Les Espaces Euclidiennes

Mémoire de Projet de fin d'étude
Filière Mathématiques et Applications

Fatima Ajidad

Encadré par :

Pr.Najib Mahdou

Les jurys :

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté Des Sciences Et Techniques Fès

11 juin 2016

Dédicace

Je tiens à remercier dans un premier temps, toute l'équipe pédagogique de la FST de Fès et les intervenants professionnels responsables de la formation de Filière Mathématiques Et Applications.

Avant d'entamer ce rapport, je profite de l'occasion pour dire que ma gratitude s'adresse à monsieur Najib Mahdou, mon encadrant dans mon projet de fin d'étude. Son accueil et sa confiance ont rendu ce projet possible et intéressant. Je le remercie aussi pour son amabilité, sa patience et le soutien qu'il m'a apporté tout au long de mon projet.

je tiens à remercier mes professeurs de m'avoir incitée à travailler en mettant à notre disposition leurs expériences et leurs compétences.

1 Introduction

Dans cet article on va traiter les notions de formes bilinéaires symétriques, de formes quadratiques et de produit scalaire . Leurs définitions et propriétés générales vont être développées, ainsi que les liens qui existent entre elles.

Une remarque préliminaire peut être faite : leurs noms comportent tous le mot « forme ». Cela correspond à une propriété qui leur est commune.Ce sont toutes des applications dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{K}$ *, corps de base des espaces vectoriels qui interviendront.*

Je vais parler aussi sur l'espace préhilbertien pour définir l'espace euclidienne et on va voir des propriétés importantes comme l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Minkowski et la propriété d'orthogonalité qui caractérise les espaces euclidiennes .

Table des matières

2 Formes bilinéaires symétriques

On désigne par E un espace vectoriel réel non réduit à $\{0\}$.

Définition : *soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$.*

1. *On dit que φ est une forme bilinéaire si pour tout $x \in E$, les applications partielles $\varphi(x, \bullet)$ et $\varphi(\bullet, x)$ sont linéaires.*

2. *On dit que φ est symétrique si pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.*

Exemple : *La multiplication des nombres réels,*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}$.

Exemple : *Exemple fondamental. Certains polynômes homogènes de degré deux, plus précisément les fonctions du type*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ ((x_i), (y_i)) &\longmapsto \sum_{(i,j)} \lambda_{ij} x_i y_j \end{aligned}$$

sont des formes bilinéaires.Si de plus $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ pour tout (i, j) , alors la forme est symétrique.

2.1 Représentation d'une forme bilinéaire par une matrice

Définition : *Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire, où E et F sont de dimensions finies avec pour bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}^{'} = (e_1^{'}, \cdots, e_n^{'})$, Alors la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{'}$ noté B_φ est :*

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1^{'}) & \cdots & \varphi(e_n, e_1^{'}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_1, e_n^{'}) & \cdots & \varphi(e_n, e_n^{'}) \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $E = F$, cette matrice est symétrique si et seulement si la forme bilinéaire φ est symétrique . Elle est antisymétrique si et seulement si φ est antisymétrique

2.2 Produit scalaire

Définition : *On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur E est :*
– positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout x dans E ;
– définie si pour x dans E l'égalité $\varphi(x, x) = 0$ équivaut à $x = 0$.

Définition : *On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive.*

<u>**Définition :**</u> *Un espace préhilbertien est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Un espace préhilbertien de dimension finie est dit euclidien.*

Dans le cas où E est un espace euclidien, on peut aussi dire qu'un produit scalaire sur E est la forme polaire d'une forme quadratique de signature $(n, 0)$.
On notera, quand il n'y a pas d'ambiguïté :

$$(x, y) \longmapsto \langle x|y\rangle$$

un tel produit scalaire et pour $y = x$, on note :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}.$$

L'application $x \longmapsto \|x\|^2 = \langle x|x\rangle$ est tout simplement la forme quadratique associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$.
Les deux égalités qui suivent, expressions de la forme polaire d'une forme quadratique, sont utiles en pratique.

Proposition : *Pour tous x, y dans E on a :*

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).\end{aligned}$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

La deuxième identité est l'égalité du parallélogramme. Elle est caractéristique des produits scalaires dans le sens où une norme est déduite d'un produit scalaire si, et seulement si, elle vérifie l'identité du produit scalaire .

Exercice : *Montrer que l'application $\varphi : (P, Q) \longmapsto P(1)Q'(0) + P'(0)Q(1)$ définit une forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}[x]$. Est-ce un produit scalaire ?*

Solution : *Avec la structure de corps commutatif de $\mathbb{R}$ et la linéarité des applications d'évaluation en un point d'un polynôme et de dérivation, on déduit que φ est une forme bilinéaire symétrique sur$E$. Pour $P \in E$ la quantité $\varphi(P, P) = 2P(1)P'(0)$ n'est pas nécessairement positive (prendre par exemple $P(x) = 2 - x$) , donc φ n'est pas un produit scalaire.*

Exemple : *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$,l'application :*

$$(x, y) \longmapsto \langle x \mid y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On dit que c'est le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice : *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est toujours muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.Soit $\omega \in \mathbb{R}^n$. À quelle condition sur ω l'application :*

$$\varphi : (x, y) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k y_k$$

définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$?

Solution : *L'application φ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$. Si φ est un produit scalaire, on a alors $\omega_j = \varphi(e_j, e_j) > 0$ pour tout j compris entre 1 et n. Réciproquement si tous les ω_j sont strictement positifs, on a $\varphi(x,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i x_i^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi(x,x) = 0$ équivaut à $\omega_i x_i^2 = 0$ pour tout i , ce qui équivaut à $x_i = 0$ pour tout i ,soit à $x = 0$.*
En conclusion,φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si, tous les ω_i sont strictement positifs.

Exercice : *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d pour que l'application :*

$$(x, y) \longmapsto \langle x|y\rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

définisse un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^2$.

Solution : *Cette application est bilinéaire pour tous réels a, b, c, d. Elle est symétrique si, et seulement si,sa matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est symétrique, ce qui équivaut à $b = c$.*
Pour $b = c$, φ est bilinéaire symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\langle x|x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2.$$

Si on a un produit scalaire , alors $a = \langle e_1|e_1\rangle > 0$, $d = \langle e_2|e_2\rangle > 0$ et pour tout vecteur $x = e_1 + te_2$, où t est un réel quelconque, on a $\langle x|x\rangle = a + 2bt + dt^2 > 0$, ce qui équivaut à $\delta = b^2 - ad < 0$.
Réciproquement si $b = c, a > 0, d > 0$ et $b^2 - ad < 0$ alors $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire symétrique et pour tout $x \in E$, on a :

$$\langle x|x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$$

$$= a\left(x_1^2 + 2\frac{b}{a}x_1x_2 + \frac{d}{a}x_2^2\right)$$

$$= a\left(\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \frac{ad - b^2}{a^2}x_2^2\right) \geq 0$$

avec $\langle x|x\rangle = 0$ si, et seulement si, $x_1 + \dfrac{b}{a}x_2 = 0$ et $x_2 = 0$, ce qui équivaut à $x = 0$.
Donc$\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire si, et seulement si, $b = c$, $a > 0$, $d > 0$ et $b^2 - ad < 0$.

Exercice : *Soient n un entier naturel non nul, $x_0, \cdots, x_n$ des réels deux à deux distincts et $\omega \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition sur ω l'application :*

$$\varphi : (P, Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \omega_i P(x_i)Q(x_i)$$

définit-elle un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$?

Solution : *L'application φ définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_n[x]$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}^n$. Si φ est un produit scalaire, en désignant par $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[x]$ définie par :*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} (0 \leq i \leq n)$$

(L_i est le polynôme de degré n qui vaut 1 en x_i et 0 en x_k pour $k \neq i$), on a alors $\omega_j = \varphi(L_j, L_j) > 0$ pour tout j compris entre 0 et n.
Réciproquement si tous les ω_j sont strictement positifs, on a $\varphi(P,P)=\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i P^2(x_i) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et φ (P, P)=0 équivaut à $\omega_i P^2(x_i) = 0$ pour tout i, ce qui équivaut à $P(x_i) = 0$ pour tout i compris entre 0 et n soit à P = 0 (P est un polynôme dans $\mathbb{R}_n[x]$ qui a n + 1 racines distinctes, c'est donc le polynôme nul).
En conclusion, φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ si, et seulement si, tous les ω_i sont strictement positifs.

Exercice : *n étant un entier naturel non nul, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la forme :*

$$P : x \longmapsto P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

1. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. Montrer que si $P \in \mathcal{P}_n$ s'annule en 2n+1 points deux à deux distincts dans $[-\pi, \pi[$, alors $P = 0$ (utiliser les expressions complexes des fonctions cos et sin).
3. Montrer que si $x_0, \cdots, x_{2n}$ sont des réels deux à deux distincts dans $[-\pi, \pi[$, alors l'application :

$$\varphi : (P, Q) \longmapsto \sum_{i=0}^{2n} P(x_i)Q(x_i)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

Solution : *1. Il est clair que $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En notant respectivement c_k et s_k les fonctions$x \longmapsto \cos(kx)$ pour $k \geq 0$ et $x \longmapsto \sin(kx)$ pour $k \geq 1$, $\mathcal{P}_n$ est engendré par la famille $\mathcal{B}_n = \{c_k | 0 \leq k \leq n\} \cup \{s_k | 1 \leq k \leq n\}$, c'est donc un espace vectoriel de dimension au plus égale à 2n+1.*
Montrons que cette famille de fonctions est libre. Pour ce faire, on procède par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour n=1, si $a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) = 0$, en évaluant cette fonction en 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π successivement, on aboutit au système linéaire :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \\ a_0 + b_1 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à $a_0 = b_0 = b_1 = 0$. La famille $\{c_0, c_1, s_1\}$ est donc libre.
Supposons le résultat acquis au rang n – 1≥ 1. Si $P = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k c_k + b_k s_k) = 0$, en dérivant deux fois, on a :

$$P^{''} = -\sum_{k=1}^{n} k^2(a_k c_k + b_k s_k) = 0$$

Il en résulte que :

$$n^2\ P + P^{''} = n^2 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - k^2)(a_k c_k + b_k s_k) = 0$$

et l'hypothèse de récurrence nous dit que $n^2 a_0 = 0, (n^2 - k^2)a_k = 0$ *et* $(n^2 - k^2)b_k$ *pour tout k compris entre 1 et n – 1 , ce qui équivaut à dire que* $a_0 = 0$ *et* $a_k = b_k = 0$ *pour tout k compris entre 1 et n – 1 puisque* $n^2 - k^2 \neq 0$ *. Il reste alors* $a_n c_n + b_n s_n = 0$ *, ce qui implique* $a_n = 0$*, en évaluant en x = 0 et* $b_n = 0$*. La famille* $\mathcal{B}_n$ *est donc libre.*
On verra un peu plus loin que cette famille est orthogonale, formée de fonctions non nulles, et en conséquence libre .
2. Posant $z = e^{ix}$ *pour tout réel x , on a :*

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\frac{z^k + \bar{z}^k}{2} + b_k\frac{z^k - \bar{z}^k}{2i}) \\ &= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k(z^k + \frac{1}{z^k}) - ib_k(z^k - \frac{1}{z^k})) \\ &= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}((a_k - ib_k)z^k + (a_k + ib_k)\frac{1}{z^k}) \end{aligned}$$

ou encore :

$$z^n P(x) = a_0 z^n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}((a_k - ib_k)z^{n+k} + (a_k + ib_k)z^{n-k}) = Q(z)$$

Il en résulte que si P s'annule en 2n+1 points deux à deux distincts, $x_0, \cdots, x_{2n}$*, dans* $[-\pi, \pi[$ *, alors le polynôme complexe* $Q \in \mathbb{C}_{2n}[z]$ *s'annule en 2n + 1 points distincts du cercle unité,* $e^{ix_0}, \cdots, e^{ix_{2n}}$*, ce qui revient à dire que c'est le polynôme nul et P=0.*
3. On vérifie facilement queφ *est une forme bilinéaire symétrique et positive. L'égalité* $\varphi(P,P)$ *= 0 entraîne que* $P \in \mathcal{P}_n$ *s'annule en 2n + 1 points deux à deux distincts dans* $[-\pi, \pi[$ *et en conséquence P = 0.*

Exercice : *Montrer que, pour toute fonction* $\alpha \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$ *, l'application :*

$$\varphi : (f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)\alpha(t)dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ *.*

Solution : *Avec la structure de corps commutatif de* $\mathbb{R}$ *et la linéarité et positivité de l'intégrale, on déduit que* φ *est une forme bilinéaire symétrique positive sur E. Sachant que l'intégrale sur [a,b] d'une fonction continue et à valeurs positives est nulle si, et seulement si, cette fonction est nulle, on déduit que* φ *est une forme définie. Donc* φ *est un produit scalaire sur E.*

Exercice : *Montrer que l'application :*

$$(f,g) \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ *des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles, continues et périodiques de période* 2π*.*

Solution : *Ce sont les mêmes arguments qu'à l'exercice précédent compte tenu qu'une fonction de $\mathcal{F}$ est nulle si, et seulement si, elle est nulle sur $[-\pi, \pi]$.*

3 Formes quadratiques

<u>Définition :</u> *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $q : E \longmapsto \mathbb{K}$. On dit que q est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que pour tout $a \in E$,*

$$q(a) = \varphi(a, a)$$

On dit que q est la forme quadratique associée à φ et φ la forme polaire de q .

Exemple : *La fonction :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &\longmapsto x_1x_2 + y_1y_2 \end{aligned}$$

<u>Définition :</u> *Un espace pseudo-euclidien est espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique .*

L'espace pseudo-euclidien défini par E et la forme quadratique q est noté (E , q), ou (E, φ), ou encore (E, φ, q), si φ désigne la forme polaire de q.

<u>Définition :</u> *Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une forme quadratique q de rang r . On note p le nombre de coefficients égaux à 1 apparaissant dans les réductions de q . La signature de q est le couple d'entiers (p, r - p).On la note sign(q) :*

$$sign(q) = (p, r - q)$$

proposition : *Soit E un espace vectoriel et φ est une forme bilinéaire symétrique sur E et q est la forme quadratique associée à φ,On a :*

$$ran(\varphi) = ran(q) = dimE$$

4 Inégalités de Cauchy-Schwartz et de Minkowski

Dans tout ce qui suit E désigne un espace préhilbertien .

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : *Pour tous x, y dans E on a :*

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ ,$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, x et y sont liés.

Démonstration. *Si $x = 0$, on a alors l'égalité pour tout $y \in E$.*
Si $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec$\lambda \in \mathbb{R}$, on a encore l'égalité.
On suppose donc que x est non nul et y non lié à x. La fonction polynomiale P défini par :

$$P(t)=\|y+tx\|^2 \ = \|x\|^2t^2 \ +2\langle x|y\rangle t \ +\|y\|^2$$

est alors à valeurs strictement positives, le coefficient de t^2 étant non nul, il en résulte que son discriminant est strictement négatif, soit :

$$\langle x|y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 < 0,$$

ce qui équivaut à $|\langle x|y\rangle| < \|x\|\|y\|$.
Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz prend la forme suivante :

$$|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

On peut déduire de cette inégalité quelques inégalités intéressantes sur les réels.

Exercice :

1. *On se donne un entier $n \geq 1$ et des réels $x_1, \cdots, x_n$. Montrer que :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

   Dans quel cas a-t'on égalité ?

2. *En déduire une condition nécessaire et suffisante, sur les réels a et b, pour que l'application $\varphi : (x,y) \longmapsto a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b \sum_{1\leq i\neq j\leq n} x_i y_i$ définissent un produit scalaire sur $\mathbb{R}$, où $n \geq 2$.*

Solution :

1. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k.1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

   l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les x_k sont égaux.

2. *L'application φ est bilinéaire et symétrique. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\begin{aligned} q(x) = \varphi(x,x) &= a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ &= a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \\ &= (a-b)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \end{aligned}$$

Si φ est un produit scalaire, on a alors $a = q(e_1) > 0$, $a - b = q(e_1 - e_2) > 0$ et $q(\sum\limits_{i=1}^{n} e_i) = n(a + (n-1)b) > 0$

Réciproquement si $a > 0$, $a - b > 0$ et $a + (n-1)b > 0$, on a alors pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ayant au moins deux composantes distinctes :

$$\begin{aligned} q(x) &= (a-b)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\ &> (a-b)\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}(a+(n-1)b)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et $q(x) > 0$. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a toutes ses composantes égales à $\lambda \neq 0$, on a alors :

$$q(x) = q\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} e_i\right) = n\lambda^2(a + (n-1)b) > 0$$

Donc φ est un produit scalaire.

Exercice :

1. *Montrer que pour tous réels a, b et λ, on a :*

$$(2\lambda - 1)a^2 - 2\lambda ab = \lambda(a-b)^2 - \lambda b^2 + (\lambda - 1)a^2$$

2. *Soit q la forme quadratique définie sur $E = \mathbb{R}^n$ par :*

$$q(x) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} k x_k x_{k+1}$$

(a) *Effectuer une réduction de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

(b) *Préciser le rang le noyau et la signature de q.*

3. *On note $(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ un vecteur de $H = \mathbb{R}^{2n}$ et Q la forme quadratique définie sur H par :*

$$Q(x, y) = \sum_{k=1}^{n} (y_k^2 - 2x_k y_k)$$

(a) *Effectuer une réduction de Q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.*

(b) *Préciser le rang le noyau et la signature de Q.*

4. *Pour $n \geq 1$ et $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on définit $y = (y_1, \cdots, y_n)$ par :*

$$y_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j$$

(a) *Montrer que :*

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ \forall k \in \{2, \cdots, n\}, x_k = ky_k - (k-1)y_{k-1} \end{cases}$$

(b) *Montrer que :*

$$Q(x, y) = -q(y).$$

(c) *En déduire :*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} 2x_k y_k.$$

puis montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq 4 \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

(d) *En déduire que si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que la série $\sum x_k^2$ soit convergente et si $(y_n)_{n\geq 1}$ est la suite des moyennes de Césaro définie par $y_n = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$*

pour tout $n \geq 1$, alors la série $\sum y_n^2$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$.

Solution :

1. *On a :*

$$\begin{aligned} (2\lambda - 1)a^2 - 2\lambda ab &= \lambda(a^2 - 2ab) + (\lambda - 1)a^2 \\ &= \lambda((a-b)^2 - b^2) + (\lambda - 1)a^2 \\ &= \lambda(a-b)^2 - \lambda b^2 + (\lambda - 1)a^2 \end{aligned}$$

2.

(a) *En utilisant le résultat précédent, on a :*

$$\begin{aligned} q(x) &= (2n-1)x_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}((2k-1)x_k^2 - 2kx_kx_{k+1}) \\ &= (2n-1)x_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kx_{k+1}^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)x_k^2 \\ &= (2n-1)x_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2 + \sum_{k=1}^{n-2} kx_{k+1}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} kx_{k+1}^2 \\ &= (2n-1)x_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2 - (n-1)x_n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2 + nx_n^2 \end{aligned}$$

soit :

$$q(x)=\sum_{k=1}^{n} kl_k^2(x)$$

où les formes linéaires l_k sont définies par :

$$\begin{cases} l_k(x) = x_k - x_{k+1} (1 \leq k \leq n-1) \\ l_n(x) = x_n \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ces formes linéaires sont indépendantes.

(b) On en déduit que rg (q) = n, ker (q) = $\{0\}$ *et sgn (q) = (n, 0) .*

3.

(a) On a :

$$Q(x,y) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

soit

$$Q(x,y) = \sum_{k=1}^{n} L_k^2(x,y) - \sum_{k=n+1}^{2n} L_k^2(x,y)$$

où les formes linéaires L_k sont définies par :

$$\begin{cases} L_k(x,y) = y_k - x_k (1 \leq k \leq n) \\ L_k(x,y) = x_k (k+1 \leq k \leq 2n) \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ces formes linéaires sont indépendantes.

(b) On en déduit que rg (Q) = 2n, ker (Q) = $\{0\}$ *et sgn (Q) = (n, n) .*

4.

(a) On a $x_1 = y_1$ et pour $k \geq 2$, de $ky_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$, on déduit que :

$$x_k = ky_k - (k-1)y_{k-1}.$$

(b) En posant $y_{-1} = 0$, on a :

$$Q(x,y) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - 2x_k) y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (y_k - 2(ky_k - (k-1)y_{k-1})) y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ((1-2k)y_k + 2(k-1)y_{k-1}) y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(1-2k)y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)y_{k-1}y_k.$$

soit :

$$Q(x,y) = \sum_{k=1}^{n}(1-2k)y_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k y_k y_{k+1} = -q(y).$$

(c) *Comme q est positive, on a :*

$$Q(x,y) = \sum_{k=1}^{n}(y_k^2 - 2x_k y_k) = -q(y) \leq 0$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} 2x_k y_k.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

et :

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leq 4\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

(d) *Résulte de ce qui précède.*
On peut montrer que l'égalité est réalisée si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 1}$ est la suite nulle .
Dans l'espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de [a, b] dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(f,g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

De cette inégalité, on peut déduire des inégalités intéressantes.

Exercice : *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que :*

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$$

Dans quel cas a-t 'on égalité ?

Solution : *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :*

$$\left(\int_a^b f(t)\cdot 1dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b 1dt = (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, la fonction f est constante.

Exercice : *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que :*

$$\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right)\left(\int_a^b f(t)dt\right) \geq (b-a)^2$$

Dans quel cas a-t 'on égalité ?

Solution : *L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :*

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2 \leq \int_a^b f(t)dt\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\sqrt{f} = \lambda\frac{1}{\sqrt{f}}$, ce qui équivaut à dire que f est constante.

Exercice : *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que f(a) = 0 . Montrer que :*

$$\int_a^b |f(t)|^2dt \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f^{'}(t)|^2dt$$

Solution : *Pour tout $t \in$]a,b[, on a :*

$$|f(t)|^2 = \left(\int_a^t f^{'}(x)dx\right)^2 \leq \int_a^t 1dx\int_a^t |f^{'}(x)|^2dx \leq (t-a)\int_a^b |f^{'}(t)|^2dt$$

et en intégrant :

$$\int_a^b |f(t)|^2dt \leq \int_a^b |f^{'}(t)|^2dt\int_a^b (t-a)dt = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f^{'}(t)|^2dt$$

Une conséquence importante de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité triangulaire de Minkowski.

Théorème(Inégalité de Minkowski) : *Pour tous x, y dans E on a :*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, x = 0 ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$ (on dit que x et y sont positivement liés).

Démonstration. *Si $x = 0$, on a alors l'égalité pour tout $y \in E$.*
Si $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|x + y\| = |1 + \lambda|\|x\| \leq (1 + |\lambda|)\|x\| = \|x\| + \|y\|,$$

l'égalité étant réalisée pour $\lambda \geq 0$. Pour $\lambda < 0$, l'inégalité est stricte puisque dans ce cas $|1 + \lambda| < 1 + |\lambda| = 1 - \lambda$.
On suppose que x est non nul et y non lié à x. On a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$$

et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 < \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

ce qui équivaut à $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$, .
L'inégalité de Minkowski ajoutée aux propriétés de positivité ($||x|| > 0$ pour tout $x \neq 0$) et d'homogénéité ($||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ pour tout réel λ et tout vecteur x) se traduit en disant que l'application $x \mapsto ||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ définit une norme sur E.
Par récurrence, on montre facilement que pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_p$, on a :

$$\|x_1 + \ldots + x_p\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_p\|$$

Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Minkowski prend la forme suivante :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

Dans l'espace $C^0([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $(f, g) \longmapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ l'inégalité de Minkowski s'écrit :

$$\sqrt{\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$$

5 Orthogonalité

<u>Définition :</u> *On dit que deux vecteurs x et y appartenant à E sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$.*

Théorème(Pythagore) : *Les vecteurs x et y sont orthogonaux dans E si, et seulement si*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

On montre facilement par récurrence sur $p \geq 2$, que si $x_1, \dots, x_p$ sont deux à deux orthogonaux, on a alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

Définition : *On appelle famille orthogonale dans E toute famille* $(e_i)_{i\in I}$ *de vecteurs de E telle que* $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ *pour tous* $i \neq j$ *dans I. Si de plus* $\|e_i\| = 1$ *pour tout* $i \in I$*, on dit alors que cette famille est orthonormée ou orthonormale.*

Définition : *L'orthogonal d'une partie non vide X de E est l'ensemble :*

$$X^{\perp} = \{y \in E | \forall x \in X, \langle x|y\rangle = 0\}$$

$X^{\perp}$ *est un sous espace vectoriel de E , en effet :*

- $*$ $0 \in X^{\perp}$ *car :* $\forall x \in X^{\perp}$ *on a* $\langle x, 0\rangle = 0$
- $*$ $\forall x, y \in X^{\perp}$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *, on a :*

  $\forall z \in X$,$\langle x + \alpha y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \alpha\langle y|z\rangle = 0$ *, ce qui veut dire* $x + \alpha y \in X^{\perp}$

Théorème : *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.*

Démonstration. *Si* $(e_i)_{i\in I}$ *est une telle famille et si* $\sum\limits_{j\in J} \lambda_j e_j = 0$ *où J est une partie finie de I on a alors pour tout* $k \in J$ *:*

$$0 = \left\langle \sum_{j\in J} \lambda_j e_j | e_k \right\rangle = \lambda_k \|e_k\|^2$$

avec $\|e_k\| \neq 0$ *et nécessairement* $\lambda_k = 0$*.*

Exercice : *Montrer que la famille* $\{\cos(nt), \sin(mt) | (n, m) \in N \times N^*\}$ *est orthogonale dans l'espace vectoriel* $\mathcal{F}$ *des fonctions continues et* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$ *muni du produit scalaire* $(f, g) \longmapsto \langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ *défini sur*

Solution : *Pour* $n \neq m$ *dans* $\mathbb{N}$*, on a :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t))dt = 0,$$

pour $n \neq m$ *dans* $\mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t))dt = 0,$$

et pour (n,m) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin((n+m)t) - \sin((n-m)t))dt = 0,$$

pour $n = 0$*, on a :*

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$$

et pour $n \geq 1$ *:*

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)dt = \dfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2nt)+1)dt = \pi, \\ \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)dt = \dfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos(2nt))dt = \pi. \end{cases}$$

De l'exercice précédent, on déduit que la famille de fonctions :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(mt)}{\sqrt{\pi}} | (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

est orthonormée dans $\mathcal{F}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, la famille :*

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(jt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}} | 1 \leq j,k \leq n \right\}$$

est une base orthonormée de l'espace $\mathcal{P}_n$ *des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à* n*.*

Exercice : *Étant donnée une famille* $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *de* $n+1$ *réels deux à deux distincts, on munit* $\mathbb{R}_n[x]$ *du produit scalaire :*

$$(P,Q) \longmapsto \langle P|Q \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)Q(x_i).$$

Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ *des polynômes de Lagrange définie par :*

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} (0 \leq i \leq n)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ *.*

Solution : *Pour i, j compris entre 1 et n, on a :*

$$(L_i|L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) = L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

La famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ *est orthonormée, donc libre et comme elle est formée de n+1 polynômes, c'est une base de* $\mathbb{R}_n[x]$ *.*

5.1 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Théorème (orthonormalisation de Gram-Schmidt) : *Pour toute famille libre* $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ *dans E, il existe une unique famille orthonormée* $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ *dans E telle que :*

$$\forall k \in \{1,2,\cdots,p\}, \begin{cases} Vect\{e_1,\cdots,e_k\} = Vect\{x_1,\cdots,x_k\} \\ \langle x_k|e_k \rangle > 0. \end{cases}$$

Démonstration. *On procède par récurrence sur* $p \geq 1$.
Pour p = 1, on a nécessairement $e_1 = \lambda_1 x_1$ *avec* $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$ *et* $1 = \|e_1\|^2 = \lambda_1^2 \|x_1\|^2$, *donc* $\lambda_1^2 = \dfrac{1}{||x_1||^2}$ *ce qui donne deux solutions pour* λ_1. *La condition supplémentaire* $\langle x_1 | e_1 \rangle > 0$ *entraîne* $\lambda_1 > 0$ *et on obtient ainsi l'unique solution* $e_1 = \dfrac{1}{\|x_1\|} x_1$.
Supposons $p \geq 2$ *et construite la famille orthonormée* $(e_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ *vérifiant les conditions :*

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}, \begin{cases} Vect\{e_1, \cdots, e_k\} = Vect\{x_1, \cdots, x_k\}, \\ \langle x_k | e_k \rangle > 0. \end{cases}$$

Si $(e_1^{'}, e_2^{'}, \cdots, e_{p-1}^{'}, e_p)$ *est une solution à notre problème on a alors nécessairement* $e_k^{'} = e_k$ *et pour tout k compris entre 1 et* $p-1$ *(unicité pour le cas* $p-1$*). La condition Vect*$\{e_1, \cdots, e_p\} =$ *vect*$\{x_1, \cdots, x_p\}$ *entraîne :*

$$e_p = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j e_j + \lambda_p x_p$$

Avec les conditions d'orthogonalité :

$$\forall j \in \{1, \cdots, p-1\}, \langle e_p | e_j \rangle = 0,$$

on déduit que : et :

$$\lambda_j + \lambda_p \langle x_p | e_j \rangle = 0, (1 \leq j \leq p-1)$$

et :

$$e_p = \lambda_p \left(x_p - \sum_{j=1}^{p-1} \langle x_p | e_j \rangle e_j \right) = \lambda_p y_p.$$

Du fait que $x_p \notin Vect\{e_1, \cdots, e_{p-1}\} = vect\{x_1, \cdots, x_{p-1}\}$ *on déduit que* $y_p \neq 0$ *et la condition* $\|e_p\| = 1$ *donne :*

$$|\lambda_p| = \frac{1}{\|y_p\|}$$

La condition supplémentaire :

$$0 < \langle x_p | e_p \rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda_p} \left(e_p - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j e_j \right) | e_p \right\rangle = \frac{1}{\lambda_p}$$

entraîne$\lambda_p >$ *0. Ce qui donne en définitive une unique solution pour* e_p.
La construction d'une famille orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ *peut se faire en utilisant l'algorithme suivant :*

$$\begin{cases} y_1 = x_1, e_1 = \dfrac{1}{\|y_1\|} y_1 \\ y_k = x_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \langle x_k | e_j \rangle e_j, e_k = \dfrac{1}{\|f_k\|} f_k, (k = 2, \cdots, p) \end{cases}$$

Le calcul de $\|y_k\|$ peut être simplifié en écrivant que :

$$\|y_k\|^2 = \left\langle y_k | x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | e_j \rangle e_j \right\rangle$$

$$= \langle y_k | x_k \rangle = \left\langle x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | e_j \rangle e_j | x_k \right\rangle$$

$$= \|x_k\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k | e_j \rangle^2$$

(y_k est orthogonal à e_j pour $1 \leq j \leq k-1$). Les $\langle x_k | e_j \rangle$ étant déjà calculés (pour obtenir y_k),il suffit donc de calculer $\|x_k\|^2$. En fait le calcul de $\langle y_k | x_k \rangle$ est souvent plus rapide.

Corollaire : *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie ou infinie dénombrable de E, alors il existe une base orthonormée pour F.*

Si E est un espace euclidien de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ et on a pour tous vecteurs x, y dans E, en notant X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle \langle y | e_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^t XY$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Ces égalités sont des cas particuliers des égalités de Parseval valables de manière plus générale dans les espaces de Hilbert.

Théorème : *Si E est un espace euclidien de dimension n$\geq$ 1 , $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{B}' = (e_i')_{1 \leq i \leq n}$ sont deux bases orthonormées de E, alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est telle que $P^{-1} = {}^t P$. En particulier, on a det$(P) = \pm 1$.*

Démonstration. *Les colonnes de la matrice P sont formées des vecteurs colonnes $E_1', \cdots, E_n'$, où E_j' est la matrice de e_j' dans la base $\mathcal{B}$ et on a :*

$${}^t PP = \begin{pmatrix} {}^t E_1' \\ \vdots \\ {}^t E_n' \end{pmatrix} (E_1', \cdots, E_n') = (({}^t E_i' E_j'))_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$= ((\langle e_i^{'}|e_j^{'}\rangle))_{1\leq i,j\leq n} = ((\delta_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} = I_n$$

ce équivaut à dire que $P^{-1} = {}^tP$.
On a alors :

$$1 = det(I_n) = det({}^tPP) = det({}^tP)det(P) = det^2(P)$$

et $det(P) = \pm 1$.

Définition : *On appelle matrice orthogonale toute matrice réelle d'ordre n inversible telle que* $P^{-1} = {}^tP$.
La matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ *de E à une autre base orthonormée* $\mathcal{B}^{'}$ *est donc une matrice orthogonale et réciproquement une telle matrice est la matrice de passage d'une base orthonormée de E à une autre.*

Exercice : *Soient (E,* $\langle\cdot|\cdot\rangle$*) un espace euclidien et u un automorphisme de E.*

1. *Montrer que l'application :*
$$\varphi : (x, y) \longmapsto \langle u(x)|u(y)\rangle$$
définit un produit scalaire sur E.

2. *Dans le cas où E est de dimension finie, donner la matrice de* φ *dans une base orthonormée de E en fonction de celle de u.*

Solution :

1. *De la linéarité de u, on déduit que* φ *est bilinéaire symétrique.*
Pour $x \in E$, *on a* $\varphi(x, x) = \|u(x)\|^2 \geq 0$ *et* $\varphi(x, x) = 0$ *équivaut à* $x \in ker(u)$ *, soit à x = 0 puisque u est bijectif. Donc* φ *est un produit scalaire sur E.*

2. *Soit* $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ *une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Pour x, y dans E, on a :*
$$\varphi(x, y) = \langle u(x)|u(y)\rangle = {}^t(AX)(AY) = {}^tX({}^tAA)Y$$
et la matrice de φ *dans* $\mathcal{B}$ *est* ${}^tAA$.

Exercice : *Montrer que l'application* $(P, Q) \longmapsto \langle P|Q\rangle = \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t)dt$ *définit un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_2[x]$ *. Donner une base orthonormée.*

Solution : *La fonction* $t \longmapsto 2 - t$ *étant à valeurs strictement positives sur]0, 2[, il est facile de vérifier que* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ *est un produit scalaire.*
En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, on définit la base orthonormée $(P_i)_{0\leq i\leq 2}$ *par :*

$$\begin{cases} Q_0 = 1, \|Q_0\|^2 = \int_0^2 (2-t)dt = 2, P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ Q_1 = x - \langle x|P_0\rangle P_0 = x - \dfrac{2}{3}, \\ ||Q_1||^2 = \langle Q_1|Q_1\rangle = \dfrac{4}{9}, P_1 = \dfrac{3}{2}x - 1, \\ Q_2 = x^2 - \langle x^2|P_0\rangle P_0 - \langle x^2|P_1\rangle P_1 = x^2 - \dfrac{8}{5}x + \dfrac{2}{5}, \\ ||Q_2||^2 = \langle Q_2|Q_2\rangle = \dfrac{8}{75}, P_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{4}(5x^2 - 8x + 2) \end{cases}$$

Une base orthonormée de $R_2[x]$ est donc :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}x-1, \frac{\sqrt{6}}{4}(5x^2-8x+2)\right)$$

Exercice : *On note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :*

$$(P,Q) \longmapsto \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

1. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

2. *En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt , déduire de la base canonique $(1,\ X,\ X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, une base orthonormée de $\mathbb{R}_2\ [X]$.*

Solution :

1. *Pour tout entier naturel n, on note :*

$$T_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

La fonction à intégrer est positive et équivalente au voisinage de 1 à la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$, elle est donc intégrable sur [0,1] .
On a :

$$T_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

et pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^1 t^{2n-1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = (2n-1)\int_0^1 x^{2n-2}\sqrt{1-t^2}dt \\ &= (2n-1)\int_0^1 \frac{t^{2(n-1)}}{\sqrt{1-t^2}}(1-t^2)dx = (2n-1)(T_{n-1}-T_n). \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1, T_n = \frac{2n-1}{2n}T_{n-1}$$

et avec la valeurs initiale T_0, on déduit que :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2n}{2n}\frac{2n-1}{2(n)}\frac{2n-2}{2(n-1)}\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdots\frac{3}{4}\frac{2}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. On pose $Q_0 = 1$ *et on a*

$$||Q_0||^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi.$$

Donc :

$$P_0 = \frac{1}{||Q_0||} Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Puis $Q_1(X) = X - \lambda P_0$ *où* λ *est tel que* $\langle P_0 | Q_0 \rangle = 0$*, ce qui donne :*

$$\lambda = \langle P_0 | X \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$$

par parité. On a $Q_1\ (X) = X$ *et :*

$$||Q_1||^2 = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{2^2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$P_1 = \frac{1}{||Q_1||} Q_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} X.$$

Puis $Q_2(X) = X^2 - \lambda P_0 - \mu P_1$ *où* λ, μ *sont tels que* $\langle P_0 | Q_2 \rangle = \langle P_1 | Q_2 \rangle = 0$*, ce qui donne :*

$$\lambda = \langle P_0 | X^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et :

$$\mu = \langle P_1 | X^2 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$$

par parité. On a $Q_2(X) = X^2 - \lambda P_0 = X^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = X^2 - \frac{1}{2}$ *et :*

$$\begin{aligned} ||Q_2||^2 &= \langle Q_2 | X^2 - \lambda P_0 \rangle = \langle Q_2 | X^2 \rangle \\ &\int_{-1}^{1} \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{4!}{2^4 2^2}\pi - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Donc :

$$P_2 = \frac{1}{||Q_2||} Q_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2X^2 - 1).$$

Conclusion, une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ *est donnée par :*

$$(P_0, P_1, P_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} X, \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2X^2 - 1) \right)$$

Exercice : *Pour tout entier n positif ou nul, on note* $\pi_{2n}(x) = (x^2-1)^n$ *et* $R_n = \pi_{2n}^{(n)}$ *:*
On munit $E = \mathbb{R}[x]$ *du produit scalaire défini par :*

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

1. *Montrer que* R_n *est un polynôme de degré n de la parité de n.*

2. *Calculer, pour* $n \geq 1$ *, les coefficients de* x^n *et* x^{n-1} *dans* R_n*.*

3. *Montrer que, pour* $n \geq 1$ *, pour tout entier k compris entre 1 et n et tout* $P \in \mathbb{R}[x]$ *, on a :*

$$\int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(k)}(t)P(t)dt = -\int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(k-1)}(t)P^{'}(t)dt.$$

4. *Montrer que, pour* $n \geq 1$ *et tout polynôme* $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ *, on a* $\langle R_n|P\rangle = 0$*,*

5. *En déduire que la famille* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale dans E.*

6. *Calculer* $\|R_n\|$ *, pour tout entier n positif ou nul. Les polynômes* $P_n = \dfrac{1}{\|R_n\|}R_n$ *sont les polynômes de Legendre normalisés.*

Solution :

1. *Pour* $n = 0$ *on a* $R_0 = \pi_0 = 1$*. Pour* $n \geq 1$ *le polynôme :*

$$\pi_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k x^{2k}$$

est de degré 2n et sa dérivée d'ordre n :

$$R_n(x) = \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{(2k)!}{(2k-n)!} x^{2k-n}$$

est un polynôme de degré n.
Le polynôme π_{2n} *est pair donc sa dérivée d'ordre n,* R_n *est de la parité de n.*

2. *Le coefficient dominant de* R_n *est* $\beta_n^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!}$ *et le coefficient de* x^{n-1} *est nul du fait que* R_n *est de la parité de n.*

3. *Une intégration par parties donne, pour tout entier k compris entre 1 et n et tout* $P \in \mathbb{R}[x]$ *:*

$$\int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(k)}(t)P(t)dt = \left[\pi_{2n}^{(k-1)}(t)P(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(k-1)}(t)P^{'}(t)dt$$

Et utilisant le fait que -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme $\pi_{2n}(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ *, on a* $\pi_{2n}^{(k-1)}(\pm 1) = 0$ *de sorte que :*

$$\int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(k)}(t)P(t)dt = -\int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(k-1)}(t)P^{'}(t)dt.$$

4. *En effectuant n intégrations par parties, on obtient :*

$$\int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(n)}(t)P(t)dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \pi_{2n}(t)P^{(n)}(t)dt.$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *, on a* $P^{(n)} = 0$ *et :*

$$\langle R_n|P\rangle = \left\langle \pi_{2n}^{(n)}|P\right\rangle = \left\langle \pi_{2n}|P^{(n)}\right\rangle = 0.$$

5. *Chaque polynôme* R_k *étant de degré k, on déduit de la question précédente que* $\langle R_n|R_m\rangle = 0$ *pour* $0 \leq n < m$ *et par symétrie* $\langle R_n|R_m\rangle = 0$ *pour* $n \neq m$ *dans* $\mathbb{N}$. *La famille* $\{R_n|n \in \mathbb{N}\}$ *est donc orthogonal dans* $\mathbb{R}[x]$ *.*

6. *En utilisant **4**. on a :*

$$\|R_n\|^2 = \int_{-1}^{1} \pi_{2n}^{(n)}(t)R_n(t)dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} \pi_{2n}(t)R_n^{(n)}(t)dt$$
$$= (-1)^n\beta_n^{(n)}n!\int_{-1}^{1} \pi_{2n}(t)dt = (2n)!(-1)^n I_n.$$

où :

$$I_n = \int_{-1}^{1} \pi_{2n}(t)dt = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n dt.$$

Pour $n \geq 1$*, on a :*

$$I_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^{n-1}(t^2-1)dt = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^{n-1} t \cdot tdt - I_{n-1}$$

et une intégration par parties donne :

$$\int_{-1}^{1} (t^2-1)^{n-1} t \cdot tdt = \left[t\frac{1}{2n}(t^2-1)^n\right] - \int_{-1}^{1} \frac{1}{2n}(t^2-1)^n dt$$
$$= -\frac{1}{2n}I_n$$

soit la relation de récurrence :

$$I_n = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1}$$

soit $I_n = -\dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ *. Il en résulte que :*

$$I_n = (-1)^n \frac{(2n)(2(n-1))\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 1} I_0 = (-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} 2$$

et :

$$\|R_n\|^2 = (2n)! \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} 2 = \frac{2}{2n+1} 2^{2n}(n!)^2$$

Soit $\|R_n\| = 2^n n! \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$

6 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

$(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *est toujours un espace préhilbertien de dimension finie ou non.*

Théorème(projection orthogonale) : *Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E non réduit à* $\{0\}$ *. Pour tout vecteur* $x \in E$*, il existe un unique vecteur y dans F tel que :*

$$\|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

Ce vecteur est également l'unique vecteur appartenant à F tel que x - y $\in F^{\perp}$*.*
Son expression dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \le i \le n}$ *de F est donnée par :*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k$$

et on a :

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle^2. \tag{1}$$

Démonstration. *Soit* $(e_i)_{1 \le i \le n}$ *une base orthonormée de F (le théorème de Gram-Schmidt nous assure l'existence d'une telle base). Pour x dans E, on définit le vecteur* $y \in F$ *par :*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k$$

On a alors $\langle x - y|e_j\rangle$ *= 0 pour tout* $j \in \{1, \cdots, n\}$ *, c'est-à-dire que x - y* $\in F^{\perp}$*. Le théorème de Pythagore donne alors, pour tout* $z \in F$ *:*

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) + (y - z)\|^2$$

$$= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2.$$

et on a bien $\|x-y\| = d(x,F)$ *.*
S'il existe un autre vecteur $u \in F$ *tel que* $\|x-u\| = d(x, F) = \delta$*, de :*

$$\delta^2 = \|x-u\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-u\|^2 = \delta^2 + \|y-u\|^2.$$

on déduit alors que $\|y-u\| = 0$ *et* $y = u$*.*
On sait déjà que le vecteur $y \in F$ *est tel que* $x - y \in F^{\perp}$*. Supposons qu'il existe un autre vecteur* $u \in F$ *tel que* $x - u \in F^{\perp}$*, pour tout* $z \in F$*, on a alors :*

$$\|x-z\|^2 = \|(x-u)+(u-z)\|^2$$
$$= \|x-u\|^2 + \|u-z\|^2 \geq \|x-u\|^2.$$

donc $\|x-u\| = d(x, F)$ *et* $u = y$ *d'après ce qui précède.*
La dernière égalité se déduit de :

$$\|x\|^2 = \|(x-y)+y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y\|^2.$$

Si x *est un vecteur de* E*, alors le vecteur* y *de* F *qui lui est associé dans le théorème précédent est la meilleure approximation de* x *dans* F*. En considérant la caractérisation géométrique* $x - y \in F^{\perp}$ *, on dit aussi que* y *est la projection orthogonale de* x *sur* F *.*

On note $y = p_F(x)$ *. On a donc :*

$$(y = p_F(x)) \iff (y \in F \text{ et } x-y \in F^{\perp}) \iff (y \in F \text{ et } \|x-y\| = d(x,F))$$

et dans une base orthonormée de F*, une expression de* p_F *est :*

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k.$$

On dit que l'application p_F *est la projection orthogonale de* E *sur* F*.*

Remarque : *Si* $F = \{0\}$ *, on peut définir* p_F *et c'est l'application nulle. On suppose donc, a priori,* F *non réduit à* $\{0\}$ *.*
Dans le cas où E *est de dimension finie et* $F = E$*,* p_F *est l'application identité.*

Remarque : $p_F(x) = x$ *équivaut à dire que* $x \in F$ *et* $p_F(x) = 0$ *équivaut à dire que* $x \in F^{\perp}$*.*

Exemple : *Si* $D = \mathbb{R}a$ *est une droite vectorielle, une base orthonormée de* D *est* $\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)$ *et pour tout* $x \in E$*, on a* $p_D(x) = \frac{\langle x|a\rangle}{\|a\|^2}a$*.*
De l'inégalité (1) , on déduit que pour tout vecteur $x \in E$*, on a :*

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Cette inégalité est l'inégalité de Bessel .

Exercice : *On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ [x] du produit scalaire :*

$$(P, Q) \longmapsto \langle P|Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

1. *Justifier la convergence des intégrales $\langle P|Q\rangle$ pour tous P, Q dans $\mathbb{R}[x]$ et le fait qu'on a bien un produit scalaire.*

2. *Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[x]$.*

3. *Soit $P = 1 + x + x^3$. Déterminer $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $\|P - Q\|$ soit minimal.*

Solution :

1. *On vérifie par récurrence que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k!$$

et de ce résultat on déduit que l'application $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est bien définie sur $\mathbb{R}[x]$. On vérifie ensuite facilement que c'est un produit scalaire.

2. *En utilisant le procédé de Gram-Schmidt sur la base $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}_3[x]$, on a :*

$$\begin{cases} Q_0 = 1, \|Q_0\|^2 = 1, P_0 = \dfrac{Q_0}{\|Q_0\|} = 1 \\ P_1 = x - \langle x|P_0\rangle P_0 = x - 1, \|Q_1\|^2 = 1, P_1 = \dfrac{Q_1}{\|Q_1\|} = x - 1, \\ Q_2 = x^2 - \langle x^2|P_0\rangle P_0 - \langle x^2|P_1\rangle P_1 = x^2 - 4x + 2, \\ \|Q_2\|^2 = 4, P_2 = \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|} = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \\ Q_3 = x^3 - \langle x^3|P_0\rangle P_0 - \langle x^3|P_1\rangle P_1 - \langle x^3|P_2\rangle P_2 \\ = x^3 - 9x^2 + 18x - 6, \\ \|Q_3\|^2 = 36, P_3 = \dfrac{Q_3}{\|Q_3\|} = \dfrac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 18x - 6). \end{cases}$$

3. *Le polynôme Q est la projection orthogonale de P sur $F = \mathbb{R}_2[x]$ donnée par :*

$$Q = \sum_{k=0}^{2} \langle P|P_k\rangle P_k$$

Le calcul des $\langle P|P_k\rangle$ peut être évité en remarquant que dans la base orthonormée (P_0, P_1, P_2, P_3) de $E = \mathbb{R}_3$ [x] , on a :

$$P = \sum_{k=0}^{3} \langle P|P_k\rangle\ P_k = Q + \langle P|P_3\rangle\ P_3$$

le coefficient $\langle P|P_3\rangle$ s'obtenant en identifiant les coefficients de x^3 dans cette égalité (P est de degré 2 au plus), soit :

$$\langle P|P_3\rangle = 6$$

On a donc :

$$Q = P - \langle P|P_3\rangle\ P_3 = 9\ x^2 - 17\ x + 7$$

et :

$$d\ (P,\ \mathbb{R}_2[x]) = \|P-Q\| = |\langle P|P_3\rangle| = 6.$$

Il est parfois commode d'exprimer (1) sous la forme :

$$\inf_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n}\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\langle x|e_k\rangle^2.$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système orthonormé dans E et $x\in E$.

Exercice : *Calculer* $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(x^2-ax-b)^2dx$

Solution : *En munissant l'espace $E = C^0$ ([-1, 1]) du produit scalaire :*

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

on a :

$$M = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}(x^2-ax-b)^2dx = \inf_{Q\in\mathbb{R}_1[x]}\|f-Q\|^2$$

où $f\ (x) = x^2$. Le théorème de projection orthogonale donne :

$$M = \|f-P\|^2 = \|f\|^2-\|P\|^2$$

où P est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_1[x]$, soit $P = \langle f,P_0\rangle P_0+\langle f,P_1\rangle P_1$ où (P_0,P_1) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[x]$. Le procédé de Gram-Schmidt donne :

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},P_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$$

et on a :

$$\langle f,P_0\rangle = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}},\langle f,P_1\rangle = 0$$

donc :

$$p(x) = \frac{1}{3}$$

et :

$$M = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

Remarque : *Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base (non nécessairement orthonormée) de F, alors la projection orthogonale d'un vecteur x de E sur F est le vecteur $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, où les composantes y_j , pour j compris entre 1 et n, sont solutions du système linéaire :*

$$\langle x - y | e_i \rangle = 0 \ (1 \leq i \leq n),$$

soit :

$$\sum_{j=1}^{n} \langle e_i | e_j \rangle y_j = \langle x | e_i \rangle \ (1 \leq i \leq n),$$

Ce système est appelé système d'équations normales.
Pour l'exercice précédent, (1, x) est une base de $\mathbb{R}_1[x]$ et le système d'équations normales est :

$$\begin{cases} \langle 1|1\rangle y_1 + \langle 1|x\rangle y_2 = \langle x^2|1\rangle \\ \\ \langle x|1\rangle y_1 + \langle x|x\rangle y_2 = \langle x^2|x\rangle \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 2y_1 = \dfrac{2}{3} \\ \\ \dfrac{2}{3} y_2 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $y_1 = \dfrac{1}{3}$ et $y_2 = 0$, soit $P = \dfrac{1}{3}$ et $M = \|f\|^2$ - $\|P\|^2 = \dfrac{8}{45}$.

Exercice : *Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{-1}^{1} x^2(ln(x) - ax - b)^2 dx$.*

Solution : *On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1])$ du produit scalaire :*

$$(f,g) \longmapsto \langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

et on note f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & si \ x \in]0,1[\ , \\ 0 & si \ x = 0. \end{cases}$$

Avec $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\ln(x) = 0$, on déduit que $f \in E$.
Avec ces notations il s'agit donc de calculer :

$$\delta^2 = d(f,F)^2 = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|f - ax^2 - bx\|^2,$$

où $F = \text{Vect}\{x, x^2\}$. On sait que si (P_1, P_2) est une base orthonormée de F, alors :

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \|f - \langle f|P_1\rangle P_1 - \langle f|P_2\rangle P_2\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \langle f|P_1\rangle^2 - \langle f|P_2\rangle^2.\end{aligned}$$

Une telle base orthonormée s'obtient avec le procédé de Gram-Schmidt :

$$\begin{cases} P_1 = \sqrt{3}x, \\ P_2 = \sqrt{3}\,(4x^2 - 3x). \end{cases}$$

Puis avec :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \langle\, f \mid x^n \rangle = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x) dx = -\dfrac{1}{(n+2)^2}, \\ \|f\|^2 = \int_0^1 x^2 \ln^2(x) dx = \dfrac{2}{27}. \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \langle f \mid P_1 \rangle = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}, \\ \langle f \mid P_2 \rangle = -\dfrac{\sqrt{5}}{12} \end{cases}$$

et :

$$\delta^2 = \frac{1}{2^4 3^3} = \frac{1}{432}.$$

La projection orthogonale de f sur F étant donnée par :

$$P = \langle f|P_1\rangle P_1 + \langle f|P_2\rangle P_2 = \frac{5}{3}x^2 - \frac{19}{12}x.$$

On peut aussi déterminer cette projection orthogonale $P = ax^2 + bx$ en utilisant le système d'équations normales :

$$\begin{cases} \langle f - P \mid x \rangle = 0, \\ \langle f - P \mid x^2 \rangle = 0, \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} 3a + 4b = -\dfrac{4}{3}, \\ \\ 4a + 5b = -\dfrac{5}{4}, \end{cases}$$

ce qui donne $a = \dfrac{5}{3}$ et $b = -\dfrac{19}{12}$. Le minimum cherché est alors :

$$\delta^2 = \|f\|^2 - \|P\|^2 = \frac{2}{27} - \frac{31}{432} = \frac{1}{432}.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions continues et 2π-périodiques muni du produit scalaire :

$$(f, g) \longmapsto \langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

la meilleure approximation, pour la norme déduite de ce produit scalaire, d'une fonction $f \in \mathcal{F}$ par un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à n est donnée par :

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \left\langle f \mid \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f \mid \frac{c_k}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{c_k}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f \mid \frac{s_k}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{s_k}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle f \mid c_0 \rangle c_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \langle f \mid c_k \rangle c_k + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \langle f \mid s_k \rangle \, s_k \end{aligned}$$

où $c_k : x \longmapsto \cos(kx)$ pour $k \geq 0$ et $s_k : x \longmapsto \sin(kx)$ pour $k \geq 1$. Soit :

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f) \sin(kx)$$

où les $a_k(f)$ et $b_k(f)$ sont les coefficients de Fourier trigonométriques de f définis par :

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \text{ et } b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

L'opérateur S_n de projection orthogonale de $\mathcal{F}$ sur l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n est l'opérateur de Fourier.
La série :

$$a_0(f) + \sum (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

est la série de Fourier de f.
L'inégalité de Bessel s'écrit :

$$\left\langle f \mid \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f \mid \frac{c_k}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \left\langle f \mid \frac{s_k}{\sqrt{\pi}} \right\rangle^2 \leq \|f\|^2$$

ou encore :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt$$

Il en résulte que la série numérique $a_0^2(f) + \frac{1}{2} \sum (a_n^2(f) + b_n^2(f))$ converge avec :

$$\frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_n^2(f) + b_n^2(f)) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt$$

(théorème de Bessel).
On peut monter qu'on a fait l'égalité (théorème de Parseval).

De l'inégalité de Bessel, on déduit que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n(f) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n(f) = 0$ (théorème de Riemann-Lebesgue).

Exemple : *Si $f \in \mathcal{F}$ est la fonction 2π-périodique, paire valant $x(\pi$ - $x)$ sur $[0, \pi]$, on a b_n (f) = 0 pour tout $n \geq 1$ puisque f est paire et :*

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)dt = \frac{\pi^2}{3}$$
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos(nt)dt$$
$$= -\frac{2}{n^2}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 0 & si\ n = 2p + 1 \\ -\dfrac{1}{p^2} & si\ n = 2p \end{cases}$$

pour n≥1
L'identité de Parseval nous donne :

$$\frac{\pi^4}{18} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2(\pi - t)^2 dt = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Du théorème de projection orthogonale, on déduit le résultat suivant valable en dimension finie.

Corollaire : *Pour tout sous espace vectoriel F de dimension finie de E on a $E = F \oplus F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$.*

Démonstration. *Pour tout $x \in F \cap F^{\perp}$, on a $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle = 0$ et $x = 0$. Donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Soit $x \in E$ et $y \in F$ sa projection orthogonale dans F. On a x - $y \in F^{\perp}$ et $x = y + (x$ - $y) \in F + F^{\perp}$. D'où l'égalité $E = F \oplus F^{\perp}$.*
Il en résulte que $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$. On a donc $\dim\left((F^{\perp})^{\perp}\right) = dim(F)$ et avec l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$, on déduit qu'on a l'égalité.

Remarque : *Pour F de dimension infinie, on a toujours $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ mais pas nécessairement $E = F \oplus F^{\perp}$, ni même $(F^{\perp})^{\perp} = F$. On considère par exemple l'espace vectoriel $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour $F = \mathbb{R}[x]$, du théorème de Weierstrass on déduit que $F^{\perp} = \{0\}$ et pourtant on a $E \neq F \oplus F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = E \neq F$.*
Avec le théorème qui suit, on donne les principales propriétés des projections orthogonales.

Théorème (*) : *Soit F un sous espace vectoriel de dimension finie de E.*

1. *Pour $x \in E$, on a $x \in F$ si, et seulement si, $p_F(x) = x$.*

2. *$p_F \circ p_F = p_F$.*

3. *La projection orthogonale p_F de E sur F est une application linéaire surjective de E sur F.*

4. *Le noyau de p_F est $F^{\perp}$.*

5. *Pour tous x, y dans E, on a :*
$$\langle\ p_F(x)\ /\ y\ \rangle\ =\langle\ x\ /\ p_F\ (y)\ \rangle\ =\langle\ p_F(x)\ /\ p_F\ (y)\rangle$$
(on dit que p_F est auto-adjoint).

6. *Pour E de dimension finie, on a $p_F + p_{F^\perp} = Id$.*

7. *Pour E de dimension finie, on a $p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$.*

Démonstration.

1. *Si $x = p_F(x)$, on a alors $x \in F$. Réciproquement si $x \in F$, avec $x - x = 0 \in F^{\perp}$, on déduit que $p_F\ (x) = x$.*

2. *Résulte de $p_F(x) = x$ pour tout $x \in F$.*

3. *Si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de F, on a alors*
$$\forall\ x \in E,\ p_F\ (x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k$$
et p_F est linéaire puisque chaque application $x \longmapsto \langle x|e_k\rangle e_k$ est linéaire.
L'égalité $p_F(x) = x$ pour tout $x \in F$ nous dit en particulier que p_F est surjective de E sur F.

4. *Si $x \in \ker\ (p_F\ )$, on a $p_F\ (x) = 0$ et $x = x - p_F\ (x) \in F^{\perp}$. Réciproquement si $x = x - 0 \in F^{\perp}$, on a $p_F\ (x) = 0$ puisque $0 \in F$.*

5. *Pour x, y dans E, on a $p_F\ (x) \in F$ et$y - p_F(y) \in F^{\perp}$, donc :*
$$\langle p_F(x)|y\rangle = \langle p_F(x)|y - p_F(y) + p_F(y)\rangle = \langle p_F(x)|p_F(y)\rangle$$
l'expression $\langle p_F(x)|p_F(y)\rangle$ étant symétrique en x, y. Il en résulte que $\langle p_F(x)|y\rangle = \langle x|p_F(y)\rangle$.
En utilisant une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de F on peut aussi écrire que $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle e_k$; $p_F(y) = \sum_{k=1}^{n} \langle y|e_k\rangle e_k$ et :
$$\langle p_F(x)|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle\langle y|e_k\rangle = \langle x|p_F(y)\rangle = \langle p_F(x)|p_F(y)\rangle.$$

6. *Dans $E = F \oplus F^{\perp}$, on a les deux écritures :*
$$x = (x - p_F(x)) + p_F(x) = (x - p_{F^\perp}(x)) + p_{F^\perp}(x)$$
avec $(p_F(x), x - p_F(x))$ et $(x - p_{F^\perp}(x), p_{F^\perp}(x))$ dans $F \times F^{\perp}$, ce qui entraîne $x - p_F\ (x) = p_{F^\perp}(x)$ du fait de l'unicité de l'écriture dans une somme directe. On a donc bien $p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x$ pour tout $x \in E$.

7. *On en déduit que :*
$$p_F(x - p_{F^\perp}(x)) = p_F(p_F(x)) = p_F(x)$$
et $p_F(p_{F^\perp}(x)) = 0$. L'égalité $p_{F^\perp} \circ p_F = 0$ se montre de manière analogue.

Exercice : *On suppose que E est euclidien et on se donne une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E.*

1. *Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur la droite $D = \mathbb{R}a$ engendrée par un vecteur non nul a.*

2. *Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur un hyperplan H de E dans $\mathcal{B}$.*

Solution :

1. *Par définition de p_D, on a, pour tout $x \in E$, $p_D(x) = \dfrac{\langle x|a\rangle}{\|a\|^2}a$. En écrivant que $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$, on a, pour tout j compris entre 1 et n :*

$$p_D(e_j) = \frac{\langle e_j|a\rangle}{\|a\|^2}a = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_j}{\|a\|^2} e_i$$

   et la matrice A de p_D dans $\mathcal{B}$ est $A = \left(\left(\dfrac{a_i a_j}{\|a\|^2}\right)\right)_{1\le i,j\le n}$, ce qui peut aussi s'écrire $A = \dfrac{1}{\|a\|^2} C\,{}^tC$, où C est le vecteur colonne formé des composantes de a dans $\mathcal{B}$.

2. *On a $H = \{a\}^{\perp} = (\mathbb{R}a)^{\perp}$ avec $a \neq 0$ et pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \dfrac{\langle x|a\rangle}{\|a\|^2}a$. La matrice de p_H dans $\mathcal{B}$ est donc :*

$$B = I_n - A = I_n - \frac{1}{\|a\|^2} C\,{}^tC = \left(\left(\delta_{ij} - \frac{a_i a_j}{\|a\|^2}\right)\right)_{1\le i,j\le n}$$

6.1 Caractérisation des projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien

On rappelle que, sur un espace vectoriel E, un projecteur est une application linéaire p de E dans E telle que $p \circ p = p$.
Il est facile de vérifier que si p est un projecteur de E, alors ker (p) et Im (p) sont en somme directe et pour tout x = y + z avec (y, z) $\in$ ker (p) $\times$ Im (p) , on a p (x) = y.
En effet, si x $\in$ ker (p) $\cap$ Im (p) , on a x = p (y) et $0 = p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$, donc ker (p) $\cap Im(p) = \{0\}$ et tout x $\in$ E s'écrit x = x - p (x) + p (x) avec x - p (x) $\in$ ker (p) et p (x) $\in$ Im (p) , donc E = ker (p) + Im (p) . On a donc bien E = ker (p) $\oplus$ Im (p) et pour tout x = y + z $\in$ E avec (y, z) $\in$ ker (p) $\times$ Im (p) , on a p (x) = p (y) + p (z) = p (z) = z.
On dit que p est le projecteur sur F = Im (p) parallèlement à ker (p) . Réciproquement si E = F $\oplus$ G, l'application qui associe à x = y + z, où (y, z) $\in$ F $\times$ G, le vecteur y est un projecteur sur F parallèlement à G.
*Les projecteurs orthogonaux sont des cas particuliers de projecteurs. Ce sont en fait les projecteurs de E caractérisés par la propriété **5.** du théorème $(*)$ ou par $\|p(x)\| \le \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Théorème : *Soit p un projecteur d'un espace euclidien E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *p est un projecteur orthogonal;*

2. pour tous x, y dans E, on a : $\langle p(x)|y\rangle = \langle x|p(y)\rangle$ *;*

3. pour tout $x \in E$*, on a* $\|p(x)\| \leq \|x\|$ *.*

Démonstration. *Si* $p = p_F$ *est un projecteur orthogonal, on sait déjà qu'il est autoadjoint, c'est-à-dire que* ***1.*** *implique* ***2.***
Si p est un projecteur qui vérifie ***2.*** *on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout x* $\in E$ *:*

$$\begin{aligned}\|p(x)\|^2 &= \langle p(x)|p(x)\rangle = \langle x|p(p(x))\rangle \\ &= \langle x|p(x)\rangle \leq \|x\|\|p(x)\|\end{aligned}$$

et $\|p(x)\| \leq \|x\|$ *pour* $x \neq 0$*, l'égalité étant réalisée pour x=0.*
Supposons que p soit un projecteur vérifiant ***3.*** *On a E = ker(p)* $\oplus$ *Im (p) et si p est un projecteur orthogonal sur F, on a nécessairement ker (p) =* $F^\perp$ *et Im(p) = F = (ker (p))*$^\perp$ *. Réciproquement si Im (p) = (ker (p))*$^\perp$ *, on a alors pour tout* $x \in E$*, p(x)* $\in$ *F = Im (p) et x - p (x)* $\in$ *ker (p) =* $F^\perp$*, ce qui signifie que p (x) est le projeté orthogonal de x sur F. Il s'agit donc de montrer que Im (p) = (ker (p))*$^\perp$ *. Pour* $x \in$ *ker (p) et* $y \in$ *Im (p) , en notant* $z = y - \lambda x$ *où* λ *est un réel, on a p (z) = p (y) = y et :*

$$\|y\|^2 = \|p(z)\|^2 \leq \|z\|^2 = \|y\|^2 - 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2\|x\|^2$$

soit :

$$\lambda(\lambda\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle) \geq 0$$

ce qui entraîne $\lambda\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle \geq 0$ *pour* $\lambda > 0$ *et* $\lambda\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle \leq 0$ *pour* $\lambda < 0$*. Faisant tendre* λ *vers 0 par valeurs positives et négatives respectivement, on obtient* $\langle x|y\rangle \leq 0$ *et* $\langle x|y\rangle \geq 0$*, soit* $\langle x|y\rangle = 0$ *. Le projecteur p est donc un projecteur orthogonal.*

6.2 Réduction des matrices symétriques réelles

Pour ce paragraphe, $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *désigne un espace euclidien de dimension n≥1 et* $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une base orthonormée de E.*

Définition : *On dit qu'un endomorphisme u de E est symétrique si :*

$$\forall (x, y) \in E \times E, \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle.$$

Théorème : *Un endomorphisme u de E est symétrique si, et seulement si, sa matrice A dans la base orthonormée* $\mathcal{B}$ *de E est symétrique.*

Exemple : *Un projecteur orthogonal est un endomorphisme symétrique et on a vu que réciproquement si un projecteur est symétrique, c'est alors un projecteur orthogonal .*

Définition : *Si u est un endomorphisme de E, on dit qu'un réel* λ *est valeur propre de u si l'endomorphisme u -* λ*Id n'est pas inversible.*
Dire que u - λ*Id n'est pas inversible équivaut à dire que son noyau ker (u -* λ*Id) n'est pas réduit à* $\{0\}$ *, ce qui équivaut à dire qu'il existe un vecteur x≠0 tel que u (x)=*λ*x. Il est encore équivalent de dire que det (u -* λ*Id)* $\neq$ *0.*

Les valeurs propres de u sont donc les racines du polynôme P_u (λ) = det (u - λId) . Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de u.
Comme P_u est de degré n, l'endomorphisme u a au plus n valeurs propres réelles.
Pour toute valeur propre réelle λ d'un endomorphisme u de E, le sous-espace vectoriel E_λ=ker (u - λId) est appelé l'espace propre associé à la valeur propre λ.
En désignant par A la matrice de u dans une base de u, on a det (u - λId) = det (A - λI_n) .
Le polynôme P_A (λ) = det (A - λIn) est appelé polynôme caractéristique de A et les racines de ce polynôme (réelles ou complexes) sont appelées les valeurs propres de A.

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a P_A $(\lambda) = \lambda^2$ + 1 qui n'a pas de racines réelles, mais a deux racines complexes i et $-i$.

Théorème : *Si u est un endomorphisme symétrique de E, alors son polynôme caractéristique a n racines réelles distinctes ou confondues.*

Corollaire : *Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.*

Théorème : *Soient u un endomorphisme symétrique de E, λ, μ deux valeurs propres (réelles) distinctes de u et E_λ, E_μ les espaces propres associés. Pour tout $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$, on as $\langle x|y \rangle = 0$. C'est-à-dire que les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de u sont orthogonaux.*

Théorème : *Si u un endomorphisme symétrique de E, il existe alors une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Corollaire : *Si A est une matrice symétrique réelle d'ordre n, il existe alors une matrice inversible P telle que $P^{-1}= {}^tP$ (une telle matrice est dite orthogonale) et $P^{-1}AP = {}^tPAP$ est une matrice diagonale.*

Ce corollaire s'exprime en disant que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Corollaire : *Si q une forme quadratique sur E, il existe alors une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de q est diagonale.*

On retrouve ainsi le théorème de réduction de Gauss relatif aux formes quadratiques réelles.

Bibliographie.

[1] *Applications Bilinéaires et Formes Quadratiques par* Alain Prouté Université Denis Diderot | Paris 7.

[2] *espaces préhilbertiens réels - Mathématiques en MPSI à Corot - Free ;* laurentb.garcin.free.fr,espaces Euclidiens.

[3]*www.les-mathematiques.net > node2.*

[4]*https ://fr.m.wikiversity.org>wiki>Espaces préhilbertien .*

[5]*www-math.univ-poitiers.fr>hilhert*

[6]*Espaces préhilbertiens.* https :// www-fourier.ujf-grenoble.fr>Capes