



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)

Graphes faiblement triangulés

Réalisé par: ZAHIR Youssef

Encadré par: Pr. HILALI Abdelmajid

Soutenu le 17 juin 2016

Devant le jury composé de:

- | | |
|-----------------------------|---|
| - Pr. ALAMI Mustapha | Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation de Fès. |
| - Pr. ELHILALI ALAOUI Ahmed | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| - Pr. EL KHOMSSI Mohammed | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| - Pr. HILALI Abdelmajid | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |
| - Pr. MAHDOU Najib | Faculté des Sciences et Techniques de Fès |

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

REMERCIEMENT



Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon seigneur d'avoir guidé nos pas au droit chemin.

Je tiens à remercier mon encadrant HILALI Abdelmajid, leurs conseils, leur générosité et leur compréhension sont des facteurs qui m'ont aidé à réussir mon projet.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur ALAMI Mustapha, Monsieur ELHILALI ALAOUI Ahmed, Monsieur EL KHOMSSI Mohammed et Monsieur MAHDOU Najib, qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens aussi à remercier une 2^{ème} fois mon encadrant HILALI Abdelmajid pour ses remarques pertinentes et pour le temps qu'il a consacré à la correction de ce rapport, ses bonnes manières et sa bonne qualité d'encadrer.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance aux personnes qui ont contribué à cette recherche.

J'adresse un remerciement tout particulier à Monsieur Frédéric Maffray d'avoir accepté de répondre à mes questions par mail .

Merci à tous les membres de ma famille qui, par leur support et encouragement, m'ont permis de m'investir entièrement dans mes études.

Je tiens à témoigner toute ma gratitude envers les amis et collègues qui m'ont apporté un soutien moral et intellectuel tout au long de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

1	Notions de base	6
1.1	Les graphes :	6
1.1.1	Définitions :	6
1.1.2	Graphes connexes :	8
1.1.3	Arbres :	9
1.1.4	Graphes bipartis :	10
1.2	Les algorithmes :	10
1.2.1	Problèmes, algorithmes, complexité :	11
1.2.2	Les problèmes P, NP et NP-complets :	11
2	Les graphes triangulés	13
2.1	Ordre d'élimination simplicial :	13
2.1.1	Séparateur minimal :	13
2.1.2	Sommet simplicial :	15
2.2	Algorithme de reconnaissance :	16
2.2.1	Généralités sur le LexBFS :	16
2.2.2	Correction :	17
2.2.2.1	Application de l'algorithme sur un exemple :	19
3	Les graphes faiblement triangulés	20
3.1	Définition et propriétés :	20
3.2	Caractérisation des graphes faiblement triangulés :	21
3.2.1	Détection de 2-paire :	23
3.2.2	Algorithme de reconnaissance :	24
3.2.3	Application de l'algorithme sur un exemple :	25
4	Coloration	27
4.1	Définitions :	27
4.2	La classe des graphes parfaits :	27
4.3	Coloration des graphes faiblement triangulés :	35
4.3.1	L'opérateur de contraction :	35
4.3.2	Algorithme OPT :	37
5	Application	39

INTRODUCTION GÉNÉRALE

En algorithmique des graphes, domaine dans lequel s'est déroulé ce stage, on s'intéresse principalement à l'étude des graphes faiblement triangulés, mais également à la résolution de problèmes d'optimisation tels que la coloration (recherche du nombre minimale de couleurs permettant de colorier le graphe de sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs distinctes), clique maximum (recherche d'un plus grand sous-graphe complet).

Les arbres forment une classe dont la très forte structure rend la résolution des problèmes coloration ou clique maximum triviale. En général, on peut alors regarder les classes des graphes obtenues en affaiblissant un peu les contraintes. Après avoir considéré les arbres (qui sont connexe sans cycle), on peut alors regarder les graphes triangulés (qui peuvent ne pas être connexe et qui ne peuvent avoir de cycle de 4 sommets ou plus sans corde).

C'est en suivant cette démarche que R.Hayward a introduit les graphes faiblement triangulés. Ces graphes sont une généralisation des graphes triangulés : on relâche quelque peu les contraintes en autorisant en plus le cycle à 4 sommets sans corde. On peut alors résoudre sur ces graphes des problèmes d'optimisation tels que les problèmes de la clique maximum et de la coloration en temps polynomial.

La classe des graphes faiblement triangulés a aussi été introduite pour son rapport avec la conjecture des graphes parfaits. Dans l'article où il a introduit des graphes faiblement triangulés, R.Hayward a montré qu'ils sont parfaits.

Dans le premier chapitre nous rappelons toutes les définitions utiles pour la suite, les notions d'algorithme et de complexité algorithmique sont expliquées brièvement. Enfin, nous donnons la définition et les propriétés de quelque classe de graphes particuliers.

Le deuxième chapitre traite la classe des graphes qui ne contient pas de cycle sans corde d'au moins 4 sommets. Nous rappelons la caractérisation de cette classe de graphes qui basé sur l'existence d'ordre d'élimination simplicial, et nous donnons un algorithme en temps polynomial permettant de décider si un graphe appartient ou non à la classe des graphes triangulés.

Le troisième chapitre a pour but de définir les graphes faiblement triangulés, mais également d'étudier quelques propriétés. Ensuite, nous donnons une caractérisation qui basé sur la notion de 2-paire. Enfin, la dernière partie consiste à étudier l'algorithme de reconnaissance de complexité $\mathcal{O}(mn^2)$.

Le quatrième chapitre traite le problème de la coloration. Dans la première partie de ce chapitre nous montrons les principaux résultats concernant la classe des graphes parfaits. Nous montrons également que la classe des graphes faiblement triangulés est parfaite. Enfin, nous donnons un algorithme qui permet de résoudre le problème de coloration, ainsi de résoudre le problème de clique maximum dans la classe des graphes faiblement triangulés.

Enfin, le dernier chapitre a pour but de donner une application qui montre l'utilité des graphes faiblement triangulés dans les problèmes de visibilité.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

Nous présentons dans ce chapitre les notions de bases utilisées dans ce travail à savoir les graphes et les algorithmes.

1.1 Les graphes :

1.1.1 Définitions :

Définition 1.1

On appelle graphe simple fini la donnée d'un couple $G=(V,E)$ tels que V est un ensemble fini et $E \subset [V]^{(2)}$ (l'ensemble des parties de V qui ont exactement 2 éléments). Les éléments de V sont appelés les sommets du graphe et les éléments de E est appelé les arêtes du graphe.

Le nombre de sommets d'un graphe simple est appelé ordre du graphe, on le note $\text{Ord}(G)$ ou $|G|$. Le nombre d'arêtes d'un graphe simple est appelé taille du graphe, on le note $\text{tail}(G)$.

On parlera d'un (n,p) -graphe pour désigner un graphe d'ordre n et de taille p .

Définition 1.2

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Si $(u, v) \in E$ on note $e = uv \in E$, on dit alors que u et v sont adjacents (ou voisins), que u et v sont les extrémités de l'arête e , on dit aussi que u voit v .

Si $e = uv \notin E$ alors on dit que u et v sont non adjacents, on dit aussi que u manque v .

Remarque 1.1

Notons que, par définition, nos graphes sont simples finis.

Définition 1.3

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Considérons deux sous-ensembles $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$, on dit que $H = (V', E')$ est un sous-graphe de G si les extrémités de tout éléments de E' sont dans V' .

Si en plus $V=V'$, le graphe $H = (V', E')$ est dit alors sous-graphe partiel de G .

Définition 1.4

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $V' \subseteq V$.

On appelle sous-graphe engendré par V' le graphe $H = (V', E')$ où E' est l'ensemble des arêtes de G ayant leurs extrémités dans V' .

Définition 1.5

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Si u et v sont deux sommets non adjacents dans G , on définit alors le graphe $G+e$ en ajoutant l'arête $e = uv$ au graphe G . $G + e = (V, E')$ où $E' = E \cup \{e\}$.

Définition 1.6

Soit u un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. $N_G(u)$: l'ensemble des voisins de u dans G , et on note $d_G(u)$ le degré de u défini par $d_G(u) = |N_G(u)|$. notons que $u \notin N_G(u)$.

Définition 1.7

Soit u un sommet d'un graphe $G = (V, E)$, si $d_G(u)$ est pair on dira que u est pair sinon on dira qu'il est impair.

Définition 1.8

On dit que le graphe $G = (V, E)$ est complet si $E = [V]^{(2)}$. Si $|V| = n$ et G est complet on note alors $G \equiv K_n$.

On appelle le complémentaire de G , le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ où $\bar{E} = [V]^{(2)} \setminus E$.

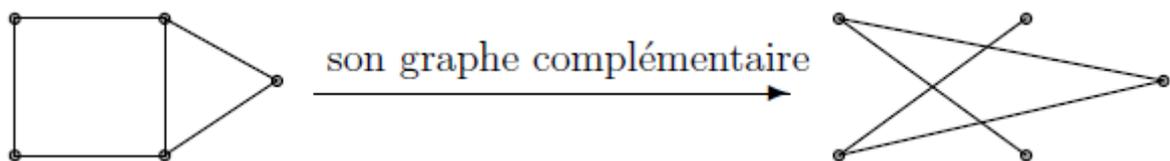
Exemple 1.1

Figure 1.1 : Exemple d'un graphe et son complémentaire.

Définition 1.9

Soient $G = (V, E)$ un graphe et C une partie non vide de V .

On dira que C est une clique de G si le graphe $G[C]$ engendré par C est un graphe complet. On dira que C est une clique maximale de G si C est une clique et si le graphe $G[B]$ n'est pas complet chaque fois que C est strictement contenue dans B .

Une partie I de V est un stable ou indépendant si deux sommets quelconque de I ne sont pas adjacents dans G , autrement dit, le complémentaire du graphe engendré par I est un graphe complet.

Définition 1.10

Soit $G = (V, E)$ graphe.

On appelle chemin μ dans G une suite finie de sommets (v_1, v_2, \dots, v_m) avec $m \geq 2$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m-1$, $v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $m-1$ s'appelle la longueur du chemin.

Les sommets v_1 et v_m sont appelés les extrémités du chemin ; les autres sommets du chemin sont dits intérieurs.

Un cycle de longueur $m-1$ est un chemin $\mu = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ tel que $v_1 = v_m$, étant entendu qu'un cycle est défini modulo l'équivalence $(v_1, v_2, \dots, v_m) \cong (v_i, \dots, v_{i-1})$.

On dit qu'un cycle est pair (resp. impair) s'il contient un nombre pair (resp. impair) de sommets. On convient qu'on chaque sommet v on a un cycle de longueur 0.

Définition 1.11

Un chemin de longueur strictement supérieur à un dont toutes les arêtes sont distinctes est dit simple.

Un chemin de longueur strictement supérieur à un dont tous les sommets (sauf éventuellement v_1 et v_m) sont distincts est dit élémentaire.

Les arêtes de G de la forme $v_i v_j$ avec $|i-j| > 1$ sont appelées les cordes du chemin, lorsque le chemin n'a pas de corde, on parle de chemin sans corde.

On appelle trou tout graphe G avec au moins quatre sommets dont les sommets peuvent être ordonnés de manière à former un cycle sans corde de G .

On appelle antichemin tout graphe qui est le complémentaire d'un chemin, et antitrou tout graphe qui est le complémentaire d'un trou.

On dit qu'un trou (resp. antitrou) est pair (resp. impair) s'il contient un nombre pair (resp. impair) d'arêtes.

On dit qu'un trou ou un antitrou est long s'il contient au moins 5 sommets.

Remarque 1.2

un chemin élémentaire est un chemin simple.

1.1.2 Graphes connexes :

Définition 1.12

On définit une relation noté \sim entre les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ s'ils sont liés par un chemin. On vérifie que \sim est une relation d'équivalence.

Une classe d'équivalence pour \sim est appelée composante connexe de G . On dit que G est connexe s'il possède une seule composante connexe. Autrement dit, un graphe G est connexe si pour tous x, y de V , il existe un chemin dans G les reliant.

Définition 1.13

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe (d'ordre ≥ 2). Un sommet v de G est un point d'articulation de G si $G - v$ est non connexe.

Une arête e de G est un pont de G si $G - e$ est non connexe.

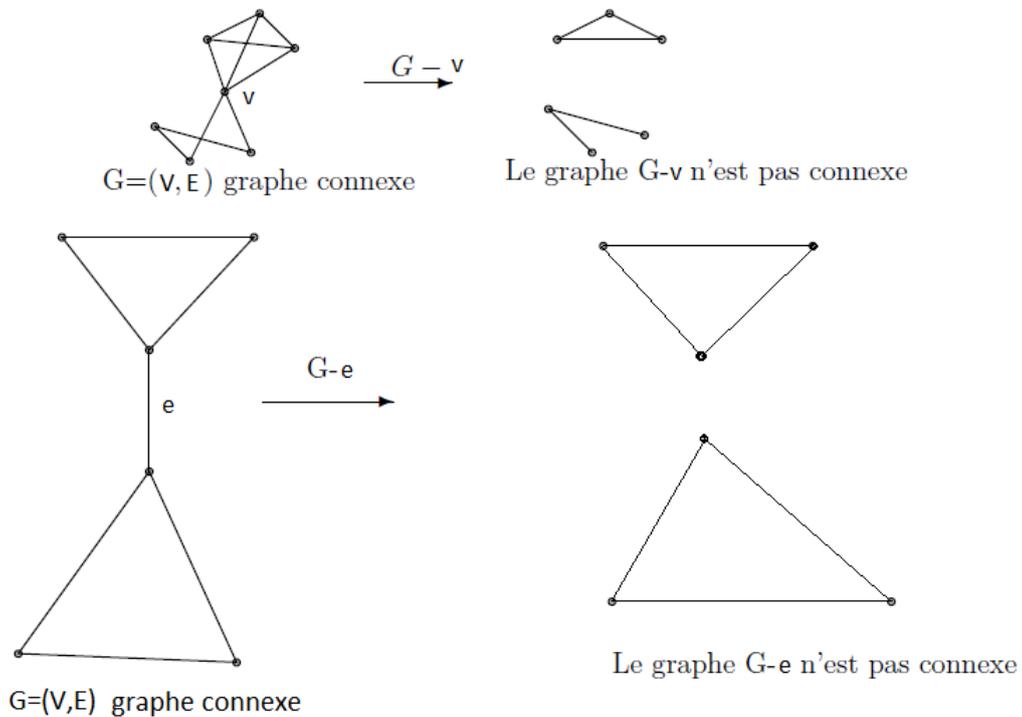
Exemple 1.2

Figure 1.2 : Exemple d'un pont et d'un point d'articulation.

1.1.3 Arbres :**Définition 1.14**

On appelle arbre tout graphe simple connexe sans cycle.

On appelle forêt tout graphe simple sans cycle.

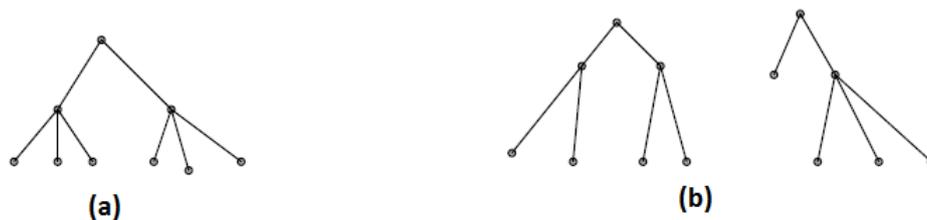
Exemple 1.3

Figure 1.3 : Exemple .a. Arbre .b. Forêt

Théorème 1.1

Soit $G = (V, E)$ un (n, p) graphe. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. G est un arbre.

2. G est acyclique(sans cycle) et $n = p + 1$.
3. G est connexe et $n = p + 1$.
4. G est acyclique et si on joint tout couple de sommets non adjacents par une arête a , alors $G + a$ possède exactement un seul cycle.

1.1.4 Graphes bipartis :

Définition 1.15

le graphe $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition en deux sous-ensembles V_1, V_2 de V telle que V_1 et V_2 sont des stables de G

Exemple 1.4

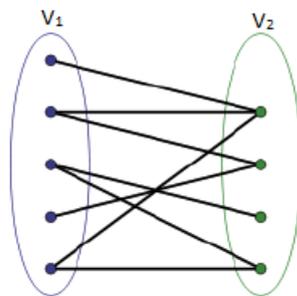


Figure 1.4- Exemple d'un graphe biparti.

Théorème 1.2 (Caractérisation)

Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impair.

1.2 Les algorithmes :

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique. Elle est basée sur les travaux d'Edmonds[13] et de Cook[24]. L'objectif de calculer la complexité d'un algorithme, est d'obtenir un ordre de grandeur du nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour que l'algorithme fournisse la solution du problème à l'utilisateur. Ceci permet de comparer la performance des algorithmes. La notion de rapidité d'un algorithme est très importante si l'on envisage des applications pratiques. Toutefois, jusqu'au milieu du XXe siècle, la notion de rapidité d'un algorithme était vague et ne faisait pas l'objet de recherches pour elle-même.

Finalement le développement de la théorie de la complexité algorithmique depuis le milieu des années 1960 a placé la notion de rapidité d'un algorithme au coeur de questions très difficiles et profondes.

1.2.1 Problèmes, algorithmes, complexité :

Un problème est défini par la donnée d'un objet mathématique représenté par un nombre fini de symboles (l'instance ou l'entrée) et d'une question dont la réponse dépend uniquement de l'instance. Si la réponse à la question ne peut être que "oui" ou "non", on parle de problème de décision.

D'une manière simple, un algorithme est une description de longueur finie, dans un langage de programmation, d'une suite finie d'opérations élémentaires (le calcul) ne dépendant que de l'instance et fournissant une réponse à la question (la sortie).

La complexité de l'algorithme est le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'exécution de l'algorithme pour une instance de taille n (nombre de symboles nécessaire à sa représentation) dans le pire des cas. Nos estimations de complexité seront toujours données à une constante multiplicative près à l'aide de la notation de Landau \mathcal{O} . Un algorithme est de complexité $\mathcal{O}(f(n))$ où f est une fonction mathématique, s'il existe une constante c telle que le nombre d'opérations nécessaires pour exécuter l'algorithme sur une instance de taille n est inférieur à $c \times f(n)$.

Un algorithme est dit (en temps) polynomial si sa fonction de complexité est en $\mathcal{O}(n^k)$ avec $k \geq 1$ fixé. Dans ce cas, l'algorithme est considéré comme efficace.

1.2.2 Les problèmes P, NP et NP-complets :

– La classe P ou classe Polynomiale : est une classe qui regroupe les problèmes qui peuvent être résolus en utilisant un algorithme en temps polynomial.

– La classe NP ou classe Non-déterministe Polynomiale est une classe des problèmes qui sont "vérifiables" en temps polynomial. Cela signifie que si l'on nous donne, d'une façon ou d'une autre, une solution "certifiée", nous pouvons vérifier que cette solution est correcte en un temps qui est polynomial par rapport à la taille de l'entrée.

Définition 1.16

Un problème A est réductible à un problème B s'il existe un algorithme résolvant A qui utilise un algorithme résolvant B .

Définition 1.17

Si l'algorithme résolvant A est polynomial, considérant les appels à l'algorithme résolvant B comme de complexité constante, la réduction est dite polynomiale. On dit que A est polynomialement réductible à B et l'on note $A \preceq B$.

Remarque 1.3

La relation \preceq est réflexive et transitive, mais pas antisymétrique.

Un problème de la classe NP est dit NP-complet si tous les problèmes de la classe NP peuvent être réduits en temps polynomial à ce problème.

Dans ce travail tous nos algorithmes auront pour instance des graphes, alors la complexité d'algorithme polynomial s'exprimera sous la forme $\mathcal{O}(P(n, m))$, où P est un polynôme fonction du nombre n de sommets et du nombre m d'arêtes. Le nombre maximum d'arêtes d'un graphe sur n sommets est $\frac{n(n-1)}{2}$, il est donc possible d'exprimer la complexité uniquement en fonction de n : un algorithme de complexité $\mathcal{O}(P(n, m))$ est aussi de complexité $\mathcal{O}(P(n, n^2))$.

Exemple : Un exemple d'algorithme sur les graphes : le parcours en largeur ou BFS (breadth-first search).

L'algorithme BFS construit un ordre particulier sur les sommets du graphe en utilisant une file. On rappelle qu'une file est une structure de données dans laquelle il est possible d'ajouter et de retirer des éléments un par un. Lorsque un élément est retiré d'une file, c'est toujours l'élément le plus ancien qui retiré (celui qui y a été mis le plus tôt). Voici une description formelle de l'algorithme BFS.

Algorithm 1 BFS

Require: Un graphe G sur n sommets et un sommets v de G

Ensure: Un ordre σ sur les sommets de G

Calcul :

- Soit F une file vide, ajouter v à F , soit $\sigma(v) = n$ et $i = n - 1$;
- tant que F est non vide :
 - retirer le sommet a de F qui maximise σ .
 - pour chaque voisin non-numéroté b de a , ajouter b à F , poser $\sigma(b) = i$ et $i = i - 1$.

Complexité : $\mathcal{O}(n + m)$.

Cette algorithme permet par exemple de détecter si un graphe est connexe. Pour cela il suffit de tester la valeur de i à la fin de l'algorithme. Si $i = 0$ tous les sommets du graphe ont été numérotés et le graphe est connexe. Si $i > 0$, le graphe n'est pas connexe.

CHAPITRE 2

LES GRAPHES TRIANGULÉS

Définition 2.1

Un graphe est triangulé si tout cycle de longueur ≥ 4 contient une corde (i.e, le graphe est sans C_k pour $k \geq 4$).

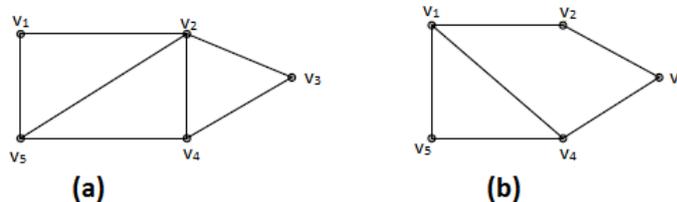
Exemple 2.1

Figure 2.1 : -a- Le graphe triangulé -b- Le graphe n'est pas triangulé car il contient un cycle de longueur 4.

Propriété 2.1

Tout sous-graphe induit d'un graphe triangulé est triangulé.

2.1 Ordre d'élimination simplicial :

2.1.1 Séparateur minimal :

Définition 2.2

Soient $G = (V, E)$ un graphe simple et S une partie non vide de V .

On dira que S est un séparateur de G s'il existe deux sommets a, b non adjacents dans G et non connectés dans $G[V \setminus S]$, on dit aussi que c'est un a, b -séparateur.

Si S minimal pour l'inclusion parmi tous les séparateurs de G , on dit alors que

S est un séparateur minimal de G .

Exemple 2.2

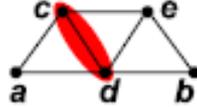


Figure 2.2 : $\{c, d, e\}$ est un a, b -séparateur de G ;
 $\{c, d\}$ ou $\{d, e\}$ sont des a, b -séparateurs minimaux de G .

La proposition suivante donne une caractérisation d'un a, b séparateur minimal.

Proposition 2.1

Soient $G = (V, E)$ un graphe et S une partie non vide de V .

S est un a, b -séparateur minimal si et seulement si chaque sommet x dans S est adjacent à au moins un sommet de la composante connexe contenant a et adjacent à au moins un sommet de la composante connexe contenant b .

Théorème 2.1 (Dirac[10])

Un graphe $G = (V, E)$ est dit triangulé si et seulement si tout séparateur minimal de G est une clique.

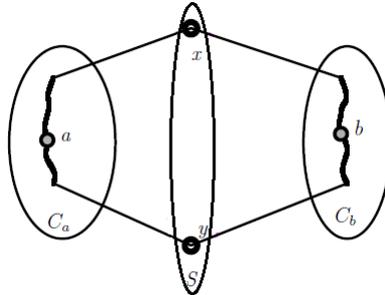


Figure 2.3 : Séparateur minimal.

Preuve 2.1

Soit S un séparateur minimal de G , alors il existe deux sommets a et b tels que S est un a, b -séparateur de G .

On note C_a (respectivement C_b) la composante connexe de $G[V \setminus S]$ contenant a (respectivement b).

Soient deux sommets x et y dans S , supposons qu'ils ne sont pas adjacents. Considérons alors le plus petit cycle de G contenant x, y , au moins un sommet de C_a et au moins un sommet de C_b . Comme S est minimal, x est adjacent d'un sommet de C_a et d'un sommet de C_b . De même, y est adjacent à un sommet de C_a et à un sommet de C_b . Et aucun sommet de C_a n'est adjacent à un sommet de C_b donc un tel cycle existe et a une longueur supérieure ou égale à 4 (il doit passer successivement par x, C_a, y et C_b).

Or G est un graphe triangulé donc ce cycle contient une corde, l'arête (x, y) (par minimalité du cycle et puisqu'un sommet de C_a ne peut être adjacent à un sommet de C_b) contradiction.

Supposons maintenant que tout séparateur minimal de G est une clique.

Soit $\mu = \{v_0, \dots, v_k, v_0\}$ un cycle de G ayant au moins quatre sommets (ie : $k \geq 3$). Si $(v_0, v_2) \in E$, alors μ admet une corde.

Si $(v_0, v_2) \notin E$, alors il existe un séparateur minimal S de v_0 et v_2 . S doit contenir v_1 et au moins un des sommets v_3, \dots, v_k . Comme S est une clique, il existe une corde dans μ .

2.1.2 Sommet simplicial :

Définition 2.3

Un sommet x d'un graphe G est dit simplicial si son voisinage $N_G(x)$ est une clique.

Définition 2.4

Un ordre d'élimination simplicial de G est une énumération v_1, v_2, \dots, v_n sur les sommets de G telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, v_i est un sommet simplicial dans le graphe $G_i = G[\mathcal{L}_i]$ où $\mathcal{L}_i = \{v_i, v_2, \dots, v_n\}$.

Lemme 2.1

Tout graphe triangulé possède au moins un sommet simplicial.

De plus, si ce n'est pas complet alors il en possède deux sommets simplicial non adjacents.

Preuve 2.2

Soit $G = (V; E)$ un graphe triangulé, on procède par induction sur $n = |V|$.

L'initialisation étant triviale pour $n = 1$. Supposons que tout graphe triangulé à moins de n sommets en possède un simplicial, et démontrons que G ayant n sommets en a un aussi.

- Si G est complet alors tout sommet est simplicial.
- Si G n'est pas complet, alors il possède deux sommets non adjacents a et b , Soit S un a, b -séparateur minimal de G . $G[V \setminus S]$ a un certain nombre de composantes connexes (voir Figure 2.4), appelons C_a (respectivement C_b) l'ensemble des sommets de celle qui contient a (respectivement b).

Montrons que C_a contient un sommet simplicial (on procède de même pour C_b).

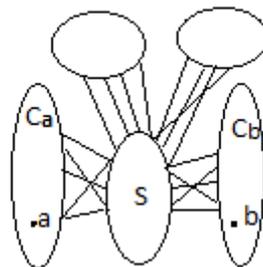


Figure 2.4 : Les deux composantes connexes C_a et C_b contenant respectivement a et b séparées par un a, b -séparateur minimal S de G contiennent chacune un sommet simplicial.

Soit $G[C_a \cup S]$ est une clique.

Alors a est simplicial dans $G[C_a \cup S]$, Or tous les voisins de a appartiennent à $G[C_a \cup S]$, donc a est simplicial dans G .

Soit $G[C_a \cup S]$ n'est pas une clique. Comme b n'appartient pas à $C_a \cup S$ alors $G[C_a \cup S]$ a moins de n sommets, donc d'après l'hypothèse de récurrence : $G[C_a \cup S]$ a deux sommets simpliciaux non adjacents qu'on appelle x et y . Trois cas se présentent alors :

- soit $x \in C_a$, alors tous ses voisins sont dans $A \cup S$, donc x est aussi simplicial dans G .
- soit $y \in C_a$, alors de même y est simplicial dans G .
- soit $x \in S$ et $y \in S$, x et y ne sont pas adjacents, mais S est un séparateur minimal d'un graphe triangulé donc ce devrait être une clique d'après le théorème précédente : contradiction !

Finalement, dans tous les cas, on a montré que C_a et C_b contiennent chacun au moins un sommet simplicial pour G , ce qui conclut la démonstration.

Théorème 2.2 (fulkerson et Gross[3])

Un graphe est triangulé si et seulement s'il possède un ordre d'élimination simplicial.

Preuve 2.3

Supposons que G est triangulé, on procède par induction sur le nombre de sommets de G pour montrer l'existence d'un ordre d'élimination simplicial.

Pour $n = 1$ c'est trivial.

Supposons que $n > 1$ et pour tout graphe triangulé ayant à moins de n sommets admet un ordre d'élimination simplicial.

G est triangulé, donc d'après le lemme précédent il possède un sommet simplicial noté v .

$G - v$ est donc triangulé ayant à moins de n sommets, par conséquent, $G - v$ admet un ordre d'élimination simplicial noté β .

Soit α un ordre de sommets de G qui commence par v et suivi par les sommets dans l'ordre déterminé par β . d'où α est un ordre d'élimination simplicial de G .

Inversement, supposons que G admet un ordre d'élimination simplicial noté α et donné par v_1, v_2, \dots, v_n . Soit μ un cycle arbitraire de longueur supérieur à trois.

Soit v_i le sommet de μ d'énumération (d'étiquette) minimal. α est un ordre d'élimination simplicial implique que $N_G(v_i)$ est une clique, par conséquence il existe une corde qui relie deux voisins de v_i dans μ . Finalement G est triangulé.

2.2 Algorithme de reconnaissance :

L'algorithme est l'algorithme de parcours en largeur lexicographique (abrégé LexBFS) introduit pour reconnaître en temps linéaire les graphes triangulés.

2.2.1 Généralités sur le LexBFS :

L'algorithme LexBFS est un algorithme très utilisé, pour des problèmes divers, et donne souvent de bon résultat.

Il fournit un ordre $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ des sommets du graphe donné en entrée, et cet ordre est souvent un schéma d'élimination, c'est-à-dire que le sommet $\sigma(i)$ a une propriété particulière dans le sous-graphe induit par $\{\sigma(i), \sigma(i+1), \dots, \sigma(n)\}$ (pour tout i).

Pour donner la description de l'algorithme, supposons que chaque sommet a une

étiquette, qui est une suite décroissante d'entiers (au début les étiquettes sont considérées vides). Les sommets sont pris l'un après l'autre, comme dans l'algorithme de parcours en largeur classique, sauf que pour choisir à un moment donné parmi plusieurs sommets candidats, on applique un critère de comparaison : on préfère les sommets dont les voisins déjà visités l'ont été très tôt. Pour exprimer cela, on attribue à chaque sommet une sorte de poids (d'autant plus grand que le sommet a été visité tôt) et on met dans l'étiquette de chaque sommet la liste (décroissante) des poids de ses voisins déjà visités. Ensuite, on choisit à chaque étape le sommet dont l'étiquette est maximum par ordre lexicographique (cet ordre est l'ordre du dictionnaire, où les lettres sont remplacées par des chiffres).

Nous présentons ci-dessous l'algorithme en bref, le graphe sera supposé connexe (si jamais il ne l'est pas, on tire les conclusions sur chacune de ses composantes connexes).

Algorithm 2 LexBFS

Require: un graphe $G = (V; E)$ et un sommet source s

Ensure: un ordre total σ de V .

Affecter l'étiquette \emptyset à chaque sommet.

$label(s) = \{n\}$

Pour i de n à 1 **faire** :

– Choisir un sommet v d'étiquette lexicographique maximale.

– $\sigma(v) = i$.

– **Pour** chaque sommet non numéroté w de $N(v)$ **faire** :

– $label(w) = label(w) \cup \{i\}$ //Concaténation de i à la fin de l'étiquette de

w

2.2.2 Correction :

Pour montrer la correction de LexBFS, on peut voir l'algorithme d'une autre façon.

Algorithm 3 MCS

Require: un graphe $G = (V; E)$ et un sommet source s

Ensure: un ordre total σ de V .

$\mathcal{L}_{n+1} \leftarrow \emptyset$

pour $i \leftarrow n$ jusqu'à 1 **faire**

choisir un sommet $v \in V - \mathcal{L}_{i+1}$ pour que $|N_G(v) \cap \mathcal{L}_{i+1}|$ soit maximal.

$\sigma(v) \leftarrow i$;

$\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_{i+1}$

fin pour

Le lemme et le théorème suivants montrent que l'algorithme MCS, retourne un ordre d'élimination simplicial si le graphe donné en entrée est un graphe triangulé.

Le lemme donne une caractérisation d'un ordre sur les sommets d'un graphe triangulé qui n'est pas un ordre d'élimination simplicial.

Lemme 2.2

Soit σ un ordre sur les sommets de G . σ n'est pas un ordre d'élimination simplicial si et seulement si, pour un sommet v , il existe un chemin sans corde de longueur ≥ 2 de $v = \sigma^{-1}(i)$ à un sommet de $\mathcal{L}_{i+1} = \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ et passant par les sommets de $V - \mathcal{L}_i$

Preuve 2.4

Supposons que σ n'est pas un ordre d'élimination simplicial, d'après le lemme (2.1) il existe un sommet $u \in V$ qui n'est pas simplicial c'est-à-dire son voisinage n'est pas une clique, il existe donc deux sommets v, w voisins de u qui ne sont pas adjacents. Supposons sans perte de généralité $i = \sigma(v) < \sigma(w)$, alors (v, u, w) est un chemin sans corde de longueur 2 de $v = \sigma^{-1}(i)$ à $w \in \mathcal{L}_{i+1}$ passant par $u \in V - \mathcal{L}_i$.

Inversement, supposons qu'il existe un chemin sans corde $\mu = [u_0, u_1, \dots, u_r]$ de longueur $r \geq 2$ de u_0 à $u_r \in \mathcal{L}_{i+1}$ et passe par $u_j \in V - \mathcal{L}_i$ pour $1 \leq j \leq r - 1$. Montrons qu'il existe un sommet de G dont l'ensemble de ses voisins n'est pas une clique. Soit u_k un sommet de μ avec $1 \leq k \leq r - 1$ tels que $\text{label}\sigma(u_k)$ est le plus petit parmi tous les sommets intérieurs de μ . Finalement $N_G(u_k) \cap \mathcal{L}_{i+1}$ contient deux sommets non-adjacents qui sont les voisins de u_k dans ν . Par conséquent σ n'est pas un ordre d'élimination simplicial.

Théorème 2.3

Tout ordre produit par MCS est un ordre d'élimination simplicial si et seulement si le graphe est triangulé. Sa complexité est $\mathcal{O}(n + m)$.

Preuve 2.5

Soit α un ordre sur les sommets d'un graphe triangulé qui n'est pas un ordre d'élimination simplicial. Nous prouvons que l'ordre σ ne peut pas produit par l'algorithme MCS.

D'après le lemme (2.2), pour un sommet u_0 il existe un chemin sans corde $\mu = [u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, u_r]$ de longueur $r \geq 2$ de $u_0 = \alpha^{-1}(i)$ à $u_r \in \mathcal{L}_{i+1}$ passant par $u_j \in V - \mathcal{L}_i$ pour $1 \leq j \leq r - 1$. On choisit u_0 de telle sorte que $i = \alpha(u_0)$ est maximale et pour lequel le chemin sans corde existe.

Pour montrer que α n'est pas un ordre produit par MCS, il suffit de montrer qu'il existe un sommet $w \in V - \mathcal{L}_i$ pour lequel $|N_G(w) \cap \mathcal{L}_{i+1}|$ dépasse $|N_G(u_0) \cap \mathcal{L}_{i+1}|$ montrons donc que u_{r-1} est exactement le sommet qui la vérifier.

Il suffit donc de montrer que $N_G(u_0) \cap \mathcal{L}_{i+1} \subset N_G(u_{r-1}) \cap \mathcal{L}_{i+1}$.

Si $N_G(u_0) \cap \mathcal{L}_{i+1} = \emptyset$ le résultat est vrai puisque u_{r-1} est adjacent à $u_r \in \mathcal{L}_{i+1}$. Sinon, soit $x \in N_G(u_0) \cap \mathcal{L}_{i+1}$. On considère un chemin $\gamma = [x, u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, u_r]$, la maximalité de i implique que tout chemin de longueur supérieur à 1 vérifie les propriétés suivantes admet une corde :

- (a) Les extrémités de chemin ont une énumération supérieur à i .
- (b) L'énumération des sommets intérieurs est inférieur au minimum d'énumération des sommets d'extrémité de chemin.

Comme γ satisfait ces deux propriétés alors γ contient une corde. De plus $\mu = [u_0, u_1, \dots, u_{r-1}, u_r]$ est sans corde, ceci implique que chaque corde de γ est incidente à x . Soit u_k un sommet de γ adjacent à x et dont l'indice est maximal. Si $k = r$ alors $[x, u_k, \dots, u_r]$ est un chemin sans corde, contradiction avec i est maximal, par conséquent $(x, u_r) \in E$.

Il en résulte que $\delta = [x, u_0, \dots, u_{r-1}, u_r, x]$ est un cycle de longueur supérieur à 3 dans

G ($r \geq 2$). Comme G triangulé alors δ admet une corde et incident à x . Soit u_t un sommet de δ dont l'indice est plus grand et différent de r pour lequel $(x, u_t) \in E$. Si $t \neq r - 1$, alors $[x, u_t, \dots, u_r, x]$ est un cycle sans corde de longueur supérieur à 3, absurde avec le fait que G est triangulé. Par conséquent $(x, u_{r-1}) \in E$ pour tout $x \in N_G(u_0) \cap \mathcal{L}_{i+1}$. Mais aussi u_{r-1} est adjacent à $u_r \in \mathcal{L}_{i+1} - (N_G(u_0) \cap \mathcal{L}_{i+1})$ ce qui achève la démonstration.

2.2.2.1 Application de l'algorithme sur un exemple :

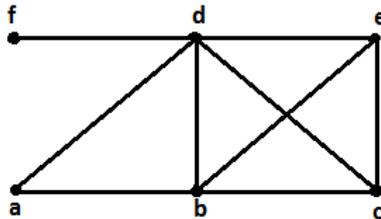


Figure 2.5 : Graphe triangulé

σ	6	5	4	3	2	1
a	\emptyset	$\{6\}$	$\{6, 5\}$	$\{6, 5\}$	$\star \{6, 5\}$	
b	\emptyset	$\star \{6\}$				
c	\emptyset	$\{6\}$	$\star \{6, 5\}$			
d	$\star \emptyset$					
e	\emptyset	$\{6\}$	$\{6, 5\}$	$\star \{6, 5, 4\}$		
f	\emptyset	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\star \{6\}$

L'ordre σ obtenu est : f, a, e, c, b, d . Nous pouvons vérifier facilement que l'ordre σ est ordre d'élimination simplicial de G .

CHAPITRE 3

LES GRAPHES FAIBLEMENT TRIANGULÉS

Le but de ce chapitre est d'étudier la classe des graphes faiblement triangulés introduite par Hayward[21] et qui est une généralisation la plus connue des graphes triangulés.

3.1 Définition et propriétés :

Définition 3.1

Un graphe est faiblement triangulé s'il ne contient ni trou long ni anti-trou long.

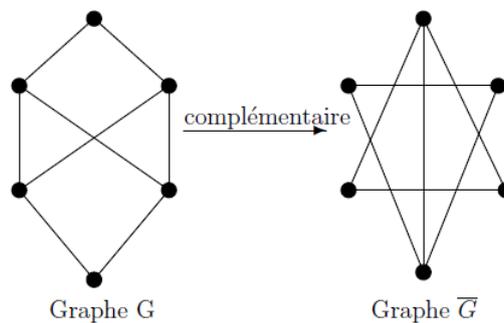
Exemple 3.1

Figure 3.1 : G est faiblement triangulé car : ni G ni \bar{G} ne contient de trou.

L'invariance de cette définition par complémentaire implique le théorème suivant :

Théorème 3.1

G est faiblement triangulé si et seulement si \bar{G} est faiblement triangulé.

Remarque 3.1

Il est facile de vérifier qu'un cycle sans corde avec 5 sommets est isomorphe à son complémentaire, et que le complémentaire d'un cycle avec au moins 6 som-

mets contient un cycle sans corde avec quatre sommets ; par conséquence les graphes triangulés sont faiblement triangulés et que le complémentaire d'un graphe triangulé est faiblement triangulé.

3.2 Caractérisation des graphes faiblement triangulés :

Nous présentons ici la notion de paire d'amis d'un graphe introduite par Meyniel[6] et d'une arête libre d'un P_4 qui sont des outils pour caractériser la classe des graphes faiblement triangulés.

Définition 3.2

L'arête centrale d'un P_4 $[a, b, c, d]$ est bc . Une arête est libre si elle n'est pas l'arête centrale d'un P_4 .

Théorème 3.2 (Chvatal, Rusu[26])

Si G est un graphe non vide sans trous, alors G contient une arête libre.

Théorème 3.3 ([18])

Un graphe est faiblement triangulé si, et seulement si, il peut être engendré de la manière suivante :

- commencer par un graphe G_0 sans arêtes.
- créer G_j ($j \geq 1$) en rajoutant à G_{j-1} une arête libre, répéter cette opération un nombre suffisant de fois.

A partir du théorème (3.2), il est facile de voir que tout sous-graphe d'un graphe faiblement triangulé contient une arête libre. En fait, on peut éliminer une à une les arêtes libres convenablement choisies afin d'obtenir un graphe nul. Inversement, on peut construire un graphe faiblement triangulé à partir d'un graphe nul en ajoutant des arêtes libres.

La caractérisation des graphes faiblement triangulés basé sur l'existence d'une arête libre n'est pas utile pour une reconnaissance efficace de cette classe de graphe. Le meilleur algorithme tire profit de l'existence dans ces graphes d'une 2-paire.

Définition 3.3

On appelle paire d'amis d'un graphe G toute paire $\{x, y\}$ de sommets de G telle que tous les chemins sans corde reliant x à y sont de longueur paire.

Définition 3.4

Soit x, y deux sommets de G . On dit que $\{x, y\}$ est une 2-paire de G si tout chemin sans corde reliant x à y est de longueur 2.

Remarque 3.2

Les 2-paires ont l'avantage par rapport aux paires d'amis d'être faciles à détecter

Théorème 3.4

$\{x, y\}$ est une 2-paire dans G si et seulement si $S_{xy} = N_G(x) \cap N_G(y)$ est un xy -séparateur minimal.

Preuve 3.1

Supposons tout d'abord que $\{x, y\}$ est une 2-paire. Montrons alors que S_{xy} est un xy -séparateur minimal.

$\{x, y\}$ est une 2-paire donc tous les chemins sans corde reliant x et y sont de longueur deux. Par conséquent tous les chemins sans corde reliant x et y sont de la forme xzy . Or tous les chemins de cette forme intersectent évidemment $N_G(x) \cap N_G(y)$ en z . S_{xy} est donc un xy -séparateur. De plus, $N_G(x) \cap N_G(y)$ est inclus dans tout xy -séparateur (sans quoi il existe un chemin de longueur 2 passant par un sommet s de $N_G(x) \cap N_G(y)$ non-inclus dans le séparateur xzy). S_{xy} est donc un xy -séparateur minimal.

Réciproquement, montrons que si S_{xy} est un séparateur, alors $\{x, y\}$ est une 2-paire. En effet, si S_{xy} est un xy -séparateur, tout chemin μ reliant x et y intersecte S_{xy} en un sommet z . Donc μ est alors xzy (c'est-à-dire de longueur 2) ou admet une corde (xz ou zy). Donc $\{x, y\}$ est une 2-paire.

Hayward et al[19] ont montré l'existence de 2-paire dans chaque graphe faiblement triangulé qui n'est pas complet.

Théorème 3.5 ([20])

Soit $G = (V, E)$ un graphe faiblement triangulé alors, tout sous-graphe induit de G différent d'un graphe complet possède une 2-paire.

Remarque 3.3

Remarquons que si $\{x, y\}$ est une 2-paire, alors x, y ne peuvent pas être dans un trou ou dans antitrou, ceci implique que le théorème (4.2) caractérise la classe des graphes faiblement triangulés.

Théorème 3.6 ([9])

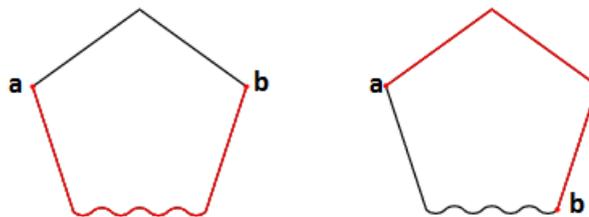
Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\{x, y\}$ une 2-paire dans G .

Soit $G' = (V, E')$ un graphe obtenu à partir de G en ajoutant l'arête entre x et y , alors G est faiblement triangulé si et seulement si G' est faiblement triangulé.

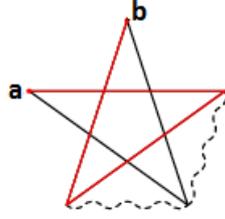
Preuve 3.2

Il s'agit de prouver que l'ajout d'une arête entre les sommets x et y d'une 2-paire ne crée ni ne détruit de trou ni d'antitrou.

Prouvons tout d'abord que l'ajout de l'arête xy ne détruit pas de trou ni d'antitrou. Si $\{x, y\}$ est une 2-paire, il n'existe pas de trou ou d'antitrou passant par les deux sommets x et y . En effet pour détruire un trou ou un antitrou, il faudrait que l'arête rajoutée relie deux sommets de trou ou d'antitrou. Or deux sommets non adjacents d'un trou sont reliés par un chemin sans corde de longueur supérieur à trois (comme on le voit sur les deux figure suivantes qui représentent deux cas : quand a et b sont séparés par un ou deux sommets) :



Il en est de même pour deux sommets non adjacents d'un antitrou.



Les trous et antitrous ne sont donc pas détruits par l'addition de l'arête reliant les deux sommets d'une 2-paire.

Supposons que l'ajoute d'une arête entre deux sommets qui forme une 2-paire crée un trou $(x = x_1, x_2, \dots, x_k = y)$, $k \geq 5$ dans G' . Ceci implique que $(x, x_2, \dots, x_{k-1}, y)$ est un chemin sans corde dans G de longueur > 2 , contradiction avec le fait que $\{x, y\}$ est une 2-paire dans G .

Maintenant supposons que l'ajoute d'une arête entre une 2-paire $\{x, y\}$ crée dans G' un antitrou $(x_1, \dots, x = x_i, \dots, y = x_j, \dots, x_k)$, $k \geq 6$. On note que l'antitrou crée contient au moins 6 sommets (un trou de taille 5 est isomorphe à un antitrou de taille 5 donc ce cas est déjà traité). x et y ne sont pas adjacents dans G , $(j - i) \geq 2$.

On distingue deux cas :

Cas 1 : Si $(j - i) = 2$, alors (x, x_{j+1}, x_{i-1}, y) doit être un chemin sans corde de G , contradiction avec le fait que $\{x, y\}$ est une 2-paire dans G .

Cas 2 : comme l'antitrou crée a au moins 6 sommets, on peut donc supposer que $|i - j| \geq 3$, ceci implique que (x, x_{j+1}, x_{i+1}, y) est un chemin sans corde de G , contradiction avec $\{x, y\}$ est une 2-paire dans G .

3.2.1 Détection de 2-paire :

L'algorithme de reconnaissance des graphes faiblement triangulés, ainsi l'algorithme utilisé pour résoudre les problèmes d'optimisation, considèrent le problème de détection de 2-paire comme un sous-problème.

Arikati et Pandu Rangan [22] ont donné un algorithme prenant en entrée un graphe G et une liste des adjacents $N_G(v)$ pour $v \in V$, et qui en retourne une 2-paire s'il y en a une.

Soient v un sommet fixé de G et $N_G(v) = \{u \mid u \text{ est adjacent à } v\}$.

Posons $H = G - (\{v\} \cup N(v))$, si $H = \emptyset$ alors deux sommets non adjacents de $N_G(v)$ forme une 2-paire, sinon soit H_1, H_2, \dots, H_k les composantes connexes de H . On définit $N_i(v)$ par : $N_i(v) = \{u \mid u \in N(v) \text{ et } u \text{ adjacent à un sommet de } H_i\}$

Lemme 3.1

Soit u un sommet de la composante connexe H_i de H . (u, v) est une 2-paire si et seulement si u est adjacent à tous les sommets de $N_i(v)$.

Soit u un sommet de H .

On note par $label(u)$ l'indice de la composante connexe de H qui contient u , on définit $NV(u)$ par : $NV(u) = \{w \mid w \text{ adjacent à } u \text{ et } w \in N(v)\}$

Lemme 3.2

Soit $u \in H$, (v, u) forme une 2-paire si et seulement si $|N_{label(u)}(v)| = |NV(u)|$.

Preuve 3.3

D'après le lemme (3.1), (u, v) est une 2-paire si et seulement si $N_{label(u)}(v) = NV(u)$. Il résulte des définitions de $N_{label(u)}(v)$ et $NV(u)$ que $N_{label(u)}(v) = NV(u)$ si et seulement si $|N_{label(u)}(v)| = |NV(u)|$.

Algorithm 4 détection de 2-paire

Require: un graphe $G = (V; E)$, et $N_G(v)$ pour $v \in V$.

Ensure: une 2-paire s'il existe.

```
{
  étape 1 : pour tout  $v \in V$  faire
  {
    étape 1.1 : déterminer les composantes connexes  $H_1, H_2, \dots, H_k$  de  $H = G - (\{v\} \cup N_G(v))$ 
    étape 1.2 : pour tout  $x \in N_G(v)$  faire :  $label(x) = 0$ ;
    étape 1.3 : pour tout  $u \in H$  faire : calculer  $label(u)$ ;
    étape 1.4 : pour tout  $u \in H$  faire : calculer  $|NV(u)|$ ;
    étape 1.5 :
      pour  $i = 1$  jusqu'à  $k$  faire :
         $N_i(v) = \emptyset$ 
        pour tout  $x \in N_G(v)$  faire :
          {
            pour tout  $u \in N_G(x)$  faire :
              Si  $label(u) \neq 0$  alors :
                 $N_{label(u)}(v) = N_{label(u)}(v) \cup \{x\}$ 
          }
        étape 1.6 : pour tout  $u \in H$  faire :
          calculer  $|N_{label(u)}(v)|$ ;
        étape 1.7 : pour tout  $u \in H$  faire :
          Si  $|N_{label(u)}(v)| = |NV(u)|$  Alors :
             $(u, v)$  est une 2-paire
      }
  }
}
```

Théorème 3.7 ([22])

L'algorithme "détection de 2-paire" détecte une 2-paire dans le graphe $G = (V, E)$ s'il existe. Sa complexité est $\mathcal{O}(n.m)$, où $n = |V|$, $m = |E|$.

Remarque 3.4

L'algorithme s'inspire son fonctionnement du lemme (3.2).

3.2.2 Algorithme de reconnaissance :

Dans cette partie, nous présentons un algorithme de reconnaissance des graphes faiblement triangulés de complexité $\mathcal{O}(mn^2)$.

L'algorithme calcul une séquence de graphe, en commençant par le complémentaire du graphe donné en entrée.

L'étape de base est : trouver une 2-paire dans le graphe donné et ajouter une arête entre les deux sommets qui forme une 2-paire, jusqu'à ce qu'il n'y a pas de 2-paire dans le graphe.

L'algorithme est le suivant :

Algorithm 5 Reconnaissance(G)

Require: un graphe non orienté G **Ensure:** Oui si le graphe est faiblement triangulé, non dans le cas contraire.

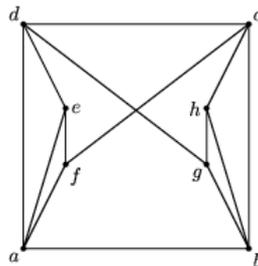
```
{
  Calcul de  $\overline{G}$ , complémentaire de  $G$ .
  détection de 2-paire  $\leftarrow$  Vrai.
  tant que(détection de 2-pair) et ( $\overline{G}$  n'est pas complet) faire
  s'il existe une deux-paire  $\{x, y\}$  dans  $\overline{G}$  alors ajouter l'arête entre  $x$  et  $y$ 
  sinon
  détection de 2-paire  $\leftarrow$  Faux;
  Si  $\overline{G}$  est complet alors
  retourne Oui
  Sinon
  retourne Non
}
```

Remarque 3.5

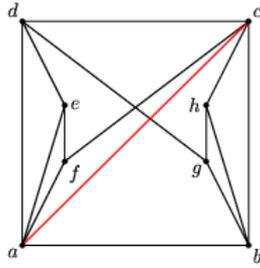
L'algorithme ci-dessus effectue la reconnaissance du graphe complémentaire \overline{G} . Cependant le résultat est valable d'après le théorème (3.1). Le fait de travailler dans le complémentaire permet de supprimer les arêtes induites par les co-paires de G (ie : une 2-paire de \overline{G}) au lieu de rajouter les arêtes induites par ses 2-paires. Ainsi le nombre d'itérations est majoré par le nombre d'arête de G (les sommets d'une 2-paire n'étant reliés que par des chemins sans corde de longueur 2, ils induisent, a fortiori, une arête dans le graphes complémentaire).

3.2.3 Application de l'algorithme sur un exemple :

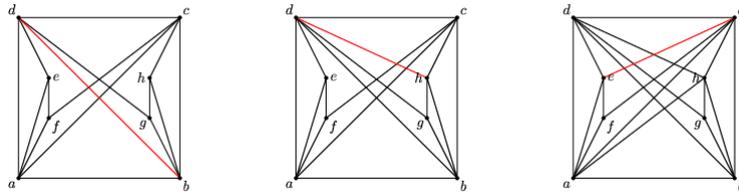
Nous allons considérer l'algorithme sur le graphe faiblement triangulé suivant :



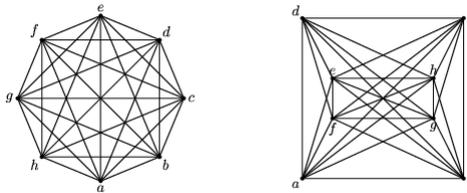
Algorithme commence par calculer les 2-paires de ce graphe : il trouve donc les 2-paire $\{a, c\}$ et $\{b, d\}$. Il prend alors une des 2-paire et ajoute l'arête correspondante : ajoutons par exemple l'arête ac .



On reprend alors les étapes en trouvant une nouvelle 2-paire et en ajoutant l'arête correspondante itérativement : à cette étape de l'algorithme, il y a deux 2-paires $\{b, d\}$ et $\{c, e\}$, ajoutons par exemple bd . L'algorithme pourra alors ajouter les arêtes dh puis ce .



L'algorithme se termine donc dès lors qu'il n'existe plus de 2-paire dans le graphe. Le graphe est alors faiblement triangulé si et seulement s'il est complet :



CHAPITRE 4

COLORATION

Le problème de coloration des graphes n'est pas inutile : les nombreux problèmes pratiques qui apparaissent dans les domaines les plus divers le prouvent. Il n'est pas facile non plus : la théorie de la complexité qui l'a classé parmi les problèmes NP-complets le garantit.

4.1 Définitions :

Définition 4.1

Soient $G = (V, E)$ un graphe et k un entier.

On appelle k -coloration de G toute partition de V en k stables.

Remarque 4.1

Une k -coloration de G est une application $f : V \rightarrow S = \{1, 2, \dots, k\}$, telle que $f(u) \neq f(v)$ si u et v sont adjacents.

Définition 4.2

Le nombre chromatique de G noté $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que G possède une k -coloration.

On note $\omega(G)$ (resp. $\alpha(G)$) la taille d'une clique (resp. d'un stable) de G de taille maximale ; autrement dit $\omega(G) = \max\{|C| : C \text{ est une clique de } G\}$ (resp. $\alpha(G) = \max\{|C| : C \text{ est un stable de } G\}$), où $|C|$ désigne le nombre d'éléments de C .

4.2 La classe des graphes parfaits :

La classe des graphes parfaits a été définie par Berge au début des années 1960 comme une classe assez générale pour laquelle le problème de la coloration pouvait être résolu efficacement. Peu à peu plusieurs résultats ont montré que cette classe

possédait de nombreuses bonnes propriétés, et qu'elle contenait un grand nombre de classes déjà existantes. L'histoire de cette classe de graphes est fortement liée aux conjectures forte et faible des graphes parfaits, qui ont été énoncées en 1961, et prouvées respectivement en 2002 et 1972.

Définition 4.3 (Graphe γ -parfait.)

On dit qu'un graphe G est γ -parfait si tous les sous graphes induits H , y compris G lui-même, vérifient :

$$\omega(H) = \chi(H)$$

On parle de graphe γ -parfait, et non simplement de graphe parfait, car on peut définir une notion totalement duale. On note :

$\theta(G)$ le plus petit nombre de cliques nécessaire pour couvrir G .

Définition 4.4 (Graphe α -parfait.)

On dit qu'un graphe G est α -parfait si et seulement si tous les sous-graphes induits H , y compris G lui-même, vérifient :

$$\alpha(H) = \theta(H).$$

Ainsi, G est γ -parfait si et seulement si \overline{G} est α -parfait.

Définition 4.5

Un graphe est dit parfait s'il est γ -parfait et α -parfait.

Remarque 4.2

Les définitions précédentes ne sont pas immédiatement utilisables, car elles imposent de vérifier une égalité sur tous les sous-graphes induits d'un graphe. Si l'on veut prouver qu'une classe \mathcal{F} est contenue dans la classe des graphes parfaits, on préfère vérifier les conditions suffisantes suivantes :

- \mathcal{F} est héréditaire
- pour tout graphe G de \mathcal{F} , $\omega(G) = \chi(G)$ (ou $\alpha(G) = \theta(G)$).

Exemple 4.1 (graphes complets)

La classe des graphes complets est trivialement héréditaire. Il est évident que $\omega(K_p) = \chi(K_p) = p$. De plus, les graphes complets sont également α -parfait, car $\alpha(G) = \theta(G) = 1$.

La classe des graphes parfaits est stable par complémentaire, Berge l'a conjecturé en 1961, et la preuve de ce résultat a été donnée par László Lovász en 1972.

Théorème 4.1 (La conjecture faible des graphes parfaits)

G est γ -parfait si et seulement s'il est α -parfait.

Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Lovász, et qui est plus fort.

Théorème 4.2 ([15])

Si G est un graphe, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est α -parfait.
2. G est γ -parfait.
3. Pour tout sous-graphe induit H , $\omega(H)\alpha(H) \geq |H|$.

La bonne idée pour arriver à ce résultat est de considérer une construction, qui ressemble un peu à l'inverse de la suppression de sommets pour obtenir un sous-graphe induit. Si G est un graphe, et x l'un de ses sommets, $G \circ x$ est le graphe obtenu en ajoutant un nouveau sommet x' à G , possédant le même voisinage que x .

Définition 4.6

Si G est un graphe à n sommets x_1, x_2, \dots, x_n , et h un vecteur d'entiers positifs ou nuls (h_1, h_2, \dots, h_n) , le graphe $H = G \circ h$ est le graphe obtenu à partir de G par

$$H = G \circ x_1 \circ \dots \circ x_1 \circ x_2 \dots \circ x_n$$

où chaque x_i apparaît h_i fois. Autrement dit, $H = G \circ h$ est obtenu en substituant à chaque x_i un stable comprenant h_i sommets. On dit que H est obtenu à partir de G par multiplication de sommets.

Exemple 4.2

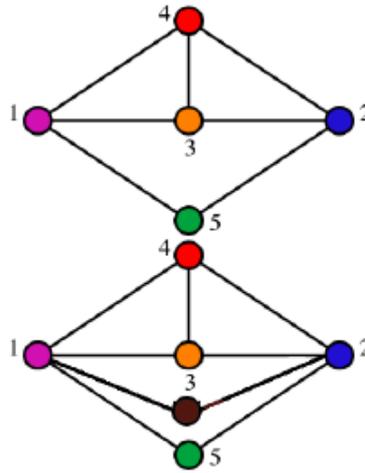


Figure 4.1- Exemple de graphe et son multiplié en 5

Propriété 4.1

Si x, y deux sommets distincts de G , alors $(G \circ x) - y = (G - y) \circ x$

Preuve 4.1

L'opération $- \circ x$ n'affecte que les voisins de x , l'égalité est triviale si y n'est pas un voisin de x . On note $N_G(x)$ les voisins de x dans G . Lorsque $y \in N_G(x)$:

– x et x' ont pour voisinage $N_G(x)$ dans $G \circ x$, donc leur voisinage est $N_G(x) - y$ dans $(G \circ x) - y$.

– x a pour voisinage $N_G(x) - y$ dans $G - y$, donc x et x' ont encore pour voisinage $N_G(x) - y$ dans $(G - y) \circ x$.

Lemme 4.1

Si G vérifie l'égalité $\alpha(G) = \theta(G)$, si \mathcal{K} est une couverture minimum de G par des cliques, c'est-à-dire $|\mathcal{K}| = \theta(G)$, et si \mathcal{S} est l'ensemble de tous les indépendants, disjoint ou non, de cardinal maximum $\alpha(G)$ alors :

$$\forall S \in \mathcal{S}, K \in \mathcal{K}, |S \cap K| = 1$$

Preuve 4.2

Supposons par absurde qu'il existe K et S tels que $S \cap K = \emptyset$, alors

- $\alpha(G - K) = \alpha(G)$, car retirer K préserve l'indépendant S .
- $\theta(G - K) \leq \theta(G) - 1$ car en retirant $K - K$ est une couverture de G de taille $\theta(G) - 1$.

Comme $\alpha(G) = \theta(G)$, on aurait $\theta(G - K) \leq \alpha(G - K) - 1$ ce qui absurde car pour tout graphe G on a $\alpha(G) \leq \theta(G)$.

Lemme 4.2 (berge 1961.)

Si H est obtenu à partir de G par multiplication de sommets :

1. Si G est γ -parfait, H l'est aussi.
2. Si G est α -parfait, H l'est aussi.

Preuve 4.3

Par induction sur le nombre de sommets de graphe G . Il est évident lorsque G n'a qu'un seul sommet.

Si G est un graphe à $n > 1$ sommets, $\gamma - \alpha$ -parfait, et h un vecteur de taille n , soit $H = G \circ h$.

Si l'une des composantes h_i de h est nulle, la propriété (4.1) montre que l'on obtient H à partir de $G - x_i$ par multiplication de sommets. Par hérédité, $G - x_i$ est $\gamma - \alpha$ -parfait, donc par récurrence, $H = (G - x_i) \circ h'$ l'est aussi.

Supposons donc que toutes les composantes de h sont strictement positive. D'après la définition de multiplication de sommets, on peut même trouver le lemme par la multiplication par un seul sommet x . Soit x' la copie de x dans $G \circ x$.

x et x' ne sont pas adjacents dans $G \circ x$, donc la multiplication par x n'augmente pas le nombre de clique c'est-à-dire $\omega(G) = \omega(G \circ x)$, puisque toute clique contenant x' est isomorphe à une clique de G contenant x . De plus, si l'on possède un coloriage optimal f de G , $G \circ x$ est colorié de façon optimale par f , étendu sur x' par $f(x) = f(x')$. $G \circ x$ est donc γ -parfait dès que G l'est.

Si G est α -parfait, c'est-à-dire $\alpha(G) = \theta(G)$, montrons que $\alpha(G \circ x) = \theta(G \circ x)$.

On note \mathcal{K} un ensemble minimal de clique couvrant de G , $|\mathcal{S}| = \theta(G) = \alpha(G)$, et K_x la clique de \mathcal{K} couvrant x , alors deux cas se présentent :

- Soit x est dans un indépendant de G de taille maximale, dans ce cas le plus grand indépendant de $G \circ x$ s'obtient en ajoutant x' : $\alpha(G \circ x) = \alpha(G) + 1$

$\mathcal{K} \cup \{x'\}$ couvre $G \circ x$, d'où :

$$\theta(G \circ x) \leq \theta(G) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(G \circ x) \leq \theta(G \circ x)$$

Par conséquent, $G \circ x$ est α -parfait.

– Si x n'est dans aucun indépendant maximum, donc l'ajout de x' ne change pas la taille des indépendants maximums : $\alpha(G) = \alpha(G \circ x)$. Chaque clique de \mathcal{K} a exactement un point d'intersection avec un indépendant maximum, donc en particulier K_x . Comme x n'est dans aucun indépendant, $D = K_x - \{x\}$ rencontre tout indépendant maximum de G exactement une fois, donc $\alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1$. Puisque G_{V-D} est parfait par hypothèse, $\theta(G_{V-D}) = \alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1 = \alpha(G \circ x) - 1$. On peut alors couvrir $G \circ x$ en utilisant une couverture de G_{V-D} avec la clique $D \cup \{x'\}$, qui est de taille $\alpha(G \circ x) = \theta(G \circ x)$.

Ce lemme nous permet d'établir le résultat final, à savoir l'équivalence de (1), (2) et (3) du théorème (4.2).

Lemme 4.3

Si G est un graphe α -parfait, alors tout graphe $H = G \circ h$ satisfait la condition 3 du théorème (4.2) dès que G vérifie cette condition.

Preuve 4.4

La preuve se fait par récurrence sur le nombre de sommets, le cas d'un seul sommet est trivial.

Si G a n sommets, supposons qu'il existe un plus petit contre exemple $H = (X, F)$, où $|X|$ est minimal, H obtenu par la multiplication de sommets et tel que $\omega(H)\alpha(H) \leq |X|$. Si $H = G \circ h$, alors toutes les composantes de h sont strictement positives car sinon $H = (G - x) \circ h'$ ne sera pas un contre-exemple d'après l'hypothèse de récurrence. De plus il existe un sommet u qui est multiplié k fois, avec $k \geq 2$, car sinon H serait égal à G , et ne serait pas non plus un contre-exemple.

Par minimalité de H , $H - u$ est un multiple de G à $|X| - 1$ sommets et vérifie donc l'inégalité $|X| - 1 \leq \omega(H - u)\alpha(H - u) \leq \omega(H)\alpha(H)$. H est un contre exemple alors, $\omega(H)\alpha(H) \leq |X| - 1$, d'où $|X| - 1 = \omega(H - u)\alpha(H - u) = \omega(H)\alpha(H)$. Soient :

$$p = \omega(H - u) = \omega(H)$$

$$q = \alpha(H - u) = \alpha(H)$$

D'après l'égalité précédente, $pq = |X| - 1$.

G est α -parfait, donc le lemme (4.2) assure que $H - U$ l'est aussi, où U est l'ensemble des copies de u dans H . Il existe une couverture par q cliques, que l'on suppose disjointes deux à deux. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^q |K_i| = |H - U| = pq - (k - 1)$$

Chaque clique est de taille au plus $p = \omega(H)$: sur les q cliques de la somme précédente, au plus $k - 1$ d'entre elles peuvent donc contenir strictement moins de p éléments. Ceci revient à dire que $q - (k - 1)$ cliques contiennent exactement p sommets : on suppose qu'il s'agit de K_1 à $K_{q-(k-1)}$.

L'ensemble $X' = u \cup \bigcup_{i=1}^{q-(k-1)} K_i$ est de cardinal $p(q - (k - 1)) + 1$. Comme $|X'| < pq + 1 = |X|$, le sous-graphe H' de H induit par X' vérifie la condition(3) car H' est également induit de G et H est minimal : $\omega(H')\alpha(H') \geq p(q - (k - 1)) + 1$. Comme $p = \omega(H) \geq \omega(H')$, alors $\alpha(H') \geq |X'|/p = q - (k - 1) + 1/p$.

Il existe donc un indépendant S' dans H' de taille $q - k + 2$. Par définition de H' , u est dans cet indépendant, car sinon S' serait composé de $q - k + 2$ sommets pris dans $q - k + 1$ cliques absurde. Mais alors $S = S' \cup U$ est un indépendant de H , car on ne fait qu'ajouter les $k - 1$ copies restantes de u , de taille $q + 1 > \alpha(H)$ ce qui est absurde.

Le lemme (4.3) permet désormais de conclure la preuve du théorème (4.2). Il suffit de prouver que les conditions 1 et 3 sont équivalentes : en effet, la condition 3 est inchangée lorsqu'elle est appliquée à G ou \overline{G} , car $\omega(G)$ est dual de $\alpha(G)$. Ainsi :

- G est α -parfait si et seulement si \overline{G} est γ -parfait,
- G vérifie la condition 3 si et seulement si \overline{G} vérifie la condition 3.

L'équivalence entre 1 et 3 permet donc de conclure que 2 et 3 sont équivalentes.

$1 \Rightarrow 3$ L'inégalité $\chi(G)\alpha(G) \geq |V|$, pour tout graphe $G = (V, E)$ est évidente : une couleur définit un indépendant, donc il y a au plus $\alpha(G)$ sommets d'une couleur donnée. Si G vérifie 1, tout sous-graphe induit H vérifie $\chi(H) = \omega(H)$, donc G

vérifie 3.

$3 \Rightarrow 1$ Par récurrence sur le nombre de sommets du graphe $G = (V, E)$. Le cas à un seul sommet est trivial.

Supposons que tout sous-graphe strict induit de G vérifie l'implication $3 \Rightarrow 1$: il suffit de prouver désormais que $\omega(G) = \chi(G)$.

S'il existe un indépendant S qui, lorsqu'on l'enlève de G , fait diminuer le nombre de clique $\omega(G_{V-S}) < \omega(G)$, on pourrait, par hypothèse de récurrence, colorier G_{V-S} avec $\omega(G) - 1$ couleurs, et donc G serait colorier avec $\omega(G)$, donc $\omega(G) = \chi(G)$.

Sinon, pour tout indépendant S , il existe une clique $K(S)$ de taille $\omega(G)$, qui ne rencontre pas S . On note \mathcal{S} l'ensemble des tous les indépendants de G , et on définit h_i pour tout sommet x_i de G par :

$$h_i = |\{K(S) \text{ telles que } S \in \mathcal{S}, x_i \in K(S)\}|$$

Soit $H = G \circ x$, et considérons la matrice d'adjacence entre les x_i et les $K(S_j)$, où l'élément (i, j) vaut 1 si et seulement si $x_i \in K(S_j)$, et 0 sinon. Le nombre n de sommets de H est le nombre de 1 dans cette matrice :

$$n = \sum_{x_i \in V} h_i = \sum_{S \in \mathcal{S}} |K(S)| = \omega(G)|\mathcal{S}|$$

En effet, le chiffre 1 apparait h_i fois à la ligne i , et $|K(S_j)| = \omega(G)$ fois dans la colonne j , la matrice possédant $|\mathcal{S}|$ colonnes.

Or la multiplication de sommets n'augmente pas la taille des cliques déjà présentes : au pire, l'un des h_i est nul, et cette taille peut éventuellement diminuer, donc $\omega(H) \leq \omega(G)$. Enfin on peut majorer $\alpha(G)$ par $|\mathcal{S}| - 1$ car :

$$\alpha(G) = \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{x_i \in T} h_i = \max_{T \in \mathcal{S}} \sum_{S \in \mathcal{S}} |T \cap K(S)|$$

et $|T \cap K(S)|$ vaut au plus 1, sinon T ne serait pas un indépendant, sauf dans le cas où $T = S$ où cette intersection est de taille vide.

En regroupant les deux majorations de $\omega(H)$ et de $\alpha(H)$, on peut écrire $\omega(H)\alpha(H) < n$, ce qui contredit le lemme (4.3).

Théorème 4.3 (La conjecture forte des graphes parfaits)

G est parfait si et seulement si, ni G ni \bar{G} ne contiennent de trou de longueur impair.

La conjecture forte a été donc démontré en 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, Robin Thomas dans un article de 150 pages. On appelle graphe de Berge un graphe qui ne contient ni trou impair ni son complément comme sous-graphe induit. Tout graphe parfait est bien évidemment un graphe de Berge. Le Théorème Fort des Graphes Parfaits affirme que la réciproque est vraie : tout graphe de Berge est parfait.

Définition 4.7

Un graphe L est le graphe lignes du graphe G si $V(L) = A(G)$ et deux sommets de L sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes de G ont un sommet en commun.

Proposition 4.1 ([5])

Le graphe lignes d'un graphe biparti est parfait.

Les graphes bipartis sont parfaits puisque la bipartition induit deux classes de couleur et par conséquent $\omega(H) = \chi(H)$ dans tout sous-graphe induit H .

L'idée de la démonstration de la conjecture forte est que tout graphe de Berge ou bien fait partie d'une classe de graphes parfaits parmi quatre classes élémentaires connues (les graphes bipartis, leurs compléments, les graphes lignes de graphes bipartis et leurs compléments) ou bien a un type de séparation qui ne peut pas se produire dans un graphe minimalement imparfait à savoir par exemple l'étoile déconnectante que nous allons étudier prochainement pour démontrer que les graphes faiblement triangulés sont parfaits. On donne la preuve de la conjecture forte sur quelques classes particulières des graphes.

Graphes triangulés : Une des caractérisations des graphes triangulés est justement par l'absence de cycles de longueur au moins 4 sans corde, donc en particulier un graphe triangulé ne possède pas de trou.

On peut remarquer ensuite que la classe des graphes triangulés est héréditaire, et il suffit donc de prouver que les anti-trous ne sont pas triangulés. Si C_k est un anti-cycle, avec $k \geq 5$, et x l'un de ses sommets, alors x est relié à tous les sommets du graphe sauf ses voisins sur le cycle C_k . En particulier, x est relié à y et à un voisin z de y : mais z et y ne sont pas reliés, donc x ne peut pas être simplicial. Ainsi, dès qu'un graphe contient un anti-cycle de longueur au moins 5, donc en particulier les anti-trous, il n'est pas triangulé.

RYAN B. Hayward[20] a prouvé que les graphes faiblement triangulés sont parfaits.

Un graphe est minimalement imparfait s'il n'est pas parfait, mais tous ses sous-graphes induits propres le sont. Évidemment, un graphe est parfait si et seulement s'il ne contient pas de graphe minimalement imparfait comme sous-graphe induit. Avant d'établir le résultat, on définit l'ensemble déconnectant et l'étoile déconnectante.

Définition 4.8

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.

Un ensemble $C \subseteq V$ est dit déconnectant dans le graphe G si le graphe $G - C$ est non-connexe. Il est déconnectant minimal si aucun sous-ensemble de C n'est déconnectant.

Une étoile déconnectante dans G est un ensemble $C \subseteq V$ tel que $G - C$ soit non-connexe et qu'il existe un sommet x de C adjacent à tous les autres sommets de C .

Une caractérisation des graphes admettant une telle étoile déconnectante est donnée par le lemme suivant.

Lemme 4.4 (Chvátal[25])

Un graphe $G = (V, E)$ contient une étoile déconnectante si, et seulement si, l'une au moins des deux propriétés suivantes est vérifiée :

i) *Soit il existe $v \in V$ tel que $\{v\} \cup N(v)$ soit déconnectant.*

ii) Soit G n'est pas une clique et il existe $v, w \in V$ adjacents tels que $N(v) \subseteq N(w)$.

Lemme 4.5 ([25])

Un minimal imparfait n'admet pas d'étoile déconnectante.

Preuve 4.5

Il est facile de vérifier que si G est minimalement imparfait alors :

1. Chaque sous-graphe induit propre de G est colorié par $\omega(G)$ - couleurs.
2. $\omega(G - S) = \omega(G)$ pour chaque stable de G .

Nous montrons donc que le graphe vérifié (1) et (2) ne peut pas contenir une étoile déconnectante. Pour cela, on considère un graphe G qui satisfait (1) et admet une étoile déconnectante C , et montrons donc que G ne peut pas vérifié (2). G admet une étoile déconnectante C , alors $G - C$ est non-connexe. L'ensemble des sommets de $G - C$ se décompose donc en deux sous ensemble V_1 et V_2 tel que aucun sommet de V_1 n'est adjacent à sommet de V_2 .

Soit G_i un sous- graphe de G induit par $V_i \cup C$ ($i = 1, 2$). D'après (1) il faut $\omega(G)$ couleurs pour colorier G_i . C est une étoile déconnectante, il contient donc un sommet w adjacent à tout autre sommets de C , on note par S_i l'ensemble des sommets $v \in G_i$ et $f_i(v) = f_i(w)$.

Il est clair que chaque S_i est un stable, et $S_i \cap C = \{w\}$. soit $S = S_1 \cup S_2$ (puisque aucun sommet de V_1 n'est adjacent à un sommet de V_2) est stable de G . Soit Q une clique de $G - S$, Q est contenue dans $G_1 - S_1$ ou dans $G_2 - S_2$. Comme ces deux graphes sont coloriés par $\omega(G) - 1$ couleurs, alors $|Q| \leq \omega(G) - 1$.

Théorème 4.4 ([21])

Soit N un déconnectant minimal de graphe faiblement triangulé G et N induit dans \overline{G} un sous-graphe connexe. Chaque composante connexe de $G - N$ contient au moins un sommet adjacent à tous les sommets de N .

Théorème 4.5 ([20])

Si G est un graphe faiblement triangulé ayant au moins trois sommets, alors G ou bien \overline{G} admet une étoile déconnectante.

Preuve 4.6

Soit w un sommet de G .

Posons M l'ensemble des non-voisinages de w dans le graphe G et N l'ensemble des sommets adjacents à w .

- Si N est vide, alors $\{w\}$ est une étoile déconnectante de G pour tout $u \in M$.
- Si M est vide, alors $\{w\}$ est une étoile déconnectante de \overline{G} pour tout $v \in N$.

Supposons que M et N non vides.

- Si M induit dans G un sous-graphe non-connexe, alors $\{w\} \cup N$ est une étoile déconnectante de G .
- Si N induit dans \overline{G} un sous-graphe non-connexe, alors $\{w\} \cup M$ est une étoile déconnectante de \overline{G} .

Maintenant, supposons que M est non vide et induit dans G un sous-graphe connexe et N induit dans \overline{G} un sous-graphe connexe.

- Si un sommet v dans N n'est pas adjacent à aucun sommet de M , alors $\{w\} \cup (N - \{v\})$ est une étoile déconnectante.
- Si chaque sommet de N est adjacent à au moins un sommet de M ; N est donc un

déconnectant minimal, alors le théorème(4.4) garantit qu'un sommets u dans M est adjacent à tous les sommets de N , par conséquent $\{w\} \cup (M - \{u\})$ est une étoile déconnectante de \overline{G} .

Corollaire 4.1

Tout graphe faiblement triangulé est parfait.

4.3 Coloration des graphes faiblement triangulés :

4.3.1 L'opérateur de contraction :

Étant donnés deux sommets x, y d'un graphe $G = (V, E)$, on définit l'opérateur de contraction de x et y : on enlève x et y de V , et on ajoute un nouveau sommet noté xy et relié chaque sommet de $V \setminus \{x, y\}$ qui voit l'un au moins de x et y . Le graphe obtenu est noté G/xy .

Lemme 4.6

Soit $\{x, y\}$ une paire de sommets non-adjacents dans un graphe G , alors $\omega(G) \leq \omega(G/xy)$ et $\chi(G) \leq \chi(G/xy)$

Preuve 4.7

Soit Q une clique de G .

Si Q ne contient ni x ni y , alors Q est aussi une clique de G/xy . Sinon, Q contient exactement l'un de x, y , alors en remplaçant ce sommet par xy , nous obtenons une clique de G/xy de même taille. Donc $\omega(G) \leq \omega(G/xy)$.

A partir d'une coloration de G/xy , une coloration de G , utilisant le même nombre de couleurs, est obtenue en donnant à x et y la couleur de xy , et en ne changeant pas la couleur des autres sommets. Donc $\chi(G) \leq \chi(G/xy)$.

Rappelons qu'une paire d'amis est une paire de sommets non-adjacent tels qu'il n'existe pas de chemin sans corde les reliant de longueur impaire.

Définition 4.9

On appelle une paire P_4 -libre une paire de sommets non adjacent tels qu'il n'existe pas de chemin sans corde les reliant de longueur 3.

Remarque 4.3

Une paire d'amis est une paire P_4 -libre.

Lorsqu'il s'agira de montrer qu'une contraction vérifie une propriété, nous montrerons, si possible, que cette propriété est vérifiée lors d'une contraction de paire P_4 -libre. Alors, cette propriété sera en particulier vraie pour la notion de paire d'amis. A l'inverse, lorsqu'il s'agira de contracter un graphe nous montrons, si possible, qu'il s'agit d'une contraction de paire d'amis, cette contraction étant aussi une contraction de pair P_4 -libre.

Fonlupt et Uhry [11] ont montré que la contraction de paire d'amis préserve la taille maximum d'une clique. La preuve de ce résultat utilise seulement le fait que la paire de sommets considérée est une paire P_4 -libre.

Lemme 4.7

Soit $\{x, y\}$ une paire P_4 -libre dans un graphe G , alors $\omega(G) = \omega(G/xy)$

Preuve 4.8

D'après le lemme (4.6), nous avons $\omega(G) \leq \omega(G/xy)$.

Montrons que $\omega(G/xy) \leq \omega(G)$. Soit Q une clique de G/xy de taille $\omega(G/xy)$.

Si Q ne contient pas le sommet xy , alors Q est aussi une clique de G .

Si Q contient le sommet xy alors $Q \setminus \{xy\}$ est une clique de G . L'un de x, y est adjacent à tout Q , sinon Q contiendrait deux sommets a, b tel que a voit x et pas y et b voit y et pas x , alors le chemin $x - a - b - y$ est un chemin sans corde de longueur 3 reliant x à y , une contradiction. Donc G contient une clique de taille $\omega(G/xy)$ et $\omega(G/xy) \leq \omega(G)$.

Corollaire 4.2

Si $\{x, y\}$ une 2-paire d'un graphe faiblement triangulé G , alors $\omega(G) = \omega(G/xy)$.

Fonlupt et Uhry[11] ont aussi montré que la contraction de paire préserve le nombre chromatique.

Lemme 4.8

Si $\{x, y\}$ une paire d'amis dans un graphe G , alors $\chi(G) = \chi(G/xy)$.

Preuve 4.9

D'après (4.6), nous avons $\chi(G) \leq \chi(G/xy)$.

Inversement, considérons une coloration de G utilisant $\chi(G)$ couleurs. Si x et y ont reçu la même couleur, alors nous en déduisons une coloration de (G/xy) utilisant le même nombre de couleurs.

Supposons maintenant que x a reçu la couleur 1 et y la couleur 2. Soit H le sous-graphe biparti induit par les sommets de couleurs 1 et 2. Les sommets x et y sont dans deux composantes connexes différentes de H . Nous pouvons échanger les couleurs 1 et 2 dans la composante connexe de H contenant x sans affecter y .

Nous obtenons une coloration de G dans laquelle x et y ont reçu la même couleur, nous en déduisons une coloration de G/xy . Donc $\chi(G/xy) \leq \chi(G)$

Théorème 4.6

Soient $G=(V,E)$ un graphe faiblement triangulé et $\{x,y\}$ une 2-paire de G , alors G/xy est faiblement triangulé.

Preuve 4.10

Soit $H = G/xy$. Nous montrons que si H n'est pas faiblement triangulé, alors G ne l'est pas.

Supposons que H n'est pas faiblement triangulé, alors il existe $C \subseteq V$ tel que le sous-graphe engendré par C forme un C_k ou \bar{C}_k avec $k \geq 5$.

Si $xy \notin C$, alors G n'est pas faiblement triangulé. On peut donc supposé que $xy \in C$, nous avons deux cas :

Cas 1 : H_C le sous graphe induit par C est un cycle sans corde noté $\mu = (c_1, \dots, c_k)$ avec $k \geq 5$.

Supposons sans perte de généralité $xy = c_1$, alors c_2, \dots, c_k est un chemin sans corde de G . xy voit c_2, c_k et manque tout les sommets $\{c_3, \dots, c_{k-1}\}$. L'un au moins de $\{x, y\}$ voit c_2 et de même pour c_k et ni x ni y voit les sommets $\{c_3, \dots, c_{k-1}\}$. Remarquons d'abord qu'au moins l'un de $\{x, y\}$ voit c_2, c_k (par absurde, supposons que x voit c_2 mais ne voit pas c_k et y voit c_k mais ne voit pas c_2 , alors (x, c_2, \dots, c_k, y) est un chemin sans corde avec $k \geq 5$. Contradiction avec $\{x, y\}$ est une 2-paire).

Supposons sans perte de généralité que x voit $\{c_2, c_k\}$, alors (x, c_2, \dots, c_k) est un cycle sans corde de G . Donc G n'est pas faiblement triangulé.

Cas 2 : \overline{H}_C est un cycle sans corde noté $\nu = (c_1, \dots, c_k)$ avec $k \geq 5$.

Supposons sans perte de généralité $c_1 = xy$, ainsi c_2, \dots, c_k est un \overline{P}_{k-1} (P_{k-1} : chemin sans corde avec $k-1$ sommets) et

i) c_2, c_k ne voit ni x ni y .

ii) chaque sommet de $\{c_3, \dots, c_k\}$ voit l'un au moins de x et y .

iii) x ou y voit c_3 et c_4 . En effet :

supposons le contraire, d'après (ii) x ou y voit c_3 , sans perte de généralité on suppose que x voit c_3 . Comme (iii) n'est pas vérifié alors x ne voit pas c_4 , ainsi y voit c_4 et ne voit pas c_3 . Mais alors (x, c_3, c_k, c_4, y) induit un chemin sans corde, contradiction avec $\{x, y\}$ est une 2-paire de G .

Supposons sans perte de généralité x voit c_3 et c_4 , et soit m le plus petit indice supérieur à 4 tel que x ne voit pas c_m . Alors x, c_2, \dots, c_m est un \overline{C}_k avec $k \geq 5$. Finalement G n'est pas faiblement triangulé.

4.3.2 Algorithme OPT :

Dans cette partie, nous présentons un algorithme noté OPT[19], qui permet de résoudre les problèmes d'optimisation dans les graphes faiblement triangulés en temps polynomial.

- Le problème de clique maximum.
- Le problème de stable maximum.
- La coloration optimal.
- Le nombre minimal de cliques couvrant.

L'algorithme est basé sur le fait que chaque graphe faiblement triangulé soit complet soit possède une 2-paire (d'après le théorème (3.5)).

Si le graphe n'est pas donc complet, l'algorithme fonctionne comme suit : tant qu'on trouve dans le graphe une 2-paire on la contracte. Finalement le graphe donné en entrée transforme à un graphe complet dont on sait résoudre facilement les problèmes d'optimisation ci-dessus.

Remarque 4.4

Il faut bien noter qu'on peut résoudre les problèmes d'optimisation tels que le stable maximum et le nombre de cliques couvrant, on appliquant l'algorithme OPT sur le complémentaire du graphe.

Voici une description formelle de l'algorithme :

Algorithm 6 Algorithm OPT

Require: un graphe faiblement triangulé

Ensure: clique maximum K_G et coloration optimale f_G .

étape 1 : recherche des 2-paire $\{x, y\}$ de G .

si G n'a pas de 2-paire, alors

(a) $K_G \leftarrow V(G)$.

(b) pour $i=1$ jusqu'à n faire

$f_G(v_i) \leftarrow i$

(c) STOP

étape 2 : $J \leftarrow G(x, y \rightarrow xy)$

étape 3 : $K_J, f_J \leftarrow \text{OPT}(J)$

étape 4a : si $xy \notin K_J$, alors $K_G \leftarrow K_J$

sinon

si x voit tous les sommets de $K_J - \{xy\}$ alors

$K_G \leftarrow K_J - \{xy\} + \{x\}$

sinon $K_G \leftarrow K_J - \{xy\} + \{y\}$

étape 4b : $f_G(x) \leftarrow f_G(y) \leftarrow f_J(xy)$

pour tout $v_i \in J - \{x, y\}$ faire

$f_G(v_i) \leftarrow f_J(v_i)$

Complexité : $\mathcal{O}((n+m)n^3)$

Théorème 4.7 (La correction[19])

L'algorithme OPT trouve correctement une clique maximum et une coloration optimale de G .

Preuve 4.11

Tout au long de la preuve on note, $|f_G|$ et $|f_J|$ le cardinal de f_G et f_J respectivement. Pour prouver le théorème il suffit de montrer que K_G est une clique de G , f_G est une coloration de G et $|f_G| = |K_G|$.

Par induction sur le nombre d'appels de l'algorithme OPT. On remarque que la contraction de 2-paire fait diminué le nombre de sommets par un, OPT appelé donc au plus n fois.

Si OPT appelé une seul fois, il s'arrête donc à l'étape 1. D'après le théorème (3.5), nous avons $K_G = V$ et f_G est une coloration de G de cardinal n (ie : $|f_G| = n$).

Supposons que l'algorithme appliqué plus d'une fois, le théorème (4.6) implique que J est faiblement triangulé, d'où d'après l'hypothèse nous K_J est une clique et f_J est une coloration de J tel que $|K_J| = |f_J|$.

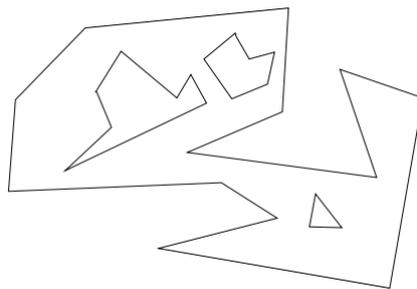
Si $xy \notin K_J$, alors $K_G = K_J$ et $|K_G| = |K_J|$. Si $xy \in K_J$, alors x ou y voit tous les sommets de $K_J - xy$. En effet, supposons le contraire, nous avons x manque $v_i \in K_J$ et y voit v_i sinon xy manque v_i et y manque $v_j \in K_J$ et x voit v_j , le chemin xv_jyv_i est un chemin sans corde, contradiction avec le fait que $\{x, y\}$ est une 2-paire.

Par conséquent $|K_G| \geq |K_J|$. Le lemme (4.7) entraîne que $|K_G| = |K_J|$. Comme f_J est une coloration de J , tout les paires de sommets adjacents de J sont coloriés par deux couleurs différentes, autrement dit aucune paire de sommets adjacents $a, b \in J$ vérifiant $f_J(a) = f_J(b)$, de plus aucune paire de sommets adjacents a, b de $G - \{x, y\}$ vérifiant $f_G(a) = f_G(b)$. Finalement, soit c un sommet de G qui voit au moins l'un des $\{x, y\}$, alors c voit xy dans J et $f_G(c) = f_J(c) \neq f_J(xy) = f_G(x) = f_G(y)$, ainsi aucune paire de sommets adjacents u, v de G vérifiant $f_G(u) = f_G(v)$, par conséquence f_G est une coloration de G . D'où $|f_G| = |f_J|$ et $|K_G| = |f_J| = |f_G|$.

CHAPITRE 5

APPLICATION

Les problèmes de visibilité font partie des problèmes fondamentaux de la géométrie algorithmique. Dans les problèmes de planification de trajectoire par exemple, les objets d'une scène sont des obstacles à éviter et le calcul d'une trajectoire fait intervenir les relations de visibilité entre les objets de la scène. Nous retrouvons aussi des problèmes de visibilité au coeur des problèmes de surveillance ou d'éclairage. D'une manière générale, un problème de visibilité est souvent ramené à la question "Est-ce que c'est visible?". Trouver une visibilité entre deux objets revient à déterminer une droite qui les intersecte, sans intersecter un seul de leurs obstacles, mais il existe aussi d'autres notions de visibilité qui utilisent les chemins qui ne sont pas des lignes droites. Les relations de visibilité dans le plan ont d'abord été étudiées sur des objets simples. On s'intéresse au cas des scènes polygonales c'est-à-dire des scènes composées des polygones simple (ne contient pas de trou).



Figure(5.1)- Polygone avec trous.

Préliminaire

Un polygone P est un ensemble fermé et connexe de points du plan, délimité par plusieurs séquences de segment de ligne droite. Les segments sont appelés les arêtes, leurs extrémités appelées sommets et leurs unions appelé la frontière de polygone. Un polygone orthogonal est un polygone dont toute arête est parallèle à l'un des axes de coordonnées, autrement dit c'est un polygone du plan cartésien dont les arêtes sont verticales ou horizontales.

Un polygone orthogonal est dit horizontalement convexe (resp. verticalement convexe) si son intersection avec chaque horizontal (resp. vertical) soit vide soit un seul segment. Un polygone orthogonale est convexe OCP s'il est à la fois horizontalement et verticalement convexe.

Un Polygone étoile Q est un polygone orthogonal qui contient un point q visible à tout autre points de Q.

Un ensemble de polygones, $C = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$, où $P_i \subseteq P$ est dit une couverture du polygone si $\cup_{i=1}^r P_i = P$. La couverture d'un polygone consiste donc à décomposer le polygone par des polygones simples.

Un indépendant S est un ensemble de points du polygone P tel qu'il n'existe pas deux points dans S qui appartient au même polygone de C.

Théorème 5.1 (dualité[21])

La taille minimal de la couverture par des polygones de l'ensemble C est égale à la taille de indépendant maximum par rapport à C.

Ce problème de couverture est en général un problème difficile, l'approche utilisée pour le résoudre est le graphe de visibilité qui d'une certaine façon codent les relations de visibilité. Il existe donc un lien entre le problème de couverture du polygone et le problème de visibilité.

Le graphe de visibilité :

En générale, un graphe de visibilité d'une scène est un graphe $G = (V, E)$ tel que : V, l'ensemble des sommets de G, est l'ensemble des composantes géométriques (points, lignes ou régions).

E, l'ensemble des arêtes de G, est ensemble des paires de sommets de V mutuellement visibles.

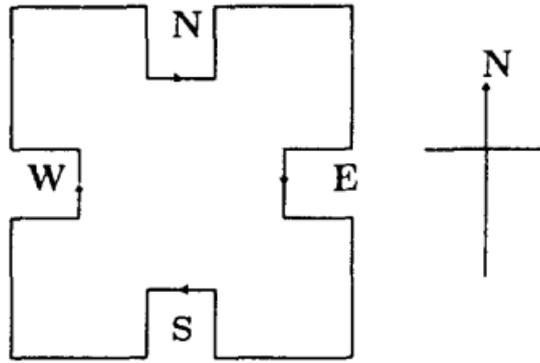
Ce graphe n'est pas orienté, mais les arêtes incidentes à un sommet sont classées dans l'ordre dans lequel sont répartis les segments correspondants dans la scène.

Pour la suite, nous utilisons le graphe de visibilité dont les sommets sont des régions d'un polygone orthogonal simple. Puis nous montrons que certaine classe de ces graphes sont parfaits, ceci nous permettra d'hériter l'algorithme de couverture du polygone.

La classification des polygones :

La classification suivante des polygones orthogonaux est due à Culberson et Reckhow. Considérons la traversée de la frontière de P dans le sens des aiguilles d'une montre. Un sommet entrant (resp. sortant) est un sommet dont l'angle intérieur au polygone vaut $3\pi/2$ (resp. $\pi/2$). Une dent D est une arête du périmètre de P, dont les extrémités sont des sommets entrant. La direction de traverser une dent donne son orientation : par exemple, une dent traversée d'ouest en est a une orientation N. Nous utilisons la direction naturelle, ie. la direction positive le long de l'axe y sera désigné par N. La figure (5.3) illustre le N, S, E et W dents.

Le polygone orthogonal est classé selon le nombre d'orientation de dents. Un polygone orthogonal est dans la classe k s'il contient k dents de différent orientations.

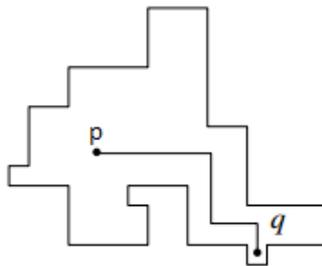


Figure(5.2)- Orientation de dent.

la visibilité :

Un chemin escalier est une suite de points $u = x_0, x_1, \dots, x_r = v$ contenant dans un polygone orthogonal simple P telles que :

- (a) Chaque paire de points adjacents x_i et x_{i+1} détermine une segment de ligne vertical ou horizontal.
- (b) Les arêtes correspondant aux paires de points adjacents dans le chemin admet au plus deux parmi quatre orientation possible.



Figure(5.3)- Exemple d'un chemin escalier.

On dit que $u \vee v$ (u voit v ou u et v sont visibles) s'il existe un chemin escalier reliant u et v . Dans le cas inverse on note $u \bar{\vee} v$ c'est-à-dire il n'existe aucune chemin escalier joignant u et v .

Le lemme suivant donne une caractérisation de la visibilité de deux point.

Lemme 5.1 (Motwani et al.)

Pour toute points $u, v \in P$, $u \vee v$ si et seulement s'il existe un polygone orthogonal convexe (contenu dans P) qui contient u et v .

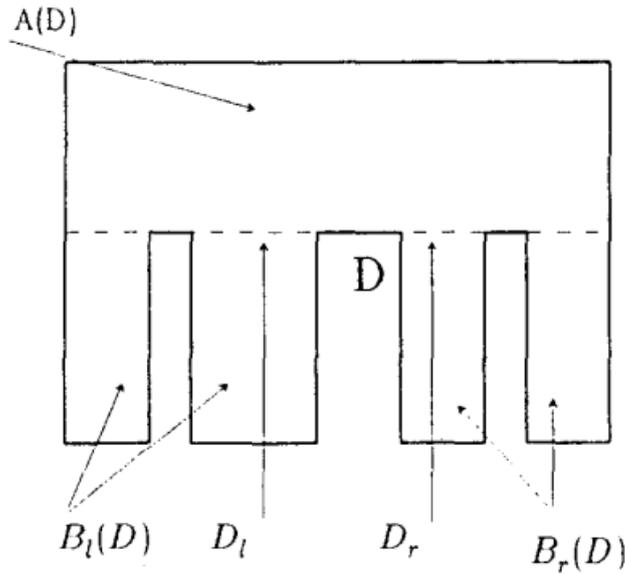
Définition 5.1

Le polygone de visibilité d'un $p \in P$, noté $\vartheta(p)$ est l'ensemble de tous les points $q \in P$ tel que $p \vee q$.

Lignes Dent et Zones :

Pour chaque dent D , on construit un ligne dent \bar{D} par extension de D dans les deux directions tant qu'il est contenu dans P . Noter que d'après cette définition, \bar{D} est en fait, le segment de ligne maximale complètement contenue dans P et qui contient la dent D . $\bar{D} \setminus D$ se compose de deux segments disjoints, D_r et D_l . Pour une dent d'orientation S , D_l est le segment ligne à gauche de D et D_r est le segment ligne à droite de D . (voir figure 5.5).

Considérons $P' = P \setminus \overline{D}$. L'ensemble des composantes connexes de P' qui retrouve \overline{D} au nord est appelé la zone B ou $B(D)$ et l'ensemble des composantes connexes de P' qui retrouve \overline{D} au sud et contenant \overline{D} appelé la zone A ou $A(D)$.



Figure(5.4)- lignes dent et Zones.

Lemme 5.2 (Motwani et al[22])

Pour tout point $u, v \in P$, $u \nabla v$ si et seulement s'il existe une dent D tel que $u \in B_l(D)$, $v \in B_r(D)$ ou $v \in B_l(D)$, $u \in B_r(D)$

Dans le cas d'existence d'une dent D qui satisfait la condition du lemme (5.2), on dit que D sépare u et v et D appelé une dent de séparation.

Lemme 5.3

Soit u, v et w trois point de P tel que D sépare u et v . Si $u \vee v$ et $v \vee w$ alors $w \in A(D)$.

Preuve 5.1

D sépare u et v , alors on peut supposé sans perte de généralité que $u \in B_l(D)$ et $v \in B_r(D)$. Comme $u \vee w$, nous avons donc $w \in B_l(D)$ ou $w \in A(D)$ et $v \vee w$ entraîne que $w \in B_r(D)$ ou $w \in A(D)$. Comme $B_l(D) \cap B_r(D) = \emptyset$, on conclut donc que $w \in A(D)$.

Les régions :

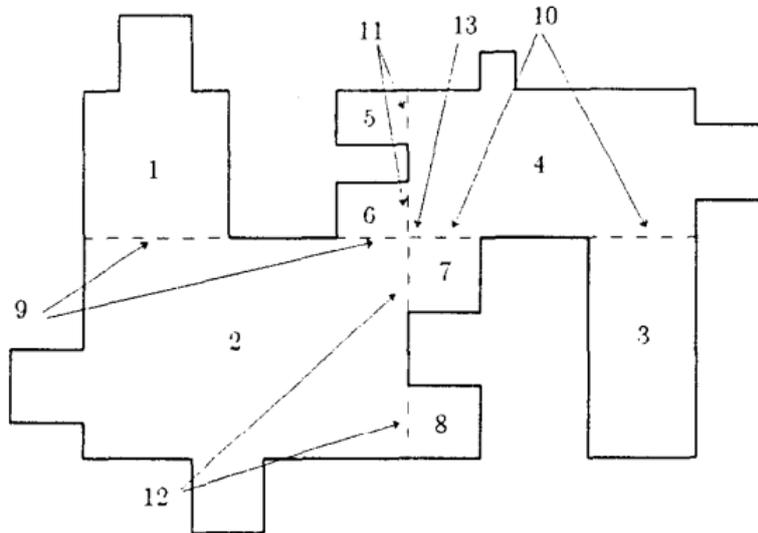
L'ensemble de toutes les dents subdivise P à des régions comme suit : pour chaque point p et pour chaque dent D de P , nous pouvons uniquement indiquer si p appartient à $B_l(D)$, $B_r(D)$ ou $A(D)$. Une région u est un sous-ensemble maximal de P de sorte que pour tout points p et q de u et pour toute dent D , $p \in Z(D)$ si et seulement si $q \in Z(D)$, où $Z(D)$ est l'un des $B_l(D)$, $B_r(D)$ ou $A(D)$.

Définition 5.2

Soit u et v deux régions de P . On dit que $u \vee v$ (la région u voit la région v) si et seulement s'il existe un polygone orthogonal convexe (inclus dans P) contient p et q .

Lemme 5.4

Soient u et v deux régions dans P et q_u, q_v deux point arbitraire dans u et v respectivement. Alors, il existe un chemin escalier entre q_u, q_v si et seulement si $u \vee v$.



Figure(5.5)- les régions d'un polygone orthogonale.

Le lemme (5.4) indique que les polygones de visibilité des deux points d'une zone sont identiques. En outre, chaque étoile maximale soit contiennent tous les points d'une région soit aucune. En subdivisant P par les régions, nous avons donc discrétisé le problème de couverture.

Graphe étoile :

Dans cette partie, nous définissons le graphe visibilité pour le problème du couverture avec des étoiles.

Le graphe étoile $H = (V, E)$ est défini comme suit :

L'ensemble des sommets de H correspondant aux régions de P .

Deux sommets u et v sont adjacents dans H s'il existe une région w qui voit u et v .

– Soit p, q deux points de P , $p \wedge q$ (p voit indirectement q) s'il existe un point $r \in P$ tel que $p \vee r$ et $q \vee r$.

– Si $u \wedge v$ alors pour tout paire de points $p \in u$ et $q \in v$ nous avons $p \wedge q$.

On note 1-bend le chemin de p à q obtenu par la concaténation des chemins escalier $s(p, r)$ et $s(r, q)$.

Remarque 5.1

Le graphe étoile est un graphe de visibilité qui utilise la notion de visibilité indirect.

Le graphe étoile $H = (V, E)$ est donc obtenu de la manière suivant : on choisit arbitrairement un point dans chaque région de polygone orthogonal P , l'ensemble de point choisi constitue l'ensemble des sommets du graphe étoile. Une arête dans H est un chemin 1-bend joignant deux sommets de V .

Après avoir défini le graphe étoile, nous montrons maintenant comment ce graphe peut aider à résoudre le problème du couverture de polygone orthogonal.

Théorème 5.2 ([21])

Soit $K = (V(K), E(K))$ une clique de H . Alors, les régions de $V(K)$ peuvent être couvrir par un seul polygone étoile. Ainsi, la couverture minimal par cliques de H correspond exactement au couverture minimal de P par les polygones étoiles.

Dans un polygone étoile, toute paire de points sont indirectement visible. Par conséquent, chaque polygone étoile correspond à une clique de H , cela implique que la couverture d'un polygone orthogonal P par des polygones étoiles correspond exactement au couverture du graphe étoile par cliques. Pour arriver au résultat de théorème précédent, il suffit de montrer que chaque clique couvrant de H correspond à un polygone étoile de P . Il suffit donc de montrer que chaque clique $K = (V(K), E(K))$ de H détermine un polygone étoile dans P couvrant toutes les régions associé au sommets de K . Autrement dit, si K est une clique de H alors, $\bigcap_{v \in V(K)} \vartheta(v)$ est non vide.

Remarque 5.2

A l'aide du théorème de molnár[?], nous concluons le résultat du lemme.

Rajeev Motwani et al[21] ont montré que le graphe étoile associé à la classe 4 est un graphe faiblement triangulé. Nous savons que chaque graphe faiblement est parfait, donc d'après ce résultat on conclut que le graphe étoile est parfait. Ceci permet de donner le théorème de dualité pour le problème de couverture de la classe 4.

Théorème 5.3 ([21])

Le graphe étoile d'un polygone orthogonal de la classe 4 est un graphe faiblement triangulé.

Corollaire 5.1

Le nombre minimum de polygones étoiles nécessaire pour couvrir un polygone orthogonal P égale la taille d'indépendant maximum de P .

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce mémoire a été consacré à l'étude de la classe des graphes faiblement triangulés, nous avons montré qu'il est possible de reconnaître cette classe en $\mathcal{O}(n^2.m)$. On pourrait alors envisager de reconnaître les graphes faiblement triangulés encore plus efficacement en les triangulant plutôt qu'en les complétant. En effet, si on arrivait à savoir quelles arêtes il suffit de rajouter pour obtenir un graphe triangulé, au lieu de chercher de rajouter pour obtenir un graphe complet par la méthode étudié au chapitre 3, on pourrait peut-être obtenir une complexité bien meilleur.

On pourrait aussi tenter d'améliorer de façon similaire la complexité des problèmes d'optimisation (la coloration optimal, la clique maximum, le stable maximum et la couverture minimal par cliques).

Après avoir présenté une idée générale sur l'application des graphes faiblement triangulés, on pourrait tenter a prouver les résultats énoncé sans démonstration, ainsi de développer la partie algorithmique de l'application.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alois Brunel, Les Graphes Parfaits, École Normale Supérieure de Lyon, 4 avril 2009.
- [2] Benjamin Lévêque, Coloration de graphe : structures et algorithmes, l'université Joseph Fourier, 15 octobre 2007.
- [3] C.Delbert R. Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices, interval graphs, and seriation in archaeology. *Pacific Journal of Mathematics*, 28 :565-570, 1969
- [4] Frédéric Maire, Une note sur les contractions dans les polygones orthogonaux, Université Paris 6, UFR 921, France, 367-371, 22 July 1991.
- [5] Gérard Cornuejols, le théorème forte des graphes parfaits, Séminaire BOURBAKI Mars 2006
- [6] H.Meyniel, A new property of critical imperfect graphs and some consequences, *European J. Combin.* 8, 313–316, 1987.
- [7] Irena Rusu, Graphes parfaits : étude structurelle et algorithmes de coloration, Université de Paris-Sud U.F.R. Scientifique d'Orsay, 2 Décembre 1994.
- [8] Irena C. Rusu, Aspects théoriques et algorithmiques des graphes parfaits, Habilitation à diriger des recherches, Université d'Orléans, 9 décembre 1999.
- [9] J. Spinrad and R. Sritharan, Algorithms for weakly triangulated graphs. *Discrete Applied Math.*, 59 :181-191, 1995.
- [10] Jean R.S. Blair, Barry W.Peyton, An introduction to chordal graph and clique tree, OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY, 1-30.
- [11] J. Fonlupt, J.P. Uhry, Transformations that preserve perfectness and h-perfectness of graphs, *annals of Discrete Mathematics* 16, 83-85, 1982.
- [12] J. Culberson and R. Reckhow, Dent diagrams : a unified approach to polygon covering problems, Technical Report 87-14, Department of Computing Science, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, July 1987.
- [13] J. Edmonds. Covers and packings in a family of sets. *Bulletin of The American Mathematical Society*, 68,494-499, 1962.
- [14] L. Lovasz, A Characterization of Perfect Graphs. *journal of combinatoial theory* 13, 95-98, 1972.
- [15] Michael R. Garey and David S. Johnson, computers and interactability a Guide to the Theory of NP-Completeness.

-
- [16] Nicolas Trotignon, Graphes parfaits : Structure et algorithmes, l'université Grenoble I, 28 septembre 2004.
 - [17] Philippe Gambette. Cours d'algorithmique des graphes du MPRI, 18, 9 janvier 2008.
 - [18] R. B. Hayward, Generating Weakly Triangulated Graphs, preprint.
 - [19] R. Hayward, C. Hoang and F. Maffray, Optimizing weakly triangulated graphs, Graphs and Combinatorics, 339-349, 1989.
 - [20] Ryan B. Hayward, Weakly Triangulated Graphs, JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 39, 200-209, 1985.
 - [21] R. Motwani, A. Ragunathan and H. Saran, Covering orthogonal polygons with star polygons : the perfect graphs approach, J. of Computer and System Sciences, 19-48, 1990.
 - [22] S. R. Arikati and C. Pandu Randa, An efficient algorithm for finding a two-pair and its applications, Discrete Appl. Math., 31 :71-74, 1991.
 - [23] Stéphane Riviere, Calculs de visibilité dans un environnement polygonal 2D, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1997.
 - [24] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, STOC 71, 151-158, 1971.
 - [25] V. Chvatal - Star-cutsets and perfect graphs, J. Combin. Theory Ser. B 39, 189-199, 1985.
 - [26] V. Chvatal, I. Rusu, A Note on Graphs Without Long Holes, à paraître dans Proceedings of the 1st Workshop on Perfect Graphs, Princeton, 1993.