UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département de Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

CALCUL SCIENTIFIQUE ET APPLICATIONS

Mémoire présenté dans le cadre de la
Licence en Calcul Scientifique et Applications

Séries Sommables

Présenté par :

- Najia Boulagouaz

Encadré par :

- Pr. Anisse Ouadghiri

Soutenu le lundi 17 Juin 2013 devant le jury composé de:

- Pr. Mohammed Akhmouch
- Pr. Omar Sidki

Stage effectué à la FST de FES

Année Universitaire 2012 / 2013

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web: http://www.fst-usmba.ac.ma

Sommaire

Introduction

Les suites et les séries numériques sont deux aspects d'un même objet ce qui signifie qu'ils ont la même nature : il s'agit de fonctions de **N** dans **K** (**K**=**R** ou **C**).
Ce n'est que l'objet de leur étude qui les différencie, étudier la suite (U_n) c'est étudier la limite de U_n en $+\infty$.
Etudier une série ($\sum Un$) c'est étudier la convergence de la suite $S_n=\sum_{k=n0}^{n} \mathrm{Un}$, et la limite de la suite (S_n) associe à (U_n) est appelée somme de la série.

La loi d'addition sur les scalaires vérifie certaines propriétés telles que l'associativité et la commutativité qui permettent de définir naturellement les sommes de familles finies auxquelles les propriétés de l'addition considérée comme opération binaire s'étendent aisément.

Les difficultés surviennent lorsque l'on envisage d'étendre la sommation à des familles infinies discrètes dont l'archétype est la suite indexée par **N**, si l'on veut en effet que cette sommation soit d'un usage commode on doit lui conserver les propriétés de la sommation finie : associativité, commutativité par exemple, une telle conservation est possible aux prix d'une certaine limitation des familles étudiées.

Pour ce faire on étudie dans un premier temps les familles positives qui possèdent toutes les vertus souhaitables : c'est la théorie des familles sommables qui fait l'objet essentiel du présent document dont le but est étudier la notion de série sommable qui généralise celle de série absolument convergente et permet d'avoir très facilement des résultats sur ces dernières.

I-Séries numériques :

1-Généralités :

Définition :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique (c'est-à-dire a valeurs dans **R** ou **C**). Pour tout n $\in$ **N** posons :

$$S_n=U_0+U_1+\ldots\ldots +U_n=\sum_{k=0}^{n} Uk$$

- On définit ainsi une nouvelle suite$(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à partir de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
- On appelle série la suite $(U_n, S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments dans $\mathbf{K}^2$, U_n est nommé terme général de la série.
- S_n est la somme partielle de rang n.
- $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée la suite des sommes partielles de la série.

2-Etude d'une série numérique :

Définition: (convergence, divergence d'une série)

- La série $(\sum_{n\geq 0} Un)$ est dite convergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes partielles a une limite lorsque n$\to\infty$; dans ce cas la limite S = $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est appelée somme de la série $(\sum_{n\geq 0} Un)$. On écrira : S = $\sum_{k=0}^{+\infty} Uk$.
- La série $(\sum_{n\geq 0} Un)$ est dite divergente si la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.
- Deux séries sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.

Remarque :

- La limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est appelée somme de la série et on note : $\lim_{n\to+\infty} Sn = \sum_{n=0}^{+\infty} Un.$
- Toute série est soit convergente soit divergente.
- Etudier la nature d'une série numérique c'est étudier sa convergence, étudier la convergence c'est étudier la nature de convergence.
- L'expression « la série diverge » signifie seulement que la suite (S_n) est divergente et non que la suite (S_n) tends vers l'infini. On dit schématiquement que la somme n'existe pas.

Exemples :

1. Séries géométriques :

Une série géométrique est une série dont le terme général est de la forme $U_n=a.q^n$, a$\neq 0$

Pour ce type de série le calcul de la somme partielle est donné par la formule suivante :

$S_n=U_0+U_1+\ldots+U_n= a + a.q + a.q^2+\ldots+ a.q^n$

$$= a\,(1+ q + q^2 +\ldots+ q^n)$$

$$= \begin{cases} a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \\ a\,(n+1) & \text{si } q=1 \end{cases}$$

On remarque ainsi que $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas la série géométrique converge, et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} a.q^n = \frac{a}{1-q}$.

2. <u>Séries harmoniques</u> :

C'est la série dont le terme général est de la forme $U_n=\frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 0$.

Montrons que cette série n'est pas convergente. Pour cela montrons qu'elle n'est pas de Cauchy.

En effet posons : $S_n= \frac{1}{1}+ \frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

Alors : $S_{2n} - S_n = (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}) - (\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

Or $\forall p\in\mathbb{N}$,$1\leq p \leq n$, on a $n+1\leq p+n \leq 2n$ et par suite:

$1+n \leq 2n \to \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$

$2+n \leq 2n \to \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}$

.

.

.

$2n\leq 2n \to \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}$

Par conséquent $S_{2n} - S_n \geq n\,(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et elle est donc divergente.

De plus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ce qui permet de déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$.

3. Soit la série de terme général $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ avec $n\geq 1$ on peut écrire après décomposition en éléments simples que : $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

D'où $S_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) +\ldots+ (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} S_n =1$, notre série est convergente et sa somme vaut 1.

<u>Remarque (cas complexe)</u>

Si le terme général U_n est complexe $U_n= a_n + ib_n$

La somme partielle est $S_n= \sum_{k=0}^{n} Uk$

$= \sum_{k=0}^{n}(ak + ibk)$

$= \sum_{k=0}^{n} ak + i\sum_{k=0}^{n} bk$

Alors on a le résultat suivant : $(\sum Un)$ converge <=> $(\sum an)$ et $(\sum bn)$ convergent toutes les deux avec :

$\sum_{n=0}^{+\infty} Un = \sum_{n=0}^{+\infty} an + i\sum_{n=0}^{+\infty} bn$

3-Séries à termes positifs :

Définition:
Une série $(\sum Un)$ est dite à termes positifs si : $U_n \geq 0$, $\forall n \epsilon \boldsymbol{N}$.

- Critère de Cauchy :

Soit $(\sum Un)$ une série à termes positifs ; telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{Un} = \ell$.

(i) Si $\ell<1$, alors $(\sum Un)$ converge.
(ii) Si $\ell>1$, alors $(\sum Un)$ diverge.
(iii) Si $\ell=1$, alors on ne peut rien conclure.

Exemples :

1- On étudie la convergence des séries de termes généraux :

$U_n = (\frac{n}{n+1})^n$ et $V_n = (\frac{n}{n+1})^{n2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{Un} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Le critère de Cauchy ne permet pas de conclure, par contre $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}$, et par conséquent son terme général ne tendant pas vers 0, donc la série $(\sum Un)$ est divergente.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{Vn} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}$ et comme $e^{-1} < 1$, la série $(\sum Vn)$ est convergente d'après le critère de Cauchy.

2- Soit a>0, considérons la série dont le terme général est : $U_n = (a + \frac{1}{n})^n$.

$(\sum Un)$ est une série a termes positifs et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{Un} = \lim\limits_{n\to+\infty} (a + \frac{1}{n}) = a$.

- ✓ Si a<1, la série $(\sum Un)$ converge.
- ✓ Si a>1, la série $(\sum Un)$ diverge.

- Critère de D'Alembert :

Soit $(\sum Un)$ une série à termes positifs telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{Un+1}{Un} = \ell$.

(i) Si $\ell<1$, alors $(\sum Un)$ converge.
(ii) Si $\ell>1$, alors $(\sum Un)$ diverge.
(iii) Si $\ell=1$, alors on ne peut rien conclure.

Remarque :
si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{Un+1}{Un} = 1^+$, alors à partir d'un certain rang $\frac{Un+1}{Un} \geq 1$, et la série diverge.

Exemples :

1- Soit la série à termes positifs $(\sum Un)$ définie par $U_n = \frac{1}{n!}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Un+1}{Un} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Par conséquent la série $(\sum \frac{1}{n!})$ converge d'après le critère de D'Alembert.

2- Soit la série à termes positifs $(\sum Un)$ définie par $U_n = \frac{n^n}{n!} > 0 \ \forall n \epsilon$ **N***.

$\frac{Un+1}{Un} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{Un+1}{Un} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

Or : $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{Un+1}{Un} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\frac{1}{n}} = e > 1$.

La série $(\sum \frac{n^n}{n!})$ est donc divergente.

- Critère de Raab :

Soit $(\sum Un)$ une série à termes positifs ; telle que : $\lim_{n\to+\infty} n\,(1 - \frac{Un+1}{Un}) = \ell$.

(i) Si $\ell > 1$, alors $(\sum Un)$ converge.

(ii) Si $\ell < 1$, alors $(\sum Un)$ diverge.

(iii) Si $\ell = 1$, alors on ne peut rien conclure.

__Théorème :__

Soit $f : [1, \infty[\to \mathbf{R}^+$, une application continue, décroissante et positive; et soit (U_n) la suite définie par : $U_n = f(n)$.

La série $(\sum Un)$ et l'intégrale généralisée $(\int_1^{+\infty} f(x)dx)$ sont de même nature.

alors de même pour la série $(\sum \frac{1}{n})$.

2- Soit la fonction $f : [1, \infty[\to \mathbf{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, f est continue, décroissante et positive.

$\int_1^t f(x)dx = \log(\frac{t}{t+1}) - \log(\frac{1}{2})$, et comme $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)\,dx = \log 2 < +\infty$, alors la série $(\sum \frac{1}{n(n+1)})$ est donc convergente.

- Séries de Riemann :

__Définition:__

Soit $a \epsilon \boldsymbol{R}$; on appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $U_n = \frac{1}{n^a}$, $n \geq 1$.

Considérons la série de Riemann du terme général $U_n = \frac{1}{n^a}$, $a \epsilon \boldsymbol{R}$

- ✓ Si a≤ 0, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} Un \neq 0$ et la série ($\sum \frac{1}{n^a}$) diverge.
- ✓ Si a>0, alors la fonction f(x)= $\frac{1}{x^a}$ est positive et décroissante sur [1, + ∞ [. D'après le théorème précédent la série de Riemann ($\sum \frac{1}{n^a}$) converge si et seulement si l'intégrale ($\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ dx) existe.
  - Si a=1 : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$
  - Si a$\neq$ 1 : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim\limits_{X\to+\infty} \int_1^{X} \frac{1}{x^a} dx$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{1-a} (X^{1-a} - 1)$$

On voit donc que ($\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}$ dx) existe si et seulement si 1- a< 0, c'est-à-dire a>1.
Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème:
Une série de Riemann ($\sum \frac{1}{n^a}$) converge pour a>1, et diverge pour a ≤ 1.

Proposition:
Soit ($\sum_{n\geq 0} Un$) une série réelle à termes positifs. Supposons qu'il existe a>1 tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a U_n=0$.
Alors la série ($\sum_{n\geq 0} Un$) converge.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a U_n= 0$, donc à partir d'un certain rang, nous avons : $0\leq U_n \leq \frac{1}{n^a}$, sachant que la série de Riemann ($\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$) est convergente, nous déduisons la convergence de la série ($\sum_{n\geq 0} Un$) d'après le théorème de comparaison de séries termes positifs.

Exemple (série de Bertrand) :
Considérons la série à termes positifs de terme général $U_n= \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$ (a, b) ∈ $\mathbf{R}^2$, n≥ 2.
Montrons que la série($\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$) converge si et seulement si : (a>1) ou (a=1 et b>1).

- ✓ Cas 1 : a>1
  Dans ce cas on a $\frac{1+a}{2}$ >1 prenons donc t = $\frac{1+a}{2}$ et utilisons la position précédente

$$\lim_{n\to+\infty} n^t U_n = \lim_{n\to+\infty} n^t \frac{1}{n^a (\ln n)^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-b}}{n^{a-t}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-b}}{n^{\frac{a-1}{2}}}$$

  Or $\frac{a-1}{2}$ >0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^{-b}}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} n^t U_n =0$ avec t>1 d'après la proposition précédente la série($\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$) converge.
- ✓ Cas 2 : a<1
  Alors nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{1-a}}{(\ln n)^b}$

  Or 1-a>0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{1-a}}{(\ln n)^b} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = +\infty$

donc $\forall A > 0, \exists N \epsilon \mathbb{N}, \forall n \geq N |nUn| > A$, soit $U_n > \frac{A}{n}$ la série ($\sum_{n \geq N} \frac{A}{n}$) de Riemann est divergente, on en déduit que la série ($\sum Un$) est divergente.

✓ Cas 3 : a=1

$U_n = \frac{1}{n(\ln n)^b}$, b$\leq$ 0 alors $U_n = \frac{(\ln n)^{-b}}{n}$ -b$\geq$ 0 or $\forall n \geq 3$ on a : ln n $\geq \ln e$ =1 donc $(\ln n)^{-b} \geq 1$ (puisque -b$\geq$ 0) d'où $U_n = \frac{1}{n(\ln n)^b} \geq \frac{1}{n}$ la série de Riemann ($\sum \frac{1}{n}$) est divergente, on en déduit que la série ($\sum \frac{1}{n(\ln n)^b}$) diverge aussi.

b>0 : nous allons utiliser le théorème de comparaison d'une série avec une intégrale, considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^b}$ définie de [2, + ∞ [→ $\mathbf{R}^+$, f est positive de plus elle est décroissante et continue.

$\int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^b} dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b}$ (poser t = ln x)

Donc $\lim_{X \to +\infty} \int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^b} dx = \lim_{X \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b} = \lim_{Y \to +\infty} \int_{\ln 2}^{Y} \frac{dt}{t^b}$

Or l'intégrale de Riemann $\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^b}$ existe si et seulement si b>1 par conséquent $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^b} dx$ existe Si et seulement si b>1.

On déduit d'après le théorème de comparaison d'une série avec une intégrale que la série ($\sum \frac{1}{n(\ln n)^b}$) converge si et seulement si b>1, et on peut énoncer le théorème suivant :

Proposition (série de Bertrand)

Soit (a, b) ϵ $\mathbb{R}^2$. La série de Bertrand ($\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^a (\ln n)^b}$) converge si et seulement si : (a>1) ou (a=1 et b>1).

- Critère d'équivalence :

Théorème :

Soient ($\sum Un$) et ($\sum Vn$) deux séries à termes strictement positifs. Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{Un}{Vn} = \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $\ell \neq \infty$.

Alors les deux séries sont de même nature.

Comme ($\sum Vn$) est convergente (série géométrique de raison ½<1), alors ($\sum Un$) l'est aussi.

4-Séries à termes quelconques :

Le paragraphe précédent était consacré à l'étude des séries à termes positifs. Nous allons nous intéressés maintenant aux séries à termes quelconques.

4.1-Séries absolument convergentes :

Définition:

Une série ($\sum Un$) est dite absolument convergente si la série ($\sum |Un|$) est convergente.

Théorème:

Toute série absolument convergente est convergente, la réciproque est fausse.

En d'autres termes : ($\sum |Un|$) converge => ($\sum Un$) converge

Preuve :
On va prouver que $(\sum Un)$ est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$ et p, q $\in N$ tels que p $\geq$ q, $|U_p - U_q| = |\sum_{k=q+1}^{p} Uk| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |Uk|$
Comme la série $(\sum |Un|)$ converge, donc elle est de Cauchy.
Il existe alors N $\in \mathbf{N}$ tel que $\forall$ p, q $\in \mathbf{N}$ (p $\geq$ q$\geq N$) on a : $|\sum_{k=q+1}^{p} |Uk|| = \sum_{k=q+1}^{p} |Uk| < \varepsilon$
Donc pour p $\geq$ q$\geq N$ $|U_p - U_q| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |Uk| < \varepsilon$.
Et par suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy donc convergente et ainsi $(\sum Un)$ converge aussi.

Remarque :
Ce théorème montre que la convergence absolue entraîne la convergence, l'intérêt fondamental de ce théorème est que l'on peut appliquer les propriétés des séries à termes positifs à la série $(\sum |Un|)$ qui est à termes positifs.

Exemples :

1- Considérons la série $(\sum \frac{\sin n}{n^2})$ $\forall$ n $\in \mathbf{N}^*$ $U_n = \frac{\sin n}{n^2}$ étudions la série à termes positifs$(\sum |\frac{\sin n}{n^2}|)$.
   On a : $\forall$ n $\in \mathbf{N}^*$ $|\sin n| \leq 1$ donc $\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, or la serie $(\sum \frac{1}{n^2})$ (de Riemann) est convergente donc la série$(\sum |\frac{\sin n}{n^2}|)$ converge donc la série $(\sum \frac{\sin n}{n^2})$ est absolument convergente.
2- $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ on a : $\forall$ n $\in \mathbf{N}$ $|U_n| = \frac{1}{n^2}$, donc la série $(\sum |Un|)$ converge absolument donc converge.
3- $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $|U_n| = \frac{1}{n}$ la série de Riemann$(\sum \frac{1}{n})$ n'est pas convergente donc la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$ n'est pas absolument convergente.

- Séries semi-convergentes :

Définition:
Une série $(\sum Un)$ à termes réels ou (complexes) est dite semi-convergente si elle convergente sans être absolument convergente.

Exemple :
Pour $0<a\leq 1$, la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n^a})$ est semi-convergente.

4.2-Séries alternées :

Définition:
On appelle série alternée toute série $(\sum Un)$ vérifient la relation $U_n.U_{n+1} \leq 0$.
Le terme général U_n d'une telle série peut être noté $U_n = (-1)^n V_n$ ou $U_n = (-1)^{n+1} V_n$ avec $V_n \geq 0$.
Dans le cas général, une série alternée sera souvent notée $(\sum(-1)^n|U_n|)$.

Exemple :

La série $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$ est une série alternée.

$S_n = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$

Théorème (Critère de Leibniz)

Soit $(\sum Un)$ une série alternée, si:

(i) La suite $(|U_n|)_n$ est décroissante.

(ii) $\lim_{n \to +\infty} Un = 0$.

Alors la série$(\sum Un)$ est convergente.

Exemple :

Soit la série alternée $(\sum \frac{(-1)^n}{n^a})$ où a $\in$ **R**, a fixé. $U_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$ et $|U_n| = \frac{1}{n^a}$ on a donc : $U_n = (-1)^n |U_n|$

- ✓ Si $a \leq 0$, alors : $\lim_{n \to +\infty} Un = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} \neq 0$, et la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n^a})$ diverge.
- ✓ Si a>1 on a $|Un| = \frac{1}{n^a}$, la série $(\sum \frac{1}{n^a})$ de Riemann est donc convergente (car a>1).

  D'où la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n^a})$ est absolument convergente donc convergente.
- ✓ Si $0 < a \leq 1$ la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n^a})$ n'est pas absolument convergente (car la série $(\sum \frac{1}{n^a})$ dans ce cas ne converge pas), cependant on a la suite $(|U_n|)$ est décroissante $(|U_n| = \frac{1}{n^a})$ d'après le théorème précédent la série $(\sum \frac{(-1)^n}{n^a})$ converge.

II-Séries commutativement convergentes :

Voila quelques problèmes de convergence qui surviennent lors de la sommation des termes d'une série.

Exemple :

Soit la série alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log(1 + \frac{1}{n})$

Il s'agit d'une série alternée et le terme $\log(1 + \frac{1}{n})$ décroit vers zéro ce qui assure la convergence de la série donnée.

On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log(1 + \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \log(\frac{n+1}{n})$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} [\log(n+1) - \log n]$$
$$= [\log 2 - \log 1] - [\log 3 - \log 2] + [\log 4 - \log 3] - [\log 5 - \log 4] + \ldots$$
$$= 2[\log 2 - \log 3 + \log 4 \ldots]$$
$$= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log n$$

La série obtenue est grossièrement divergente puisque le terme général ne tend vers pas vers zéro.

Définition:

La série $(\sum_{n=0}^{+\infty} Un)$ est dite commutativement convergente si et seulement si pour tout bijection $\varphi : N \to N$ (permutation des indices) la série $(\sum_{n=0}^{+\infty} U\varphi(n))$ est convergente.

Théorème:

Soit $(\sum Un)$ une série absolument convergente, alors pour toute bijection $\varphi : N \to N$ on a :

(i) $(\sum U\,\varphi(n))$ est absolument convergente.

(ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} Un = \sum_{n=0}^{+\infty} U\varphi(n)$.

Preuve :

On suppose que $(\sum |Un|)$ converge. Posons : S = $\sum_{n\geq 0} |Un|$.

La démonstration se fera en deux étapes :

Etape1 :

Montrons que : $\sum_{n\geq 0} |Vn|$ = S.

Nous avons : $\sum_{k=0}^{n} |Vk| = \sum_{k=0}^{n} |U\ \varphi(k)| \leq$ S.

La suite $(\sum_{k=0}^{n} |Vk|)$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

Posons : $\sum_{n\geq 0} |Vn|$ = S'.

Nous avons alors : S'≤ S.

D'autre part : $\sum_{k=0}^{n} |Vk| = \sum_{k=0}^{n} |V\varphi^{-1}(k)| \leq$ S'.

D'où nous déduisons que : S ≤ S'.

Nous avons donc S = S'.

Etape2:

Posons $U_n^+ = \sup(U_n, 0)$, $U_n^- = \inf(U_n, 0)$

$V_n^+ = \sup(V_n, 0)$, $V_n^- = \inf(V_n, 0)$

Les suites $(\sum_{k=0}^{n} |U^+k|)$ et $(\sum_{k=0}^{n} |V^+k|)$ sont croissantes et majorées par S. Elles sont donc convergentes.

Sachant que : S = $\sum Un^+ - \sum Un^-$

S = $\sum Vn^+ - \sum Vn^-$ (1)

Nous déduisons que les quartes séries $(\sum Un^+)$, $(\sum Un^-)$, $(\sum Vn^+)$, $(\sum Vn^-)$ sont convergentes.

Les égalités : $\sum_{k=0}^{n} Vk^+ \leq \sum_{n\geq 0} Un^+$; $\sum_{k=0}^{n} Uk^+ \leq \sum_{n\geq 0} Vn^+$.

Nous permettent de déduire que : $\sum_{n\geq 0} Vn^+ = \sum_{n\geq 0} Un^+$.

Les égalités du (1) nous permettent alors de déduire que :

$$\sum_{n\geq 0} Vn^- = \sum_{n\geq 0} Un^-.$$

Et de conclure finalement que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} Vn &= \sum_{n\geq 0} Vn^+ + \sum_{n\geq 0} Vn^- \\ &= \sum_{n\geq 0} Un^+ + \sum_{n\geq 0} Un^- \\ &= \sum_{n\geq 0} Un.\end{aligned}$$

Remarque :

Le théorème précédent cesse d'être vrai si la série $(\sum Un)$ est seulement convergente.

Exemple :

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$= (1- \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}) + \dots + (\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(2k+1)} - \frac{1}{2(2k+2)}) + \dots$$

On pose $V_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)}$

$$= \frac{1}{2n+1}(1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2})$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} Vn = \frac{1}{2}$ [(1 - $\frac{1}{2}$) + ($\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$) +…] = $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En réorganisant autrement la somme d'une série convergente on obtient une sérié convergente mais pas de même somme, cela est du au fait que l'addition d'une infinité de termes n'est pas nécessairement commutative.

Corollaire:
Si la série ($\sum_{n=0}^{+\infty} Un$) est absolument convergente alors elle est commutativement convergente.

Preuve :
Le fait qu'elle soit convergente découle de la majoration $|\sum_{n=p}^{p+q} Un| \leq \sum_{n=p}^{p+q} |Un|$
($\sum_{n=0}^{+\infty} Un$) est absolument convergente <=> sup $_{I \subset \mathbb{N}} \sum_{n\in I} |Un| < \infty$ (ce sup vaut exactement $\sum_{n=0}^{+\infty} |Un|$).
Comme cette quantité sup $_{I \subset \mathbb{N}} \sum_{n\in I} |Un|$ est évidement la même pour (U_n) et pour U $\varphi(n)$ la convergence de ($\sum_{n=0}^{+\infty} U\varphi(n)$) est ainsi assurée.

.

III-Séries sommables :

1-Problème :

Etant donne une famille finie de réels $(U_i)_{i \epsilon I}$ on sait facilement definir la somme $\sum_{i \epsilon I} Ui$ de cette famille conformément a notre intuition en ajoutant les Ui un par un dans n'importe quel ordre.
Qu'en est-il des familles infinies ?
Les séries nous montrent les problèmes lies non seulement à la convergence mais à l'ordre de sommation (cas des séries semi-convergentes).

- **Réarrangement d'une série:**

Une opération très important sur les séries convergentes est le réarrangement des termes, c'est l'operateur qui associe à $(\sum_{n=0}^{+\infty} Un)$ et à toute bijection φ de **N**, la série $(\sum_{n=0}^{+\infty} U\varphi(n))$.
Voyons un exemple montrant que la série réarrangée n'est pas forcement convergente, et que si elle converge sa somme peut différer de celle de la série initiale.
On peut réarranger les termes de la série $(\sum_{n=1}^{+\infty} Un)$ avec $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ de façon a obtenir une série qui converge vers n'importe quelle limite fixé à l'avance.
Distinguons dans l'ensemble des termes U_n le sous-ensemble P des termes positifs et le sous-ensemble N des termes négatifs et rangeons ces deux sous-ensembles par ordre décroissant des modules.
$P = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots \}$ et $N = \{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots, -\frac{1}{2k-1}, \ldots\}$
Donnons nous par exemple $\ell > 0$ et construisons une série réarrangé $(\sum_{n=0}^{+\infty} U\varphi(n))$ dont la somme est ℓ, la construction qui suit utilise fondamentalement le fait que les séries $\sum_{n>1} \frac{1}{2n}$ et $\sum_{n>1} \frac{1}{2n-1}$ sont toutes deux divergentes et ont pour somme $+\infty$.
En effet on prend d'abord le plus petit nombre n_1 de termes positifs de façon a ce que leur somme dépasse strictement l soit :

$$S_{n1} = \sum_{j1=1}^{n1} \frac{1}{2\,j1} > \ell$$

Puis on prend le plus petit nombre n_2 de termes négatifs de façon à ce que la somme des n_2 premiers termes de la série réarrangée soit inferieure strictement à ℓ

$$S_{n2} = \sum_{j1=1}^{n1} \frac{1}{2\,j1} - \sum_{j2=1}^{n2} \frac{1}{2\,j2-1} < \ell$$

Puis on ajoute le plus petit nombre n_3 de termes positifs de façon a redépasser ℓ soit :

$$S_{n3} = \sum_{j1=1}^{n1} \frac{1}{2\,j1} - \sum_{j2=1}^{n2} \frac{1}{2\,j2-1} + \sum_{j3=n1+1}^{n3} \frac{1}{2\,j3} > \ell$$

Et comme les séries $\sum \frac{1}{2\,j}$ et $\sum \frac{1}{2\,j-1}$ divergent, ce processus peut être poursuivi indéfiniment.
On construit ainsi par récurrence une série réarrangée $\sum_{n=0}^{+\infty} U\varphi(n)$ avec des sommes partielles S_{nj} supérieures a ℓ si j impair, inferieur a ℓ si j pair, avec $| S_{nj} - \ell | \to 0$ si $j \to \infty$.Comme toute somme partielle S_k est comprise entre S_{nj} et S_{nj+1} pour j convenable, on a : $(S_k) \to l$ si $k \to \infty$.

Une étude théorique supplémentaire est donc nécessaire pour savoir qu'elles sont les familles de nombres dont on peut définir la « somme » indépendamment de l'ordre des indices de sommation. Définissons d'abord une famille sommable comme étant une famille de nombres « dont on a oublie l'ordre des termes ». Définissons d'abord une famille dénombrable de nombres comme étant une famille de nombres « dont on a oublie l'ordre des termes ».

2-Familles sommables :

La théorie des familles sommables a pour but de donner un sens à certains sommes $\sum_{i \epsilon I} Ui$ ou l'ensemble d'indices I *dénombrable* peut être infini.

On ne considère dans cette partie que des familles $(U_i)_{i \in I}$ de réels positifs.
On dira qu'une famille U = $(U_i)_{i \in I}$ positive lorsque c'est une famille de réels positifs ou nuls.
On notera P(I) l'ensemble de parties finies de I.

Définition (famille dénombrable de nombres)
Une famille dénombrable de nombres réels (ou complexes) est définie par un ensemble dénombrable I pas nécessairement ordonné et par une application $i \rightarrow U_i$ de I dans **K.**
On dit que U_i est le terme général de la famille. Les sommes partielles de cette famille sont les sommes partielles $S_i = \sum_{k=0}^{i} U\varphi(k)$ lorsque φ décrit toutes les bijections de **N** identifie a I.

- Séries doubles $\sum\sum Uk,l$ où (k,l) décrit l'ensemble dénombrable $\mathbf{N}^2$.

Définition(famille sommable):

Soit I dénombrable que l'on identifie arbitrairement à **N**. La famille $\{U_i , i \in I\}$de nombre est dite sommable si pour toute permutation φ de **N** (donc de I) la suite des sommes partielles
$S_i = \sum_{k=0}^{i} U\varphi(k)$ converge vers une limite et si de plus cette limite ℓ est indépendante de φ.
On écrit : $\ell = \sum_{j\in I} Uj$.

Exemple :
$\{\frac{(-1)^n}{n}, n = 1,2 \ldots\}$ n'est pas sommable d'après l'exemple précédent.
On peut en fait caractériser les familles sommables.

2.1-Critères de sommabilité :

Théorème :
Pour une famille dénombrable $\{U_j , j \in I\}$ de nombres réels (ou complexes) on a :
$\{U_j , j \in I\}$ est sommable <=> $\sup_{F \text{ fini } \subset I} \sum_{j\in F} |Uj| < \infty$.

Ce critère de sommabilité est extrêmement employé. Nous disposons d'un autre critère de sommabilité qui permet simultanément de calculer la somme d'une famille positive sommable.

Définition:
On appelle suite exhaustive de I toute suite croissante (I_n) de sous ensembles finis de I dont la réunion vaut I.

*Proposition:**

Soit (I_n) une suite exhaustive dans I formée d'ensembles finis et $(U_i)_{i \epsilon I}$ une famille positive, alors :

$$\sum_{i \epsilon In} Ui \underset{n \to +\infty}{\to} \sum_{i \epsilon I} Ui$$

Par conséquent la famille est sommable si et seulement si la suite $(\sum_{i \epsilon In} Ui)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ admet une limite réelle et cette limite est alors la somme de la famille.

2.2-Propriétés élémentaires de la sommation des familles positives :

*Proposition**:*

Soit $(U_i)_{i \epsilon I}$ et $(V_i)_{i \epsilon I}$ des familles positives.

1- Si $U \leq V$ alors $\sum_{i \epsilon I} Ui \leq \sum_{i \epsilon I} Vi$ par conséquent si $(V_i)_{i \epsilon I}$ est sommable alors $(U_i)_{i \epsilon I}$ est sommable.

2- Si $\gamma, \mu \epsilon R^+$ alors : $\sum_{i \epsilon I} (\gamma Ui + \mu Vi) = \gamma \sum_{i \epsilon I} Ui + \mu \sum_{i \epsilon I} Vi$

3- Si I est la réunion disjointe de la famille $(I_k)_{k \epsilon K}$ ou K est fini alors :

$$\sum_{k \epsilon K} \sum_{i \epsilon Ik} Ui = \sum_{i \epsilon I} Ui$$

4- Si $J \subset I$ alors $\sum_{i \epsilon J} Ui + \sum_{i \epsilon I \setminus J} Ui = \sum_{i \epsilon I} Ui$

En particulier $\sum_{i \epsilon J} Ui \leq \sum_{i \epsilon I} Ui$

Preuve :

Ce sont de simple vérification, a titre d'exemple montrons l'assertion 3.

Considérons une suite $(J_n)_{n \epsilon N}$ de parties finies exhaustive dans I pour chaque K dans **K** la suite $(J_n \cap I_n)_{n \epsilon N}$ est exhaustive dans I_k.

D'après la propriété d'associativité des sommes finies compte tenu du fait que J_n est la réunion disjointe de la famille $(J_k \cap I_k)_{k \epsilon N}$: $\sum_{k \epsilon K} Ui + \sum_{i \epsilon In \cap Ik} Ui = \sum_{i \epsilon Jn} Ui$.

Puisque K est un ensemble fini le membre de gauche tends vers $\sum_{k \epsilon K} \sum_{i \epsilon Ik} Ui$ tandis que le membre de droite tend vers $\sum_{i \epsilon I} Ui$.

Remarque :

- L'assertion 1 permet de montrer la sommabilité d'une famille positive grâce à la majoration de son terme général par celui d'une famille sommable connue.
- L'assertion 3 peut être considère comme un théorème de sommation par paquets ou encore d'associativité.

2.3-Théorèmes sur la sommation des familles positives :

Théorème 1 :

Soit $(U_i)_{i \epsilon I}$ une famille positive et φ une bijection de J sur I alors : $\sum_{i \epsilon I} Ui = (\sum_{i \epsilon J} U \varphi(j))_{j \epsilon J}$

En particulier la famille $(U_i)_{i \epsilon I}$ est sommable si et seulement si la famille$(\sum_{i \epsilon J} U \varphi(j))_{j \epsilon J}$ l'est.

Considérons une suite $(J_n)_{n\in N}$ de parties finies exhaustive dans J alors : $(\varphi(jn))_{j\in N}$ est une suite de parties finies exhaustive dans I.
D'après la propriété de réindexation des sommes finies : $\sum_{i\in\varphi(Jn)} Ui = \sum_{j\in Jn} U\ \varphi(j)$
Il suffit ensuite de faire tendre n vers $+\infty$.
Le théorème 1 exprime que la façon dont on indexe une famille positive n'influence ni la sommabilité ni la somme de cette famille.
On peut interpréter le résultat différemment, puisque réindexer une famille revient si l'on veut à permuter les termes de cette famille (en réalités les indices), le théorème 1 est souvent cité comme **un théorème de convergence commutative** des familles sommables.

Théorème 2(associativité généralisée)
Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille positive si I est la réunion disjointe de la famille $(I_k)_{k\in K}$ alors :

$$\sum_{k\in K} \sum_{i\in Ik} Ui = \sum_{i\in I} Ui$$

Preuve:
Considérons une suite $(K_n)_{n\in N}$ de parties finies exhaustive dans **K** d'après l'assertion 3 de la proposition précédente on peut écrire : $\sum_{k\in Kn} \sum_{i\in Ik} Ui = \sum_{i\in In} Ui$.
Lorsque I_n désigne la réunion de la famille $(I_k)_{k\in K}$ observons que la suite $(K_n)_{n\in N}$ est exhaustive dans I.
Le membre de gauche tends vers : $\sum_{k\in K} \sum_{i\in Ik} Ui$ lorsque n tend vers $+\infty$, quand au membre de droite il tend vers $\sum_{i\in I} Ui$ d'après l'assertion 5 de la proposition précédente.
Le théorème 2 permet de découper de manière arbitraire l'ensemble I des indices et de commencer par sommer sur chaque sous-ensemble I_k puis d'étudier la sommabilité (et la somme) de la famille constitue par les sommes sur chaque paquet.
Il est souvent cité comme **un théorème de sommation par paquet**, l'intérêt est que les paquets peuvent être infinis, on peut spécifier la sommabilité si la famille initiale est sommable alors chaque paquet est sommable et la famille des sommes des paquets est sommable et de somme égale à la somme de la famille initiale.

3-Relation entre familles et séries :

Théorème:
$(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$ étant une suite (famille indexée par **N**) les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1- La série $\sum_{n\in N} Un$ converge commutativement.
2- La famille $(U_n)_{n\in \mathbf{N}}$ est sommable.

On commence tout d'abord par énoncer un lemme :

Lemme:
Si la série $(\sum_{n=0}^{+\infty} Un)$ est commutativement convergente. Alors elle vérifie le critère de Cauchy au sens de la sommabilité c'est-à-dire :
$\forall\varepsilon > 0, \exists\ k\ fini, tel\ que\ \forall\ L\ fini\ disjoint\ de\ K$: $|\sum_{i\in L} Ui| < \varepsilon$.
$\forall$

Démonstration :
on procède par l'absurde, si la série ne vérifie pas le critère de Cauchy au sens de sommabilité, alors on pourrait construire pour un certain $\varepsilon > 0$ une suite $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ de sous ensembles finis d'indices dans N tels que L_k soit disjoint de $L_1 \cup L_2 \cup \ldots L_{k-1} \cup$ avec $\forall k$, $|\sum_{i\in Lk} Ui| > \varepsilon$.
soit $L_0 = N \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Lk = \{i_1, i_2, \ldots\}$(fini ou infini) à la partition de N suivante : $N = L_1 \cup \{i1\} \cup L1 \cup \{i2\} \cup \ldots$ (en intercalant les indices pris dans L_0 jusqu'à épuisement éventuel.), on peut associé moyennant un ordre sur les indices de chaque L_k une certaine bijection φ de N dans N (en numérotant les indices dans l'ordre d'apparition dans la partition) qui ne vérifie pas le critère de Cauchy au sens des séries (aussi loin que l'on veut on trouve une quantité de Cauchy $|\sum_{i\in Lk} Ui|$ qui le contredit et qui n'est donc pas convergente).
Etape2 :
Le lemme précédent est « la cheville ouvrière » du raisonnement.
Ecrivons que $(\sum_{n=0}^{+\infty} Un)$ est convergente : $\forall\varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in N$ tel que $\forall\ n > n_0\ |\sum_{k=0}^{n} Uk - S| < \varepsilon/2$.
Le critère de Cauchy au sens de la sommabilité vérifie par la famille $\{U_n\}$ (d'après le lemme cité), nous donne :
$\forall\varepsilon > 0, \exists$ K fini tel que $\forall$ L fini disjoint de K $|\sum_{n\in L} Un| < \varepsilon/2$.
On peut choisir n_1 pour que $K_1 = \{0,.., n_1\}$ et poser $N = \max(n_1, n_0)$, soit $I = \{0,.., n_1\}$ tout ensemble fini d'indices J contenant I peut s'écrire $J = I \cup L$ avec L disjoint de K.
Il en résulte : $|\sum_{n\in J} Un - S| \leq |\sum_{n\in I} Un - S| + |\sum_{n\in L} Un| < \varepsilon$ ainsi $|\sum_{n\in J} Un - S| < \varepsilon$.
Ce qui assure que la famille $\{U_n\}$ est sommable.

3.1-Etude de la sommabilité d'une famille :

Pour déterminer si une famille est sommable il est bon de disposer de critères pratiques et d'exemples suffisamment nombreux.

a-Familles indexées par une demi-droite de N :

Dans la suite de ce paragraphe l'ensemble des indices (notes n ou k plutôt que i) est une demi-droite $[n_0, +\infty[$ de N, les familles indexées par un telle demi-droite seront plutôt appelées suites et notées $(U_n)_{n\geq n0}$
Parfois l'entier n_0 sera omis ou non précisé cela signifiera que la suite est définie à partir d'un certain rang.
Pour étudier la sommabilité d'une famille positive il est naturel d'utiliser comme famille exhaustive la famille $(I_n) = ([n_0, n])$. nous savons que $(\sum_{k\in In} Uk = \sum_{k=n0}^{n} Uk)$ tend vers $(\sum_{k\geq n0} Uk)$.

La famille est donc sommable si et seulement si la suite $(\sum_{k=n0}^{n} Uk)$ admet une limite réelle lorsque n tend vers $+\infty$.

b-Familles de référence :

- <u>Suites géométrique :</u>

Si r est un réel positif ou nul on considère la suite géométrique (r^n).

- ✓ Si $r \geq 1$ le terme général ne tend vers pas vers 0 donc la famille est sommable.
- ✓ Si $r < 1$ on peut calculer $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ quantité qui tend vers $\frac{1}{1-r}$ lorsque n tend vers $+\infty$

On a $\sum_{k=0}^{n} |r^k| = \sum_{k=0}^{n} r^k$ car $r \geq 0$ et puisque la série $(\sum_{k=0}^{n} r^k)$ est convergente donc la série $(\sum_{k=0}^{n} |r^k|)$ est absolument convergente et par conséquence la famille (r^k) est sommable si et seulement si $r \in [0,1[$.

- Suites $(\frac{1}{n^a})$:

Pour $a \leq 0$ la famille $(\frac{1}{n^a})_{n \geq 1}$ n'est pas sommable puisque son terme général ne tend vers pas vers 0.

Pour a>0 puisque l'application $t \rightarrow \frac{1}{t}$ décroit, on sait que cette application est intégrable sur $[1, +\infty[$si et seulement si a>1, en résumé la famille $(\frac{1}{n^a})_{n \geq 1}$ est sommable si et seulement si a>1.

- Suites $(\frac{1}{n^a(\ln n)^b})$:

La famille $(\frac{1}{n^a(\ln n)^b})$ est sommable si et seulement si (a , b)>(1,1).

<u>Exemples :</u>

Les familles $(\frac{1}{n^2})$, $(\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}})$, sont sommables.

Les familles $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}})$,$(\frac{1}{n \ln n})$ ne sont pas sommables

c-Critères pratiques :

<u>Estimation directe du terme général :</u>

Pour monter que U est une famille sommable il suffit de montrer que $U_n = o(V_n)$, V étant une famille dont on sait déjà qu'elle est sommable (familles de références en général).

Si l'on soupçonne que poser $V_n = \frac{1}{n^a}$ peut permettre de conclure, on teste le quotient : $U_n / V_n = n^a U_n$.

- ✓ Si ce quotient tend vers 0 pour a >1, alors U est sommable.
- ✓ Si la valeur absolue de ce quotient tend vers une limite non nulle ou $+\infty$ pour $a \leq 1$, alors la famille U n'est pas sommable.

<u>Exemples :</u>

- La famille $(\frac{\sin n}{n(\ln n)^2})$ est sommable car son terme général est un o $(\frac{1}{n(\ln n)^2})$
- La famille (e^{-n2}) est sommable car son terme général est un $o(e^{-n})$.

<u>Critères logarithmiques :</u>

Soit U et V deux suites strictement positives. De la comparaison des quotients $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ on peut déduire une comparaison entre les termes généraux eux-mêmes.

Proposition:
Soit U et V deux familles strictement positives telles qu'à partir d'un certain rang $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$.
Alors $U_n = o(V_n)$.

Preuve :
On peut écrire l'inégalité sous la forme : $\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} \leq \frac{U_n}{V_n}$
Ainsi la suite $\frac{U_n}{V_n}$ décroit donc elle est bornée ce qui entraîne le résultat.
Donnons quelques conséquences utiles de cette proposition.

Proposition:
Soit (U_n) une suite strictement positive.

1- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers $\ell \in [0,1[$, la famille U est sommable.
2- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tend vers $\ell \in]1,+\infty[$, la famille U n'est pas sommable.
3- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec a> 1 , la famille U est sommable.
4- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec a<1 , la famille U n'est pas sommable.

Preuve :
Montrons à titre d'exemples les assertions (1) et (3).

(1) Soit r]ℓ, 1[et $V_n = r^n$ on a $\frac{V_{n+1}}{V_n} = r \geq \frac{U_{n+1}}{U_n}$ pour n assez grand il suffi d'appliquer la proposition précédente.

(3) soit b $\in$]1, a[et $V_n = \frac{1}{n^b}$ on a : $\frac{V_{n+1}}{V_n} = (1 + \frac{1}{n})^{-b} = 1 - \frac{b}{n} + o(\frac{1}{n})$
Donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a-b}{n} + o(\frac{1}{n}) - \frac{a-b}{n}$ puisque $\frac{a-b}{n} > 0$, $\frac{V_{n+1}}{V_n} - \frac{U_{n+1}}{U_n} > 0$ pour n assez grand comme la famille V est sommable la proposition précédente entraine que la famille U l'est aussi.

Exemples :

- Soit $U_n = \frac{1}{n!}$ puisque $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n}$ tend vers 0, U est une famille sommable.
- Soit $U_n = (\frac{C^n}{4^n})^a$ puisque $\frac{U_{n+1}}{U_n} = (\frac{2(2n+1)}{4(n+1)})^a = 1 - \frac{a}{2n} + o(\frac{1}{n^2})$

  La famille U est sommable pour a>2 et ne l'est pas pour a<2, le cas a=2 reste douteux
  On peut conclure garce à une extension de cette proposition, si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{1}{n} + V_n$ et si V est sommable U n'est pas sommable.

Exemples :

1- Soit la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Est-ce que la famille { $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; n $\in$ **N**} est sommable ?

On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, divergente donc la famille n'est pas sommable.

2- Soit la famille $U_n = \frac{\sin n}{n^2+1}$, n $\in$ **Z** ,montrer que (U_n) est une famille sommable.

On a sur **Z** la partition **Z** = **N*** $\cup$ (-**N**), la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |Un|$ est absolument convergente ainsi que $\sum_{n=-\infty}^{0} |Un|$
Donc (U_n) est sommable sur **Z.**

IV-Application des familles sommables aux séries doubles :

Définition:
On appelle série double une famille indexées par $\mathbf{N}^2$: $(U_{mn})_{(m,n)\in \mathbf{N}^2}$

Exemples :

- $\sum_{m\geq 1, n\geq 1} \frac{1}{(m+n)^a}$
- $\sum_{m\geq 1, n\geq 1} \frac{1}{(m^2+n^2)^a}$

1-Somme d'une série double :

On place les U_{mn} dans un tableau a double entrée, m numérotant les lignes et n les colonnes.

$$\begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} & \dots & U_{0n} & \dots \\ U_{10} & U_{11} & \dots & U_{1n} & \dots \\ \vdots & & & & \\ U_{m0} & U_{m1} & \dots & U_{mn} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

On peut ranger les U_{mn} en une suite $(V_p)_{p\in\mathbf{N}}$, par exemple on peut considérer les valeurs successives K=0,1,2,… de la somme (m+n) et pour chacune ranger les U_{mn} correspondants dans l'ordre des m croissants on obtient : $V_0 = U_{00}$, $V_1 = U_{01}$, $V_2 = U_{10}$, $V_3 = U_{02}$, $V_4 = U_{11}$, $V_5 = U_{20}$, …
Tout autre rangement s'obtient en modifiant l'ordre des termes de la suite (V_p) aucun ordre n'est privilégié.
Pour définir la somme de la famille (U_{mn}) on exigera donc que la série $(\sum_{p=0}^{+\infty} Vp)$ soit absolument convergente c'est-à-dire que l'ensemble des sommes d'un nombre fini quelconque de $|U_{mn}|$ soit majoré dans **R.**
Dans ce cas on dira que la famille (U_{mn}) est sommable et sa somme S sera par définition la somme d'une série quelconque $(\sum_{p\geq 0} Vp)$ formée avec les U_{mn}. On écrira : $S = \sum_{m\geq 0, n\geq 0} Umn$.
On peut aussi calculer S en répartissant les U_{mn} en un nombre fini ou en une infinité de séries, par exemple :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m+n=k}^{+\infty} Umn\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} Umn\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} Umn\right).$$

Exemples:

1- On considère la série double suivante : $U_{mn} = \frac{1}{m^n}$ m, n$\geq$ 2 représentée dans le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \\ \frac{1}{3^2} & \frac{1}{3^3} & \dots & \frac{1}{3^n} & \dots \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m^3} & \dots & \frac{1}{m^n} & \dots \end{pmatrix}$$

.   .   .
.   .   .
.   .   .

Chaque ligne ou colonne définit une série de Riemann dont le terme général est $\frac{1}{m^n}$.

Et puisqu'on a n>1, alors la série converge.

On a: $\sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} Umn = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} Umn = 1$

2- Considérons la famille (U_{nm}) ; $(n, m) \in N^2$ définie par le tableau infini suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2^{-1} & 2^{-2} & \dots \\ 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & \dots \\ 2^{-2} & 2^{-3} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Nous avons : $U_{nm} = \frac{1}{2^{n+m}}$; n, m$\geq$ 0.

On montre que la famille est sommable et à l'aide d'une sommation par lignes et par diagonales on montre aussi que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$

Utilisons une sommation par lignes :

Pour n fixé on a : $\sum_{m=0}^{+\infty} Unm = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{2}{2^n}$ d'où $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 4$.

La famille (U_{nm}) est sommable et a pour somme 4.

Sommons maintenant par diagonales :

$\sum_{n+m=l}^{+\infty} Unm = \sum_{n+m=l}^{+\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{l+1}{2^l}$ d'où $\sum_{n,m\geq 0} Unm = 4 = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{l+1}{2^l}$.

Conclusion:

- La notion de **famille sommable** vise à étendre les calculs de sommes au cas d'un nombre infini de termes. Contrairement à la notion de série, on ne suppose pas que les termes sont donnés sous forme d'une suite ordonnée. Il s'agit donc de pouvoir en définir la somme de façon globale, sans préciser l'ordre dans lequel on procède. De ce fait, la sommabilité est une propriété plus exigeante que la convergence d'une série, et a des propriétés supplémentaires.

- Si une famille $(U_n)_{n \in N}$ est sommable, alors toutes les séries permutées convergent vers la même somme, et la série est alors commutativement convergente.

- La sommabilité possède des propriétés de linéarité. La somme de deux familles sommables est encore une famille sommable, et les sommes s'ajoutent. Le produit d'une famille sommable par un réel λ est une famille sommable, et la somme est multipliée par λ.

- La notion de sommabilité donne notamment un cadre utile pour l'étude des séries doubles.

Bibliographie

Il ne s’agit que des ouvrages consultes pour écrire ce papier.

- Amrou Nour- Eddine, « séries numériques », chapitre 1.
- I.Elmahi, « analyse II-séries numériques » (ENSA 1 2007-2008)
- Jean Combes, « suites et séries » (université Pierre-Marie-Curie en 1982)
- Roger Noel, « séries numériques » (3 août 2006)
- Marc Sage, « familles sommables » (18 novembre 2004)
- Bernard Rande, « famille sommable »
- M. et P.Kree, J.Vauthier, « analyse » ,1997