusion.

Définition 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. On dit qu'un nombre $l \in \mathbb{R}$ est une **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1 :

Le nombre $l \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :

$$\forall\varepsilon \succ 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N : \mid u_n - l \mid \prec \varepsilon$$

Théorème(Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence.

Proposition :

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors cette suite converge vers celle-ci.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite n'ayaut qu'une seule valeur d'adhérence a.
Démonstration par l'absurde :
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers a.

$$\text{i.e : } \exists\varepsilon \succ 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N \mid (u_n) - a \mid \succ \varepsilon$$

Par conséquent il existe une infinité de termes de cette suite.

A partir de ces termes on peut construire une suite extraite de (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \mid u_{\rho(n)} - a \mid \succ \varepsilon$.

$u_{\rho(n)}$ est bornée, elle est donc contenue dans un intervalle fermé borné et admet une valeur d'adhérence b, d'après Théorème de Bolzano-Weierstrass.

b est nécessairement distinct de a car : $\forall n \in \mathbb{N} \mid u_n - a \mid \succ \varepsilon$.

b étant une valeur d'adhérence d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

Exemple 1 :

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence 1 et (-1).

Exemple 2 :

La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet l'intervalle $[-1,1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence.

Lemme topologique :

Soient (E,T) et (F,T') deux espaces topologiques. Soit $f : E \to F$ continue surjective.
Si A est dense dans E, alors $f(A)$ est dense dans F.

Lemme algébrique :

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, alors, soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $G = a\mathbb{Z}$.

Corollaire 1 :

$G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n + m2\pi, (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Résultat :

L'application

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\to \sin x \end{aligned}$$

est surjective et continue.
De plus, $G = \mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$ et donc $\sin(G)$ est dense dans $[-1,1]$ d'aprés le lemme, or

$$\begin{aligned} \sin(G) &= \{\sin(n + 2m\pi), (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\} \\ &= \{\sin(n), n \in \mathbb{N}\} \text{ par périodicité} \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet l'intervalle $[1,-1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence

1.3 Limite supérieure et inférieure.

1.3.1 Propriétés des limites supérieures et inférieures.

En analyse réelle, les limites inférieures et supérieures sont des outils d'étude des suites de nombres réels.

Définition :

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans le compact $\overline{\mathbb{R}} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, $(\limsup u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (u_n), et $(\liminf u_n)$ sa plus petite valeur d'adhérence.

Existence :

Si (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est non vide, d'après Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Par extension lorsque la suite (u_n) n'est pas majorée, sa limite supérieure est $+\infty$, et dans le cas où elle est non minorée sa limite inférieure est $(-\infty)$.

D'onc la limite supérieure et inférieure existent, puisque l'ensemble des valeurs d'adhérence est non vide.

Démonstration :

a) Mq : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence :

i.e : $\quad \forall \varepsilon > 0, \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists k \geq N_0$ tq : $|\, u_k - \liminf u_n| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$, par définition la $\liminf u_n$ c'est la borne inférieure de l'ensemble des valeur d'adhérence.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ on ait :

$$|\inf\{u_k/k \geq n\} - \liminf u_n| < \varepsilon$$

$$\liminf u_n - \varepsilon < \inf\{u_k/k \geq n\} < \liminf u_n + \varepsilon$$

$\forall n \geq N$, par définition de la borne inférieure, $\liminf u_n - \varepsilon$ est un minorant de $\{u_k/k \geq n\}$ et $\liminf u_n + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\{u_k/k \geq n\}$.

Soit $N' \geq \max(N_0, N)$ $\exists k \geq N'$ tel que :

$$\liminf u_n - \varepsilon < u_k < \liminf u_n + \varepsilon.$$

Le résultat concerne la limite supérieure se déduit par l'égalité
$\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\limsup\limits_{n\to+\infty}(-u_n)$.

d'où : $\limsup_{n\to+\infty}(u_n)$ est une valeur d'adhérence de (u_n).

b) Soit l une valeur d'adhérence de (u_n)

Mq : $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq l \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$.

càd ($\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ sont la plus grand et la plus petit respictivement valeurs d'adhérence).

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, comme l est une valeur d'adhérence de (u_n)
Il existe $N \geq n$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ donc :

$\inf\{u_N/N \geq n\} \leq u_N \leq l + \varepsilon$ et $l - \varepsilon \leq u_N \leq \sup\{u_N/N \geq n\}$

.

i.e : $\inf\{u_N/N \geq n\} - \varepsilon \leq l \leq \sup\{u_N/N \geq n\} + \varepsilon$.

En passant à la limite : $\liminf_{n\to+\infty} u_n - \varepsilon \leq l \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n + \varepsilon$.

cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$.

on obtient : $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq l \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$.

Proposition :

Soit (u_n) une suite numérique .

$*$On considère la suite $(\overline{S_n})_n$ définie à partir de la suite $(u_n)_n$ par :

$$\overline{S_n} = \sup\{u_k/k \geq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous avons : $\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim \sup_{p\geq n} u_p = \inf \sup_{p\geq n} u_p$.

$*$ On considére la suite $(\underline{S_n})_n$ définie à partir de la suite $(u_n)_n$ par :

$$\underline{S_n} = \inf\{u_k/k \geq n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous avons : $\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim \inf_{p\geq n} u_p = \sup \inf_{p\geq n} u_p$.

$*$ De Plus, on a : $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n$.

Preuve :

La suite $(u_n)_n$ étant bornée, les ensembles $A_n = \{u_p / p \geq n\}$ sont non vides et bornés, ils admettent donc une borne supérieure et une borne inférieure et les suites $\underline{S_n}$ et $\overline{S_n}$ sont bien définies.
Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ et donc $\sup A_{n+1} \leq \sup A_n$ et $\inf A_n \leq \inf A_{n+1}$. Ainsi la suite $(\underline{S_n})_n$ est croissante et la suite $(\overline{S_n})_n$ est décroissante. $(\underline{S_n})_n$ converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} \underline{S_n}$ et $(\overline{S_n})_n$ converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{S_n}$.

Comme : $\inf\{u_k / k \geq n\} \leq \sup\{u_k / k \geq n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a : $\sup_{n\in\mathbb{N}} \underline{S_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underline{S_n} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \overline{S_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \overline{S_n}$

c'est à dire : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exemple 1 :

Soit $u_n = (-1)^n$.
· $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
· $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Exemple 2 :

Soit $u_n = \sin(n)$.
· $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
· $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Exemple 3 :

Soit $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.
· $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
· $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Propriété :

Une suite (u_n) converge si et seulement si sa limite inférieure est égale à sa limite supérieure.

Démonstration :

$\Leftarrow\rfloor$ Soit (u_n) suite telle que : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

$$\overline{S_n} = \sup\{u_k/k \geq n\} \geq u_n \geq \underline{S_n} = \inf\{u_k/k \geq n\}$$

passant à la limite : $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

D'après théorème d'encadrement (u_n) converge vers l.

$\Rightarrow\rfloor$ Supposons que la suite (u_n) converge vers l.

Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} :\quad n \geq N \Longrightarrow |u_n - l\,| \leq \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \forall k \geq n$ On a : $\quad l - \varepsilon \leq u_k \leq l + \varepsilon$

càd : $\{u_k/k \geq n\}$ est minoré par $l - \varepsilon$ et majoré par $l + \varepsilon$

et on déduit que :

$$l - \varepsilon \leq \underline{S_n} = \liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \overline{S_n} = \limsup_{n\to+\infty} u_n \leq l + \varepsilon.$$

donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq : $\quad |\underline{S_n} - l| < \varepsilon$.

$\Longrightarrow \overline{S_n}$ converge.

De même pour $\underline{S_n}$.

D'où : $\quad \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Corollaire :

Soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\liminf u_n \geq l - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \limsup u_n \leq l + \varepsilon.$$

Alors (u_n) converge vers l.

Preuve :

Soit (u_n) suite numérique .

On a : $\liminf u_n \geq l - \varepsilon$ et $\limsup u_n \leq l + \varepsilon$.

$$\Longrightarrow \quad l - \varepsilon \leq \liminf u_n \leq \limsup u_n \leq l + \varepsilon.$$

D'où : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = l.$

Exemple 1 :

On considère (x_n) une suite numérique, bornée et croissante.

Où, $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

Et posons : $y_n = \sup\{1 - \dfrac{1}{k} : k \geq n\} = 1$

$$z_n = \inf\{1 - \frac{1}{k} : k \geq n\} = 1 - \frac{1}{n}$$

Donc, (y_n) et (z_n) deux suites convergent vers la même limite 1.

D'où, la suite (x_n) converge vers 1.

Et, $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = 1.$

Exemple 2 :

On considère (x_n) une suite numérique bornée.

Où, $x_n = (-1)^{n+1}$

Et posons : $y_n = \sup\{(-1)^{k+1} : k \geq n\} = 1$

$$z_n = \inf\{(-1)^{k+1} : k \geq n\} = -1$$

Donc, (y_n) et (z_n) deux suites convergent vers deux limite différentes.

D'où, la suite (x_n) n'est pas convergente.

1.3.2 Opération sur les limites supérieures et inférieures.

On peut caractériser les notions des limites supérieure et inférieure par les propriétés suivantes :

Proposition :

Si (x_n) et (y_n) sont des suites numériques

1⌋ $\limsup(-x_n) = -\liminf(x_n)$.

2⌋ Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$, alors :
· $\limsup(x_n) \leq \limsup(y_n)$.
· $\liminf(x_n) \leq \liminf(y_n)$.

3⌋ $\limsup(x_n) + \liminf(y_n) \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n)$.

4⌋ $\liminf(x_n) + \liminf(y_n) \leq \liminf(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \liminf(y_n)$.

5⌋ Si $x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$ pour tout entier n, alors :
· $\limsup(x_n \times y_n) \leq \limsup(x_n) \times \limsup(y_n)$.
· $\liminf(x_n) \limsup(y_n) \leq \limsup(x_n \times y_n)$.

6⌋ Si $x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$ pour tout entier n et si $\lim(x_n) = x$ alors :

$$\limsup(x_n \times y_n) = x \times \limsup(y_n).$$

7⌋ Si $x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$ pour tout entier n et si $\lim(x_n) = x$ alors :
· $\limsup(x_n + y_n) = x + \limsup(y_n)$.
· $\liminf(x_n + y_n) = x + \liminf(y_n)$.

8⌋ Si $x_n \geq 0$ Nous avons : $\limsup \frac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\liminf x_n}$.

Preuve :

1⌋ $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} u_k$
$$= \sup_{n\geq 1}\inf\{u_k/k\geq n\}$$
$$= \sup_{n\geq 1}(-\sup\{-u_k/k\geq n\})$$
$$= -\inf_{n\geq 1}\sup\{-u_k/k\geq n\}$$
$$= -\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n}(-u_k)$$
$$= -\limsup_{n\to+\infty}(-u_n).$$

2⌋ En effet, Pour tout n, $\sup_{k\geq n} x_k \leq \sup_{k\geq n} y_k$

Et par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$.

On obtient alors, la première inégalité :

$$\limsup_{n\to+\infty}(x_n) \leq \limsup_{n\to+\infty}(y_n).$$

De même façon pour la deuxième inégalité.

Pour tout n, on a : $\inf_{k\geq n} x_k \leq \inf_{k\geq n} y_k$

Par passage à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$, D'où, le résultat.

3⌋ Nous avons $\forall k\geq n$, $x_k + \inf_{n\geq k} y_n \leq x_k + y_k \leq \sup_{n\geq k} x_n + \sup_{n\geq k} y_n$.

D'où $\sup_{n\geq k} x_n + \inf_{n\geq k} y_n \leq \sup_{k\geq n}(x_k + y_k) \leq \sup_{n\geq k} x_n + \sup_{n\geq k} y_n$.

Et par passage à la limite, nous faisant tendre n vers $+\infty$ et on obtient l'inégalité.

4⌋ Cette démonstration se mène comme la démonstration précédente.

5⌋ Nous avons $\forall k\geq n$, $x_k \times y_k \leq \sup_{n\geq k} x_n \times \sup_{n\geq k} y_n$.

Donc : $\sup_{k\geq n}(x_k \times y_k) \leq \sup_{n\geq k} x_n \times \sup_{n\geq k} y_n$

Et par passage à la limite, nous faisant tendre n vers $+\infty$ et on obtient l'inégalité.

D'autre part, pour tout $k\geq n$:

$\inf_{n\geq k} x_n \times y_k \leq x_k \times y_k \leq \sup_{n\geq k}(x_n \times y_n)$

Entraine : $\inf_{n\geq k} x_n \times \sup_{n\geq k} y_n \leq \sup_{n\geq k}(x_n \times y_n)$.

Et par passage à la limite, nous faisant tendre n vers $+\infty$ et on obtient l'inégalité.

6⌋ On a $x = \lim x_n = \limsup x_n = \liminf x_n$
il suffit de remplacer dans les inégalités montrées en 5⌋
D'où on a l'inégalité.

7⌋ D'aprés l'inégalité montrée en 3⌋
D'où on a l'inégalité.

8⌋ Supp. D'abord que $\lim x_n > 0$
D'aprés 5⌋ avec $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ on obtient

$$\liminf x_n \times \limsup \frac{1}{x_n} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \limsup \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{\liminf x_n}.$$

D'autre part ,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n \qquad \frac{1}{\varepsilon + \liminf x_n} \leq \frac{1}{x_k}$$

On déduit successivement :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\varepsilon + \liminf x_k} \leq \sup_{k\geq n} \frac{1}{x_k}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\varepsilon + \liminf x_k} \leq \limsup \frac{1}{x_n}$$

D'où $\limsup \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\liminf x_n}$.

2 Formule d'Hadamard :

2.1 Généralités sur les séries numériques.

Définition 1 :

Soit $(u_n)_n$ une suite, on pose :
$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La limite de S_n est appelée série de terme général u_n.
$(S_n)_n$ est appelée la suite des sommes partielles de la série.

Définition 2 :

Une série de terme général $(u_n)_n$ est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente.
Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_n$ est appelée somme de la série et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\geq 0} u_n.$$

Proposition :

Si $(\sum_{n\geq 0} u_n)$ converge, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
La réciproque est fausse.

Preuve :

Posons $l = \sum_{n\geq 0} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}$.

$S_n - S_{n-1} = (u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n) - (u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}) = u_n$.

$\lim u_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0$.

$*$ La série harmonique $(\sum \dfrac{1}{n})$ est divergente bien qu'on ait : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Théoréme de comparaison :

Soit $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à terme positifs.
Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

- $(\sum v_n)$ converge $\Rightarrow (\sum u_n)$ converge
- $(\sum u_n)$ diverge $\Rightarrow (\sum v_n)$ diverge.

Preuve :

- $u_n \le v_n \Rightarrow S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \le \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = T_n$.

Puisque $(T_n)_n$ est une suite convergente donc majorée, alors $(S_n)_n$ est convergente comme étant une suite croissante et majorée.

Théorème(Critère d'équivalence) :

Soit $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ deux séries à termes strictement positifs.

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$, $l \neq 0$ et, l fini, alors les deux séries sont de même nature.

Preuve :

En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \ge N \Rightarrow |\dfrac{u_n}{v_n} - l| < \varepsilon$.

Pour un ε tel que $0 < \varepsilon < l$, on a alors $l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon$ pour tout $n \ge N$. On a aussi $(l-\varepsilon)v_n < u_n < (l+\varepsilon)v_n$ pour tout $n \ge N$.

1) Si $(\sum v_n)$ converge alors $(\sum (l+\varepsilon)v_n)$ converge et par suite grâce au théorème de comparaison, $(\sum u_n)$ converge.

2) Si $(\sum u_n)$ converge alors $(\sum (l-\varepsilon)v_n)$ converge et donc $(\sum v_n)$ converge.

Proposition

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ (où $a \in \mathbb{C}$) La série géometrique $(\sum a^n)$ converge si et seulement si $|a| < 1$, et on a dans ce cas : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$

2.2 Les séries entières.

2.2.1 Définition.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
Si $z \in \mathbb{C}$, la série $(\sum a_n z^n)$ s'appelle une série entiére, les a_n sont les coefficients de $(\sum a_n z^n)$ et z est la variable de la série.

2.2.2 Rayon de convergence.

On définit la convergence simple et la convergence absolue d'une série entiére de la maniére suivante :

Définition :

$*$ On dit que la série entière $(\sum a_n z^n)$ converge simplement sur un sous-ensemble Z de $\mathbb{C}$ si pour tout $z \in Z$, la série de terme général $(u_n = a_n z^n)$ converge.

$*$ On dit que la série entière $(\sum a_n z^n)$ converge absolument sur Z si pour tout $z \in Z$, la série de terme général $(u_n = |a_n z^n|)$ converge.

Théorème et Définition :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiére. Il existe $R \in [0, +\infty]$ tel que :
$R = \sup\{r, r \in \mathbb{R}^+, \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$.
R est appelé le rayon de convergence.

Preuve :

$I = \{r, r \in \mathbb{R}^+, \sum |a_n| r^n\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$, contenant 0, soit il est borné et admet alors une borne supérierieur, soit il n'est pas borné et $R = +\infty$.

Définition 1 :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entiére complexe de rayon de convergence R.

L'ensemble $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entiére.

Théorème :

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière n, de rayon de convergence R.

1⌋ si $|z| < R$ alors $(\sum a_n z^n)$ converge absolument.

2⌋ si $|z| > R$ alors $(\sum a_n z^n)$ diverge grossièrement.

Démonstration :

1⌋ D'après la définition du rayon de convergence ,

$|z_0| < R \Rightarrow |z_0| \in I$, I étant intervale $(I = \{r, r \in \mathbb{R}^+, \sum |a_n| r^n\})$.

2⌋ Pour $|z_0| > R$, supposons que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée .

Alors il existe A tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n||z_0^n| \leq A$

Mais pour z tel que : $|z| < |z_0|, |a_n||z^n| = |a_n||z_0^n||\frac{z}{z_0}|^n \leq A|\dfrac{z}{z_0}|^n$, qui est le terme gènèral d'une série géométrique convergente, ce qui prouve que $R \geq |z|$ pour $|z| < |z_0|$ càd $R \geq |z_0|$, ce qui est absurde, la suite $(a_n z_0^n)$ n'est pas bornée, et la série $(\sum a_n z_0^n)$ diverge.

Lemme

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexe et z_0 un complexe non nul.
Si la suite numérique $(u_n)_n$ de terme gènèral $(v_n = a_n z_0^n)$ est bornée, alors la série entiére $(\sum a_n z^n)$ converge absolument sur le disque ouvert $D(0, |z_0|)$.

Démonstration :

Supposons que la suite $(u_n)_n$ de terme gènèral $u_n = a_n z_0^n$ soit bornée .
i.e supposons que :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n z_0^n| \leq M$$

On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n (\frac{z}{z_0})^n| = |a_n z_0^n||\frac{z}{z_0}|^n \leq M|\frac{z}{z_0}|^n$$

pour tout complexe z tq $|z| < z_0$ (i.e pour $z \in D(0, |z_0|)$)
La série numérique de terme gènèral $v_n = M|\dfrac{z}{z_0}|^n$ est une série géométrique de raison $|\dfrac{z}{z_0}| < 1$ d'où elle est convergente.

2.3 Détermination du rayon de convergence.

Proposition 1 :

Soient $\sum_n a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entiéres de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors : $R_a = R_b$

Démonstration :

Puisque $|a_n| \sim |b_n|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $|a_n x^n| \sim |b_n x^n|$.
On en déduit que les séries numérique $\sum_n |a_n x^n|$ et $\sum |b_n x^n|$ sont de même nature, et elles convergent (resp divergent) toutes les deux pour les mêmes valeurs de x. Les entiéres $(\sum_n a_n x^n)$ et $(\sum b_n x^n)$ convergent absolument sur le disque de

convergence.
On a donc : $R_a = R_b$.

Proposition 2(Critère de D'Alembert) :

Soit $(\sum_n a_n x^n)$ une série entiére.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existe et a pour limite l, alors $R = \frac{1}{l}$ (avec les conventions $(\frac{1}{0} = +\infty)$ et $(\frac{1}{\infty} = 0)$).

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors $\quad |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}||x|$
Donc : $\quad \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}| \longrightarrow l|x|$.

Si $|x| < \frac{1}{l}$, alors $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ converge.

Si $|x| > \frac{1}{l}$, alors $\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ diverge.
Donc : $R = \frac{1}{l}$.

Proposition 3 (Critère de Cauchy) :

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ série entiere.

si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, alors $R = \frac{1}{l}$ avec les conventions $(\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0)$.

Démonstration :

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors $|a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}}|x| \longrightarrow l|x|$.
(même raisonnement que pour la régle de D'Alembert).

2.3.1 Exemples.

$*$ Le rayon de convergence de la série entiére $(\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{n})x^n)$ est le même qui celui de la série entière $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}x^n)$ car $(\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n})$.

$*$ Soit $\sum_n \frac{1}{n!}x^n$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc $R = +\infty$.

$*$ Soit $\sum_n \frac{x^n}{2^n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

Donc $R = 2$.

La série converge pour $|x| < 2$ et diverge pour $|x| > 2$.

2.4 Théroéme de Cauchy-Hadamard.

Jacques Salomon Hadamard (né le 8 décembre 1865 à Versailles, mort le 17 octobre 1963 à Paris) est un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres. Il a aussi établi la notion de "problème bien posé" dans le domaine des équations différentielles.
Il a laissé son nom aux matrices utilisées dans les algorithmes quantiques, le traitement du signal, le compression de données...
La formule d'Hadamard est un résultat d'analyse complexe qui détermine le rayon de convergence d'une série entière. Il a été publié en 1821 par Cauchy mais est resté relativement méconnu jusqu'a sa redécouverte par Hadamard qui le publia une première fois en 1888 puis l'inclut en 1892 dans sa thèse.

Proposition :

Le rayon de convergence R d'une série entière à coefficients réels $(\sum_n a_n x^n)$ est donné par :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Si la suite $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ est non bornée alors $R = 0$.

Preuve :

supposons que R est strictement positif, considérons la suite $(|a_n| r^n)$.
1] $0 < r < R$:

Dans ce cas la suite $(|a_n|r^n)$ tend vers 0, puisque $\sum a_n r^n$ est absolument convergente.

Donc il existe n_0 tel que $\forall n > n_0$ $|a_n|r^n \leq 1$.

$$\text{Or : } |a_n|r^n \leq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n}r \leq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{r}$$

Mais si tous les $\sqrt[n]{a_n}$ au delà de n_0 sont inférieure à $\dfrac{1}{r}$

Alors : $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \dfrac{1}{r}$.

et comme ceci est vrai pour tout $r < R$ on déduit : $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \dfrac{1}{R}$.

2] $r > R$:

Dans ce cas la suite $(|a_n|r^n)$ n'est pas bornée, par définition même de R.
Donc pour tout N, il existe $n > N$ tel que :

$$|a_n|r^n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}r \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{r}.$$

Mais si une infinité parmi les $\sqrt[n]{|a_n|}$ sont supérieure à $\dfrac{1}{r}$, alors $\limsup \sqrt[n]{a_n} \geq \dfrac{1}{r}$.

Et comme ceci est vrai pour tout $r > R$ on déduit que $\limsup \sqrt[n]{a_n} \geq \dfrac{1}{R}$.

3 Limite supérieure et inférieure d'une fonction :

3.1 Généralités.

Commençons ces rappels sur les fonctions par quelques définitions de base.

Définition :

Une fonction f admet le réél l pour limite en $a \in \mathbb{R}$, si la fonction $(f - l)$ tend vers 0 en a. Le réél l est alors unique, et on l'appelle limite de la fonction f en a, ce que nous notons $l = \lim\limits_{\longrightarrow a} f$.

Remarque : :

. Une fonction f tend vers l en $a \in \mathbb{R}$ si elle est définie au voisinage de a et si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

· On dit aussi que f tend (ou converge vers l) en a.

· La convergence de f vers l en a s'écrit :

· Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

· Dans le cas où $a = +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

· Dans le cas où $a = -\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

· La convergence de f vers l à gauche de a s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in]x_0 - \eta, x_0] \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

· La convergence de f vers l à droite de a s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in]x_0, x_0 + \eta] \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

3.2 Limite supérieure et inférieure d'une fonction.

Définition :

Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in]a, b[$.

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\eta \to 0} \sup \{f(x) : 0 <| x - x_0 |< \eta\}.$$
$$= \inf_{\eta > 0} \sup \{f(x) : 0 <| x - x_0 |< \eta\}.$$

et nous avons :

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\eta\to 0} \inf\{f(x) : 0 <| x - x_0 |< \eta\}.$$
$$= \sup_{\eta>0} \inf\{f(x) : 0 <| x - x_0 |< \eta\}.$$

Alors, les $\limsup_{x\to x_0} f(x)$ et $\liminf_{x\to x_0} f(x)$ sont respectivement appelées la limite supérieure et la limite inférieure de la fonction f.

On note : $\lim_{x\to x_0} \sup f(x) = \overline{\lim}\, f(x)$ et $\lim_{x\to x_0} \sup f(x) = \underline{\lim}\, f(x)$, si elles existent.

Autre définition :

Soit $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, et $c \in]a, b[$.

$$\limsup_{x\to c} f(x) = \sup\{\lim_{n\to+\infty} f(x_n), x_n \neq c, x_n \longrightarrow c \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \text{ existe }\}.$$
et nous avons :

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \inf\{\lim_{n\to+\infty} f(x_n), x_n \neq c, x_n \longrightarrow c \text{ et } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \text{ existe }\}.$$

Exemple 1 :

Considèrons la fonction définie par : $f(x) = \sin(\dfrac{1}{x})$.

Alors : $\liminf_{x\to 0} f(x) = -1$ et $\limsup_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exemple 2 :

Considèrons la fonction définie par : $f(x) = x$, pour $x < 0$ et $f(x) = x + 1$, pour $x > 0$

Alors : $\liminf_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\limsup_{x\to 0} f(x) = 1$.

Exemple 3 :

Considèrons la fonction définie par : $f(x) = -e^{-x}$, pour $x < 0$ et $f(x) = e^{x}$, pour $x > 0$

Alors : $\liminf_{x\to 0} f(x) = -1$ et $\limsup_{x\to 0} f(x) = 1$.

Proposition :

$\limsup_{x\to a} f(x) = A$ existe si et seulement si :

$* \ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < A+\varepsilon.$

$\liminf_{x\to a} f(x) = A$ existe si et seulement si :

$* \ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > A+\varepsilon.$

Proposition :

$(\lim_{x\to a} f(x))$ existe si et seulement si : $\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x)$.

Preuve :

$\Rightarrow\rfloor$ Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, alors il est clair que $\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x) = L$.

$\Leftarrow\rfloor$ Supposons que $\limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x) = \alpha$, pour $\delta > 0$.

Ona : $\inf_{\delta>0} \sup_{0<|x-a|<\delta} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{0<|x-a|<\delta} f(x) = \alpha$.

Implique que $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que : $f(x) < \alpha+\epsilon$ and $f(x) > \alpha-\epsilon$
Or, on definit $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, on a : $\alpha-\epsilon < f(x) < \alpha+\epsilon$.

Alors : $\mid f(x)-\alpha \mid < \epsilon$, pour $\mid x-\alpha \mid < \delta$.

Donc $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$.

3.3 Continuité d'une fonction.

3.3.1 Continuité en un point.

Si une fonction f définie en a admet une limite finie en a, celle-ci est ègale à $f(a)$.
On dit alors que f est continue en a.
c-à-d :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D_f, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon.$$

3.3.2 Continuité sur un intervalle.

On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, si f est continue en tout point de I.

Proposition :

f est continue en c si et seulement si : $\liminf\limits_{x \to c} f(x) = \limsup\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Preuve :

Si f est continue en c, pour toute suite $x_n \longrightarrow c$, on a $f(x_n) \longrightarrow f(c)$.
d'où $\liminf f(x) = \limsup f(x) = f(c)$.

Montrons la réciproque :

Soit (x_n) une suite dont la limite est c. Nous devons montrer que la suite $(f(x_n))$ converge ; sa limite sera nécessairement $f(c)$.
Raisonnons par l'absurde :
Si $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(c)$ il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (x_{np}) tels que $|f(x_{np}) - f(c)| \geq \varepsilon$. Puisque f est bornée, la suite $(f(x_{np}))$ contient une sous-suite convergente dont la limite est $f(c)$ par hypothèse. On obtient donc, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, $|f(c) - f(c)| \geq \varepsilon > 0$ ce qui est absurde.

3.4 Semi-Continuité.

la semi-continuité est une forme faible de la continuité.
Intuitivement, une telle fonction f est dite semi-continue supérieurement en x_0 si, lorsque x est proche de x_0, $f(x)$ est soit proche de $f(x_0)$, soit inférieure à $f(x_0)$.
une telle fonction f est dite semi-continue inférieure en x_0 si, lorsque x est proche de x_0, $f(x)$ est soit proche de $f(x_0)$, soit supérieure à $f(x_0)$.

3.4.1 Semi-Continuité supérieure.

On dit que f est semi-continue supérieurement en x_0 Si :

· pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinnage de U de x_0 tel que :

$$\forall x \in U, \quad f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

· Par définition d'une limite supérieure :
La fonction f est semi-continue supérieure en $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \sup_{x \neq x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

3.4.2 Semi-Continuité inférieure.

Les notions de semi-continuité inférieure d'une fonction se définissent de manière analogue, par symétrie car elles sont èquivalentes aux notions correspondantes de semi-continuité supérieure de la fonction opposée. On dit que f est semi-continue inférieure en x_0 Si :

- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinnage de U de x_0 tel que :

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

- Par définition d'une limite inférieure :
  La fonction f est semi-continue inférieurement en $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \inf_{x \neq x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

Proposition :

Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in S$.

La fonction f est continue si, et seulement si, elle est semicontinue supérieurement et inférieurement en ce point.

Preuve :

$\Rightarrow\rfloor$ Si la fonction f est continue, alors $\limsup_{x \to x_0} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in S$.
Par conséquent, f est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement.

$\Leftarrow\rfloor$ Supposons que f est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement.

$\limsup\limits_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \liminf\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour $x_0 \in S$.
Et comme $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$
$\liminf\limits_{x \to a} f(x) = \limsup\limits_{x \to a} f(x) = f(x_0)$.
D'où, $\lim_{x \to a} f(x) = f(x_0)$.
donc f est continue.

4 Limite supérieure et inférieure d'une suite d'ensembles

4.1 Définitions.

On considère une ensemble non-vide E et une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E. On définit respectivement la limite inf et la limite sup de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\liminf X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap_{p\geq n} X_p)$$

$$\limsup X_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{p\geq n} X_p)$$

Soit

$$\begin{aligned} x \in \liminf X_n &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ , \ x \in \bigcap_{p\geq n} X_p \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ , \ \forall p \geq n \ , \ x \in X_p. \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'on peut trouver un entier n tel que x est dans tous les ensembles d'indice plus grand que n.
Évidement, cet entier n n'est pas unique : tous les entiers $n' \geq n$ conviennent également.

De même, $x \in \limsup X_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ x \in \bigcup_{p\geq n} X_p$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \exists p \geq n \ , \ x \in X_p.$$

Ceci signifie que x est dans des ensembles d'indices arbitrairement grands .

Application :

Mq : $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset \liminf X_n \subset \limsup X_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

Montrons successivement les trois inclusions.

1⌋. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$, on a alors $\forall p \geq n \ , \ x \in X_p$. On veut montrer que $x \in \liminf X_n$. D'après la première question, il suffit d'exhiber un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n \ , \ x \in X_p$. De façon immédiate, $n = 0$ convient.

2⌋. Soit $x \in \liminf X_n$. Il existe donc un entier n_1 tel que $\forall p \geq n_1 \ x \in X_p$.
Montrons que $x \in \limsup X_n$ Soit $n \in \mathbb{N}$.
Posons $p = \max(n, n_1)$. On a alors $p \geq n$ et puisque $p \geq n_1$, on a également $x \in X_p$.

3]. Soit $x \in \limsup X_n$. Posons $n = 0$, d'après la caractérisation de $\limsup X_n$, il existe $p \geq n = 0$ tel que $x \in X_p$. Ainsi, par définition de l'union d'une famille, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Définition (convergence d'ensemble) :

On dit qu'une suite d'ensemble $(A_n)_{n\geq 0}$ Converge vers A,

Si $\quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = A.$

Corollaire :

Si $\{A_n\}$ une suite d'ensemble décroissante (au sens de l'inclusion), alors :

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \lim A_n = \bigcap A_n.$$

De même, si $\{A_n\}$ une suite d'ensemble croissante (au sens de l'inclusion), alors :

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \lim A_n = \bigcup A_n.$$

Preuve :

Soit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ suite d'ensemble décroissante.

Posons $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ Nous allons Mq :

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \lim A_n = \bigcap A_n.$$

Tout D'abord par définition de la limite sup pour suite d'ensemble

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

On a $\liminf A_n \subset \limsup X_n = A$.

Donc nous avons seulement de Mq : $A \subseteq \liminf A_n$.

Mais Cela est immédiat de la définition de A étant l'intersection de tous les A_n

Aprés avoir montré à la fois l'existance et de l'égalité de la limite sup et la limite inf de A_n.

On conclure que limite de A_n existe et, il est égale A.

4.2 Opération sur les limites supérieures et de inférieures.

Proposition :

On considère deux suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E.

a⌋ $\liminf(X_n \cap Y_n) = (\liminf X_n) \cap (\liminf Y_n)$.

b⌋ $((\liminf X_n)\cap(\liminf Y_n)) \subset \limsup(X_n\cap Y_n) \subset ((\limsup X_n)\cap(\limsup Y_n))$.

c⌋ $((\limsup X_n) \cup (\limsup Y_n)) = \limsup(X_n \cup Y_n)$.

Preuve :

a⌋ Montrons la double inclusion :

-$\subset$: Soit $x \in \liminf(X_n \cap Y_n)$. Par définition de la limite inf, $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq n$, $x \in X_p \cap Y_p$. Montrons que $x \in \liminf X_n$. Posons $n_0 = n$. Alors soit $p \geq n_0$, $x \in X_p$. Nous avons donc montré que $x \in \liminf X_n$. De la même façon, on montre que $x \in \liminf Y_n$.

-$\supset$: Soit $x \in \liminf X_n \cap \liminf Y_n$. D'après la définition de $\liminf X_n$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_1$, $x \in X_p$. De même, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_2$, $x \in Y_p$. Posons $n = \max(n_1, n_2)$. Soit alors $p \geq n$. Puisque $p \geq n \geq n_1$, $x \in X_p$ et puisque $p \geq n \geq n_2$, $x \in Y_p$. Donc $x \in X_p \cap Y_p$. Nous avons bien montré que $x \in \liminf X_p \cap Y_p$.

b⌋. Montrons que $\liminf X_n \cap \liminf Y_n \subset \limsup(X_n \cap Y_n)$. Soit $x \in \liminf X_n \cap \liminf Y_n$. Puisque $x \in \liminf X_n$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_1$,$x \in X_p$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_2$, $x \in Y_p$. Montrons que $x \in \limsup(X_n \cap Y_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $p = \max(n, n_1, n_2)$. On a $p \geq n$ et puisque $p \geq n1$, $x \in X_p$ et comme $p \geq n_2$,$x \in Y_p$. Par conséquent, $x \in X_p \cap Y_p$.

- Montrons que $\limsup(X_n \cap Y_n) \subset \limsup X_n \cap \limsup Y_n$. Soit $x \in \limsup(X_n \cap Y_n)$. Montrons que $x \in \limsup X_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $x \in \limsup(X_n \cap Y_n)$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in X_p \cap Y_p$. On a donc $x \in X_p$. On montre de même que $x \in \limsup Y_n$.

c⌋

-$\subset$: soit $x \in \limsup X_n \cup \limsup Y_n$.étudions les deux cas possibles :
(a) : $x \in \limsup X_n$. Montrons que $x \in \limsup(X_n \cup Y_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x \in \limsup X_n$, $\exists p \geq n$ tel que $x \in X_p$. à fortiori, $x \in X_p \cup Y_p$. Par conséquent,

$x \in \limsup(X_n \cup Y_n)$.
(b) : $x \in \limsup Y_n$: de même.

-$\supset$: Par l'absurde, supposons $x \notin \limsup X_n \cup \limsup Y_n$. Comme $x \notin \limsup X_n$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_1$, $x \notin X_p$. De même, puisque $x \notin \limsup Y_n$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_2$, $x \notin X_p$. Posons alors $n = \max(n_1, n_2) \in \mathbb{N}$. Puisque $x \in \limsup(X_n \cup Y_n)$, $\exists p \geq n$ tel que $x \in X_p \cup Y_p$. étudions alors les deux cas :

(a) $x \in X_p$. Puisque $p \geq n \geq n_2$, $x \notin X_p$: impossible.

(b) $x \in Y_p$. Puisque $p \geq n \geq n_1$, $x \notin Y_p$: impossible.

Les deux cas étant impossibles, on a abouti à une contradiction.

4.3 Application .

Questions :

Q1 : Montrer que si $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite de parties de E croissante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \subset X_{n+1}$, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q2 : Construire un exemple de suite d'ensemble non-convergente.

Q3 : Monter que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Y_n = E \setminus X_n)$ converge également.

Q4 : Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $(V_n = X_n \cap Y_n)$ est également convergente.

Q5 :Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, alors la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $(W_n = X_n \cup Y_n)$ est également convergente.

Réponses :

Q1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite (X_n) est croissante, $C_p = \cap_{p\geq n} X_p = X_n$. Par conséquent, $\liminf X_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Vérifions que $\limsup X_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

$-\subset$: soit $x \in \limsup X_n$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \geq n$ tel que $x \in X_p$. Prenons $n = 0$, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_p$, c'est à dire $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

$-\supset$: soit $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_{n0}$. Puisque la suite (X_n) est croissante, $\forall p \geq n_0$, on a $x \in X_p$. Montrons alors que $x \in \limsup X_n$. Soit

$n \in \mathbb{N}$. Posons $p = \max(n, n_0)$. Puisque $p \geq n_0$, on a bien $x \in X_p$. La suite (X_n) est convergente et sa limite est $\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. On aurait pu faire une autre démonstration en montrant d'abord que $\limsup X_n \subset \liminf X_n$: soit $x \in \limsup X_n$, Posons $n = 0$, comme $x \in \limsup X_n$, $\exists p \geq 0$ tel que $x \in X_p$. Par une récurrence immédiate, puisque la suite (X_n) est croissante, on montre alors que $\forall p \geq p_0$, $x \in X_p$. Posons alors $n_0 = p_0$. On a bien $\forall p \geq n_0$, $x \in X_p$ ce qui montre que $x \in \liminf X_n$. Ensuite, il suffit d'utiliser $\liminf X_n \subset \limsup X_n$. Par conséquent, $\liminf X_n = \limsup X_n$ et la suite est convergente.

Q2 : Considérons la suite (X_n) de parties définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{1\}$ si n pair
$X_n = \{0, 1\}$ si n impair.
On vérifie aisément que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cap_{p\geq n} X_p = 1$ et donc que $\liminf X_n = 1$. De meme, on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cup_{p\geq n} = \{0, 1\}$ et donc que $\limsup X_n = \{0, 1\}$. La suite (X_n) n'est pas convergente.

Q3 : Notons $L = \liminf X_n = \limsup X_n$. Utilisons les propriétés du passage au complémentaire d'une famille :
$\liminf(E \setminus X_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}(\cap_{p\geq n}(E \setminus X_p)) = \cup_{n\in\mathbb{N}} E \setminus (\cup_{p\geq n} X_p) = E \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{p\geq n} X_p) = E \setminus L$ De meme, on montre que $\limsup(E \setminus X_n) = E \setminus (liminf X_n) = E \setminus L$. La suite (X_n) est donc convergente et sa limite est $(E \setminus L)$.

Q4 : Notons $L = \liminf X_n = \limsup X_n$ et $L_0 = \liminf Y_n = \limsup Y_n$. On a $\liminf(Vn) = L \cap L_0$. et on a , $L \cap L_0 \subset \limsup V_n \subset L \cap L_0$ ce qui montre que $\limsup V_n = L \cap L_0 = \liminf V_n$. La suite (V_n) est bien convergente et sa limite vaut $L \cap L_0$.

Q5 : Passons aux complémentaires. Il suffit de voir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \cup Y_n = E \setminus ((E \setminus X_n) \cap (E \setminus Y_n))$
Le résultat découle alors des questions 3 et 4.

Conclusion

Les limites supérieures et inférieures sont des outils facile à utilisées pour résoudre plusieurs problèmes.
Parmi eux on a vu le problème de convergence d'une suite numérique et aussi pour l'ensemble des suites, ainsi le problème de continuité d'une fonction sans oublier l'intérêt de ces limites dans le cas de détermination le rayon de convergence d'une série entière à partir de la formule d'Hadamard.

Références

[1] Alain Droguet,Algèbre et analyse 1ère année option économique.

[2] Jean-Pierre Marco, Hassan Boualem, Laurent Lazzarini, Robert Brouzet, Adrien Deloro,Mathématiques L1 :Cours complet avec fiches de révision, 1000 tests et exercices corrigés.

[3] Dany-Jack Mercier,L'épreuve d'exposé au CAPES mathématiques.

[4] Charles L. Byrne,A First Course in Optimization chapter 3 Basic Analysis p38.

[5] G. Costantini,«Continuité, u-continuité. Applications » (http ://bacmaths.net).

[6] planetmath.org/node/36715.