UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Analyse mathématique des taux d'intérêts et risques en microcrédit

Présenté par :

- **Mohammed HAMDANE**

Encadré par :

- **Pr Mohammed ELKHOMSSI**

Soutenu Le 09 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr Mohammed BELLAHMAR	FSTF
- Pr Abdelmajid HILLALI	FSTF
- Pr Mohammed ELKHOMSSI	FSTF
-Pr Majda FIKRI	ENCG-Agadir

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
☎ 212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Remerciement

Je remercie énormément Monsieur le Professeur Mohammed EL KHOUMSSI pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire, de m'avoir proposé cet intéressant sujet.

Je tiens à remercier Monsieur Mohamed Bellahmar professeur à la Faculté des Sciences et Techniques, monsieur Abdelmajid HILALI professeur à la Faculté des Sciences et Techniques, et madame Majda Fikri professeur à l'école national de commerce et gestion (ENCG) d'Agadir, pour 'honneur qui m'ont fait en jugeant ce travail.

Enfin, mes profonds et sincères remerciements s'adressent à mes amis, ma famille et surtout mes chers parents. Merci pour votre aide quotidienne, votre soutien sans faille, dans les moments faciles, comme dans les difficiles. Merci pour votre amour et votre gentillesse sans limites.

Table des matières

Introduction

L'histoire des mathématiques, ou bien de la mathématique comme beaucoup de mathématiciens et épistémologues l'appellent, est l'une des histoires la plus vaste de toutes les sciences, depuis l'âge des pharaons, et leurs textes immortels, les grecques ; Pythagore, Thalies et pleins de mathématiciens, en passant par El Khawarizmi, Euler Fourier, Laplace, Gauss, Riemann, Henri Poincaré, Von Neumann, Alain Turing, Russell, Gödel, John Nash, Cédric Villani, Grigori Perlman, et pleins de génies qui ont marqué l'histoire avec leur créativité et système d'analyse et de logique dans la discipline la plus abstraite de toute connaissance humaine d'après beaucoup de philosophes.

Les mathématiques étaient toujours devant la problématique d'utilité, et les mathématiciens de l'histoire étaient toujours devant la question « à quoi servent les maths ? », surtout après le 18ème siècle, et les deux révolutions industrielles qu'a connues l'Europe, et le développement des technologies et des sciences humaines. L'histoire donne la réponse : sans mathématiques nous n'aurons pas de physiques ni d'informatique, sans nombres complexes nous n'aurons pas de développement de l'électricité, et sans la géométrie de Riemann nous n'aurons pas de théorie de la relativité générale et restreinte. Alors, reposer cette question devient très médiocre, surtout après le développement de l'application des mathématiques dans plusieurs champs de pensées (économie, sociologie, biologie, …).

Parmi ces applications de mathématiques, on trouve l'économie, ou la physique social d'après le grand sociologue français Auguste Comte. On appelle les mathématiques appliquées en économie par l'économétrie, et on doit noter que les grands économistes de l'histoire étaient des économètres.

Notre sujet dans ce mémoire est un sujet d'économétrie porte sur une analyse mathématique des taux et leurs risques, pour les microcrédits. On est devant des concepts purement économiques, alors, dans un premier temps, nous sommes dans l'obligation de les définir et les expliquer avant d'entamer notre travail mathématique.

La motivation pour notre sujet est basée sur l'expérience de l'une des institutions les plus célèbres dans le monde qui sont apparues vers la fin du 20ème, et qui ont pris une place très importante dans le système économique mondial. On parle des institutions de Microfinance, ou bien les institutions de microcrédit. Leur apparition était au Bangladesh par l'économiste Muhammad Yunus avec l'institution de Grameen-Bank, qui signifie la banque des pauvres. Comme son nom l'indique, cette institution travail avec et pour les pauvres. Etant donné que ces derniers n'ont pas accès au système de prêt des banques classiques, donc on peut dire que le Grameen-Bank est une alternative de financement pour les pauvres. Actuellement, nous connaissons que 60% de l'économie mondiale est informelle et donc elle privée des financements bancaires. En 2008 la banque mondial a annoncé que 1,4 milliard de personne sur terre vivent de moins de 1,5 dollar par jour. En 2006 Muhammad a reçu le prix Nobel de la paix grâce à son projet pionnier de Grameen-Bank. Cette expérience innovante mérite d'être traitée et étudiée, d'où l'importance de ce genre de sujet.

Dans le 1er chapitre nous allons définir plusieurs concepts liées à notre sujet (La microfinance, le microcrédit, le taux d'intérêt …), et nous allons parler de la Grameen-Bank, sa philosophie et son impact social. Dans le 2ème chapitre nous allons aborder le modèle stochastique du taux d'intérêt en microcrédit, nous allons étudier l'équation de Yunus, et sa généralisation, et le remboursement des préteurs avec retard. Le 3ème chapitre sera consacré à fournir un modèle mathématique pour les prêt individuel et de groupe. Ce modèle se base sur les chaines de Markov, donc nous serons devant l'obligation de les définir et donner des propriétés qui seront utiles.

Chapitre 1

Aperçu sur le microcrédit

1.1 La microfinance - le microcrédit

La microfinance désigne l'**offre de produits et services financiers aux populations pauvres, exclues des systèmes financiers traditionnels**. Ils concernent en général les habitants pauvres des pays en développement.

De façon plus générale, la microfinance réfère à une vision du monde où « le maximum de foyers pauvres ou assimilés peuvent avoir un accès permanent à une gamme de services financiers de grande qualité et adaptés à leurs besoins, incluant non seulement le crédit mais aussi l'épargne, l'assurance et les transferts de fonds ».

a-Histoire de la microfinance

Dans le passé, en Europe, en 1849, un bourgmestre prussien Friedrich Wilhelm Raiffeisen, fonde en Rhénaniela (région de l'ouest de l'Allemagne) la première société coopératives d'épargne et de crédit, une institution qui offre des services d'épargne aux populations ouvrières pauvres et exclues des banques classiques. L'épargne collectée permet de consentir des crédits à d'autres clients. Ces organismes sont dits mutualistes. Le mutualisme y compris financier connaît à partir de 1941, un développement assez exceptionnel dans la région du basque espagnol, les organismes et institutions qui se développent sur cette base en Europe et en Amérique du Nord, puis, après la Seconde Guerre mondiale dans les pays du Sud se focalisent sur l'épargne et offrent peu de services de crédit.

Dans les années 1970, avec la Grameen Bank, Muhammad Yunus développe le microcrédit au Bangladesh et ouvre la voie à de nombreuses autres expériences menées dans le monde entier. Des institutions sont créées pour fournir aux pauvres des moyens de créer leur gagne-pain et les outils pour gérer le risque associé, c'est-à-dire les services financiers normaux qui sont proposés aux catégories plus riches. Le succès de la Grameen Bank qui compte maintenant comme clients plus de 7 millions de Bangladeshies pauvres a connu un écho dans le monde entier. La Grameen Bank a démontré que non seulement les pauvres remboursent leurs crédits, mais qu'ils peuvent payer des intérêts élevés et que l'institution peut donc couvrir ses propres coûts.

À la fin des années 1980, les initiatives se multiplient. En Amérique latine, des institutions accordant des crédits en milieu urbain commencent à couvrir leur frais sans subvention[8]. L'ONG bolivienne PRODEM créée en 1986 décide de « filialiser » ses activités de microfinance sous forme de banque en créant la Banco Solidario SA, plus connue sous le nom de Banco-Sol. C'est l'émergence d'une « industrie de la microfinance[8] ».

b-Pourquoi la microfinance

On peut résumer les raisons qui affirment l'importance de la microfinance en se servant d'une sorte de manifeste réalisé en 2004 par le CGAP (Consultative Group to Assist the Poor) et retenus par les dirigeants du G8 au sommet du 10 juin 2004 :

1. Les pauvres n'ont pas seulement besoin de crédit, mais aussi de moyens pour placer leur épargne, d'assurance, et de services de transfert de fonds.
2. La microfinance doit procurer des avantages aux ménages pauvres : élévation du niveau de vie, constitution de patrimoine et de garanties pour les prémunir vis-à-vis des remous auxquels ils peuvent être confrontés.
3. « La microfinance peut se payer elle-même », c'est-à-dire qu'elle n'a pas forcément besoin d'apports externes. Les subsides provenant de donateurs ou du gouvernement sont rares et incertains. Par conséquent, pour atteindre un plus grand nombre de pauvres, la microfinance doit s'auto-entretenir.
4. La microfinance implique de mettre sur pied des institutions locales permanentes.
5. La microfinance implique également d'intégrer les besoins financiers des populations pauvres dans un système financier national.
6. Il revient au gouvernement de rendre possibles les services financiers, pas forcément de les fournir.
7. Les fonds donateurs devraient compléter les capitaux privés plutôt que de se substituer à eux.
8. "Le goulot d'étranglement critique est la pénurie d'institutions fortes et de managers." Les donateurs devraient mettre l'accent sur le potentiel de création.
9. Le plafonnement des taux d'intérêt va à l'encontre des intérêts des pauvres en empêchant les institutions de microfinance de couvrir leurs frais, ce qui bloque la fourniture de crédit.

Les institutions de microfinance devraient mesurer et publier leurs performances aussi bien financières que sociales.

C. Les produits micro financière – Le microcrédit

C'est le plus important des produits financiers proposés par la microfinance. Le microcrédit est un crédit de faible montant, avec intérêts, accordé à des micro-entrepreneurs qui n'ont pas accès aux services financiers traditionnels. On distingue plusieurs types de microcrédits dont deux sont les plus connus :

Le microcrédit solidaire

Il consiste à s'appuyer sur un mécanisme de groupe composé généralement de cinq emprunteurs afin de compenser l'absence de garanties matérielles de ces individus. C'est une gestion de « groupes d'auto-entraide », ce système fonctionne dans plus de 43 pays. On prête de l'argent à un groupe de 5 personnes, et il n'est plus possible pour le groupe d'emprunter à nouveau si l'une des cinq personnes échoue. Cela créée une dynamique de groupe en termes de responsabilité (afin que les autres membres du groupe puissent à nouveau emprunter), augmentant ainsi la viabilité économique de la Grameen Bank.

Ce mécanisme de caution solidaire permet un très fort taux de remboursement (proche de 100%) et une baisse des coûts de transaction connus pour être importants. En effet, le fait que ce soit les membres du groupe qui sélectionnent les emprunteurs, évite à l'établissement de crédit toutes recherches et analyses coûteuses pour connaitre des informations sur ses clients et ainsi lui permet d'économiser les coûts d'instruction d'un dossier. L'autre avantage du microcrédit solidaire est son rôle positif sur la société avec ce mécanisme de solidarité qui permet de créer et développer des liens voir des amitiés au sein du groupe de caution solidaire.

Le microcrédit individuel

Ici, le prêt est accordé à une personne, et non plus à un groupe, en se basant sur sa capacité à présenter des garanties de remboursement et un certain degré de sécurité de l'institution lui octroyant le crédit. Ce type de crédit à un but précis, il n'est pas possible d'en faire un usage libre comme le crédit solidaire. Il sert à financer un projet en particulier. C'est pourquoi, contrairement au crédit solidaire, l'analyse des dossiers de crédit et les garanties présentées par le client relèvent de la plus haute importance dans le cas du crédit individuel. L'IMF est alors directement en charge de la sélection de ses emprunteurs, elle ne repose plus sur un mécanisme d'auto-sélection. L'octroi de ce crédit dépend donc de deux choses : la capacité de remboursement du client et ses garanties.

Concernant la capacité de remboursement, elle dépend de la pertinence de son projet d'investissement. Il est nécessaire que ce projet soit rentable, en d'autres mots que son taux de rentabilité soit supérieur au taux d'intérêt du prêt. Mais aussi que le rythme de remboursement du crédit soit adapté aux flux de revenus du client

Mais le crédit individuel n'a pas que des avantages, il connait aussi certaines limites. En effet, la première et pas des moindres, est le fait qu'il ne s'adresse pas aux personnes les plus démunis à cause des garanties qui constituent une condition à l'octroi du prêt. De plus, la productivité des agents de crédit individuel est nettement inférieure à celles des agents de crédit solidaire, mais cette limite n'est pas vraiment à prendre en compte, car cette différence de productivité est compensée par le montant plus élevé des prêts octroyés dans le cadre du crédit individuel.

D- Les problématiques du microcrédit

- Des taux d'intérêts élevés

Les taux d'emprunt d'actions de microcrédit, dont la moyenne mondiale est évaluée à 37 %, sont en moyenne plus élevés que les taux d'emprunt traditionnels, alors que les taux de remboursement s'élèvent à 95 %. Les institutions de micro-finance les justifiant par des frais de fonctionnement élevés au vu de la vulnérabilité de la clientèle.

Il existe de grandes institutions de microcrédit, avec des taux d'intérêt élevés, ne recherchant pas le développement économique mais le profit peut tirer la concurrence vers des taux plus élevés, dans un cercle vicieux visant l'attraction des capitaux, alors que la demande de microcrédits est élevée. Une telle situation est caractéristiques de pays en développement fortement peuplés, où les demandes de petits crédits sont très nombreuses comparé aux capitaux disponibles. Au Mexique, où les principales institutions de microcrédit telles « te creemos », qui pratique des taux de 125 %, ou Compartamos, le leader des Amériques, des taux de 82 %, la moyenne nationale se situe ainsi à 70 % contre 37 % sur le plan international[12]. De même, les taux de microcrédit sont de 74 % en moyenne au Nigeria, où le leader, (LAPO), pratique l'épargne forcée, consistant à conserver une partie du prêt sur laquelle l'emprunteur paie des intérêts, sous prétexte d'éduquer les populations pauvres à l'épargne, réalisant ainsi un taux masqué de 126 %. « Le microcrédit devrait être perçu comme la possibilité d'aider les gens à sortir de la pauvreté par le jeu du marché, et non comme un moyen de gagner de l'argent sur le dos des pauvres. » a déclaré Muhammad Yunus à ce propos.

- Difficulté de mesure des effets réels du microcrédit

L'impact du microcrédit sur la situation des plus pauvres est difficile à effectuer. Il est vrai qu'on a des exemples qui prouvent l'effet positif des microcrédits sur le développement, mais le problème est de comment généraliser ces exemples de façon à ne pas sortir du cadre scientifique d'analyse, pour plusieurs raisons : comment savoir si le bénéficiaire n'aurait pas pu avoir accès au marché du crédit localement sans l'aide d'une IMF ? (biais de sélection) Si tel est le cas, le succès n'est pas dû à la microfinance. Comment savoir si l'argent est investi dans des projets à valeur ajoutée ? Comment savoir s'il n'aurait pas eu lieu de toute façon *via* une épargne informelle ? (fongibilité de l'aide).

Une étude portant sur 1 800 familles du Bangladesh rural a ainsi établi un taux de scolarisation presque deux fois supérieur chez les emprunteurs de la Grameen Bank. Cette différence considérable doit cependant être nuancée par le fait que les décisions de scolariser ses enfants et de recourir au microcrédit peuvent être corrélées à une même attitude face à l'avenir.

1.2 Le Grameen Bank : idée et philosophie

La **Grameen Bank** (littéralement, « Banque des villages ») est une banque spécialisée dans le micro-crédit. Elle a été créée officiellement en 1976 par Muhammad Yunus au Bangladesh. Elle dispose de près de 1 400 succursales et travaille dans plus de 50 000 villages. Depuis sa création, elle a déboursé 4,69 milliards de dollars de prêts et affiche des taux de remboursement de près de 96,54 %.

L'organisation et son fondateur ont été récompensés du prix Nobel de la paix en 2006. Ole Danbolt Mjøs (président du Comité Nobel norvégien) a dit qu'« Une paix durable ne peut pas être obtenue sans qu'une partie importante de la population trouve les moyens de sortir de la pauvreté » et « le microcrédit est l'un de ces moyens ». Son fondateur, Muhammad Yunus, a été limogé de la Grameen Bank le 2 mars 2011, probablement du fait de pressions provenant du gouvernement du Bangladesh.

Le fondateur de la banque est Muhammad Yunus, docteur en économie de la *Vanderbilt University* aux États-Unis. L'idée lui est venue durant une terrible famine au Bangladesh en 1974. Le prêt accordé de 27 dollars américains (sans les risques des « prêteurs sur gage ») à un groupe de 42 familles leur a permis de créer de menus objets à vendre. Yunus croyait que proposer de tels prêts disponibles à grande échelle pouvait améliorer la condition de pauvreté du monde rural Bangladesh.

La banque commença comme projet de recherche de Yunus associé au Projets économiques et ruraux de l'université du Bangladesh de Chittagong et ce, afin de tester sa méthode de crédit et de services bancaires proposés aux zones rurales pauvres. En 1976, le village de Jobra et d'autres villages avoisinants l'université de Chittagongfurent les premiers à profiter des services de la *Grameen Bank*. La banque fut un immense succès et le projet, avec l'aide du gouvernement, fut étendu en 1979 au district de Tangail (au nord de la capitale Dhaka). Le succès de la banque continua et se répandit à d'autres districts du Bangladesh. En 1983, elle fut transformée en banque indépendante par le gouvernement du Bangladesh.

Quelques chiffres

La *Grameen Bank* est détenue par des emprunteurs pauvres, la plupart d'entre eux sont des femmes. La banque est détenue à 97 % par des emprunteurs et 3 % par le gouvernement du Bangladesh.

La banque a eu une croissance importante entre 2003 et 2007. En octobre 2007 elle décompte 7.34 millions d'emprunteurs, dont 97 % sont des femmes. Le nombre d'emprunteurs a plus que doublé depuis 2003, à cette période, elle ne comptait que 3.12 millions de membres. Une croissance similaire peut être observée quant au nombre de villages couverts. En octobre 2007, la banque comptait 24 703 employés, avec 2 468 antennes couvrant 80 257 villages, rapporté à 43 681 villages en 2003. Depuis sa création, la banque a accordé 347,75 milliards de Tk de prêts, (4,3 milliards d'euros) ; 313,11 milliards de Tk (3,9 milliards d'euros) ont été remboursés. La banque se réclame d'un taux de recouvrement de 98,35 %, comparé aux 95 % de recouvrement en 1998.

Cependant, plusieurs critiques remettent en doute la valeur annoncée ainsi que la méthode de calcul utilisée par la *Grameen Bank* pour arriver à ce chiffre.

1.3 Impact social

- Impact sur le développement local

L'activité de microcrédit encourage les microprojets au niveau local, les programmes liées touchent des secteurs aussi divers que l'agriculture (groupements villageois, coopératives paysannes, organisations professionnelles agricoles), l'artisanat (groupements d'artisans, associations artisanales féminines), le financement de l'économie sociale (mutuelles d'épargne et de crédit, banques villageoises), la protection sociale (mutuelles de santé, caisses de santé primaire) ou l'éducation. Ainsi, ils contribuent à l'amélioration de l'accès aux services sociaux de base, aux soins de santé, aux services de planification familiale et à l'eau potable.

- Impact sur la place des femmes

, le microcrédit a pu être présenté comme un levier de revalorisation de la condition de la femme dans les pays en voie de développement. Au Bangladesh, par exemple, 97 % des bénéficiaires directes des prêts de la Grameen Bank seraient des femmes, contre 74 % au niveau mondial. Touchant des secteurs faiblement capitalisés employant souvent une main d'œuvre féminine. Les services de microfinance contribuent à l'autonomisation des femmes en exerçant une influence positive sur leur pouvoir de décision et en renforçant leur statut socioéconomique global. À la fin de 2006, la microfinance avait touché plus de 79 millions de femmes parmi les plus pauvres du monde. À ce titre, la microfinance est susceptible d'apporter une contribution importante à l'égalité entre les sexes et de promouvoir des moyens de subsistance durables et de meilleures conditions de travail pour les femmes.

1.4 Les taux d'intérêts

L'intérêt est avant tout la rémunération, sous la forme de versements périodiques, d'un prêt consenti par un prêteur `à un emprunteur. C'est probablement l'une des activités financières les plus anciennes, déjà pratiquée dans la plus haute antiquité. Pour le prêteur, l'intérêt est le prix de la renonciation temporaire à une consommation et pour l'emprunteur c'est le prix payé pour une jouissance immédiate.

a- Le principe de la capitalisation

Définition : Le principe de la capitalisation est qu'un montant B_0 placé durant une période δt accumule un intérêt $B_0\rho \geq 0$, et vaudra donc $B_0+B_0\rho=B_0(1+\rho)$ à l'issue de cette période.

On parle d'intérêt simple lorsque l'intérêt accumulé est le même à chaque période. On considère donc $T=n\delta t$ et on obtient

$$B_T=B_0(1+n\rho)$$

Mais, en général, on considère plutôt que les intérêts accumules pendant une période rapportent à leur tour des intérêts durant la période suivante et ainsi de suite : c'est la formule des intérêts composés. Ainsi le montant B_0 vaudra encore :

$B_0(1+\rho)$	à l'issue de la 1er période
$[B_0(1+\rho)](1+\rho)=B_0(1+\rho)^2$	à l'issue de la 2ème période
.	
…	
$B_T=B_0(1+\rho)^n$	à l'issue de la n^{ième} période

Proposition(*)

Si l'on désigne par t les instants successifs multiple de δt, avec $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, \dots, n\delta t=T\}$, on peut définir r comme suivant :

$$e^{r\delta t}= 1+\rho$$

(*) On a essayé de donner une preuve à cette proposition, car on trouve souvent qu'il est un résultat non démontré.

Preuve

$$B_T = B_0(1+\rho)^n$$
$$\frac{B_T}{B_0} = (1+\rho)^n$$
$$\ln(\frac{B_T}{B_0}) = n\ln(1+\rho)$$
$$e^{\frac{1}{n}\ln\frac{B_T}{B_0}} = (1+\rho) \qquad (1)$$

Or on a $\quad n = \frac{T}{\delta t}$

Alors

$$(1) \iff e^{\frac{T}{\delta t}\ln\frac{B_T}{B_0}} = 1+\rho$$

En posant $\quad r = \frac{1}{T}\ln\frac{B_T}{B_0}$

On obtient :

$$\boxed{e^{r\delta t} = 1+\rho}$$

Remarque:

On appelle $\boldsymbol{r}$ **le taux d'intérêt continu annuel**, on peut réécrire la suite des $\boldsymbol{B_{k\delta t}} = \boldsymbol{B_t}$ avec k ∈ {1, 2, ….. n} comme une fonction exponentielle du temps $\mathbf{B_t = B_0}\boldsymbol{e^{r\delta t}}$

Par exemple Tout comme un Dirham aujourd'hui vaudra $\boldsymbol{e^{r\delta t}}$ à l'issue d'une période δt, la valeur actuelle d'un dirham délivré en δt vaut aujourd'hui $\boldsymbol{e^{-r\delta t}}$ avec t ∈ {0,δt,...,nδt } En effet la quantité $\boldsymbol{e^{-r\delta t}}$ qui est (un peu) plus petite que 1, vaudra $(\boldsymbol{e^{r\delta t}})\ \boldsymbol{e^{-r\delta t}}$= 1 après une période. Lorsqu'un actif prend de la valeur au cours du temps en accumulant des intérêts, on parle de **capitalisation**. A l'inverse la prise en compte dans l'évaluation d'un actif de sa valeur actuelle au lieu de sa valeur future s'appelle **l'actualisation**.

Notre travail en microcrédit va se baser sur ce principe de capitalisation.

b- Les taux d'intérêts en Grameen Bank

Les taux d'intérêt en Grameen Bank sont des taux composés, en raison de la philosophie du microcrédit, son but social, et la méthode de prêt de groupe, mais en Grameen-Bank comme étant une institution de microcrédit, se base sur des taux d'intérêts très élevés par rapport aux banques classiques qui peuvent être plus de 20%, les institutions de microfinance les justifiant par des frais de fonctionnement élevés au vu de la vulnérabilité de la clientèle.

Mais ceci reste insuffisant, comme justification d'après plusieurs économistes et sociologues, c'est pourquoi plusieurs articles parlent d'une injustice sociale des institutions de microcrédit malgré leur prétention d'aide des pauvres.

Chapitre 2

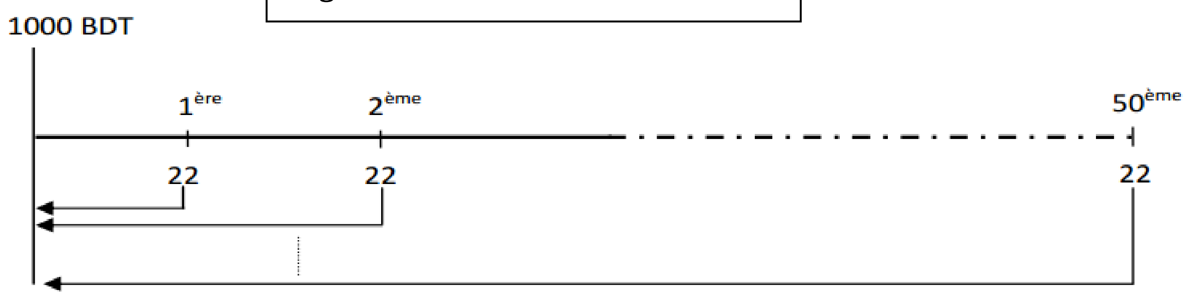
Model stochastique du taux d'intérêt en microcrédit

2.1 Détermination de l'équation de Yunus

Comme nous l'avons signalé dans le 1er chapitre le taux d'intérêt en Grameen-Bank peut atteindre 20%, et d'après l'exemple qu'on a annoncé en … on affirme que l'intérêt en année pour 1000 BDT est 100 BDT, c'est à dire 10%. Mais ce résultat ne tient pas compte de la valeur temps de l'argent, c'est-à-dire le principe de la capitalisation. Dans l'exemple qui suit, nommé l'exemple de Yunus, nous allons essayer de calculer le taux d'intérêt continu annuel.

Dans l'exemple ci-dessus, étant donné 1000 prêt BDT remboursé par 50 semaines de l'année avec le total du remboursement 1100 BDT d'un emprunteur est équivalent à chaque semaine, elle paie le versement de 22 BDT. Le régime de remboursement des versements hebdomadaires peut être représenté par la figure 2.1. La valeur actuelle d'une série de paiements égaux 22 BDT payer plus de 50 semaines de l'année à un rabais de taux d'intérêt est calculé comme suit :

Figure 2.1 : versement hebdomadaire



Considérons un prêt de 1000 BDT, d'une durée d'un an et supposons que les remboursements demandés s'élèvent à 22 BDT par semaine. Si l'on note r le taux continu annuel pratiqué, les 22 BDT remboursés après une semaine ont pour valeur présente $22e^{\frac{-r}{52}}$ et ceux que l'on rembourse la semaine suivante $22e^{\frac{-2r}{52}}$ .... et ainsi de suite.

Par conséquent, pour les 50 versements pour équilibrer les 1000 BDT immédiatement reçu par l'emprunteur, on obtient l'équation suivante, que nous essayons de trouver une solution pour obtenir notre taux d'intérêt continue annuel :

$$1000 = \sum_{n=0}^{50} (22e^{-r\frac{n}{52}})$$

En posant: $q = e^{\frac{-r}{52}}$

On obtient:

$$1000 = \sum_{n=0}^{50} (22q^n)$$

$$\iff 1000 = 22\sum_{n=0}^{50} q^n$$

$$\iff 1000 = 22\frac{q - q^(50+1)}{1-q}$$

$$\iff 1000 = 22\frac{q(1-q^{50})}{1-q}$$

$$\iff 22q^{51} - 1022q + 1000 = 0 \qquad (1)$$

L'enjeu dans ce qui suit et d'essayer de fournir une solution numérique à l'équation de Yunus (1), mais nous allons, d'abord, proposer une forme généralisée de cette équation, pour pouvoir l'étudier.

2.2. Généralisation de l'équation de Yunus

A partir de l'exemple déjà donnée, nommé l'exemple de Yunus, on donne notre forme généralisée.

On remplace 1000 par la variable B, 22 par $\mathbf{B_n}$ qui représente le remboursement à la $n^{\text{ième}}$ fois. Et on remplace 52 par M.

On obtient:

$$B = \sum_{n=0}^{N} B_n e^{\frac{-nr}{M}}$$

d'une forme implicite:

$$B = B_1 e^{\frac{-r}{M}} + B_2 e^{\frac{-2r}{M}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + B_{N-1} e^{\frac{-(N-1)r}{M}} + B_N e^{\frac{-Nr}{M}}$$

En posant: $q = e^{\frac{-r}{M}}$

on aura:

$$B = \sum_{n=0}^{N} B_n q^n$$

On travail avec B_0 le remboursement moyen dans tout les periodes

$$B_0 = \frac{B_1 + B_2 + \dots\dots\dots\dots\dots + B_N}{N}$$

$$B = \sum_{n=0}^{N} B_0 q^n = B_0 \frac{q(1-q^N)}{1-q} \qquad (1)$$

$$\iff B(1-q) = B_0 q - B_0 q^{N+1}$$

$$\iff B_0 q^{N+1} - (B + B_0)q + B = 0 \qquad (2)$$

On appelle l'équation (2) :l'équation de Yunus généralisée.

a- Résolution numérique de l'équation de Yunus généralisée (*)

Dans ce paragraphe, nous essayons de faire une simulation numérique à l'équation (2), nous allons faire une étude analytique pour pouvoir estimer l'intervalle où se trouvent nos solutions qu'on cherche.

Propriété 2.1:

En se basant sur le faite que q ∈ [0,1], l'équation de Yunus généralisée admet deux solution dans l'intervalle [0,1].

Preuve :

Dans cette preuve, nous allons travailler analytiquement en essayant de chercher les points ∈ [0,1], qui nous donnent une résolution à notre équation. Nous allons considérer une fonction dont on étudiera la convexité et la dérivabilité, pour savoir où elle change de signe :

(*) Ce travail qu'on a fait est le fruit de quelques idées proposé par Mr.Khomsi

On considre la forme generalisee de l'equation de Yunus deja donnee:

$$B = \sum_{n=0}^{N} B_n e^{\frac{-nr}{M}}$$

d'apres ce qui precede, on a l'equation de Yunus suivante:

$$q^{N+1} - (\frac{B}{B_0} + 1)q + \frac{B}{B_0}$$

En posant $\quad a = -(\frac{B}{B_0} + 1) \quad$ et $\quad b = \frac{B}{B_0}$

On peut ecrire notre equation sous la forme:

$$qN + 1 + aq + b = 0$$

Soit $\quad \psi(q) = q^{N+1} + aq + b$

On a alors $\quad \psi'(q) = (N+1)q^N + a$

et $\quad \psi''(q) = N(N+1)q^{N-1}$

On a $\quad 0 \leq q = e^{\frac{-r}{M}} \leq 1$, $\quad$ donc $\quad \psi''(q) > 0$

Donc $\psi'(q)$ est croissante

On a le tableau de variation suivant :

Q	0	1
ψ''	+	
ψ'	a $\nearrow$	$(N+1)+a$

On a $\quad a = -(\frac{B}{B_0} + 1) \quad$ donc $a \leq 0$

Et on a $\quad N + 1 + a = N + 1 - \frac{B}{B_0} - 1 = N - \frac{B}{B_0}$

En se basant sur l'exemple de Yunus, et en notant les resultats lies au taux d'interet et la periode de remboursement N, on peut affirmer que $N - \frac{B}{B_0} > 0$

Donc $\psi'(q)$ change de signe.

Alors $\exists q' \in [0,1], telque : \psi'(q') = 0$

On peut alors tracer le tableau de variation pour ψ

Q	0	q'	1
ψ'	-	**0**	+
ψ	b ↘	$\psi(q')$	↗ 1+a+b

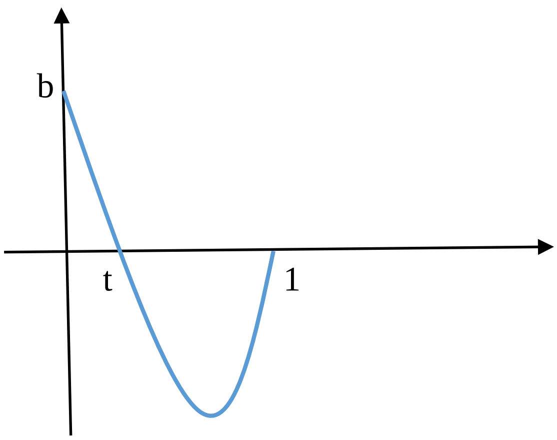
Donc notre fonction ψ est convexe, de minimum ψ'(q).

On a b >0, et notre fonction ψ s'annule, alors elle s'annule en deux points. L'enjeu est de les déterminés.

$$\text{On a} \qquad 1 + a + b = 1 - \frac{B}{B_0} - 1 + \frac{B}{B_0} = 0$$

$$\text{alors} \qquad \psi(1) = 0$$

On peut tracer notre fonction sous la forme suivante :



Ce qui prouve que notre équation de Yunus généralisée admet deux solutions dans l'intervalle [0,1].

Il est claire que 1 est une solution de l'équation (2) mais on revenant à l'origine de notre équation, on trouve que q ne peut pas être égale à 1 dans l'équation (1)

Donc pour déterminer le taux d'intérêt continu annuel, on doit déterminer t, tel que t ∈ [0 ,1[. C'est pour cela on fait appel au programme Matlab.

On cherche la solution de l'équation de Yunus non généralisée, c'est-à-dire celle-là :

$$\Longleftrightarrow \quad 22q^{51} - 1022q + 1000 = 0$$

Cette capture d'écran illustre les instructions suivis en Matlab.

```
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.
>> f=@(q)  (22*(q^51)-1022*q+1000)

f =

    @(q)(22*(q^51)-1022*q+1000)

>> x=fzero(f,[0,0.9999])

x =

    0.9962
```

Pour avoir notre solution, on a demandé où notre fonction s'annule dans l'intervalle [0,0.9999], c'est comme l'intervalle [0,1[.

Alors on a trouvé que t=0.9962

En notant que $q=e^{\frac{-r}{52}}$

On aura donc : r= 19,74 % qui est prêt de 20%.

Donc le taux d'intérêt continu annuel lié à l'exemple de Yunus est 20%.

b- La forme continue de l'équation de Yunus

Nous essayons de convertir notre model généralisée de l'équation de Yunus, à un processus continu en disant que le nombre de remboursement N est très grand. En terme financiers, nous pouvons soit augmenter la période de remboursement ou payer plus fréquemment. Ainsi, nous pouvons remplacer la somme par une intégral.

En note bien, que ce processus continu a pour but de fournir une solution à l'équation de Yunus généralisée.

On Considère la forme généralisée de l'équation de Yunus déjà donnée, en remplaçant la sommation par une intégrale.

$$B = \int_1^N B_0 e^{\frac{-nr}{M}}\, dn$$

Propriété 2.2

En se basant sur la forme continue de l'équation de Yunus, on peut dire que :

$$r = -M sinh^{-1}(\frac{2rB}{MB_0})$$

Preuve

$$B = \int_1^N B_0 e^{\frac{-nr}{M}}\ dn$$
$$= B_0[\frac{-M}{r}e^{\frac{-nr}{M}}]_1^N$$
$$= MB_0(\frac{e^{\frac{-Nr}{M}} - e^{\frac{-r}{M}}}{r})$$
$$\Longleftrightarrow \frac{rB}{2} = MB_0(\frac{e^{\frac{-Nr}{M}} - e^{\frac{-r}{M}}}{2})$$
$$\Longleftrightarrow \frac{rB}{2} = -MB_0(\frac{\frac{e^{\frac{-r}{M}}}{e^{\frac{(N+1)r}{M}}} - e^{\frac{-r}{M}}}{2}) \qquad (*)$$

On sait que $\quad sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Alors l'enjeu est de faire tendre $\boldsymbol{e}^{-\frac{(N+1)r}{M}}$ vers 1, et ça revient à tendre $\frac{(N+1)r}{M}$ vers 0.

Si r=0% c'est bien notre terme est égal à 0, mais ce n'ai pas le cas dans la réalité.

Dans la réalité, en microcrédit, et surtout en Grameen Bank, même si les taux d'intérêts sont grands par rapport aux crédits simples, ils ne dépassent pas 30%.
On note aussi que la différence entre N et M n'est pas grande, c'est-à-dire que $\frac{(N+1)}{M}$ tend vers 1.
Alors $\frac{(N+1)}{M} * 0{,}3$ tend vers 0,3.
Et on a $e^{0,3} = 1{,}35$ qui est proche de 1, donc on peut dire que notre terme $\boldsymbol{e}^{-\frac{(N+1)r}{M}}$

Tend vers 1.

On peut écrire alors :

$$(*) \Longleftrightarrow \frac{rB}{2} = -MB_0(\frac{e^{\frac{r}{M}} - e^{\frac{-r}{M}}}{2})$$
$$\Longleftrightarrow \frac{rB}{2} = -MB_0\ sinh(e^{\frac{r}{M}})$$
$$\Longleftrightarrow sinh(e^{\frac{r}{M}}) = \frac{-MB_0}{rB}$$

Alors $\quad \boxed{r = -Msinh^{-1}(\frac{2rB}{MB_0})} \quad (**)$

Propriété 2.3[*]

La forme continue de l'équation de Yunus nous permet d'écrire B sous la forme suivante :

$$B = \frac{B_0 M}{r}(e^{\frac{-Nr}{M}} - 1)$$

Preuve

On a

$$B = B_0 \int_0^N e^{\frac{-nr}{M}} dn$$

On sait que

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Alors

$$B = B_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \int_0^N (\frac{-nr}{M})^k dn$$

$$\Longleftrightarrow \quad B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{(-r)^k}{M^k} \int_0^N n^k dn$$

$$\Longleftrightarrow \quad B = B_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{(-r)^k}{M^k} N^{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad B = \frac{B_0 M}{r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(-r)^{k+1}}{M^{k+1}}$$

on fait un chagement de variable en notant $p = k + 1$

$$\Longleftrightarrow \quad B = \frac{B_0 M}{r} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-rN)^p}{p!M} - 1$$

Alors

$$\boxed{B = \frac{B_0 M}{r}(e^{\frac{-Nr}{M}} - 1)}$$

(*)La preuve de la proposition est le fruit d'une idée de Mr.Khomsi

c- La forme généralisée et l'injustice sociale [(*)]

Comme on l'a annoncé au 1er chapitre, le système des microcrédits, se base sur des taux d'intérêts trop élevés par rapport au crédit simple. La philosophie de Grameen-Bank se base sur l'empowerment et l'aide des pauvres, mais en se basant sur l'analyse et les calculs déjà faits pour l'équation de Yunus généralisée, on a prouvé que le taux d'intérêt est élevé (20%), mais le spécial dans la généralisation c'est qu'on a pu fournir une équation qui lie entre eux le taux d'intérêt, le remboursement moyen et le capital prêté. C'est pourquoi dans ce paragraphe, et on se basant sur l'exemple de Yunus, on va conclure qu'on peut se mener à des taux d'intérêt trop élevés avec de bonnes et raisonnables conditions de remboursement.

Revenons à l'équation de Yunus généralisée :

D'apres (2) on peut ecrire

$$B_0 = B\frac{q-1}{q^{N+1}+q}$$

$$\iff \frac{B}{B_0} = \frac{q-1}{q^{N+1}+q}$$

$$\iff q^{N+1} = \frac{B(q-1)}{B_0} + q$$

$$\iff N+1\ln(q) = \ln(\frac{B(q-1)}{B_0} + q)$$

$$\iff N = \frac{\ln(\frac{B(q-1)}{B_0} + q)}{\ln(q)} - 1 \qquad (***)$$

D'après notre formule (***), on obtient en un calcule directe qui nous fournit la période de remboursement N. En connaissant alors le taux d'intérêt, B, M et B_0, on peut obtenir N.

On se basera sur l'exemple d'étude suivant ; En connaissant le taux d'intérêt que l'on suppose égal à 50%, et avec le remboursement moyen B_0=22, et B=1000 et M=52.

On a : $\boldsymbol{q = e^{-\frac{r}{M}}}$

Pour r=50%, on obtient N=60.1472 c'est presque 60 semaines.

(*) Travail personnel

Donc pour une période de remboursement de 60 semaines, au lieu de 50, et avec les mêmes autre données de l'exemple de Yunus, on obtient un taux d'intérêt de 50%, et c'est ici qu'on peut parler d'une injustice sociale flagrante : le fait d'augmenter la période de remboursement de 10 semaines va augmenter le taux d'intérêt de 20% à 50%.

2.3. Etude de remboursement avec retard

a-Model stochastique des retards aléatoires dans le paiement (3)

Les emprunteurs de microcrédit sont généralement pauvres, parfois, il se produit qu'ils ne sont pas en mesure de payer les versements dans le temps prévu convenu entre eux et les prêteurs. Lorsque les retards dans le remboursement se produisent, les micro-prêteurs permettent généralement les retards sans aucune pénalité ni frais supplémentaires. Pour modéliser les retards aléatoires dans le remboursement des versements, nous faisons les hypothèses suivantes:
(1) les accidents de refinancement sont des variables de Bernoulli indépendantes identiquement distribuées
(2) sans frais supplémentaires ou des pénalités pour l'emprunteur imposé par les IMF dans le cas où il y a une défaillance dans le remboursement des versements à savoir l'emprunteur paie le même montant de versement quand elle peut rembourser.

Le but principal dans tout le chapitre est de trouver la loi du taux d'intérêt implicite dans ces hypothèses. Nous commençons par la construction d'un nouveau modèle de retards dans le remboursement des versements qui nous oblige à d'abord comprendre clairement la répartition du temps de remboursement aléatoire et le temps inter-remboursement, le temps entre deux remboursements successifs. En outre, une probabilité est assignée à l'acte de remboursement, par exemple, p lorsqu'un emprunteur réussit à payer le versement à une semaine et 1-p autrement. Les actes de remboursement, le succès ou l'échec de rembourser les versements échelonnés sont des variables ainsi Bernoulli; et le processus de remboursement des versements peut être considéré comme un processus de Bernoulli.

Définition 2.1

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité commune et laisser B_m, $m = 1, 2, \dots$ variables aléatoires identiquement distribuées indépendantes après un Bernoulli la distribution de probabilité de réussite $p = P(B_m = 1)$. $(B_m)_{m=1,2,\cdots}$ définie sur (Ω, F, P) est un processus de Bernoulli.
Soit $(F_n)_{n=1,2,\cdots}$ la filtration associée à ce processus de Bernoulli, c'est la tribu engendrée par les variables aléatoire $(B_0, \dots, B_n)$:

$$F_n = \sigma(B_0, \cdot\cdot\cdot, B_n) \subset F.$$

On commence notre étude en considérant un processus de Bernoulli qui décrit le faite que l'emprunteur rembourse au moment ou pas. C'est-à-dire :

$$\mathrm{B}i = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{si\ l'emprunteur\ rembourse} \text{ à } \boldsymbol{la\ date\ i} \\ & \mathbf{0} \quad \boldsymbol{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.2 :

On note $(T_k)_{k>0}$, le moment de remboursement, une suite de variable aléatoire définie par :

$$Min\{\Delta t > 0/B_{T_{k-1}+\Delta t=1}\}$$

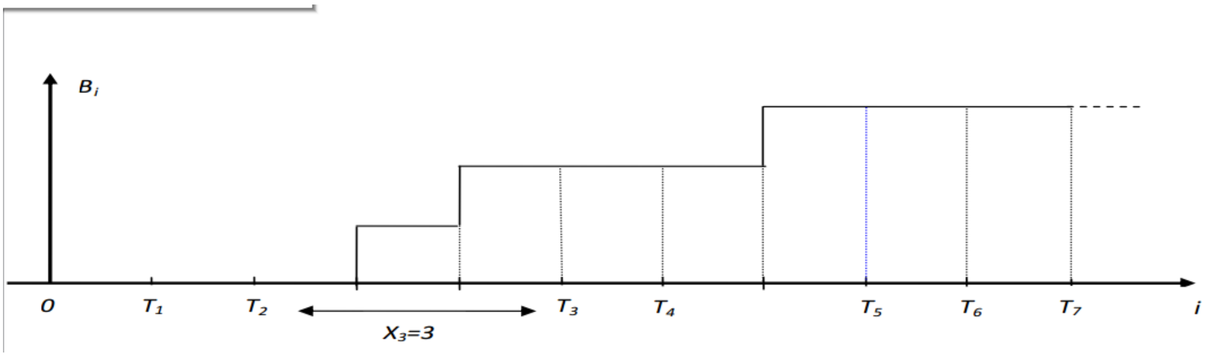
Définition 2.3

Soit $\mathbf{(X_k)_{k>0}}$ une variable aléatoire qui décrit les délais de remboursement à la nième semaine. On suppose que les Xi sont indépendants, c'est-à-dire que le remboursement dans la semaine i n'influence pas dans la semaine i+1.
On définit $\mathbf{(X_k)_{k>0}}$ de la forme suivant :

$$X_k = Min\{\Delta t > 0/B_{T_{k-1}+\Delta t=1}\}$$

Alors : $$X_k := T_k - T_{k-1},$$

Le graphe ci-dessous illustre ce processus qui lie $\mathbf{(X_k)}$ **et** $\mathbf{(T_k)}$



Proposition 2.4

$(T_k)_k$, le moment de remboursement suit le processus de Bernoulli B_n.

Preuve

Notre preuve se base sur la démonstration par récurrence.

Pour k=1, et ∀ n>0 on a : $$\begin{aligned}\{T_1 = n\} &= \{B_1 = 0, \cdots, B_{n-1} = 0, B_n = 1\} \\ &= \{B_1 = 0\} \cap \cdots \cap \{B_{n-1} = 0\} \cap \{B_n = 1\} \in \mathcal{F}_n,\end{aligned}$$

On suppose que notre proposition est vraie pour K-1.
On a :

$$\begin{aligned}
\{T_k = n\} &= \{T_{k-1} + X_k = n\} \\
&= \bigcup_{m=k-1}^{n} \Big\{T_{k-1} = m,\ X_k = n - m\Big\} \\
&= \bigcup_{m=k-1}^{n} \Big\{\{T_{k-1} = m\} \cap \{X_k = n - m\}\Big\} \\
&= \bigcup_{m=k-1}^{n} \Big\{\{T_{k-1} = m\} \cap \\
&\qquad \{B_{T_{k-1}+1} = 0, \cdots, B_{T_{k-1}+(n-m-1)} = 0,\ B_{T_{k-1}+(n-m)} = 1\}\Big\} \\
&= \bigcup_{m=k-1}^{n} \Big(\{T_{k-1} = m\} \cap \{B_{m+1} = 0, \cdots, B_{n-1} = 0,\ B_n = 1\} \in \langle \mathcal{F}_m, \mathcal{F}_n \rangle,
\end{aligned}$$

On a $\{T_{k-1} = m\} \in \mathcal{F}_m$ par hypothèse.

On a par monotonie $m \leq n$, $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$

Alors $\langle \mathcal{F}_m, \mathcal{F}_n \rangle = \mathcal{F}_n$ et $\{T_k = n\} \in \mathcal{F}_n$.

Proposition 2.5

Pour tout k ≥ 1, le temps inter-remboursement, X_k, suit une loi géométrique de paramètre p.

Preuve

On a : $X_k = \text{Min}\left\{\Delta t \geq 1 \mid B_{T_{k-1}+\Delta t} = 1\right\} = T_k - T_{k-1}$

Donc

$$T_k = T_{k-1} + Min\{\Delta t > 0 / \epsilon_{T_{k-1}+\Delta t = 1}\}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_k = n) &= \sum_{m \geq k-1} \mathbb{P}(T_{k-1} = m)\, \mathbb{P}(X_k = n \,|\, T_{k-1} = m) \\
&= \sum_{m \geq k-1} \mathbb{P}(T_{k-1} = m) \\
&\qquad \mathbb{P}\left(B_{T_{k-1}+1} = 0, \cdots, B_{T_{k-1}+n-1} = 0, B_{T_{k-1}+n} = 1 \,|\, T_{k-1} = m\right) \\
&= \sum_{m \geq k-1} \mathbb{P}(T_{k-1} = m)\, \mathbb{P}(B'_n = 1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(B'_i = 0) \text{ (Chaine de Markov. Chapitre 3)} \\
&= \sum_{m \geq k-1} \mathbb{P}(T_{k-1} = m)\, p\, (1-p)^{n-1} \\
&= (1-p)^{n-1} p \sum_{m \geq k-1} \mathbb{P}(T_{k-1} = m) = (1-p)^{n-1} p.
\end{aligned}
$$

Alors, pour n>0 $\boxed{\mathbb{P}(X_k = n) = (1-p)^{n-1} p.}$

On note par p la probabilité de récupération sur une semaine donnée, c'est-à-dire que la personne qui emprunte de l'argent aura une chance de p de rembourser son argent à la première semaine, et (1-p)p dans la 2ème semaine et ainsi de suite.
Le tableau ci-dessous illustre ce processus. Notat que w désigne semaine (week en anglais).

w	1	2	3		k
$\boldsymbol{P(X_n = w)}$	p	$(1-p).p$	$(1-p)^2.p$	$\dots$	$(1-p)^{k-1}.p$

Définition 2.4

Soit X une variable aléatoire définit sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la fonction génératrice des moments est définit par

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

Proposition 2.6

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$ est donnée par :

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}.$$

Preuve

Par la définition 2.4 de la fonction du moment génératrice on a :

$$\begin{aligned} M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn}(1-p)^{n-1}p \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left((1-p)\,e^t\right)^n = \frac{p}{1-p}\,(1-p)\,e^t\,\frac{1}{1-(1-p)e^t} \\ &= \frac{p\,e^t}{1-(1-p)\,e^t} \end{aligned}$$

---

b- Le taux effectif moyen

Définition 2.5

Dans ce chapitre on travaille avec des taux d'intérêt aléatoire, c'est pourquoi on a intérêt à définir leur moyen que l'on appelle **le taux effectif moyen** et on le représente par $\bar{r}$.

Proposition 2.7

En notant $\bar{r}$ le taux effectif moyen qui satisfait l'équation de Yunus généralisée :

$$B = B_0 \sum^{N} e^{\frac{-\bar{r}T_n}{M}}$$

On trouve que $\bar{r}$ est égal à $\bar{r} = M\ ln(1 + ln(1 + p(\frac{1}{y} - 1))$

Preuve

En notant l'équation de Yunus généralisée, et que l'espérance d'une constante et la constante, on obtient :

$$B = B_0 \sum_{n=1}^{N} e^{\frac{-\bar{r}T_n}{M}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad B = B_0 \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}(e^{\frac{-\bar{r}T_n}{M}})$$

$$\iff B = B_0 \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}(e^{\frac{-\bar{r}(X_1+.........X_{n-1}+X_n)}{M}})$$

$$\iff B = B_0 \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}(e^{\frac{-\bar{r}X_1}{M}}............e^{\frac{-\bar{r}X_{n-1}}{M}}e^{\frac{-\bar{r}X_n}{M}})$$

On sait que les $(X_i)_{i>0}$ suivent la meme loi geometrique, alors

Donc B devient

$$B = B_0 \sum_{n=1}^{N} y^n$$

$$\iff B = B_0 \frac{y - y^{N+1}}{1-q}$$

y est alors la solution de l'equation de Yunus avec $0 < y < 1$
Cacule de y:

$$y = \mathbf{E}(e^{\frac{-\bar{r}(X_i)}{M}}) = M_{X_i}(\frac{-\bar{r}}{M})$$

en posant $\psi = e^{\frac{-\bar{r}}{M}}$

$$\iff y = \frac{p\psi}{1-(1-p)\psi}$$

On a

$$y - y(1-p)e^{\frac{-\bar{r}}{M}} = pe^{\frac{-\bar{r}}{M}}$$

$$\iff y = e^{\frac{-\bar{r}}{M}}[p - y(1-p)]$$

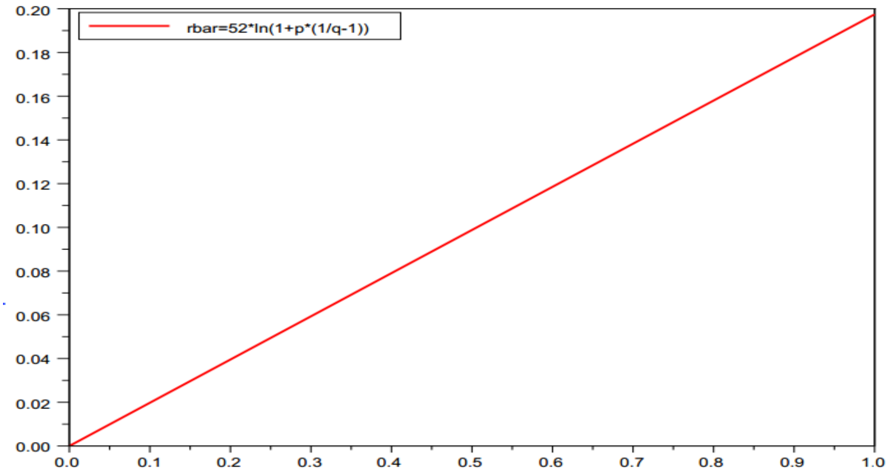
$$\iff -\frac{\bar{r}}{M} = ln(\frac{p - y(1-p)}{y}$$

$$\iff \bar{r} = Mln(\frac{y}{p - y(1-p)})$$

Donc

$$\bar{r} = Mln(1 + p(\frac{1}{y} - 1)) \qquad (\delta)$$

La figure ci-dessous illustre le développement de $\bar{r}$ en fonction de p. Cette figure est obtenue en utilisant le programme Matlab (*)



2.4-Relation entre le retard de paiement et le taux de remboursement

Définition 2.6

On dit qu'il y a un d-default, s'il existe un d tel que :

$$Max\{X1, X2, \ldots\ldots, Xn\} \leq d$$

C'est-à-dire qu'il y a une tolérance limite pour remboursement.
On note γ la probabilité de d-default.

Propriété 2.8

La relation entre γ la probabilité de d-default, et p la probabilité de remboursement est :

$$p = 1 - (1 - \gamma^{\frac{1}{50}})^{\frac{1}{d}}.$$

(*) Travail personnel

Preuve

En notant que les Xi suivent une loi géométrique de probabilité p, et la définition de γ, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \mathbb{P}\Big[\operatorname{Max}\{X_1, \cdots, X_{50}\} \le d\Big] \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{50}\{X_i \le d\}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{50}\mathbb{P}(X_i \le d), \\
&= \prod_{i=1}^{50}\left[p(1-p)^0 + p(1-p)^1 + \ldots + p(1-p)^{d-1}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{50}\left[p\,\frac{1-(1-p)^d}{1-(1-p)}\right],
\end{aligned}$$

On obtient l'expression de γ :

$$\gamma = \left[1-(1-p)^d\right]^{50}.$$

Donc :

$$\boxed{p = 1-(1-\gamma^{\frac{1}{50}})^{\frac{1}{d}}.}$$

Remarque (1) **:**

:

En effet :

soit f une fonction limite tel que :

$$f(d) = 1-(1-\gamma)^d$$

On a $\quad f(d) = 1 - e^{\frac{ln(1-\gamma)}{d}}$

Alors $\quad f'(d) = \frac{ln(1-\gamma)}{d^2}e^{\frac{ln(1-\gamma)}{d}}$

(1) Une remarque qu'on a ajouté, et qu'on trouve intéressante et explique des résultats empiriques qui viennent

Exemple d'application :

On suppose que la probabilité γ=0,5, et on calcule p et r en utilisant la relation (δ), avec y est la solution de l'équation de Yunus.

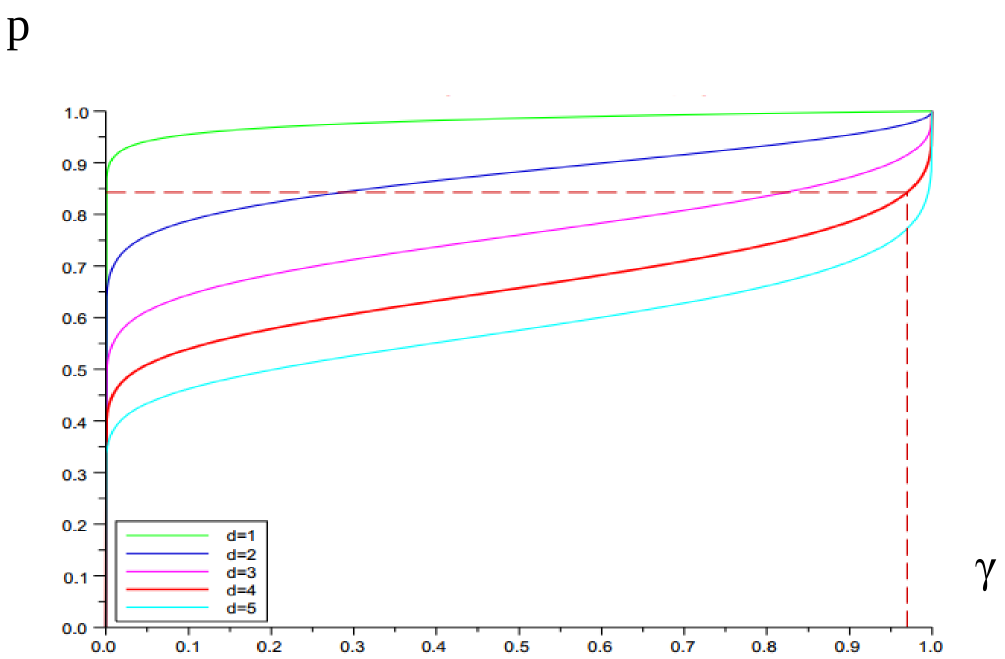
On a:

d=2 ➔ p=77,64% ➔ r=15,33%

d=3 ➔p=63,16 %➔ r=12,84%

d=5 ➔ p=45,07% ➔ r=8,91%

La figure ci-dessous illustre le développement de p en fonction de γ pour différentes valeur de d, les résultats obtenus assurent notre dernière remarque. (3)



Remarque

- Dans la pratique, le remboursement du prêt est d'environ 97%, en général, le temps maximal autorisé avant défaut est de 4 semaines.
- Dans notre modèle, pour **d = 4** et **γ = 97%**, on trouve **p = 84%,** ce qui correspond à un taux d'intérêt effectif $\bar{r} \approx$ **16 , 59%.**
- Donc le taux d'intérêt effectif, dans ce cas n'est pas de 20% mais de 16,59% en réalité

2.5 Limite du modèle

La remarque la plus importante est que notre model stochastique se base sur la condition d'indépendance. On peut dire que c'est un peu loin de la réalité, dans une société pauvre, rembourser cette semaine influence beaucoup sur les prochaines semaines, surtout en notant les activités des préteurs (des microprojets en général).

Dans le 3ème chapitre nous allons proposer un autre modèle, qui se base sur les chaines de Markov, et donne une modélisation de période de remboursement et leur relation avec le taux d'intérêt.

Chapitre 3

Modèle mathématique pour les prêts individuels et de groupe

Dans ce chapitre, on essaiera de fournir un modèle mathématique, ou bien une règle selon laquelle un emprunteur, pour les prêts individuels, ou plusieurs pour les prêts de groupe, qui remboursent leurs prêts auront automatiquement accès à un nouveau prêt, et c'est l'un des principes de la méthode de prêt en microcrédit, et spécialement en Grameen-Bank. Nous allons travailler sur un remboursement par périodes $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, et le remboursement à chaque période est aléatoire, donc on est devant une suite de variable aléatoire, c'est pourquoi on aura intérêt à appliquer les chaine de Markov dans notre travail.

Au début nous allons définir les chaines de Markov, et donner quelques propriétés qui nous seront utiles dans l'application pour les prêts individuels et de groupe. On doit noter que les chaines de Markov est un vaste domaine d'étude en mathématique, ils trouvent des applications dans beaucoup de domaines comme, par exemple, la biologie, la physique, la sociologie, la recherche opérationnelle et les sciences de l'ingénieur, où elles donnent des réponses qualitatives aussi bien que quantitatives aux problèmes posés Donc les définitions et propriétés qu'on donnera seront courtes et brèves pour un but précis de comprendre le Modèle mathématique pour les prêts individuels et de groupe.

3.1. Chaines de Markov (5)

Définition 3.1

Une suite de $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoire à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E, est une chaine de Markov d'espace d'état E si et seulement si pour tout K $\in \mathbf{N}$, et pour tout $(X_0, \ldots X_{k-1}) \in E$, tel que :

$$P(X_k = x_k, , X_0 = x_0) > 0$$
$$P(X_{k+1} = x_k / X_k = x_k, , X_0 = x_0) = P(X_{k+1} = x_{k+1} / X_k = x_k)$$

La chaine est dite homogène si on a :

$\forall k \in \mathbf{E}, \forall x, y \in E$

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = y / X_k = x) = \mathbf{P}(X_1 / X_0 = x)$$

Remarques

Dans les applications des chaines de Markov nous nous intéressons à des évolutions aléatoires par étapes successives sur un espace d'état discret.

L'hypothèse principal dans les chaines de Markov est que le processus aléatoires ''oublie '' le passé et se ''régénère'' d'instant en instant en ne gardant comme information que l'état présent. On dit qu'on a des variables aléatoires sans mémoire.

La variable X_k représente la position spatial à l'instant k. La tribu $\sigma(X_0, ..., X1)$ représente son passé, et la tribu $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, ...)$ représente son futur.

Définition 3.2

On appel la probabilité de transition pour aller de l'état x à l'état y, la probabilité :

$$p_{x,y} = \mathbf{P}(X_{x+1} = y / X_k = x) \quad (= \mathbf{P}(X_1 = y / X_0 = x)$$

Lemme 3.1

On note δ_0 la loi de X_0 tel que : $\delta_0(X_0) = \mathbf{P}(X_0=x_0)$, alors on a

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \nu_0(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{x_k, x_{k+1}}.$$

Preuve

on a

$$\mathbf{P}(X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = \mathbf{P}((X_0 = x_0) \cap (X_1 = x_1) \cap .... \cap (X_n = x_n))$$

En notant l'independance des X_i , on obtient

$$= \mathbf{P}(X_0 = x_0). \frac{\mathbf{P}(X_1 = x_1)\mathbf{P}(X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_0 = x_0)} \cdots\cdots\cdots \frac{\mathbf{P}(X_n = x_n)\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}}{\mathbf{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1})}$$

Alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \nu_0(x_0) \prod_{k=0}^{n-1} p_{x_k, x_{k+1}}.}$$

Définition 3.3

On appel la matrice de transition, la matrice $P = (p_{x,y})_{x,y \in E}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{x_0,x_0} & p_{x_0,x_1} & p_{x_0,x_2} & \cdots \\ p_{x_1,x_0} & p_{x_1,x_1} & p_{x_1,x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Propriété 3.1

Toute matrice de transition vérifie les propriétés suivantes :

1) $\forall (x,y) \in E, 0 \leq p_{x,y} \leq 1$

2) $\forall x \in E, \quad on\ a \quad \sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$

Preuve

1) $P_{x,y}$ sont des probabilités, donc c'est évident
2) Ça vient du fait qu'on somme les probabilités sur toutes les valeurs possibles d'une variable aléatoire.

Lemme 3.2

Soit X_n une haine de Markov de matrice de transition *P*, et soit δ_0 la loi de X_0. Alors la loi de X_1 est $\boldsymbol{\delta_1 = \delta_0 P}$, et $\forall$ n, la loi de X_n est :

$$\boldsymbol{\delta_n = \delta_0 P^n}$$

Preuve

Pour le premier point, on a pour tout x_i de E

$$\mathbf{P}(X_1 = x_i) = \sum_{x_j \in E} \mathbf{P}(X_0 = x_j)$$

$$= \sum_{x_j \in E} \delta_0(x_j) P_{i,j} = (\delta_0 P)_i$$

Ensuite on peut procder par rcurrence. On note (Q_n) la proposition $\delta_n = \delta_0 P^n$. On vient de prouver Q_1 .

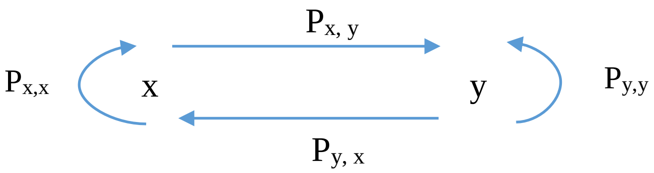
Soit $n > 0$. On suppose $\delta_n = \delta_0 P^n$. Alors pour tout x_i de E,

$$\forall x_i \in E, \mathbf{P}(X_{n+1} = x_i) = \sum_{x_j \in E} \mathbf{P}(X_{n+1} = x_i | X_n = x_j)\mathbf{P}(X_n = x_j)$$

$$= \sum_{x_j \in E} \delta_n(j) p_{j,i} \;=\; \delta_0 P^{n+1}$$

<u>Définition 3.4</u>

On appelle un graphe d'une chaine de Markov, un graphe orienté marqué dont les nœuds sont les éléments de E, et les arcs dirigés sont les couples (x,y) éléments de E, tel que $P_{x,y} > 0$, le graphe ci-dessous illustre un simple graphe d'une chaine de Markov



Remarque :

Les arcs de x vers x présents dans le graphe ont la propriété qu'on peut la déduire de la proposition 3.1:

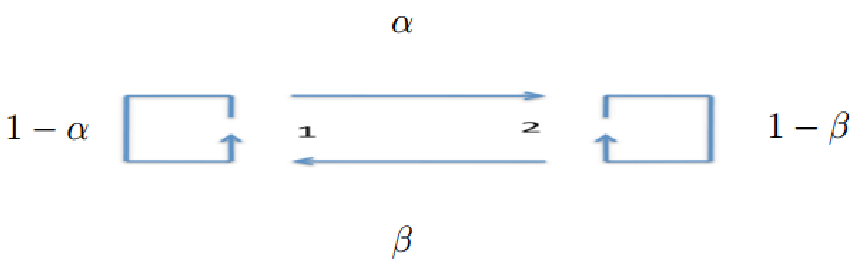
$$P_{x,x} = 1 - \sum_{x \neq y} P_{x,y}$$

Exemple

Soit la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

Le graphe associé qu'on appelle graphe de transition est le suivant



Définition 3.5

Pour $n \geq 0$ les opérateurs de translation θ_n agissent sur les chaine de Markov par

$$\theta_n(X_k)_{k\geq 0} = \theta_n(X_0, X_1, \ldots) := (X_{n+k})_{k\geq 0} = (X_n, X_{n+1}, \ldots)$$

On dit que :

$$\theta_n : A = (X_0, X_1, \ldots) \in E \mapsto \theta_n A(X_n, X_{n+1}, \ldots) \in E$$

La théorie de Perron-Frobenius

Cette théorie mathématique qui porte le nom de ses deux inventeurs allemands, Ferdinand Georg Frobenius (1917-1994) et Oskar Perron (1880-1975), concerne les matrices positives dont l'une des puissances est strictement positive. Ces matrices s'appellent des matrices *primitives*.

Définition 3.6:

On dit qu'une matrice carrée *M* est *positive* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et *strictement positive* si elle est positive et n'a aucun coefficient nul. Une matrice positive *M* est dite *primitive* s'il existe un entier $k \geq 0$ tel que *M k* est strictement positive.

Théorème 3.1 (Théorème de Perron-Frobenius)

Toute matrice stochastique M qui est primitive possède un unique vecteur propre stochastique strictement positif, π^*, de valeur propre 1 qu'on appelle vecteur propre dominant de Perron Frobenius et, pour tout vecteur π_0 stochastique, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \pi_0 M^k = \pi * .$$

Appliqué au cas d'une chaine de Markov, ce résultat assure que si la matrice de transition de la chaine est primitive, alors, quel que soit la distribution initiale π_0 du système, la répartition des états va évoluer, sous l'action de la dynamique de la chaine de Markov, vers une distribution stationnaire $\pi *$ qui constitue un ´équilibre pour le système

3.2 Les prêts individuels

a-Model simple de prêts individuel [6]

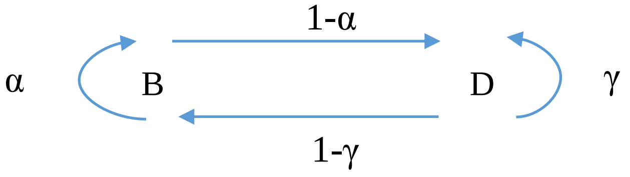
Dans ce paragraphe on essayera de donner un exemple d'application des chaines de Markov en microfinance, ça sera comme une introduction au modèle mathématique pour les prêts individuels et en groupe, c'est un simple exemple c'est un simple exemple qui nous permettra de bien comprendre notre model.

Le modèle suivant est dû à une économiste américaine, G. Tedeschi, il étudie le mécanisme du microcrédit dans une population d'emprunteurs. Dans sa version la plus simple, qui est l'objet d'étude de ce paragraphe, les individus peuvent être dans deux états, l´état de demandeur (d'un prêt) et celui de bénéficiaire (d'un prêt). On suppose que la seule sanction en cas de non remboursement est la perte du droit automatique à un nouveau prêt, droit qui, au contraire, est garanti au bénéficiaire lorsqu'il rembourse son prêt. On suppose qu'un bénéficiaire qui investit l'argent emprunte dans une micro entreprise sera en mesure de rembourser son emprunt (et choisira de le rembourser effectivement) avec une probabilité α alors qu'il fera défaut avec une probabilité $1-\alpha$. En cas de défaut, il redevient simplement demandeur durant la période suivante. Comme demandeur, on suppose qu'il a une probabilité γ de se voir attribuer un prête et une probabilité $1-\gamma$ de se le voir refuser.

On introduit donc une chaine de Markov $\mathbf{(X_t)}_{\mathbf{t\geq 0}}$ à deux états $\mathbf{S = \{B, D\}}$ et dont la matrice de passage est :

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} B & D \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix} & \begin{array}{c} B \\ D \end{array} \end{array}$$

Et le graphe associé à notre chaine de Markov est de la forme suivante



On peut ainsi calculer la probabilité de n'importe quelle succession d´états, appelée *trajectoire de la chaine de Markov*. Par exemple la probabilité qu'un bénéficiaire à la première période reste bénéficiaire pendant 2 périodes puis revienne demandeur et le reste pendant 2 périodes avant de redevenir bénéficiaire, c'est-à-dire la probabilité de la succession d´états **(B, B, D, D, B)** est égale à :

En posant : $P(X_0=B)=\pi_0$

$$\begin{aligned} P & \quad (X_0 = B, X_1 = B, X_2 = D, X_3 = D, X_4 = B) \\ = & \quad \pi_0(B)P(X_1 = B/X_0 = B)P(X_2 = D/X_1 = B)P(X_3 = D/X_2 = D)P(X_4 = B/X_3 = D) \\ = & \quad \pi_0(B)p_{11}p_{12}p_{22}p_{21} = \pi_0(h)\alpha(1-\alpha)(1-\gamma)(\gamma) = \alpha\gamma(1-\alpha)(1-\gamma)\pi_0(B). \end{aligned}$$

Mais on ne cherche pas seulement à calculer la probabilité particulière de chaque trajectoire de notre chaine de Markov, on voudrait plus généralement déterminer l'´évolution des proportions des différents ´états entre le premier et le deuxième instant, entre le deuxième et le troisième, et plus généralement savoir comment vont évoluer ces proportions `a l'avenir.

Si l'on connait la distribution initiale des différents états (c'est-`a-dire la proportion d'individus de la population étudiée se trouvant dans chacun des états x_i, que l'on appelle la *loi de probabilité initiale* π 0), l´étude de la chaine de Markov permet de calculer, à partir de cette répartition

S	x_1	x_2	....	x_n
π_0	$\pi_0(x_1)$	$\pi_0(x_2)$	....	$\pi_0(x_n)$

On a : $\pi_1 := (P(X_1 = B), P(X_1 = D)) = (\pi_1(B), \pi_1(D)),$

On peut modéliser l'évolution de notre chaine de Markov en disant d'après le Lemme 3.2 que :

$$\boxed{(\pi_1(B), \pi_1(D)) = (\pi_0(B), \pi_0(D)) \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \gamma & 1-\gamma \end{pmatrix}.}$$

b-Modèle généralisé

Dans ce modèle généralisé[(7)], on cherche à fournir une règle selon laquelle un emprunteur qui rembourse son prêt aura automatiquement accès à un nouveau prêt, et c'est l'un des principes de Grameen-Bank et du microcrédit en général. C'est une généralisation du model simple déjà donné, donc on travaille toujours sur le modèle de Tedeschi.

Chaque emprunteur (souvent femme) a un projet qui nécessite une unité de capital, et apporter une quantité ω de profit si elle réussit. Le projet dure pour une période et réussit avec une probabilité α, et ne parvient pas avec une probabilité 1-α. En cas de succès l'emprunteur versera 1+r au préteur (r est le taux d'intérêt), et aura le droit automatiquement avec certitude à un nouveau prêt. Sinon elle ne paiera rien et elle ne sera pas autorisé à obtenir un nouveau prêt au cours des prochaines périodes T, puis lorsque cette période se termine elle peut présenter une nouvelle demande de prêt, mais selon le nombre d'emprunteur éligibles à la recherche d'un prêt. Elle deviendra bénéficiaire avec une probabilité de γ et non bénéficiaire avec une probabilité de 1-γ.

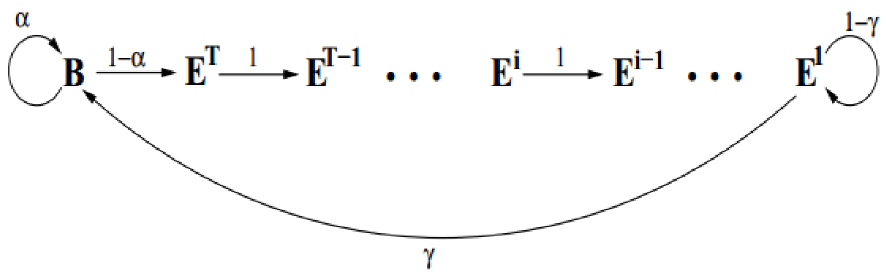
On peut obtenir ces règle de devenir bénéficiaire ou d'exclure dans une chaine de Markov $\mathbf{(X_t)_{t\in N}}$ avec l'ensemble d'états :

$$E := \{B, E^T, E^{T-1}, \ldots, E^1\},$$

B : l'état d'être bénéficiaire de prêt

$\mathbf{E^1}$: l'état d'être un candidat pour un prêt avec la possibilité de devenir bénéficiaire pour la prochaine période, et même chose pour les **i** et **i+1**, avec **i=2,…, n**.

Le schéma ci-dessous représente le graphe de Markov associés à notre chaine :



Et la matrice de transition associes est:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

<u>Hypothèse-Contraintes principales</u>

Notre but est de trouver un programme mathématique qui permet de fournir le contrat (ou relation) optimal **(r*, T*)** qui maximise le retour de l'emprunteur calculé, où **r*** est le taux d'intérêt optimal, et **T*** est la durée optimale de la phase d'exclusion.

On doit bien noter que notre but n'est pas de fournir la relation optimale, c'est-à-dire résoudre notre programme, car ceci nécessite plusieurs propriété des chaines de Markov, et l'étude des programmes mathématiques non linéaire. Donc notre but et de fournir les contraintes principales et les expliquer.

On prend en compte trois types de contraintes :

1) <u>Contrainte de participation</u> : ça décrit le faite que l'emprunteur n'obtiendra pas un prêt quand elle est en mesure de faire un profit sur l'entreprise : C'est-à-dire que le profit doit etre plus grand que le taux d'intérêt :

$$w > 1 + r$$

2) Contrainte de durabilité : Le taux d'intérêt doit être aussi bas que possible afin de maximiser le profit de l'emprunteur, et il doit être aussi grand que possible afin de satisfaire la contrainte de durabilité de préteur

$$\alpha(1+r) \geqslant 1+z$$

z : désigne le coût de prêt par unité (déterminé par la banque).

3) Absence de contrainte par default stratégique : Le but de l'introduction d'une période de prêt d'exclusion est d'éviter toute incitation à défaut, en créant une certaine crainte d'être exclus du droit d'obtenir un nouveau prêt. Cet objectif sera atteint dès que l'emprunteur est mieux quand payer 1 + r comme convenu et avoir pleinement accès au microcrédit comme bénéficiaire de ne pas payer et être exclu de tout prêt de microcrédit pour une période au moins égale à T. Pour un rationnel neutre au risque emprunteur ce qui peut être exprimé par :

$$[w-(1+r)]+\delta V_s(B) \geqslant w+\delta V_s(E^T)$$

$\delta \in [0,1]$: Le facteur d'actualisation pour une période.
Vs(x) : Le rendement attendu total pour un emprunteur ayant à l'état x le temps s.
L'enjeu de ce sui va suivre est de définir le rendement attendu total $V_s(x)$.

Dans ce modèle, quand une emprunteuse ayant α comme probabilité de succès de son projet, son rendement pour une période est : **$\alpha[\omega - (1+r)]$**

Mais comme elle sait aussi qu'elle bénéficiera automatiquement d'un nouveau prêt si elle rembourse à temps, elle peut également évaluer la valeur actualisée attendue du rendement total pour tous les périodes en futur, que nous appellerons rendement attendu total prévu.

Pour le calculer nous introduisons la fonction : $f : E \times E \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} w-(1+r) & \text{Si } (x,y)=(B,B) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Définition 3.7

Pour chaque (X_0, X_1, …..) de la chaine de Markov, nous définissons le rendement total au moment s par :

$$F(X_s, X_{s+1}, \dots) := \Sigma_{t=1}^{\infty} \delta^{t-s-1} f(X_{t-1}, X_t)$$

Remarque

F est une fonction bien définie et bornée, car la série converge ($\delta \in [0, 1]$ et f bornée)

Définition 3.8

On définit le rendement total prévu à l'heure s par la fonction $V_s : E \to \mathbb{R}$,

$$V_s(x) = \mathbb{E}[F(X_s, X_{s+1}, ...) \mid X_s = x].$$

Théorème 3.2

Dans le modèle de prêt individuel défini par la chaine de Markov donnée, le rendement total prévu pour une personne dans l'état x au temps S, est donnée par :

$$V_s^1(x) = \begin{cases} V_0^1 & si\ x = B \\ \dfrac{\gamma\delta^i}{1-\delta(1-\gamma)} V_0^1 & si\ x = E_i,\ i = 1 \end{cases}$$

avec

$$V_0^1 = \frac{\alpha(w-(1+r))}{1-\alpha\delta-\frac{1-\alpha}{1-\delta(1-\gamma)}\gamma\delta^{T+1}}$$

Preuve

Pour ∀ s > 0, et x ∈ E, On a :

$$\begin{aligned} V_s(x) &= \mathbb{E}[F(X_s, X_{s+1}, \ldots) \mid X_s = x] \\ &= \mathbb{E}[F(X_0, X_1, \ldots) \mid X_0 = x] \\ &= V_0(x) \end{aligned}$$

Ainsi au lieu de calculer $V_s(x)$, on calcule $V_0(x)$ au moment s=0.

On a : $F(X_0, X_1, \ldots) = f(X_0, X_1) + \delta F(X_1, X_2, \ldots)$

Alors :

$$V_0(x) = \mathbb{E}[f(X_0, X_1) + \delta F(X_1, X_2, \ldots) \mid X_0 = x]$$

En appliquant l'espérance conditionnelle et la propriété de Markov (dans notre résumé nous l'avons cité en définition), on obtient :

$$V_0(x) = \sum_{y\in E}[f(x,y) + \delta V_0(y)]p(X_1 = y \mid X_0 = x)$$

Avec $p(X_1 = y \mid X_0 = x)$ est la probabilité de transition de l'état x vers l'état y., on calcule donc $V_s(x)$ pour x ∈ E, on a trois cas :

- Pour x=B, on a :

$$V_0(B) = \alpha[w-(1+r)] + (1-\alpha)\delta V_0(E^T)$$

- Pour **x=E^i^**, avec i=2,…... T

$$V_0(E^i) = \delta V_0(E^{i-1})$$

- Pour x=E^1, on utilise la définition $F(X_0, X_1, \ldots) = \delta^\tau F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots)$

  Avec $\tau := Min\{t > 0 \mid X_t = B\}$, et δ^τ l'opérateur de translation.

  On a :

$$\begin{aligned}
V_0(E^1) &= \mathbb{E}[F(X_0, X_1, \ldots) \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta^\tau F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots) \mid X_0 = E^1, \ldots, X_{\tau-1} = E^1, X_\tau = B] \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta^\tau F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots) \mid X_\tau = B] \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\delta^\tau \mathbb{E}[F(X_\tau, X_{\tau+1}, \ldots) \mid X_\tau = B] \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\delta^\tau V_0(B) \mid X_0 = E^1] \\
&= \mathbb{E}[\delta^\tau V_0(B)] \\
&= V_0(B)\mathbb{E}[\delta^\tau]
\end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov, et δ^τ est mesurable

En fin, et puisque τ suit une loi géométrique de probabilité γ on peut écrire :

$$\boxed{\mathbb{E}(\delta^\tau) = \sum_{k \geq 1} \delta^k (1-\gamma)^{k-1} \gamma = \frac{\delta\gamma}{1 - \delta(1-\gamma)}}$$

<u>Le contrat optimal</u> (*)

C'est le contrat qui maximise le profit en respectant les contraintes, on a le programme mathématique suivant :

$$(\mathcal{P}) = \left\{ \begin{array}{l} Max\ J(r,T) \\ (r,T) \in C \end{array} \right.$$

Avec $J(r,T) = \alpha[w - (1+r)] \dfrac{1}{1 - (\alpha\delta + (1-\alpha)\delta^T \Sigma)},$

C est un compact.

$$C = \{(r,T) \in K;\ h_1(r,T) \geq 0, h_2(r,T) \geq 0\}$$

$$h_1(r,T) = \alpha(1+r) - (1+z),$$

$$h_2(r,T) = (\delta - \Sigma\delta^T) J(r,T) - (1+r).$$

(*) Ce paragraphe est une traduction directe de document « Mathematical models for individual and group lending in microfinance » Osman Khodr, Francine Diener, chercheurs à l'université de Nice, c'est très court et donne des résultats directe.

Et d'après Osman Khodr, Francine Diener, le contrat optimal **(r*, T*)**

$$r^* = \frac{1+z}{\alpha} - 1$$

$$T^* = \frac{1}{ln(\delta)} ln\left(\frac{[1-\delta(1-\gamma)][\alpha\delta w-(1+r^*)]}{\gamma[\alpha w-(1+r^*)]}\right) - 1$$

Propriété 3.2

Pour toute distribution d'état initial $\boldsymbol{\pi_0 = (\pi_0, \ldots, \pi_0^T)}$ de la population entre les différents États, $\boldsymbol{\pi_0 P_1}^t$ dynamique Markov tend à la distribution $\boldsymbol{\pi^*}$ quand t tend vers l'infini, avec

$$\pi_* = \frac{1}{\frac{1}{(1-\alpha)} + \frac{1}{\gamma} + (T-1)} \left(\frac{1}{1-\alpha}, 1, 1, \ldots, 1, \frac{1}{\gamma}\right).$$

Preuve

La matrice P_1 est une matrice primitive et positive, car $P_1^{2T} > 0$, et d'après le théorème 3.1 annoncé dans la théorie de Perron-Frobenius, on peut dire que :

$$\lim_{t\to+\infty} \pi_0 P_1^t = \pi_*$$

Ainsi la répartition de la population entre les différents états devient plus proche de la limitation de la distribution π^* quand t tend vers l'infini

3.3. Modèle pour les prêts de groupe (7)

Pour étudier les prêts de groupe, nous considérons, pour simplifier, un groupe composé de 2 emprunteurs identiques. Au début de chaque période de prêt, le groupe obtient un prêt de 2 unités de capital, un pour chaque emprunteur.

Chaque emprunteur investit dans un projet et nous supposons que les rendements des deux projets sont indépendants et la durée de chaque investissement est une période.

A la fin de chaque période, les situations suivantes décrivent les différents états et les conséquences possibles en fonction des résultats d'investissement :

1) Les deux emprunteurs ont réussi, cela se produit avec une probabilité α^2. Ils ont tous les deux remboursé leur prêt qui est 2(1+r), avec r est le taux d'intérêt pour une période. Et ils auront tous les deux accès à un nouveau prêt pour la prochaine période.
2) Les deux emprunteurs échouent dans leurs projets, cela se produit avec une probabilité de $(1-\alpha)^2$ et ils seront tous les deux exclus de la prochaine période.

3) Un emprunteur réussi et l'autre échoue, cela se produit avec une probabilité α(1-α). Ici nous supposons que le 1er va rembourser non seulement son propre prêt qui est (1+r), mais aussi un montant q qui représente la composante de la responsabilité conjointe du contrat. Nous supposons que $0< q < 1+r$. Dans ce cas où un seul emprunteur réussit il rembourse (1+r+q) , il va obtenir un nouveau prêt pour la prochaine période avec un autre partenaire, et l'emprunteur qui ne rembourse rien entrera dans une phase d'exclusion.
4) Comme dans le model de prêt individuel~~s~~ nous avons supposé que, après la phase d'exclusion, la chance d'obtenir un nouveau prêt dépend du nombre de candidats éligibles, et le nombre d'unités limitées d'emprunteurs.

- γ représente la probabilité d'avoir un nouveau prêt de la première période après la phase d'exclusion.
- (1-γ) ne pas obtenir dans la 1er période.
- γ(1-γ) Obtenir dans la 2ème période.

On résume toute cette histoire dans une chaine de Markov $(X_t)_{t\in E}$ avec H est l'ensemble d'états :

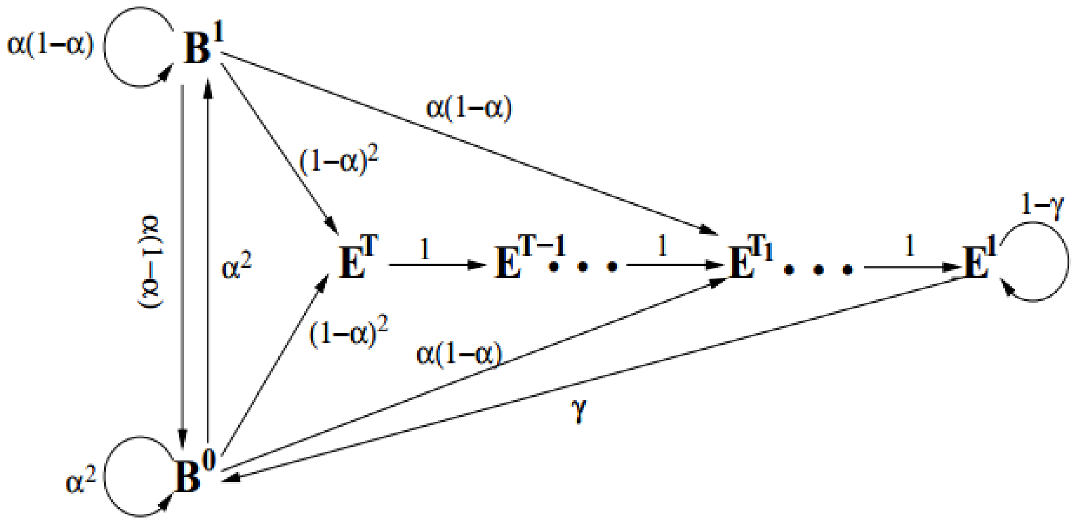
$$H = \{B^0, B^1, E^T, E^{T-1}, \ldots, E^{T_1}, \ldots, E^1\}$$

B^0 : représente l'état d'être bénéficiaire d'un prêt pour l'emprunteur qui a le même partenaire dans la période précédente.

B^1 :l'état d'être un bénéficiaire d'un prêt pour l'emprunteur qui change de partenaire

E^i : sont les états d'être dans la phase d'exclusion pour les prochaines périodes i.

Le diagramme ci-dessous résume les données, c'est le graphe de notre chaine de Markov.



La matrice de transition associée est la suivante :

$$P_2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha(1-\alpha) & (1-\alpha)^2 & 0 & 0 & 0\cdots0 & \alpha(1-\alpha) & 0\cdots0 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha(1-\alpha) & (1-\alpha)^2 & 0 & 0 & 0\cdots0 & \alpha(1-\alpha) & 0\cdots0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & 0\cdots1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1-\gamma \end{pmatrix}$$

Dans ce modèle, le rendement attendu total pour une période T, avec une probabilité donnée par :

$$\alpha^2(w-(1+r))+\alpha(1-\alpha)(w-(1+r+q)) = \alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)q],$$

Comme auparavant ω est le bénéfice de chaque emprunteur quand il réussit. On introduit, comme dans le modèle précédent la fonction : $g : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} w-(1+r) & \text{Si } \mathbf{(x, y) = (B^i, B^0), \quad i=1,2} \\ w-(1+r+q) & \text{Si } \mathbf{(x, y) = (B^i, B^1), i=1,2} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

<u>Définition 3.9</u>

Pour chaque (X_0, X_1, …..) de la chaine de Markov, on définit le rendement total prévu au moment S par :

$$G(X_s, X_{s+1}, ...) := \Sigma_{t=1}^{\infty}\delta^{t-s-1}g(X_{t-1}, X_t)$$

On définit aussi le rendement total prévu au moment S par la fonction $W_s : H \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$W_s = \mathbb{E}[G(X_s, X_{s+1}, \ldots) \mid X_s = x].$$

Théorème 3.3

Le rendement total prévu au moment S est donnée par :

$$V_s^2(x) = \begin{cases} V_0^2 & pour\ x \in \{B_1, B_2\} \\ \dfrac{\delta^i \gamma}{1-\delta(1-\gamma)} V_0^2 & pour\ x = E_i,\ i = 1, \cdots, T2 \end{cases}$$

où

$$V_0^2 = \frac{\alpha[w-(1+r)-(1-\alpha)q]}{1-\alpha\delta-\frac{1-\alpha}{1-\delta(1-\gamma)}\gamma[\alpha\delta^{T_1+1}+(1-\alpha)\delta^{T_2+1}]}$$

Preuve

Le même principe et état d'esprit que la 1ère preuve du théorème 3.1 pour les prêts individuels.

Le contrat optimal

On cherche un contrat optimal (r, q, T, T_1) qui maximise le profit sous les contraintes suivantes :

1) Contrainte de participation : $\omega > 1+r+(1-\alpha)q$
2) Contrainte de recouvrement du cout de prêt : Afin de maintenir une activité durable, l'IMF doit facturer un taux d'intérêt approprié, généralement choisi d'une manière tel que le moyen de recouvrement est plus grand que le cout. Alors
$$\alpha^2(2(1+r)) + 2\alpha(1-\alpha)(1+r+q) \geqslant 2(1+z)$$
3) Contrainte d'empêchement de stratégie de défaut
$$\omega + (1+r) + \delta V_s^2(B) \geq \omega + \delta V_s^2(E_T)$$
$$\omega - (1+r+q) + \delta V_s^2(B) \geq \omega\delta V_s^2(E_T)$$

D'après Osman Khodr, et Francine Diener, le taux d'intérêt optimal r* satisfait l'équation suivante :

$$1+r^* = \frac{1+z}{\alpha} - (1-\alpha)q$$

Propriété 3.3

Pour n'importe quel état de distribution $\Pi_0 = (\Pi_0^0, \Pi_0^1, \cdots, \Pi_0^{T+1})$, le processus de Markov tend vers une distribution Π*, quand t tend vers l'infinie :

$$\Pi_* = \frac{1}{\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{\gamma}+(1-\alpha)(T-T_1)+(T_1-1)}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}, 1+\alpha, \underbrace{1-\alpha, 1-\alpha, \cdots, 1-\alpha}_{(T-T_1)}, \underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{(T_1-1)}, \frac{1}{\gamma}\right)$$

Preuve :

Comme dans la preuve de la propriété 3.2, P_2 est une matrice positive primitive et d'après le théorème 3.1 annoncé dans la théorie de Perron-Frobenius, on peut dire que :

$$\lim_{t \to +\infty} \Pi_0 P_2^t = \Pi_*.$$

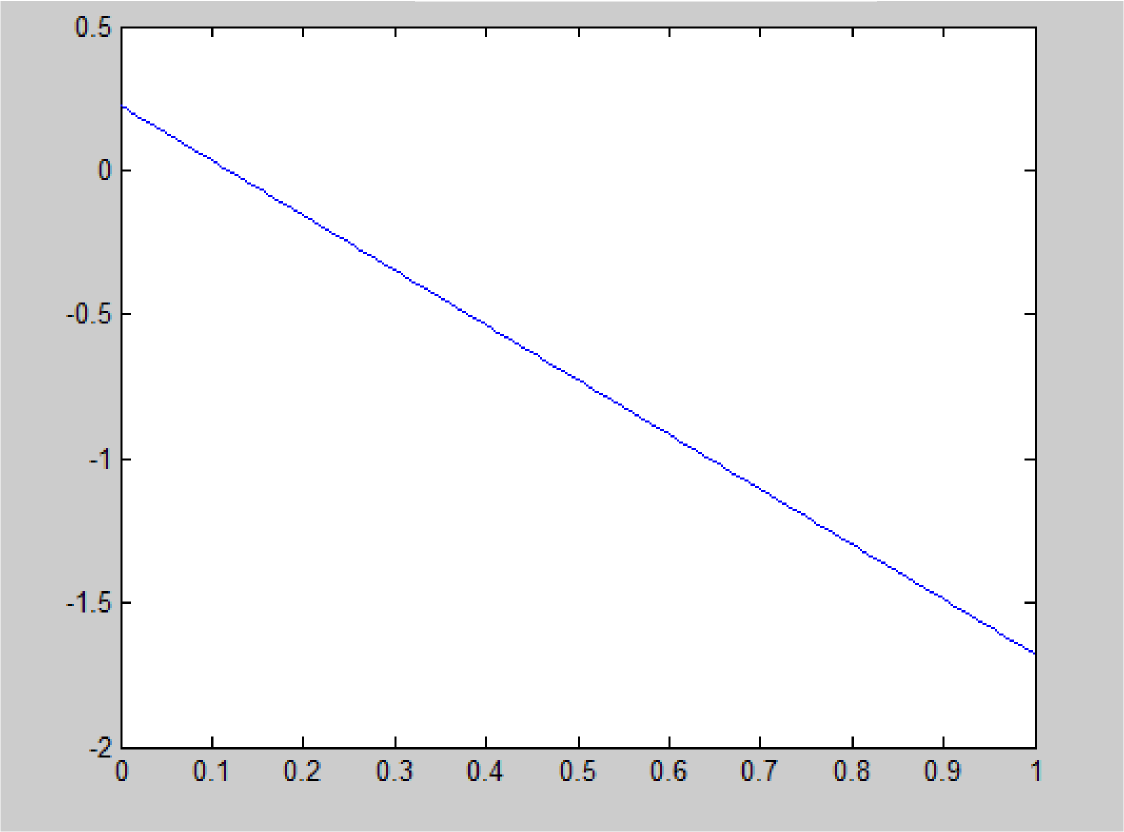
Ainsi la répartition de la population entre les différents états devient plus proche de la limitation de la distribution π* quand t tend vers l'infini

---

3.4. Conclusion

On compare(*) le taux d'intérêt obtenue dans le prêt de groupe et celui de prêt individuel en traçant le graphe suivant qui donne le développement du taux d'intérêt, en cas de groupe, en fonction de q, avec α = 0.9, z = 0.1, et :

$$1 + r^* = \frac{1+z}{\alpha} - (1-\alpha)q$$



(*) Cette comparaison est un travail personnel

Alors on a deux remarques importantes à citer :

- Le cas individuel n'est autre que le cas groupé pour q = 0.
- L'IMF peut pratiquer un taux d'intérêt plus bas dans le cas groupé que dans le cas individuel que

Dans ce chapitre on a fait l'analyse des deux modèles de microcrédit en utilisant des incitations dynamiques, l'un pour un contrat de prêt individuel et l'autre pour un contrat de prêt de prêt (groupe de deux emprunteurs) avec responsabilité conjointe. Dans cette analyse, nous avons supposé que l'emprunteur qui rembourse son prêt, plus la partie de la responsabilité conjointe des prêts de groupe dans le cas d'avoir un partenaire par défaut, devient bénéficiaire d'un nouveau prêt dans la période de prêt suivant.

L'application des chaines de Markov nous a permis une bonne modélisation de la réalité de prêt en microcrédit, ça montre l'importance vitale de ce domaine d'étude en mathématique.

L'objectif du chapitre était de trouver des équations qui permettent de lier le taux d'intérêt et la période de remboursement avec d'autre paramètre (α, z, q, …), et ce qui est fait.

Nous avons commencé avec plusieurs hypothèses, surtout dans le prêt de groupe, et ça laisse le model limité, donc l'extension et la généralisation reste toujours demandée. Nous devons notez que le travail réalisé dans ce chapitre nécessite encore des explications et des extensions.

On doit noter que les références liées au modèle de G.Tedeshi, sont presque introuvables.

Conclusion

L'étude de la Grameen-Bank, et du microcrédit en général, reste un vaste, et compliqué, domaine d'étude, on y trouve beaucoup de parties liée à l'économie, et la sociologie, c'est pourquoi n'importe qu'elle modèle mathématique reste limité par plusieurs hypothèses, mais ceci ne veut pas dire que la modélisation mathématique de microcrédit est faible, car les résultats trouvés à partir des 3 modèles données dans le 2ème et le 3ème chapitre sont importantes, et peuvent être l'objet du développement de l'étude et la généralisation des modèles.

Bibliographie

(1) Valérie Gilbert : Le microcrédit en Bangladesh comme moyen d'Empowerment, Edition 2009
(2) Hedwige Peemans-Poullet : article La miniaturisation de l'endettement des pays pauvres passe par les femmes, 2000.
(3) Léo AUGÉ – Aurore LEBRUN – Anaïs PIOZIN : Project report : Microcredit model and Yunus equation, Universié Nice Sophia Antipolice, Laboratoire de mathématiques appliqué et modélisation, 2010.
(4) Marc Diener- Pheakdei Mauk - Francine Diener : Randomness of interest rates in microcredit, Institutional Targeting in finance, Venice, 2015
(5) Musa Kurhula Baloyi : African Institute for Mathematical Sciences: October 2012
(6) Julian Tugaut : probabilité approfondit : chaines de Markov, 2015
(7) Université de Nice, Master Calcul Stochastique et finance (semestre 2), cours : Introduction aux chaines de Markov.
(8) Osman Khodr, Francine Diener : Mathematical models for individual and group lending in microfinance, Université de Nice.

Sites web

(9) Encyclopédie Wikipédia
(10) www.grameen-info.org