

**Université Sidi Mohamed Ben Abdellah**  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES-FÈS  
Département de Mathématiques  
LICENCE SCIENCES MATHÉMATIQUES ET  
APPLICATIONS

## **PROJET DE FIN D'ÉTUDES :**

---

**La Réduction de Jordan et La Décomposition  
de Dunford**

---

**Réalisé par :**  
AMRANI ZERRIFI SALOUA

**Encadré par :**  
Mr NAJIB MAHDOU

**Soutenu le :**  
11 juin 2016

**Devant le jury :**

Pr : Anisse Ouadghiri  
Pr : Aziza Hassani Rahmouni

**Année universitaire :** 2015-2016

# Dédicace

Je dédie ce travail à la mémoire de mon père, aussi à vos ma chère mère car ce modeste travail n'est que le fruit de vos interminables conseils, assistance et soutien moral, et du magnifique modèle de labeur et de persévérance que vous m'avez inspiré depuis toujours, finalement j'espère que vous trouverez dans ce travail un témoignage de ma reconnaissance et de mon affectation, dans l'espoir que vous en serez fiers.

# Remerciements

Je remercie particulièrement le professeur NAJIB MAHDOU pour le temps qu'il m'a consacré et pour ces précieuses directives qui m'ont été d'un apport considérable pour l'accomplissement de ce travail.

Je tiens à remercier aussi les professeurs : Anisse Ouadghiri et Aziza Hassani Rahmouni de faire partie du jury.

J'adresse également mes sincères remerciements à tous les professeurs du département de mathématique de la faculté des sciences et de techniques de Fès pour les efforts considérables qu'ils fournissent pour notre formation.

Mes remerciements vont enfin à toute personne qui a contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de ce travail.

ET POUR FINIR, merci, mille fois merci !

# Table des matières

Introduction . . . . .	5
<b>1 Quelques rappels</b>	<b>7</b>
1.1 Le lemme de décomposition des noyaux : . . . . .	7
1.1.1 Lemme : . . . . .	7
1.2 La dualité en dimension finie : . . . . .	8
1.2.1 Lemme : . . . . .	9
1.3 Polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton et polynôme minimale : . . . . .	10
1.3.1 Définition ( Polynôme Caractéristique) : . . . . .	10
1.3.2 Théorème ( Cayley Hamilton) : . . . . .	10
1.3.3 Remarque : . . . . .	11
1.3.4 Polynôme minimale : . . . . .	11
1.4 Le rang d'une matrice : . . . . .	12
1.4.1 Définition : . . . . .	12
1.4.2 Théorème : . . . . .	12
1.5 Une famille de matrices non diagonalisables : les matrices nil- potentes. . . . .	13
1.5.1 Théorème : . . . . .	13
<b>2 La réduction de jordan d'une matrice</b>	<b>14</b>
2.1 Réduction de jordan pour les matrices nilpotentes : . . . . .	14
2.1.1 Théorème : . . . . .	14
2.1.2 Remarque : . . . . .	16
2.2 Réduction de jordan pour des matrices quelconques : . . . . .	17
2.2.1 Théorème : . . . . .	17
2.3 Réduction de jordan réelle : . . . . .	19
2.3.1 Théorème : . . . . .	19
2.3.2 Lemme : . . . . .	20
2.4 Calcul de la matrice de jordan d'une matrice donnée : . . . . .	20
2.4.1 Exemple 1 : . . . . .	21
2.4.2 Exemple 2 : . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Décomposition de dunford pour les matrices</b>	<b>25</b>
3.1	Théorème de décomposition de dunford : . . . . .	25
3.1.1	Théorème : . . . . .	25
3.1.2	Exemple 1 : Matrice ayant une seule valeur propre. . .	26
3.1.3	Solution : . . . . .	26
3.1.4	Exemple 2 : Matrice triangulaire supérieure . . . . .	27
3.1.5	Solution : . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>29</b>
4.1	Quelque propriétés algébriques : . . . . .	29
4.2	Suites récurrentes linéaires à coefficients constants : . . . . .	29
4.2.1	Proposition : . . . . .	31
4.2.2	Exemple 1 : . . . . .	31
4.2.3	Exemple 2 : . . . . .	31
4.3	Équations différentielles linéaires à coefficients constants : . .	31
4.3.1	Théorème : . . . . .	32
4.3.2	Exemple 1 : . . . . .	32
4.3.3	Solution : . . . . .	33
4.3.4	Exemple 2 : . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Introduction

La réduction d'une matrice  $A$  consiste à trouver une matrice  $B$  semblable à  $A$  et ayant une forme simple, de préférence la plus simple que possible.

De manière générale cette matrice  $B$  peut être choisie triangulaire (on parle alors de la triangulation de matrice  $A$ ), voire même diagonale (on parle de diagonalisation).

Nous allons voir dans ce projet de fin d'étude, que quand  $B$  ne peut pas être choisie diagonale (c'est-à-dire quand  $A$  n'est pas diagonalisable), qu'en on peut néanmoins la choisir Comme étant une matrice triangulaire supérieure comportant quelques termes égaux à 1 au-dessus de la diagonale et 0 partout ailleurs (on parle de réduction de Jordan ou de Jordanisation).

Les outils d'enveloppes ici concernent divers aspects fondamentaux de l'algèbre linéaire : polynômes d'endomorphismes, dualité en dimension finie, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal, rang d'une matrice, matrices par blocs, décomposition de Dunford. à ce titre, mais aussi par ses multiples applications à l'analyse.

# Chapitre 1

## Quelques rappels

On rappelle ici les résultats essentiels qui vont être utiles pour l'obtention de la réduite de Jordan d'une matrice et la décomposition de Dunford. Les démonstrations données permettent de se familiariser avec les notions de polynôme d'endomorphisme et de crochet de dualité, polynôme caractéristique, polynôme minimal, rang d'une matrice et une famille de matrices non diagonalisables.

### 1.1 Le lemme de décomposition des noyaux :

#### 1.1.1 Lemme :

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme et  $P_1, \dots, P_k$  des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ , deux-à-deux premiers entre-eux. On note  $P$  le polynôme produit  $\prod P_i$ , alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^k P_i(u).$$

#### Preuve :

On note  $Q_i$  le polynôme  $P/P_i = \prod_{j \neq i} P_j$ ; les polynômes  $(Q_i)_{1 \leq i \leq k}$  sont premiers entre-eux dans leur ensemble. On peut donc écrire une relation de Bézout : il existe  $V_1, \dots, V_k$  vérifiant

$$(1) \quad V_1 Q_1 + \dots + V_k Q_k = 1.$$

Montrons tout d'abord que les sous-espaces  $F_i = \ker P_i(u)$  sont en somme directe : soit  $(x_1, \dots, x_k) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k$  tel que  $x_1 + \dots + x_k = 0$ . En appliquant l'endomorphisme  $Q_i(u)$  à cette égalité, il vient  $Q_i(u)(x_i) = 0$ , puisque pour  $j \neq i$ , le facteur  $P_j$  apparaît dans le polynôme  $Q_i$ . D'autre part,

la relation de Bézout (1) appliquée à l'endomorphisme  $u$ , et évaluée ensuite en  $x_i$ , ne fait plus intervenir que le terme d'indice  $i$  (les autres s'annulant car  $P_i$  divise chaque  $Q_j$  pour  $j \neq i$ ) :

$$V_i(u) \circ Q_i(u)(x_i) = x_i.$$

qui implique  $x_i = 0$ . On note alors  $F = \bigoplus \ker P_i(u)$ .

Il est clair que  $F$  est inclus dans  $\ker P(u)$  car chaque  $P_i$  divise  $P$ . Réciproquement, soit  $x \in \ker P(u)$  : d'après (1), on peut écrire

$$x = x_1 + \dots + x_k, \quad \text{avec} \quad x_i = V_i(u) \circ Q_i(u)(x).$$

Il suffit alors de vérifier que  $x_i \in \ker P_i(u)$ , ce qui résulte de l'identité  $P = P_i Q_i$  (on utilise le fait que les polynômes d'un même endomorphisme commutent).

Le résultat précédent s'avère très utile pour "dévisser" un endomorphisme (si on peut se permettre cette expression, généralement réservée aux groupes) : supposons que  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors  $\ker P(u) = E$  si bien qu'on obtient une décomposition de l'espace tout-entier en sous-espaces stables par  $u$ . un cas d'utilisation fréquent consiste à choisir  $P = \chi_u$ , polynôme caractéristique de  $u$  dans le cas où ce dernier est scindé sur  $\mathbb{k}$  : on obtient la décomposition en sous-espaces caractéristiques (voir la démonstration du 2<sup>ème</sup> théorème chapitre 2).

## 1.2 La dualité en dimension finie :

Un ingrédient essentiel de la démonstration de la réduction de Jordan est la construction d'un supplémentaire stable par dualité. On rappelle donc ici les notions fondamentales de dualité dans le cadre de la dimension finie.

On désigne par  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$  :

$$E^* = \{\varphi : E \longrightarrow \mathbb{k}, \text{ linéaire}\},$$

l'ensemble  $E^*$  est un espace vectoriel de même dimension que  $E$ . Pour  $x \in E$  et  $\varphi \in E^*$ , on notera

$$\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

Cette notation, appelée "crochet de dualité" présente deux avantages : le premier est de coïncider avec celle du produit scalaire si  $E$  dispose d'une structure euclidienne. le second réside dans la facilité d'utilisation de l'endomorphisme transposé : pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on définit son endomorphisme transposé (ou adjoint)  $u^\top$  (noté aussi  $u^*$ ) par

$$\forall x \in E \quad \forall \varphi \in E^* \quad \langle x, u^\top(\varphi) \rangle = \langle u(x), \varphi \rangle.$$



Cette écriture est plus commode que l'écriture fonctionnelle équivalente :  
 $u^\top(\varphi)(x) = \varphi(u(x))$ .

Rappelons aussi la définition de l'orthogonal d'une partie  $A$  de  $E$  :

$$A^\perp = \{\varphi \in E^*; \forall x \in A \quad \langle x, \varphi \rangle = 0\}.$$

De manière duale, on définit l'orthogonal (ou polaire)  $\Gamma^\perp$  d'une partie de  $E^*$ . Les ensembles  $A^\perp$  et  $\Gamma^\perp$  sont des sous-espaces vectoriels (respectivement de  $E^*$  et  $E$ ). Si, de plus,  $A$  et  $\Gamma$  possèdent des structures vectorielles, on a

$$\begin{aligned} \dim(A^\perp) &= n - \dim(A) \text{ et } \dim(\Gamma^\perp) = n - \dim(\Gamma) \\ (A^\perp)^\perp &= A \text{ et } (\Gamma^\perp)^\perp = \Gamma \end{aligned}$$

Enfin, on énonce un résultat simple – mais essentiel – qui constitue le moteur de la démonstration du 1 ère théorème (chapitre 2) :

### 1.2.1 Lemme :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\Gamma$  un sous-espace de  $E^*$ , stable par  $u^\top$ . Alors  $\Gamma^\perp$  est stable par  $u$ .

#### Preuve :

Soit  $x \in \Gamma^\perp$ ; vérifions que  $u(x)$  est encore dans  $\Gamma^\perp$ . Soit donc  $\varphi \in \Gamma$ , on évalue le crochet

$$\langle u(x), \varphi \rangle = \langle x, u^\top(\varphi) \rangle = 0$$

car  $u^\top(\varphi) \in \Gamma$  par stabilité de  $\Gamma$  à travers  $u^\top$ .

### 1.3 Polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton et polynôme minimale :

#### 1.3.1 Définition ( Polynôme Caractéristique) :

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
 On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

Où les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de  $\chi_A(X)$  de A.

#### 1.3.2 Théorème ( Cayley Hamilton) :

Pour tout endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie et toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tels que leurs polynômes caractéristiques soient scindés, on a :

$$\chi_u(u) = 0, \quad \chi_A(A) = 0$$

**Preuve :**

Soit  $\chi_u(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n)$ , on a :

$$\chi_u(u) = (-1)^n(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_n \text{id}_E).$$

Soit  $(e_i)_{i=1,\dots,n}$  une base de  $E$  telle que la matrice de  $u$  par rapport à cette base soit triangulaire supérieure :

$$\text{Mat}(u, (e_i)_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarquons que  $u(e_i) - \lambda_i e_i \in [e_1, \dots, e_{i-1}]$  pour tout  $i = 2, \dots, n$ . montrons que  $(u - \lambda_1 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_i \text{id}_E)$  annule  $(e_1, \dots, e_i)$  par récurrence sur  $i$ .

Pour  $i = 1$  c'est clair.

Supposons  $i > 1$  et que  $(u - \lambda_1 id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_{i-1} id_E)$  annule  $(e_1, \dots, e_{i-1})$ . puisque les  $(u - \lambda_k id_E)$  commutent deux à deux  $(u - \lambda_1 id_E) \circ \dots \circ (u - \lambda_i id_E)$  annule  $(e_1, \dots, e_{i-1})$ . il annule donc aussi  $\{e_i\}$  puisque  $(u - \lambda_i id_E)(e_i) \in [e_1, \dots, e_{i-1}]$ .

On en déduit le théorème car  $\chi_u(u)$  annule une base de  $E$ .

### 1.3.3 Remarque :

Le théorème de Cayley-Hamilton reste vrai même si le polynôme caractéristique de  $A$  (ou de  $u$ ) n'est pas scindé.

En effet :

On démontre que  $\mathbb{k}$  est un sous corps d'un corps algébriquement clos  $L$  (comme pour  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ), donc  $\chi_A(X)$  est scindé comme polynôme de  $L[X]$ , d'où  $\chi_A(A) = 0$ .

### 1.3.4 Polynôme minimale :

soient  $E$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension fini non nul et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . le théorème de Cayley-Hamilton montre que  $\chi_u(u) = 0$ , où  $\chi_u$  est le polynôme caractéristique de  $u$ . soit  $I = \{\chi \in \mathbb{k}[X] \mid \chi(u) = 0\}$ .  $I$  est un idéal de  $\mathbb{k}[X]$  qui est un anneau principal, donc  $I$  est engendré par un polynôme c-à-d  $\exists! p_u \in \mathbb{k}[X]$  unitaire tel que :  $I = p_u \mathbb{k}[X]$ .

Le polynôme  $p_u$  est appelé polynôme minimale de  $u$  et il vérifie pour tout  $\chi \in \mathbb{k}[X]$  tel que :

$$\chi(u) = 0 \implies p_u \mid \chi$$

En particulier on a :  $p_u \mid \chi_u$

## 1.4 Le rang d'une matrice :

### 1.4.1 Définition :

On appelle rang d'une matrice  $M$ , noté  $rg(M)$ , le rang du système de ses vecteurs colonnes.

### 1.4.2 Théorème :

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ , soit  $F$  un  $\mathbb{k}$  espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$ , alors  $rg(M) = rg(v_1, \dots, v_p)$  où

$$v_k = \sum_{i=1}^n m_{i,k} f_i; \quad 1 \leq k \leq p.$$

### Preuve :

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{k}^n$ .

$$\phi : \mathbb{k}^n \longrightarrow F$$

$e_k \longrightarrow f_k$  est un isomorphisme,

donc  $rg(v_1, \dots, v_p) = rg(\phi(v_1), \dots, \phi(v_p)) = rg(u_1, \dots, u_p)$

Où

$$u_k = \sum_{i=1}^n m_{i,k} e_i \quad 1 \leq k \leq p.$$

## 1.5 Une famille de matrices non diagonalisables : les matrices nilpotentes.

### 1.5.1 Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$  une matrice nilpotente mais non nulle. Alors

1.  $A$  est singulière.
2.  $sp_k(A) = \{0\}$  avec  $sp_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{k} \mid \chi_A(\lambda) = 0\}$  l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .
3.  $p_A(X) = X^m$  avec  $2 \leq m \leq n$ .
4.  $A$  n'est pas diagonalisable.
5. Toute matrice semblable à  $A$  est nilpotente aussi.

### Preuve :

Soit  $k \geq 2$  tel que  $A^k = 0$ . puisque  $\det(A^k) = \det(A)^k$ , on en déduit que  $\det(A) = 0$ .  $A$  est donc singulière et  $0 \in sp_k(A)$ . De plus, si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ ,  $\lambda^k$  est valeur propre de  $A^k = 0$ . Donc  $\lambda = 0$ . On en déduit que  $sp_k(A) = \{0\}$ . Le polynôme minimal  $p_A$  divise le polynôme  $X^k$ , car ce dernier s'annule en  $A$ . Donc  $p_A$  est de la forme  $X^m$  avec  $2 \leq m \leq k$  ( $m \neq 1$ , sinon  $A = p_A = 0$ ). Comme  $p_A$  est scindé mais pas à racines simples,  $A$  n'est pas diagonalisable.

Enfin, si  $A' = PAP^{-1}$  est une matrice semblable à  $A$ , alors  $(A')^k = PA^kP^{-1}$ .

## Chapitre 2

# La réduction de jordan d'une matrice

Dans toute la suite,  $E$  désigne un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $\mathbb{k}$  (le plus souvent  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

### 2.1 Réduction de jordan pour les matrices nilpotentes :

#### 2.1.1 Théorème :

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(K)$  une matrice nilpotente. Alors  $N$  est semblable à la matrice  $\mathcal{J}$ , qui s'écrit par blocs

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_s \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices  $J_i$  sont appelées "blocs de Jordan nilpotent".

#### Preuve :

On procède par récurrence sur  $n$ , taille de la matrice  $N$ . Pour  $n = 1$ , le résultat est évident, puisqu'une matrice mono-dimensionnelle nilpotente est nécessairement nulle.

Supposons le résultat acquis pour toute matrice nilpotente de taille strictement inférieure à  $n$ . Soit alors  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$  nilpotente; on note  $u \in \mathcal{L}(E)$  l'endomorphisme qui lui est associé via la base canonique de  $\mathbb{k}^n$ .

Si l'endomorphisme  $u$  est nul, le résultat est évident, sinon notons  $k > 1$

l'ordre de nilpotence de  $u$ , i.e.  $u^{k-1} \neq 0$  et  $u^k = 0$ . Soit alors  $x \notin \ker u^{k-1}$  et  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$F = Vect(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)).$$

Montrons que la dimension de  $F$  est exactement  $k$  (ce qui impliquera en particulier que  $k \leq n$ ), cela revient à prouver que la famille  $x, u(x), u^2(x), \dots, u^{k-1}(x)$  est libre : soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{k}$  tels que

$$(2) \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l u^l(x) = 0.$$

Si les scalaires  $\alpha_l$  ne sont pas tous nuls, on définit  $i = \min\{l; \alpha_l \neq 0\}$ . En appliquant  $u^{k-1-i}$  à l'égalité (2), on obtient  $\alpha_i u^{k-1}(x) = 0$ , qui fournit la contradiction puisque  $x$  n'appartient pas au noyau de  $u^{k-1}$ .

Le sous-espace  $F$  est clairement stable par  $u$ , et la matrice de l'endomorphisme  $u|_F$  dans la base  $(u^{k-1}(x), \dots, u(x), x)$  est un bloc de Jordan de taille  $k$ . Si  $k = n$ , la preuve est terminée : la décomposition recherchée ne compte qu'un seul bloc. Sinon, on pourra conclure à l'aide de l'hypothèse de récurrence sitôt qu'on aura trouvé un supplémentaire à  $F$ , lui-aussi stable par  $u$ .

On peut réaliser une telle construction par dualité : soit  $\varphi \in E^*$  telle que le crochet  $\langle u^{k-1}(x), \varphi \rangle$ , soit non-nul. On introduit  $\Gamma$  comme suit

$$\Gamma = Vect(\varphi, u^\top(\varphi), u^{\top 2}(\varphi), \dots, u^{\top k-1}(\varphi)).$$

Le sous-espace  $\Gamma$  est de dimension  $k$  : soit  $\alpha_0 \varphi + \alpha_1 u^\top(\varphi) + \dots + \alpha_{k-1} u^{\top k-1}(\varphi) = 0$ , une combinaison linéaire nulle. Si les scalaires  $\alpha_l$  ne sont pas tous nuls, on note, comme plus haut,  $i = \min\{l; \alpha_l \neq 0\}$ . Alors, pour tout  $y \in E$ ,

$$0 = \sum_{l=i}^{k-1} \alpha_l \langle y, u^{\top l}(\varphi) \rangle = \sum_{l=i}^{k-1} \alpha_l \langle u^l(y), \varphi \rangle.$$

Pour  $y = u^{k-1-i}(x)$ , on obtient  $\alpha_i \langle u^{k-1}(x), \varphi \rangle = 0$ , qui fournit la contradiction.

Ainsi, l'ensemble polaire  $G = \Gamma^\perp = \{y \in E; \forall \psi \in \Gamma, \langle y, \psi \rangle = 0\}$  est de dimension  $n - k$ . de plus, comme  $\Gamma$  est stable par  $u^\top$ , le sous-espace  $G$  est stable par  $u$ . pour achever de prouver que  $G$  est supplémentaire de  $F$ , il suffit de montrer que l'intersection  $F \cap G$  est nulle : il s'agit de montrer que toute combinaison linéaire  $\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{k-1} u^{k-1}(x)$  orthogonale à chaque  $u^{\top l}(\varphi)$  a tous ses coefficients nuls.

La démonstration, utilisant rigoureusement la même technique que celles concernant les dimensions de  $F$  et  $\Gamma$ .

Résumons-nous : on a trouvé deux sous-espaces  $F$  et  $G$ , tous-deux stables par  $u$ , recouvrant  $E$  en somme directe, et tels que la restriction de  $u$  à  $F$  soit semblable à un bloc de Jordan. Pour obtenir une écriture matricielle, fixons

une base  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  de  $G$  ; si  $Q$  désigne la matrice de passage entre la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  et la base  $(u^{k-1}(x), \dots, u(x), x, e_{k+1}, \dots, e_n)$  alors

$$N = Q \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix} Q^{-1}$$

où  $J_1$  est un bloc de Jordan. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $N'$ , clairement nilpotente : il existe une matrice de passage  $P' \in \mathcal{GL}_{n-k}(\mathbb{K})$  telle que  $N' = P' \mathcal{J}' P'^{-1}$ , où  $\mathcal{J}'$  est composée de blocs de Jordan. L'identité suivante permet de conclure :

$$N = \overbrace{Q \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}}^P \overbrace{\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}' \end{pmatrix}}^{\mathcal{J}} \overbrace{\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix}}^{P^{-1}} Q^{-1}.$$

### 2.1.2 Remarque :

On peut faire le lien entre la forme de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et le lemme des noyaux emboîtés. En effet, si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent, alors

$$\ker u \subset \ker u^2 \dots \dots \subset \ker u^n = E,$$

la suite de sous-espaces étant strictement croissante, puis constante. Il est facile de relier la dimension du noyau  $\ker u^i$  en fonction de la taille des blocs de Jordan :

- (3)  $\dim \ker u$  est égal au nombre de blocs de Jordan ;  
 $\dim \ker u^i = \dim \ker u^{i-1} + d_i, (i \geq 2)$   
 où  $d_i$  est le nombre de blocs de Jordan de taille  $\geq i$ .

Prenons un exemple : soient  $A$  et  $B$  les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour  $A$ , on a

$$\dim \ker A = 2, \quad \dim \ker A^2 = 4;$$

Alors que la matrice  $B$  vérifie

$$\dim \ker B = 2, \quad \dim \ker B^2 = 3, \quad \dim \ker B^3 = 4.$$

On peut en déduire, entre autres, que les matrices  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables. On énonce maintenant le résultat concernant la réduction de



Jordan pour les endomorphismes non-nilpotents.

## 2.2 Réduction de Jordan pour des matrices quelconques :

### 2.2.1 Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$  une matrice dont le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{k}$ . Alors  $A$  est semblable à la matrice

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres (non-nécessairement distinctes) de  $A$ . Les matrices  $J_i$  sont appelées “blocs de Jordan”.

### Preuve :

On écrit la factorisation de  $\chi_A$  sur  $\mathbb{k}$  :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad \text{avec} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j).$$

D’après le lemme de décomposition des noyaux (les facteurs sont deux-à-deux premiers entre-eux) et le lemme de Cayley-Hamilton,  $E$  apparaît comme somme directe des sous espaces caractéristiques :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i, \quad F_i = \ker(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}.$$

Chaque  $F_i$  est stable par  $A$  ; on note  $A_i$  la matrice  $A|_{F_i}$ . Alors  $A_i - \lambda_i I_{F_i}$  est nilpotente. D’après le théorème précédent, il existe une matrice de passage  $P_i \in \mathcal{GL}(F_i)$  telle que

$$A_i - \lambda_i I_{F_i} = P_i \mathcal{J}_i P_i^{-1}, \text{ où } \mathcal{J}_i \text{ est composé de blocs de Jordan nilpotents.}$$

On en déduit que  $A_i$  est semblable à une matrice composée de blocs de Jordan relatif à la valeur propre  $\lambda_i$ . Le résultat énoncé se déduit en juxtaposant les blocs diagonaux correspondant à chaque sous-espace  $F_i$ .

La réduite de Jordan constitue “la forme diagonalisée d’une matrice non-diagonalisable”, ce qui signifie qu’à bien des points de vue, la forme de Jordan est la plus simple qu’on puisse obtenir (elle coïncide avec la forme diagonalisée dans le cas diagonalisable).

Dans le cas  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ , l’hypothèse concernant  $\chi_A$  n’est pas contraignante, si bien qu’on pourra toujours utiliser la réduite complexe d’une matrice. La situation d’une matrice réelle est plus délicate : on peut bien sur plonger  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et considérer la réduite complexe. Néanmoins on aura parfois besoin d’une réduite réelle. La structure des polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  permet d’obtenir un résultat dans ce sens.

## 2.3 Réduction de Jordan réelle :

### 2.3.1 Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice à coefficients réels. Alors A est semblable à la matrice  $\mathcal{J}$ , qui s'écrit par blocs

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_s & & & \\ & & & K_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & K_r \end{pmatrix}, \text{ avec } J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_l \end{pmatrix},$$

les matrices  $K_l$  s'écrivent par blocs  $2 \times 2$  sous la forme

$$K_l = \begin{pmatrix} \Lambda_l & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \dots & 0 & \Lambda_l \end{pmatrix} \text{ avec } \Lambda_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ -b_l & a_l \end{pmatrix}$$

Les réels  $\lambda_l$  sont les valeurs propres réelles ( non-nécessairement distinctes ) de A ; les nombres complexes  $a_l \pm ib_l$  ( $b_l \neq 0$ ) les valeurs propres complexes conjuguées ( non nécessairement distinctes ).

### Preuve :

Un moyen simple pour démontrer ce résultat consiste à remarquer que les matrices A et  $\mathcal{J}$  ont la même réduite de Jordan complexe. On commence par vérifier que les blocs de Jordan complexes correspondant à une valeur propre (non-réelle)  $\lambda$  et ceux correspondant à  $\bar{\lambda}$  se correspondent deux-à-deux. Cela découle de la caractérisation des tailles des blocs à l'aide des dimensions des sous-espaces caractéristiques successifs, cf. ( 1 ère théorème ). Il suffit donc de montrer que le bloc  $K_l$ , de taille  $2m_l$ , a pour réduite de Jordan complexe la matrice

$$\mathcal{J}_l = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_l^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_l^- \end{pmatrix}$$

où  $\mathcal{J}_l^\pm$  est un bloc de Jordan de taille  $m_l$  associé à la valeur propre  $a_l \pm ib_l$ . Or si on note  $(e_1, f_1, \dots, e_{m_l}, f_{m_l})$  la base canonique dans laquelle  $K_l$  est la

matrice de l'endomorphisme  $u_l$ , alors la matrice de  $u_l$  dans la base

$$(e_1 + if_1, e_2 + if_2, \dots, e_{m_l} + if_{m_l}, e_1 - if_1, e_2 - if_2, \dots, e_{m_l} - if_{m_l})$$

n'est autre que  $\mathcal{J}_l$ .

Ainsi les matrices  $A$  et  $\mathcal{J}$  ont la même réduite de Jordan complexe ; elles sont donc semblables sur  $\mathbb{C}$ . Comme elles sont toutes-deux réelles, elles sont aussi semblables sur  $\mathbb{R}$  (voir lemme ci-dessous), d'où le résultat annoncé.

On rappelle ici l'énoncé et la démonstration d'un résultat classique simple :

**2.3.2 Lemme :**

Deux matrices à coefficients réels semblables sur  $\mathbb{C}$  sont aussi semblables sur  $\mathbb{R}$ .

**Preuve :**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que  $A = PBP^{-1}$ . On note  $U$  et  $V$  les parties réelle et imaginaire de  $P$  :

$$U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } P = U + iV.$$

En identifiant parties réelle et imaginaire, il vient

$$(*) \quad AU = UB \text{ et } AV = VB.$$

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $Q_t$  la matrice à coefficients réels  $U + tV$ , et  $\phi(t)$  son déterminant. La fonction  $\phi$  est un polynôme en la variable  $t$ , qui ne saurait être nul car  $\phi(i) = \det P \neq 0$ . Ainsi, il existe une valeur réelle  $t_0$  telle que la matrice  $Q_{t_0}$  soit inversible. Par combinaison linéaire des relations (\*), on vérifie que  $AQ_{t_0} = Q_{t_0}B$ , ce qui montre que  $A$  et  $B$  sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .

**2.4 Calcul de la matrice de jordan d'une matrice donnée :**

Une question naturelle est maintenant : Étant donnée une matrice  $A$  explicite, comment calculer une matrice de Jordan  $\mathcal{J}$  à laquelle elle est semblable ?

Pour répondre à ce question il faut suivre les étapes suivantes :

1. calculer le polynôme caractéristique.
2. test si le polynôme caractéristique est scinder .
3. Pour chaque valeur propre  $\lambda$ , on calcule alors la suite des sous-espaces  $\ker(A - \lambda I_n)^i$  où  $i$  est l'ordre de multiplicité de  $\lambda$ .

### 2.4.1 Exemple 1 :

Trouver la forme réduite de jordan de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

On a :  $\chi_A(X) = \det(A - XI_4) = (1 - X)^2(2 - X)^2$ .

D'après le lemme de décomposition des noyaux on a :

$$E = \ker(f - Id_E)^2 \oplus \ker(f - 2Id_E)^2.$$

(où  $E = \mathbb{R}^4$ ,  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  canoniquement associé à  $A$ , et  $(e_1, \dots, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ ).

pour  $\ker(f - Id_E)$  on résout :

$$\begin{cases} 2y + 3z + 14t = 0 \\ 5z + 7t = 0 \\ z + 7t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = z = t = 0$$

Donc  $e_1 = (1, 0, 0, 0)$  engendre  $\ker(f - Id_E)$ .

$$\text{On trouve } (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & 49 \\ 0 & 0 & 5 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(x, y, z, t) \in \ker(f - Id_E)^2 \Leftrightarrow z = t = 0$  donc  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\ker(f - Id_E)^2$ .

$\{e_2\}$  engendre un supplémentaire de  $\ker(f - Id_E)$  dans  $\ker(f - Id_E)^2$ .

D'où la base de  $\ker(f - Id_E)^2$  disposée comme suit :

$e_2$

↑

$$(f - Id_E)(e_2) = 2e_1.$$

Soit  $f_1$  induite par  $f$  sur  $\ker(f - Id_E)^2$ , on a :

$$\text{Mat}(f_1, (2e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve que  $\ker(f - 2Id_E)$  est de dimension 1 engendré par  $u_1 = (13, 5, 1, 0)$   
 Pour  $\ker(f - 2Id_E)^2$  on résout :

$$\begin{cases} x - 4y + 7z + 21t = 0 \\ y - 5z + 28t = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 13z - 133t \\ y = 5z - 28t \end{cases}$$

D'où  $\{u_1\}$  et  $u_2 = (-133, -28, 0, 1)$  constituent une base de  $\ker(f - 2Id_E)^2$ .  
 $\{u_2\}$  engendre un supplémentaire de  $\ker(f - 2Id_E)$  dans  $\ker(f - 2Id_E)^2$ .  
 d'où la base de  $\ker(f - 2Id_E)^2$  disposée comme suit :

$$\begin{array}{c} u_2 \\ \uparrow \\ (f - 2Id_E)(u_2) = 7u_1. \end{array}$$

par rapport à cette base la matrice de  $f_2$  induite par  $f$  sur  $\ker(f - 2Id_E)^2$  est :

$$Mat(f_2, (7u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement :

$$Mat(f, (2e_1, e_2, 7u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

C'est la réduct de jordan de A.

Pour la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  à la base  $B' = (2e_1, e_2, 7u_1, u_2)$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 91 & -133 \\ 0 & 1 & 35 & -28 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

#### 2.4.2 Exemple 2 :

Soit A la matrice de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1)-Déterminons le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_4) = (3 + X)^4.$$

2)-Déterminons une réduite de Jordan de A. On pose  $M = A + 3I$ .

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a  $rg(M) = 2$  car  $C_2 = C_1$  et  $C_4 = 2C_3 + 4C_1$ .

Donc d'après le théorème du rang, on a

$$\boxed{\dim \text{Ker}(M) = 2}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a clairement  $C_4 = C_3$ . Donc  $rg(M^2) = 1$ , d'où par le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim \ker(M^2) &= 3 \\ M^3 &= 0 \end{aligned}$$

Donc on a clairement

$$\dim \ker(M^3) = 4 = \text{multiplicité de } -3 \text{ dans } \chi_A.$$

Donc, on en déduit que la réduite de Jordan de A comporte deux blocs associés à la valeur propre 3 (car  $\dim \ker(M) = 2$ , et on sait que le plus grand des blocs est de taille 3 car  $M^3 = 0$ ).

On sait donc que, dans une base de Jordan, la matrice réduite de Jordan sera de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Précisons la base de Jordan et la matrice de passage.

On choisit donc un vecteur  $v_3 \in \ker(M^3) \setminus \ker(M^2)$  :

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis

$$v_2 = Mv_3 = M \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$v_1 = Mv_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nous manque un vecteur  $u$  qui soit dans  $\ker(M) \setminus \text{Vect}(v_1)$  :

$$u = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $(u, v_1, v_2, v_3)$  est une base de Jordan dans laquelle la réduite de Jordan est exactement J. La matrice de passage correspondante est alors

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



## Chapitre 3

# Décomposition de dunford pour les matrices

### 3.1 Théorème de décomposition de dunford :

#### 3.1.1 Théorème :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$  une matrice dont le polynôme minimal est scindé. Alors, il existe un couple de matrices  $(B, N)$  tel que

1.  $A = B + N$ .
2.  $B$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente.
3.  $B$  et  $N$  commutent.

De plus,  $B$  et  $N$  sont données par

$$B = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_p P_p, \quad N = (A - \lambda_1 I)P_1 + \dots + (A - \lambda_p I)P_p;$$

où pour  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $P_1, \dots, P_p$  sont les matrices des projections sur les sous-espaces caractéristiques  $F_{\lambda_1}, \dots, F_{\lambda_p}$ .

#### Preuve :

Soit  $u$  l'endomorphisme associé à  $A$  dans la base canonique de  $\mathbb{k}^n$ . Soient  $m_1, \dots, m_p$  les multiplicités algébriques des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  respectivement. On sait d'après le lemme de décomposition des noyaux que  $\mathbb{k}^n = \bigoplus_{i=1}^p F_{\lambda_i}$ . On sait que chacun des sous-espaces caractéristiques  $F_{\lambda_i}$  est stable par  $u$  et que pour tout  $i \leq p$ ,  $F_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$  (lemme de décomposition des noyaux) et  $\dim F_{\lambda_i} = m_i$ .

Soit  $v$  et  $n$  les deux endomorphismes définis par leurs restrictions  $v_i$  et  $n_i$  à

$F_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , comme suit

$$\forall x \in F_{\lambda_i}, \quad v_i(x) = \lambda_i x, \quad n_i(x) = (u_i - \lambda_i id)(x).$$

où  $u_i$  est la restriction de  $u$  à  $F_{\lambda_i}$ . Considérons une base  $\{f_{i,1}, \dots, f_{i,m_i}\}$  de  $F_{\lambda_i}$ . La famille  $(f_{i,k})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq m_i}$  est une base de  $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^p F_{\lambda_i}$ .

Dans cette base, la matrice de  $v$  est clairement diagonale. On conclut que  $v$  est diagonalisable. Par ailleurs, la restriction  $n_i$  de  $n$  à  $F_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , est nilpotente car elle vérifie  $n_i^{m_i} = 0$  ( $F_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$ ). Donc  $n$  est nilpotent ( $n^m = 0$  où  $m = \max(m_1, \dots, m_p)$ ). De plus, étant donné que pour tout  $i \leq p$ ,  $n_i$  et  $v_i$  commutent au sein de  $F_{\lambda_i}$  (car ce sont tous les deux des polynômes en  $u_i$ ), on en déduit que  $v$  et  $n$  commutent. Les matrices  $B$  et  $N$  peuvent être choisies comme les matrices de  $v$  et  $n$  respectivement dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . L'unicité est admise.

Une application directe de cette décomposition est le calcul des puissances de la matrice  $A$  quelconque.

En effet : pour tout  $k \geq 0$  puisque  $B$  et  $N$  commutent, on a :

$$A^k = (B + N)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} B^{k-m} N^m.$$

Le calcul des puissances de la matrice diagonalisable  $B$  et de la matrice nilpotente  $N$  est facile.

### 3.1.2 Exemple 1 : Matrice ayant une seule valeur propre.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$  d'ordre 3 à coefficients

réels.

- 1) Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
- 2) Déterminer la décomposition de Dunford de  $A$ .

### 3.1.3 Solution :

1) Le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  de  $A$  est le déterminant de la matrice où est la matrice unité d'ordre 3.

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 8 \\ 3 & -1-X & 6 \\ -2 & 0 & -5-X \end{vmatrix} = (-1-X) \begin{vmatrix} 3-X & 8 \\ -2 & -5-X \end{vmatrix}$$

On trouve  $P_A(X) = (-1 - X)^3$ .

2) Le polynôme caractéristique de  $A$  est un polynôme annulateur ? de  $A$ , par

conséquent on a  $(A - I_3)^3$ .

La matrice  $N = A + I_3$  est donc une matrice nilpotente et A s'écrit :

$$A = -I_3 + N.$$

Comme toute matrice d'ordre n de la forme  $\alpha I_n$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $I_n$  est la matrice unité, commute avec toute matrice d'ordre n, les matrices  $-I_3$  et N commutent, donc  $A = -I_3 + N$  est la décomposition de Dunford de A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

### 3.1.4 Exemple 2 :Matrice triangulaire supérieure

Soient  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{K}$ ,  $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$  et  $f_m$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{K}^3$  dont la matrice dans la base canonique de E est  $A_m$ .

On considère les deux matrices  $B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ;

a) Vérifier que la matrice C est nilpotente.

b) Déterminer l'ensemble F des scalaires m pour lesquels  $B_m + C$  est la décomposition de Dunford de  $A_m$ .

### 3.1.5 Solution :

a) Le polynôme caractéristique  $P_C(X)$  de la matrice C est  $-X^3$ , donc d'après le théorème de Cayley Hamilton, on a  $C^3 = 0$ .

On peut aussi calculer les premières puissances de C et l'on trouve

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C^3 = 0.$$

Donc C est nilpotente. b) Il est clair que  $A_m = B_m + C$ .

Pour que cette écriture représente la décomposition de Dunford de  $A_m$ , il faut de plus (et il suffit) que les matrices  $B_m$  et C commutent. Or on a :

$$B_m C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$CB_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $B_m + C$  est la décomposition de Dunford de si et seulement si  $m = 1$ .

Donc  $F = \{1\}$ .

## Chapitre 4

# Applications

### 4.1 Quelques propriétés algébriques :

Les propriétés suivantes se montrent grâce au théorème de Jordan et sont difficiles sans celui-ci :

1. Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est semblable à sa transposée. Le résultat est Vrai sur  $\mathbb{R}$  car deux matrices réelles semblables sur  $\mathbb{C}$  sont semblables sur  $\mathbb{R}$ .
2. Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est semblable à une matrice symétrique. Dans  $\mathbb{R}$ , les matrices semblables à des matrices symétriques sont les matrices Diagonalisables.

### 4.2 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants :

On considère ici une suite complexe  $(u_n)$  définie par une récurrence linéaire d'ordre  $k$  à coefficients constants :

$$(*) \quad \forall n \geq 0 \quad u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_0u_n, \\ u_0, \dots, u_{k-1} \text{ donnés}$$

Notre but est de donner une forme explicite pour l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ . Pour cela, on se ramène tout d'abord à une récurrence d'ordre 1 : en posant  $U_n = (u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}) \in \mathbb{C}^k$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , le problème (\*) devient

$$(**) \quad U_{n+1} = AU_n, \quad U_0 \text{ donné,}$$

où la matrice A est la matrice compagnon du polynôme

$$X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0 : \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_{k-1} \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & & 1 & -a_0 \end{pmatrix}.$$

Le problème (\*\*\*) se résout en  $U_n = A^n U_0$ , si bien que la difficulté se concentre dans le calcul des puissances de la matrice A. On va voir que la réduite de Jordan permet ce calcul : puisqu'on considère le cas complexe, A s'écrit  $PJP^{-1}$  où la matrice  $J$  n'est composée que de blocs de Jordan du type  $J = \lambda I_p + N$  avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La formule du binôme de Newton fournit, puisque N est nilpotente d'ordre p :

$$J^n = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} N^i.$$

Or, élever la matrice N à la puissance i revient à décaler la sur-diagonale de i rangs. On obtient donc

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{p-1} \lambda^{n-p+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \lambda^{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Le nombre p est fixé (c'est la taille d'un bloc de Jordan), quant à la dépendance en n, elle peut être formulée ainsi : les coefficients de la matrice J sont du type  $P(n)\lambda^n$ , où P est un polynôme de  $\mathbb{k}[X]$  de degré inférieur ou égal  $p - 1$ .

Pour conclure l'étude de la suite  $(u_n)$ , il suffit de travailler par blocs et d'appliquer la changement de base associé à la matrice P ; le résultat démontré est le suivant :

#### 4.2.1 Proposition :

Le terme général de la suite  $(u_n)$  est de la forme

$$u_n = \sum_{\lambda \in \mathfrak{G}(A)} \lambda^n P_\lambda(n),$$

où le polynôme  $P_\lambda$  est de degré inférieur ou égal  $p - 1$ , si  $p$  est la taille du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre  $\lambda$ .

#### 4.2.2 Exemple 1 :

Donner l'ensemble des solutions des équations

$$(a) \quad u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$$

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ , dont les racines sont 2 et -1. Donc les solutions sont de la forme

$$u_n = a2^n + b(-1)^n.$$

#### 4.2.3 Exemple 2 :

Déterminer les suites réelles vérifiant l'équation de récurrence :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

L'équation caractéristique associée à cette équation de récurrence est

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

dont les racines sont 1 et  $-2$ . Les solutions de l'équation de récurrence sont donc les suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{R}, \quad u_n = a + b \times 2^n \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

### 4.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants :

La structure des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est très semblable à celle des suites étudiées au paragraphe précédent. En effet, considérons l'équation d'ordre 1 (à laquelle peut être réduite une équation scalaire d'ordre  $k$ )

$$(***) \quad u'(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0.$$

La résolution est explicite :  $u(t) = e^{tA}u_0$  et on est, cette fois-ci, ramené au calcul de l'exponentielle d'une matrice. On utilise ici encore la réduite de Jordan (complexe) de  $A$  ; le point essentiel étant le calcul explicite de l'exponentielle d'un bloc de Jordan : avec les notations du paragraphe précédent,

$$e^{tJ} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut en déduire le résultat de stabilité suivant :

#### 4.3.1 Théorème :

(i) Les solutions du problème différentiel (\*\*\*) sont bornées si et seulement si les valeurs propres (complexes) de  $A$  sont de partie réelle négative ou nulle et celles de partie réelle nulle sont non défectives (On dit qu'une valeur propre est non-défective si elle n'est associée qu'à des blocs de Jordan de taille 1, ce qui revient à dire que la matrice restreinte au sous-espace caractéristique correspondant est diagonalisable).

(ii) Les solutions du problème différentiel (\*\*\*) tendent vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  si et seulement si les valeurs propres (complexes) de  $A$  sont de partie réelle strictement négative.

On peut citer encore d'autres applications de la réduction de Jordan dans le cadre de l'étude des équations différentielles ordinaires, notamment le tracé des trajectoires pour les systèmes différentiels linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (la réduite de Jordan réelle est alors nécessaire).

#### 4.3.2 Exemple 1 :

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

- 1) Écrire la décomposition de Dunford de  $B$ .
- 2) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $e^{tB}$ .
- 3) Donner les solutions des systèmes différentiels  $Y' = BY$ .



### 4.3.3 Solution :

1) Décomposition de Dunford de B

On a :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à  $-I$ . Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que  $B = D + N$  et  $DN = ND$ . Or si

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $N^3 = 0$ . La décomposition  $B = D + N$  est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

2) Pour  $t \in \mathbb{R}$ , calculons  $e^{tB}$ . On a  $N^3 = 0$  donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(tN)^3 = 0$  et l'exponentielle est égale à

$$e^{tN} = I + tN + \left(\frac{t^2}{2}\right)N^2,$$

par ailleurs  $ND = DN$ , donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les matrices  $tN$  et  $tD$  commutent également,  $(tN)(tD) = (tD)(tN)$ , on a donc

$$e^{tB} = e^{tD+tN} = e^{tD}e^{tN} = e^{-tI}e^{tN} = e^{-tI}\left(I + tN + \left(\frac{t^2}{2}\right)N^2\right)$$

D'où

$$e^{tB} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Solutions des systèmes différentiels  $Y' = BY$ .

La solution générale du système  $Y' = BY$  s'écrit

$$Y(t) = \exp(tB)v$$

où  $v = (a, b, c)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . La solution  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  s'écrit donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a + bt + c\frac{t^2}{2} \\ b + ct \\ c \end{pmatrix}$$

#### 4.3.4 Exemple 2 :

Prenons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Cette matrice (bloc de Jordan) n'est pas diagonalisable :

la valeur propre  $\lambda = 1$  est double et associée au vecteur propre  $v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  engendrant l'espace propre

$$\ker(A - \lambda I_2) = \ker(A - I_2) = \text{Vect}\{v_1\}.$$

Une première solution est donnée par :

$$\varphi_1(t) = e^t(v_1) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puis  $(A - I_2)^2 = 0$ , d'où un vecteur  $v_2 = \ker((A - I_2)^2) = \mathbb{R}^2$  tel que  $v_2 \notin \ker(A - I_2)$  est donné par exemple par  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

D'où une deuxième solution (indépendante de  $\varphi_1$ ) est donnée par :

$$\varphi_2 = e^t(I + (A - I)t)v_2 = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

D'où toute solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2te^t \\ c_2e^t \end{pmatrix}.$$

# Bibliographie

- [1] J.-M. ARNAUDIÉS, H. FRAYSSE. Cours de mathématiques. Dunod, Paris 1989.
- [2] J.-M. ARNAUDIÉS, H. FRAYSSE. Cours de mathématiques. 3. Dunod, Paris 1989. Compléments d'analyse. [Complements of analysis].
- [3] X. GOURDON. Les Maths en tte, mathématiques pour M' : Algèbre. Ellipses, Paris 1996.
- [4] M. W. HIRSCH, S. SMALE. Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Academic Press, New York-London 1974. Pure and Applied mathematics, Vol. 60.