UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département des Mathématiques

Licence Sciences et Techniques (LST)

MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques

Equations différentielles linéaires et non linéaires

Présenté par :

- TAIBI ALAOUI El houssine

Encadré par :

- Pr. Omar SIDKI (FSTF)

Soutenu Le 14 Juin 2016 devant le jury composé de:

- Pr. Omar SIDKI (FSTF)
- Pr. Anisse OUADGHIRI (FSTF)
- Pr. Azzedine EL BARAKA (FSTF)

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES
212 (0)5 35 61 16 86 – Fax : 212 (0)5 35 60 82 14
Site web : http://www.fst-usmba.ac.ma

Équations différentielles linéaires et non linéaires

Elhoussin Taibi Alaoui

22 juin 2016

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.
En second lieu, je tiens à remercier mon encadrant Mr . OMAR SIDKI, pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.
Mes vifs remerciements également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction

Une équation différentielle d'ordre n est une équation qui met en jeu une relation entre une fonction et sa dérivée, et dont la solution est une fonction n fois dérivable.
De façon plus précise. La forme la plus générale d'une équation différentielle ordinaire (en abrégé E.D.O.) est :

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

où y est une fonction inconnue de la variable x à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et $y', y'', ..., y^{(n)}$ désignent les dérivées successives de y.
Applications des équations différentielles :
L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun à plusieurs disciplines ou sous disciplines suggère bien souvent d'intéressantes analogies entre des domaines a priori sans relations. On commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.
Mécanique :
La relation fondamentale de la mécanique, écrite à une dimension d'espace pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$x'' = f(t, x, x')$$

où x désigne la position de la particule, x' sa dérivée par rapport au temps (la vitesse), et où f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x, est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la position et la vitesse à un instant origine : $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.
Dynamique des populations :
De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus (1798)

qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$N' = bN - dN$$

$$N(0) = N_0$$

Dans ce mémoire nous allons adopter les démarches suivantes :
Dans le premier chapitre nous allons étudier les équations différentielles linéaires, on commencera par une définition de solutions de ces équations,en donnant quelques propriétés de ces solutions, avec une définition du problème de Cauchy associe a l'équation différentielle et on va définir le système différentielle puis on va démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires.
Dans la deuxième section nous allons étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants, finalement dans la troisième section on va terminer avec les équations différentielles linéaires scalaires.
Le deuxième chapitre a été consacré à l'étude des équations différentielles non linéaires, la première partie des équations du premier ordre commence par une définition de la solution d'une équation non linéaire et le problème de Cauchy associé et le théorème de Cauchy-Lipschitz et aussi une étude qualitative des solutions. Dans la deuxième partie on va traiter les équations à variables séparables avec des exemples, finalement dans la troisième partie nous allons étudier les équations autonomes du premier ordre .

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires

1.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.1.1 [1] :
Si a une application continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{L}(E)$ et b une application continue de I vers E, on appelle solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$x' = ax + b \qquad (E)$$

toute application dérivable ϕ de I vers E vérifiant

$$\forall t \in I;\ \phi'(t) = a.\phi(t) + b$$

On notera $x'(t) = a(t).x(t) + b(t)$ l'équation (E) .
Les applications $a \in C(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in C(I, E)$ s'appellent respectivement le coefficient et le second membre de (E).
avec :
E : est un espace vectoriel normé complet sur $\mathbb{K}$ de dimension n, avec ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} =$ C)
$\mathcal{L}(E)$: l'espace des applications linéaires continue de E vers E.
$C(I, E)$: l'espace des applications continues de I vers E.

On dit que l'équation (E) est à coefficient constant si a est une application constante et qu'elle est homogène ou sans second membre si $b = 0$.

On appelle équation homogène associée à (E), l'équation :

$$x' = a.x \qquad\qquad (Eh)$$

L'équation (E) s'appelle alors l'équation complète.

Proposition 1.1.2 [1] Toute solution de (E) est de classe C^1. Elle est de classe C^{k+1} lorsque a et b sont de classe C^k.

Démonstration :
La relation $\phi'(t) = a.\phi(t) + b$ montre que ϕ' est continue et ϕ de classe C^1.
Le deuxième point s'obtient par une récurrence immédiate.

Définition 1.1.3 [1] :
On dit qu'une solution ϕ de (E) vérifie la condition de Cauchy (ou la condition initiale) $(t_0, x_0) \in I \times E$ si on a :

$$\phi(t_0) = x_0.$$

Remarque
On appelle problème de Cauchy en (t_0, x_0) l'étude des solutions de (E) vérifiant la condition initiale (t_0, x_0).

Corollaire 1.1.4 [1] :
L'ensemble $S_0(I)$ des solutions sur I de l'équation homogène (Eh) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, E)$.
Démonstration :
Montrons que $S_0(I)$ est un sous espace vectoriel on a :
$0 \in S_0(I)$ alors $S_0(I) \neq \emptyset$
Soient $x, y \in S_0(I)$ en effet :

$$\begin{aligned}(x + y)' &= x' + y' \\ &= ax + ay \\ &= a(x + y)\end{aligned}$$

donc $(x + y) \in S_0(I)$
soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in S_0(I)$:

$$\begin{aligned}(\lambda.x)' &= \lambda.x' \\ &= \lambda.ax\end{aligned}$$

alors : $\lambda.x \in S_0(I)$
donc $S_0(I)$ est un sous espace vectoriel.

Corollaire 1.1.5 [1] :
Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ et $(b_1, b_2) \in C^0(I, E)^2$ tels que $b = \alpha_1.b_1 + \alpha_2.b_2$ Si ϕ_1 et ϕ_2 sont respectivement des solutions des équations :

$$x' = a.x + b_1 \, et \, x' = a.x + b_2$$

alors la fonction $\alpha_1.\phi_1 + \alpha_2.\phi_2$ est une solution de (E).

Système différentiel linéaire du premier ordre :

Définition 1.1.6 [1] :
On appelle système différentiel linéaire du premier ordre toute équation différentielle linéaire du premier ordre sur un espace numérique $\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R} \, ou \, \mathbb{K} = \mathrm{C}$)
Un tel système est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & a_{1,1}(t).x_1(t) + ... + a_{1,n}(t).x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{2,1}(t).x_1(t) + ... + a_{2,n}(t).x_n(t) + b_2(t) \\ & & ... \\ & & ... \\ & & ... \\ x_n'(t) & = & a_{n,1}(t).x_1(t) + ... + a_{n,n}(t).x_n(t) + b_n(t) \end{array}\right.$$

où les $a_{i,j}$, appelées coefficients, et les b_i, appelées seconds membres, sont des applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R} \, vers \, \mathbb{K}$.
En considéré $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]^2}$ et $B = (b_i)_{i\in[1,n]}$ sont des applications continues de I vers respectivement $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^{\mathrm{n}}$, on peut évidemment écrire ce système sous la forme d'une équation différentielle matricielle :

$$X' = AX + B$$

En fait, un système différentiel linéaire du premier ordre n'est que l'expression analytique d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dans une base de E. On utilisera pratiquement cette remarque lorsque l'on étudie une équation différentielle linéaire en recherchant une base dans laquelle l'équation s'écrit sous la forme du système le plus simple.

Exemple
Supposons que E soit un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et considérons l'équation différentielle :

$$x'(t) = v \wedge x(t) + 2t.v \qquad (E')$$

où v un vecteur non nul de E donné par $v = p.e_1 + q.e_2 + r.e_3$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et $\wedge$ est la produit vectoriel.
L'expression analytique de (E') dans une base orthonormée quelconque de E est de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -p & q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2pt \\ 2qt \\ 2rt \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit, nous choisirons une base adaptée géométriquement à (E) et fournissant le système le plus simple possible.
$x' = a(t)x + b(t)$ et vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Proposition 1.1.7 [1] :
Une application $\phi \in C(I, E)$ est une solution de (E) vérifiant le problème de Cauchy $(t_0; x_0)$ si et seulement si elle satisfait l'équation intégrale :

$$\forall t \in I; \phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s)ds + \int_{t_0}^{t} a(s)\phi(s)ds \qquad .$$

Démonstration :
Si $\varphi \in C^1(I, E)$ $\varphi' = a.\varphi + b$ et $\varphi(t_0) = x_0$, on obtient par intégration :

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (a(s).\varphi(s) + b(s))ds \,.$$

La réciproque est immédiate .

Théorème 1.1.8 [3] :
Si $a \in C^0(I, \pounds(E))$ et $b \in C^0(I, E)$, alors pour tout couple $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'équation différentielle

$$(E) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

possède une seule solution $y \in C^1(I, E)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration :
On montre que l'équation intégrale possède une unique solution $y \in C^1(I, E)$. Pour prouver l'existence, nous utilisons un procédé itérative, on construit une suite de fonctions continues sur I , qui va converger uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction solution de l'équation intégrale. Pour cela, définissons la fonction $z_0 : I \longrightarrow E$ par

$$\forall t \in I,\ z_0(t) = y_0$$

Cette fonction est évidemment continue sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$, si on suppose connue la fonction $z_n \in C^0(I, E)$, définissons $z_{n+1} : I \longrightarrow E$ par

$$\forall t \in I, z_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} (a(u)z_n(u) + b(u))du$$

(intégrale d'une fonction continue sur un segment). La fonction z_{n+1} est alors évidemment continue (est même de classe C^1) sur I. on a ainsi défini, par récurrence une suite de fonction $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continue sur I.
Montrons que cette suite converge simplement sur I, avec convergence uniforme sur tout segment inclus dans I.Pour cela, considérons la série télescopique associé de terme général

$$w_n(t) = z_{n+1}(t) - z_n(t)$$

et montrons que cette série converge normalement sur tout segment inclus dans I. Si K est un segment inclus dans I, considérons K_0 le plus petit segment inclus dans I, contenant à la fois K et t_0. Comme $t \longmapsto a(t)$ est continue, cette fonction est bornée sur K_0, et

$$\exists M > 0 \quad \forall u \in K \qquad ||a(u)|| \leq M$$

Pour $t \in I$ d'après la relation de récurrence définissant la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $w_{n+1}(t) = z_{n+2}(t) - z_{n+1}(t)$

$$= \int_{t_0}^{t} (a(u)(z_{n+1}(u) - z_n(u)))du = \int_{t_0}^{t} a(u)w_n(u)du$$

La fonction w_0 étant continue sur I, on peut également trouver un réel $N > 0$ tel que

$$\forall u \in K_0,\ ||w_0(u)|| \leq N$$

On a alors
$\forall t \in K_0,\ \ ||w_1(t)|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||a(u)w_0(u)||du|$

$$\leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||a(u)||||w_0(u)||du| \leq MN|t-t_0|$$

puisque le segment d'intégration est inclus dans K_0 avec

$$\forall u \in K_0,\ \ ||a(u)w_0(u)|| \leq ||a(u)||||w_0(u)|| \leq M.N$$

On en déduit que
$\forall t \in K_0,\ \ ||w_2(t)|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||a(u)||||w_1(u)||du|$

$$\leq |\int\limits_{t_0}^{t} M^2N|u-t_0|du| = N\frac{M^2|t-t_0|^2}{2!}$$

car $\forall t \in I\ \ ||a(t)|| \leq M$ puisque $a(t) \in \pounds(E)$ et $\forall t \in I\ ||w(t)|| \leq N$ puisque u est continue.
et, par récurrence sur n, on obtient

$$\forall t \in K_0 \quad ||w_n(t)|| \leq N\frac{M^n|t-t_0|^n}{n!} \leq N\frac{(ML)^n}{n!}$$

où L est la longueur du segment K_0. Cette inégalité prouve la convergence normale sur K_0 de la série de fonctions de terme générale $w_n(t)$, donc la convergence uniforme de la suite de fonctions z_n, puisque

$$\forall t \in I\ \ z_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n-1} w_k(t)$$

La fonction y définie sur I par

$$y(t) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} z_n(t)$$

est donc continue sur I.(limite d'une suite de fonctions continues avec convergence uniforme local). De plus si $K \subset I$ est un segment, on a :
$\forall u \in K\ \ ||a(u)z_n(u) - a(u)y(u)|| \leq ||a(u)||||z_n(u) - y(u)||$

$$\leq \sup_K ||a(u)|| \times ||z_n - y||_{\infty,K}$$

Montrons que la suit $(az_n + b)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur R vers la fonction $ay + b$. Si $y \in K$ en passant à la limite dans l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; z_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [a(u)z_n(u) + b(u)]du$$

on obtient

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} [a(u)y(u) + b(u)]du$$

Qui montre que y vérifie l'équation intégrale. L'unicité se montre par une technique analogue : si y et z deux solutions de l'équation intégrale alors la fonction $\delta = y - z$ vérifie

$$\forall t \in I \;\; \delta(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\delta(u)du$$

Avec la même méthode que précédemment, si on note

$$N_0 = \sup_{u\in K_0} ||\delta(u)||$$

(qui existe puisque δ est continue sur K_0) on montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall t \in K_0 \;\; ||\delta(t)|| \leq N_0 \frac{(M|t - t_0|)^n}{n!}$$

ce qui donne $\delta(t) = 0$ pour tout t, et donc $y = z$.

Continuons l'étude de l'équation :

$$x' = ax + b \qquad (E)$$

On note $S_0(I)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$x' = ax \qquad (Eh)$$

associée à (E).

Définition 1.1.10 [1] :
On appelle système fondamental de solutions de (Eh) toute base : $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de $S_0(I)$.

Proposition 1.1.11 [1] :
Soit $t_0 \in I$.Une famille $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \in S_0(I)^n$ est un système fondamental des solutions de (Eh) si et seulement si, la famille :

$$(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), ..., \varphi_n(t_0))$$

est une base de E

Démonstration :
Soit l'application définie $\delta_{t_0} : S_0(I) \longrightarrow E$ par $\forall t_0 \in I$, $\delta_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$
δ_{t_0} est linéaire :
soient $\varphi, \psi \in S_0(I)\, et\, \lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\Phi(\varphi + \lambda\psi) = \varphi(t_0) + \lambda\psi(t_0) = \delta_{t_0}(\varphi) + \lambda\delta_{t_0}(\psi)$$

Soit $\varphi \in S_0(I)$ tel que $\Phi(\varphi) = 0$. Alors pour tout t_0, $\varphi(t_0) = 0$. Donc φ est une solution de problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' & = Ax \\ x(t_0) & = 0 \end{cases}$$

Or $x = 0$ est une solution du même problème de Cauchy donc $\varphi = 0$. D'après le théorème d'existence et d'unicité donc δ_{t_0} est injective et surjective.
d'où δ_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels .
$(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est une base de $S_0(I)$ si et seulement si :

$$(\delta_{t_0}(\varphi_1), ..., \delta_{t_0}(\varphi_n))$$

est une base de E.

Définition 1.1.12 [1] ;
Soit B une base de E.
On appelle wronskien dans B de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \in S_0(I)^n$ en t le déterminant :

$$W(t) = det_B(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$$

.

Proposition 1.1.13 [1] :
On a équivalence entre les trois assertions suivantes :
(i)$(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions.
(ii)$\exists t \in I : W(t) \neq 0$
(iii)$\forall t \in I, W(t) \neq 0$.

Démonstration

$$(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) \text{ base de } S_0(I) \Leftrightarrow (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)) \text{ est une base de } E$$

$$\Leftrightarrow det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow W(t) \neq 0$$

Solution de l'équation homogène vérifiant une condition de Cauchy
Si $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de (Eh), on détermine l'unique solution : $\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \varphi_i$ où $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$
de (Eh) vérifiant la condition initiale (t_0, x_0), en résolvant le système en(α_i) :

$$\alpha_1 \varphi_1(t_0) + \alpha_2 \varphi_2(t_0) + ... + \alpha_n \varphi_n(t_0) = x_0.$$

Espace de solution complet
Continuons l'étude de l'équation :

$$x' = ax + b \qquad (E)$$

On note $S_0(I)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$x' = ax \qquad (Eh)$$

et S(I) l'espace des solutions de (E).
Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que l'ensemble S(I) n'est pas vide puisqu'il contient les solutions de (E) vérifiant la condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times K$.
Si on connait un système fondamental $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ de solution de (Eh) la résolution de (E) se ramène donc à la détermination d'une solution, dite solution particulière, de (E).
Il peut arriver, quitte à utiliser le principe de superposition, que l'on trouve une solution évidente de (E). Sinon, on utilisera la méthode de variation des

constants.
Dans tous les cas, si ψ_p est une solution particulière de (E), toute solution de (E) s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\psi = \psi_p + \varphi \quad avec \quad \varphi \in S_0(I)$$

Ou : $$\psi = \psi_p + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \varphi_i \;;(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$$

On obtient alors l'unique solution vérifiant la condition initiale (t_0, x_0) en déterminant l'unique solution $\varphi \in S_0(I)$ ou le n-uplet(α_i) correspondant, telle que :

$$\varphi(t_0) = x_0 - \psi_p(t_0)$$

Méthode de la variation des constantes
Cet oxymore célèbre désigne une méthode due à Lagrange permettant de déterminer par intégration les solutions de (E) à partir d'un système fondamental de solutions de (Eh).

Soit $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de (Eh).
Commençons par un lemme

Lemme 1.1.14 [1] :
Quelle que soit l'application $\varphi \in C^1(I, E)$, il existe une et une seule famille $(\lambda_i) \in C^1(I, E)^n$ telle que :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \varphi_i.$$

Démonstration :
$\forall t \in I$ on peut écrire le vecteur $\varphi(t)$ dans la base $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$ de E. Cela fournit une unique famille d'applications (λ_i) définies de I vers $\mathbb{K}$ tell que :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i(t) \varphi_i(t) \quad .$$

De plus si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E les applications (λ_i)sont données par la formule de Cramer :

$$\forall t \in I; \qquad \lambda_i(t) = \frac{det(\varphi_1(t), ..., \varphi(t), ..., \varphi_n(t))}{det(\varphi_1(t), ..., \varphi_i(t), ..., \varphi_n(t))}$$

(où φ à la i^{ieme} place pour tout i).

On sait que les applications φ_i sont de classeC^1 .
Si φ de classe C^1, les formules ci-dessus montrent que les λ_i sont de classe C^1 pour tout i .

Théorème 1.1.15 [1] :
Si le second membre de l'équation (E) s'écrit sous la forme $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$, alors une application $\psi = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i$, est solution de (E) si et seulement si on a : $\mu_i'(t) = \alpha_i(t)$, pour tout i et tout t.

Démonstration :
On obtient en dérivant

$$\psi' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i' + \sum_{i=1}^{n} \mu_i' \varphi_i$$

$$\psi' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i' \varphi$$

$$\psi' = a \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i' \varphi_i$$

$$\psi' = a\psi + \sum_{i=1}^{n} \mu_i' \varphi_i$$

Par unicité de cordonnées, l'application ψ est une solution de l'équation (E) si,et seulement si $\mu_i' = \alpha_i$ pour tout i.

1.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Considérons l'équation à coefficient constant :

$$x' = u.x + b \qquad\qquad (E)$$

où $u \in \pounds(E)$ et $b \in C(I, E)$ ainsi que l'équation homogène(Eh)

$$x' = u.x \qquad\qquad (Eh)$$

Remarque : le coefficient u est un constant, mais le second membre b est une application continue quelconque de I vers E.

Espace des solutions de l'équation homogène

Définition 1.2.1 [1] :
On appelle exponentielle de $u \in \pounds(E)$ et l'on note exp(u) ou e^u, la somme de la série absolument convergente :

$$exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ absolument convergente sur les parties bornées de $\pounds(E)$. L'application exp est continue et possède pour tout n le développement limité :

$$exp(u) = Id_E + u + \frac{u^2}{2!} + ... + \frac{u^n}{n!} + o(u^n)$$

Propriétés de l'exponentielle
Soit $u \in \pounds(E)$

proposition 1.2.2 [1] :
L'application $t \longrightarrow exp(tu)$ est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$x' = u\,o\,x \qquad\qquad (R)$$

Sur $\pounds(E)$ vérifiant la condition initiale $(0, Id_E)$.
Démonstration :

L'équation (R) est l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène associée à l'endomorphisme $L_u : v \longmapsto uov$ de $\pounds(E)$.
(E) admet une unique solution avec $\varphi(0) = Id_E$ est la somme sur $\mathbb{R}$ de la série normalement convergente sur les segments $\sum_n \varphi_n$ où la suite $(\varphi_n) \in C^1(\mathbb{R}, E)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ est définie par $\varphi_0 = Id_E$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{n+1}(t) = \int_0^t L_u.\varphi_n(s)ds$$

pour tout n.
On montre immédiatement par récurrence que l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_n(t) = \frac{t^n}{n!}.u^n.x_0$$

pour tout n, il vient alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} u^n = exp(t.u)\,.$$

Proposition 1.2.3 [1] :
L'application $t \longrightarrow exp(tu)$ et de classe C^∞ de $\mathbb{R} \longrightarrow \pounds(E)$ et sa dérivé donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ;\ (exp(tu))' = u\, o\, exp(tu) = exp(tu)\, o\, u\ .$$

Démonstration :
L'application $t \longmapsto exp(tu)$ et de classe C^∞ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ;\ (exp(tu))' = (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t.u)^n}{n!})'$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ ;\ (exp(tu))' = (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((t.u)^n)'}{n!})$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ ;\ (exp(tu))' = (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t)^{n-1}.u^n}{(n-1)!})$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ ;\ (exp(tu))' = (u\, o \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t)^{n-1}.u^{n-1}}{(n-1)!})$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ ;\ (exp(tu))' = u\, o\, exp(t.u)$$

comme solution de l'équation x' = u o x. On obtient la deuxième relation en remarquant que u et exp(t.u) commutent pour tout t.

Proposition 1.2.4 [1] :
On a $exp(0) = Id_E$ et :

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2\ ;\ exp((t+s)u) = exp(tu)\, o\, exp(su)$$

L'endomorphisme exp(tu) est inversible quel que soit t et :

$$exp(tu)^{-1} = exp(-tu).$$

Démonstration :
Soit $s \in \mathbb{R}$. Les applications $t \longmapsto exp((t+s)u)$ et $t \longmapsto exp(t.u)oexp(s.u)$ sont des solutions de l'équation différentielle :

$$x' = uox$$

car : $(exp((t+s)u))' = u\, o\, exp((t+s)u)$ et
$(exp(tu)\, o\, exp(su))' = (exp(tu))'\, o\, exp(su) = u\, o\, exp(tu)\, o\, exp(su)$
vérifiant la condition de Cauchy (0, exp(su)). On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ exp((t+s)u) = exp(t.u).exp(s.u).$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ exp(tu)oexp(-tu) = exp(-tu)oexp(tu) = exp(0) = Id_E.$$

Cela montre que exp(tu) est inversible, d'inverse exp(-tu) pour tout t.

Théorème 1.2.5 [1] :
Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$. L'unique solution φ de (Eh) vérifiant $\varphi(t_0) = x_0$ est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\quad \varphi(t) = exp((t-t_0)u).x_0$$

Démonstration L'application $\varphi : t \longrightarrow exp((t-t_0)u).x_0$ tel que $\varphi(t_0) = x_0$. Elle de classe C^∞ et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ \varphi'(t) = u\, o\, exp((t-t_0)u).x_0 = u.\varphi(t)$$

C'est donc l'unique solution de (Eh) vérifie la condition de Cauchy (t_0, x_0).

Système fondamentale de solution et wronskien :
Soit $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ base de E.
Toute famille des solutions de (Eh) est de la forme :

$$(exp(tu).x_1, exp(tu).x_2, ..., exp(tu).x_n)$$

Espace des solutions de l'équation complète

La méthode de variation des constantes prend dans le cas qui nous intéresse la forme particulière suivante.
Toute application $\psi \in C^1(I, E)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(t) = exp(tu).\lambda(t)$$

où $\lambda : t \longrightarrow exp(-tu).\psi(t)$ est de classe C^1 de I vers E.On a alors :

$$\psi'(t) = (u\, o\, exp(tu)).\lambda(t) + exp(tu).\lambda'(t)$$

Ainsi ψ est une solution de (E) si et seulement si l'application λ vérifie :

$$\lambda'(t) = exp(-tu).b(t) \quad .$$

Proposition 1.2.6 [1] :
Soit $(t_0, x_0) \in I \times E$. La solution $\psi \in C^1(I, E)$, de (E) vérifie la condition de Cauchy (t_0, x_0) est donnée par :

$$\forall t \in I,\ \psi(t) = exp((t - t_0)u).x_0 + \int_{t_0}^{t} exp((t - s)u)b(s)ds \quad .$$

Démonstration :
Avec les notations précédentes on a $\lambda(t_0) = exp(-t_0u).\psi(t_0)$, et par intégration :

$$\lambda(t) = exp(-t_0u).x_0 + \int_{t_0}^{t} exp(-su)b(s)ds \quad .$$

la linéarité de l'intégrale donne :

$$\psi(t) = exp(tu)\, o\, exp(-t_0u).x_0 + exp(tu)(\int_{t_0}^{t} exp(-su)b(s)ds)$$

$$\psi(t) = exp((t-t_0)u).x_0 + \int_{t_0}^{t} exp((t-s)u)b(s)ds \quad .$$

Remarque On a aussi :

$$\psi(t) = exp((t-t_0)u)(x_0 + \int_{t_0}^{t} exp((t_0-s)u)b(s)ds) \ .$$

Méthodes pratiques de résolution
Ce qui précède montre que la résolution de l'équation homogène (Eh) se ramène au calcul de l'exponentielle de u et, par suite, à la réduction de cet endomorphisme.
Cas où u est diagonalisable :Lorsque u est diagonalisable, on se place évidemment dans une base de diagonalisation.

Proposition 1.2.7 [1] :
Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E telle que :

$$Mat_B(u) = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n \ .)$$

L'équation (E) s'écrit dans la base B sous la forme d'un système d'équations scalaires :

$$\forall i \ , \ x_i' = \alpha_i.x_i + b_i \ .$$

Les solutions de (E) sont données par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ x_i(t) = \lambda_i.e^{\alpha_i.t} + e^{\alpha_i.t} \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha_i.s}.b_i(s)ds$$

Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

1.3 Équations différentielles linéaires scalaires

Définition 1.3.1 [1] :
Si $(a_k)_{k\in[0,n]}$ n+1 applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$ et b une application continue de I vers $\mathbb{K}$, on appelle solution de l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n :

$$a_n.x^{(n)} + ... + a_0.x = b \qquad (E)$$

toute application n fois dérivable de I vers $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a_n(t).\varphi^{(n)}(t) + ... + a_0(t)\varphi(t) = b(t) \ .$$

On notera $a_n(t).x^{(n)}(t) + ... + a_0(t).x(t) = b(t)$ l'équation (E) si l'on veut préciser le nom de la variable libre.

Les applications $a_k \in C(I,\mathbb{K})$ et $b_k \in C(I,\mathbb{K})$ s'appelle respectivement les coefficients et le second membre de (E).

On dit que l'équation (E) est à coefficients constants si les a_k sont constantes et qu'elle est homogène ou sans second membre si b = 0.

On appelle équation homogène associée à (E), l'équation :

$$a_n(t).x^{(n)}(t) + ... + a_0(t).x(t) = 0 \qquad (Eh)$$

L'équation (E) s'appelle alors l'équation complète.
On fera attention à ce qu'une solution de (E) est comme dans le cas des équations du premier ordre, définie sur I tout entier.

Proposition 1.3.2 [1] :
Toute solution de l'équation (E) est de classe C^n. Elle est de classe C^{n+p} si les applications (a_k) et b sont de classe C^p.

Démonstration
Soit φ une solution de (E). La relation :

$$\varphi^{(n)} = -\frac{1}{a_n}(-a_{n-1}\varphi^{(n-1)} - ..... - a_0\varphi + b) \quad a_n \neq 0$$

montre que φ de classe C^n et de classe C^{n+p} si les applications (a_k) et b sont de classe C^p.
Condition de Cauchy

Définition 1.3.3 [1] :
On dit qu'une solution φ de (E) vérifie la condition de Cauchy, ou la condition initiale, $(t_0, x_0, ..., x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$ si on a :

$$\forall k \in [0, n-1],\ \varphi^{(k)}(t_0) = x_k.$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz)
Dans cette sous-section, a_k et b désignent des applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et :

$$a_n.x^{(n)} + ... + a_0.x = b \qquad (E)$$

l'équation différentielle associée.
On appelle : espace des phases de (E), l'espace $E = \mathbb{K}^n$.
applications des phases, les applications $A : t \longmapsto A(t)$ de I vers $M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0..................0 \\ 0 & 0 & 1..................0 \\ . & . & .... \\ . & . & ....0 \\ 0 & 0 & ....0\ 1 \\ \frac{a_{n-1}}{a_n} & ... & ...., \frac{a_0}{a_n} \end{pmatrix}$$

et $B : t \longmapsto B(t)$ de I vers $\mathbb{K}^n$ définie par :

$$\forall t \in I,\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{b(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}$$

équation des phases, l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$X' = AX + B \qquad (P)$$

où

$$\forall t \in I,\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \\ . \\ . \\ . \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

La proposition suivante montre que l'équation (E) est équivalente à son équation des phases (P).

Proposition 1.3.4 [1] :
Soit $(t_0, x_0, ..., x_{n-1}) \in I \times E^n$ Une application Φ est une solution du système des phase (P) vérifiant la condition de Cauchy :

$$\Phi(t_0) = (x_0, ..., x_{n-1})$$

si et seulement si, elle est de la forme :

$$\Phi : t \longmapsto (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))$$

où φ est une solution de l'équation (E) vérifiant la condition de Cauchy $(t_0, x_0, ..., x_{n-1})$.

La proposition précédente ramène ainsi l'étude des équations différentielles scalaires d'ordre n à celle des équations différentielles vectorielles du premier ordre.

Théorème (Cauchy-Lipschitz) 1.3.5 [1] :
Pour tout $(t_0, x_0, ..., x_{n-1})$ il existe une et une seule solution de (E) vérifiant la condition initial $(t_0, x_0, ..., x_{n-1})$.

Démonstration
Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il existe une solution Φ au système (P) vérifiant la condition initiale $(to, (x_o, ..., x_{n-1}))$ .L'application Φ est de la forme :

$$\Phi : t \longmapsto (\varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t))$$

où φ est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x_0, ..., x_{n-1})$.
Si φ et ψ sont deux solutions de (E) vérifiant la même condition initiale, les applications Φ et Ψ associées vérifient (P) et la même condition initiale.
On a donc $\Phi = \Psi$ et $\varphi = \psi$.

Corollaire 1.3.6 [1] :
Soit J un sous-intervalle non réduit à un point de I. Toute solution de (E) définie sur J est la restriction d'une unique solution définie sur I.

Espace des solutions de l'équation homogène
On continue l'étude de l'équation différentielle :

$$a_n.x^{(n)} + ... + a_0.x = b \qquad (E)$$

où a_n ne s'annule pas sur I.
On note $S_0(I)$, rappelons-le, l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène :

$$a_n.x^{(n)} + ... + a_0.x = 0 \qquad (Eh)$$

Proposition 1.3.7 [1] :
Soit $t_0 \in I$. L'application :

$$\delta_{t_0} : S_0(I) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}.$$

est un isomorphisme linéaire.

Corollaire 1.3.8 [1] :
L'espace $S_0(I)$ est de dimension n.

Système fondamental de solutions

Définition 1.3.9 [1] :
On appelle système fondamental des solutions de (Eh) toute base :$(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de $S_0(I)$.

Proposition 1.3.10 [1] :
Soit $t_0 \in I$, Une n-uplet $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in S_0(I)^n$ est un système fondamental

de solution si et seulement si, la famille :

$$\left(\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \varphi_n(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathbb{K}^n$.

Définition 1.3.11 [1] :
On appelle wronskien en t d'une famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in S_0(I)^n$, le déterminant

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & ... & \varphi_n(t) \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & ... & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Proposition 1.3.12 [1] :
On a équivalence entre :
(i) $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in S_0(S)^n$ est un système fondamental des solution.
(ii) $\exists t_0 \in I,\ W(t) \neq 0$.
(iii) $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$.
Démonstration :
la démonstration est la même que la proposition 1.1.13.

Chapitre 2

Équations différentielles non linéaires

2.1 Équations du premier ordre

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ continue.
on étudie l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \qquad (E)$$

Définition 2.1.1 [2] :
On appelle solution de (E) tout couple (I, y) formé d'un intervalle d'intérieur non vide I et d'une fonction $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable vérifiant :
1) $\forall x \in$ I, $(x, y(x)) \in U$.
2) $\forall x \in$ I, $y'(x) = f(x, y(x))$.

Remarque :
Une solution de (E) sur I est nécessairement une fonction de classe C^1.

Proposition 2.1.2 [2] :
Si (I, y) est une solution de (E) alors pour tout intervalle d'intérieur non vide $J \subset I$, $(J, y_{|J})$ est aussi solution de (E).

Exemple :
une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale .

Définition 2.1.3 [2] :
On appelle courbe intégrale de (E) toute courbe de $\mathbb{R}^2$ d'une solution maximale de (E).

Définition 2.1.4 [2] :
Le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation $y' = f(x, y)$ satisfaisant la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

Exemple :
Si $y' = a(x)y + b(x)$ est une équation linéaire définie sur I alors pour tout $x_0 \in I$ et$y_0 \in \mathbb{R}$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' & = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

avec a et b sont des fonctions continues.
admet une unique solution sur I.

Proposition 2.1.5 [1] :
Soit $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On a équivalence entre :
(i) y est une solution sur I du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' & = f(x, y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

(ii) y vérifie :

$$\forall x \in I, y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Démonstration :
$(i) \Longrightarrow (ii)$ supposons (i)
Puisque la fonction y de classe C^1 ,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(t)dt$$

donc

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))dt = y_0$$

et puisque

$$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

est dérivable, y est dérivable $y'(x) = f(x, y(x))$.

Nous supposons d'abord : (GL) La fonction $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ est continue sur $[0, T] \times R^n$ et il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

pour tous $t \in [0, T] et y_1, y_1 \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Théorème 2.1.6 [2] : (théorème de Cauchy-(globalement) Lipschitz)
Sous l'hypothèse (GL), il existe une unique solution de l'EDO :

$$\begin{cases} y' & = f(x, y) \; sur [0, T] \\ y(x_0) & = y_0 \in R^n \end{cases}$$

qui est définie pour tout t sur [0 ; T].

Preuve :
On utilise le processus itératif habituel en introduisant la suite de fonctions $(y_k)_{k \geq 1}$ définie par $y_1(t) = y_0$ pour tout $t \in [0, T]$ et :

$$y_{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y_k(s))ds \; pour \, tout \, t \in [0, T]$$

Mais l'idée ici est de faire une estimation ponctuelle dans l'espace $C([0; T, \mathbb{R}^n])$ qui est généralement utilisée pour l'argument de point fixe.
On commence par écrire

$$y_3(t) - y_2(t) = \int_0^t (f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s)))ds$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et (GL) on a :

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq \int_0^t L|y_2(s)) - y_1(s)|ds \leq L.t||y_2 - y_1||_\infty$$

Puis :

$$y_4(t) - y_3(t) = \int_0^t (f(s, y_3(s)) - f(s, y_2(s)))ds$$

En utilisant encore une fois l'inégalité triangulaire et (GL) :

$$|y_4(t) - y_3(t)| \leq \int_0^t L|y_3(s)) - y_2(s)|ds$$

Mais on emploie, cette fois, l'estimation plus précise de $|y_4(t) - y_3(t)|$:

$$|y_4(t) - y_3(t)| \leq \int_0^t L^2 s||y_2 - y_1||_\infty ds = \frac{(L.t)^2}{2}||y_2(t) - y_1(t)||_\infty$$

En répétant le même argument, on prouve aisément, par récurrence, que :

$$\forall n \geq 1 \ \ on \ : \quad |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq M\frac{(Lt)^{k-1}}{(k-1)!}$$

où $M = ||y_2 - y_1||_\infty$.
Il en résulte immédiatement que la série des fonctions $\sum_{k\geq 1}(y_{k+1} - y_k)$ est normalement convergente sur [0,T] et donc que :

$$y_K = \sum_{k=1}^{K-1}(y_{k+1} - y_k) + y_1$$

converge uniformément vers une fonction (continue) sur $[0, T]$ (car une démonstration par récurrence montre que tout les y_k sont continus).
En utilisant (GL), on montre facilement que $f(s, y_k(s))$ converge uniformément vers $f(s, y(s))$ et en passant à la limite dans la relation de récurrence qui définit les y_k, on obtient :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$$

Le second membre étant dérivable puisque $s \longmapsto f(s, y(s))$ est continue sur $[0, T]$, y est dérivable et on retrouve l'équation en dérivant.
Pour l'unicité, on procède par l'absurde : si y, z sont deux solutions, on a :

$$y(t) - z(t) = \int_0^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))ds$$

et grâce à (GL) :

$$|y(t)-z(t)| \leq \int\limits_0^t L|y(s)-z(s)|ds\,.$$

On pose $\chi(t) = \int\limits_0^t L|y(s)-z(s)|ds$, on a χ est dérivable et que :

$$\chi'(t) \leq L.\chi(t)$$

de plus $\chi(0) = 0$.
On écrit l'intégrale ci-dessus sous la forme $\chi'(t) - L\chi(t) \leq 0$ et on multiplie par $exp(-L.t)$ faisant ainsi apparaitre la dérivée de $exp(-L.t)\chi(t)$ que donc négative. Il en résulte que $exp(-L.t)\chi(t) \leq \chi(0) = 0.$ mais χ est une fonction positive donc $\chi\, et\, \chi' = |y-z|$ son identiquement nulles ce qui entraine que $y = z$ et donc on a l'unicité .

Étude qualitative 2.1.7 :
Exemple :
Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \quad y' &= 1 + y^2.x^2 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

$f\,(x,y) \longmapsto 1 + x^2.y^2$ est définie et de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$.
Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet une solution maximale unique définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 :$I =]a,b[$ avec $a < 0 < b,\ a,b \in \bar{\mathbb{R}}$.
Monotonie :
y est dérivable et

$$\forall x \in \mathrm{I},\ y'(x) \geq 1 > 0$$

La fonction y est strictement croissante sur I.
Parité :
Considérons $z : x \in J \longmapsto -y(-x)\, avec J =]-b; -a[.$
$z(0) = -y(0) = 0,$ z est dérivable et $z'(x) = y'(-x) = 1 + (-x)^2 y(-x)^2 = 1 + x^2 z^2(x).$
Ainsi z est une solution du problème de Cauchy définissant la solution maximale y et donc z est une restriction de y. On en déduit $J \subset I$ et

$$\forall x \in J, y(x) = z(x)$$

Or $J \subset I$ donne $]-b,-a[\subset]a,b[$ d'où l'on tire $a=b$.
Par suite $I=J=]-a,a[$ et

$$\forall x \in I,\ y(-x)=-y(x)$$

finalement y est une fonction impaire.
Montrons que I est borné :
Par l'absurde si $a=+\infty$ alors pour $x \geq 1$, $y'(x) \geq 1+y(x)^2$ et donc :

$$\frac{y'(x)}{1+y(x)^2} \geq 1$$

En intégrant :

$$\int_1^x \frac{y'(t)}{1+y(t)^2}dt \geq \int_1^x 1dt$$

Puis

$$\arctan(y(x))-\arctan(y(1)) \geq x-1$$

ce qui est absurde.
car quand $x \longrightarrow +\infty$ on a $x-1 \longrightarrow +\infty$ et puisque :

$$\arctan(x)-\arctan(1) \leq \frac{\pi}{2}-\arctan(1)$$

On conclut $a<+\infty$ Étude de la limite de y en a^-
Puisque y est croissante, la limite l de y en a^- existe dans $\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$.
Par l'absurde suppose que $l \in \mathbb{R}$.
On peut alors introduire $\tilde{y}$ $:]-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{y}(x)=y(x)$ si $x<a$ et $\tilde{y}(a)=l$
$\tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle sur $]-a,a[$.
Par construction $\tilde{y}$ est continue en a et quand $x \longrightarrow a^-$,

$$\tilde{y}'(x)=1+\tilde{y}^2(x).x^2 \longrightarrow 1+l^2.a^2 \in \mathbb{R}.$$

Par suit $\tilde{y}$ est dérivable en a et $\tilde{y}'(a)=1+l^2.a^2=1+a^2.\tilde{y}^2(a)$.
Ainsi $\tilde{y}$ est solution sur $]-a,a]$ du problème de Cauchy initiale ce qui contredit la maximalité de y.
Absurde.
On en déduit $\lim\limits_{a^-} y=+\infty$.
Remarque En observant

$$a=\int_0^a dt=\int_0^a \frac{y'(t)}{1+t^2.y^2(t)}dt \geq \int_0^a \frac{y'(t)}{1+a^2.y^2(t)}dt$$

donc $a \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2.2 Équations différentielles à variables séparée

Soient a, b, c, d des fonctions réelles données. On étudie l'équation

$$a(x)b(y) + c(x)d(y)y' = 0 \qquad (E)$$

Définition 2.2.1 [2] :
Une solution de (E) est un couple (I, y) formé d'un intervalle non singulier I et d'une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$\forall x \in I, a(x).b(y(x)) + c(x)d(y(x))y'(x) = 0$$

On peut encore parler de solution maximale.

Protocole de résolution :
Analyse : Soit (I, y) une solution de (E).
On a :

$$a(x)b(y) = -c(x)d(y)y'$$

alors :

$$\frac{d(y)}{b(y)}y' = -\frac{a(x)}{c(x)}$$

Soit

$$p(y(x)).y' = q(x)$$

avec $p = \frac{d}{b}$ et $q = -\frac{a}{c}$ fonction continue :
En introduisant $PetQ$ primitive de p et q, on obtient :

$$P(y) = Q(x) + C^{te}$$

ce qui fournit des équations cartésiennes vérifiées par les courbes intégrales.
Si de plus, on peut inverser P, on obtient

$$y = P^{-1}(Q(x) + C^{te})$$

Un Première Exemple 2.2.1 :
Exemple : Résolvons

$$(E) \quad : \quad e^{x+y}y' + 1 = 0$$

Soit (I, y) une solution de (E)alors :

$$\forall x \in I, y'(x)e^{y(x)} = -e^{-x}$$

Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{y(x)} = e^{-x} + C$$

Or $e^{y(x)} > 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} + C > 0\, et\, y(x) = \ln(e^{-x} + C)$$

Résumé :
Si (I, y) est solution de (E) alors :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} + C > 0\, et\, y(x) = \ln(e^{-x} + C)$$

Remarque Contrairement aux équations linéaires, il y a ici corrélation entre l'intervalle de résolution et les constantes descriptives possibles. On peut alors :
- pour une constante donnée, rechercher la solution maximale correspondante ;
- pour un intervalle donné, rechercher les constantes possibles.

Un deuxième exemple 2.2.2 :
Exemple :Résolvons l'équation

$$(E) : \quad y' = 2x.y(y-1)$$

Pour séparer les variables, on souhaite pouvoir diviser par $y(y-1)$ ce qui force à étudier séparément les fonctions s'annulant et celles prenant la valeur 1.
$f(x, y) \longmapsto 2xy(y-1)$ est définie de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2$ donc le Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.
Puisque les fonctions $x \longmapsto 0$ et $x \longmapsto 1$ sont des solutions sur IR de l'équation (E). toute solution s'annulant ou prenant la valeur est restriction de la fonction constante correspondante.
Soit (I, y) une solution de (E).

$$\forall x \in I,\ y(x) = 0\ (resp\, \forall x \in I,\ y(x) = 1)$$

Si y ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1 alors

$$\forall x \in I,\ \frac{y'(x)}{y(x)(y(x)-1)} = 2x$$

Puisque
$$\int \frac{dt}{t(t-1)} = -\ln|t| + \ln|t-1| + C^{te}$$
On obtient l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in I,\ \ln(|\frac{y(x)-1}{y(x)}|) = x^2 + C$$
Puis
$$|\frac{y(x)-1}{y(x)}| = e^{x^2+C}$$
Puisque la fonction $x \longmapsto \frac{y(x)-1}{y(x)}$ est définie et continue sur un intervalle et puisque cette fonction ne s'annule pas, elle est de signe constante sur I, Ainsi il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que
$$\forall x \in I,\ \frac{y(x)-1}{y(x)} = \epsilon.e^{x^2+C}$$
On pose $\lambda = \epsilon.e^C \in \mathbb{R}^*$, on obtient
$$\frac{y(x)-1}{y(x)} = \lambda.e^{x^2}$$
puis
$$\frac{1}{y(x)} = 1 - \lambda.e^{x^2}$$
puisque $\frac{1}{y(x)} \neq 0$ on a $1 - \lambda.e^{x^2} \neq 0$ et
$$y(x) = \frac{1}{1-\lambda.e^{x^2}}$$
Résumons :
Si y est solution de (E) prenant la valeur 0 ou 1 alors y est constante.
Si y est solution de (E) sur un intervalle I ne prenant pas les valeurs 0 et 1 alors
$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in I,\ 1 - \lambda.e^{x^2} \neq 0\, et\, y(x) = \frac{1}{1-\lambda.e^{x^2}}$$
Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
Recherchons les solutions maximales.
Pour cela, déterminons pour $\lambda \neq 0$, les plus grands intervalles I vérifiant la condition
$$\forall x \in I,\ 1 - \lambda.e^{x^2} \neq 0\, i.e\, \lambda \neq e^{-x^2}$$

Cas $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, l'équation$\lambda = e^{-x^2}$ ne possède pas de solutions.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-\lambda.e^{x^2}}$ est alors solution maximale sur $\mathbb{R}$.
Cas $\lambda = 1$:
On a :

$$e^{-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

donc

$$\forall x \in I,\ e^{-x^2} \neq 1 \Leftrightarrow I \subset]-\infty, 0[\ ou\ I \subset]0, +\infty[$$

Cas $\lambda \in]0,1[$: On a

$$e^{-x^2} \neq \lambda \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{-\ln\lambda}$$

Posons $x_\lambda = \sqrt{-\ln\lambda}$.
On a

$$\forall x \in I, 1 - \lambda.e^{-x^2} \neq 0 \Leftrightarrow I \subset]-\infty, -x_\lambda[\ ou\ I \subset]-x_\lambda, x_\lambda[\ ou\ ]x_\lambda, +\infty[.$$

2.3 Équations autonomes

La variable fonctionnelle sera notée t plutôt que x car en pratique elle s'apparente souvent à un paramètre temporel.

Équation autonome d'ordre1 :
Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$. On étude l'équation autonome d'ordre 1 :

$$(E) \quad y' = f(y)$$

Il s'agit d'une équation résolue en y' mais aussi d'une équation à variables séparables.
Exemple :$y' = y + y^2$ est une équation autonome d'ordre 1.

Proposition 2.3.1 [2] :
Si (I, y) est solution de (E) alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_a y : t \longmapsto y(t-a)$ est solution de (E) sur l'intervalle $a + I$.

Démonstration :
Par décomposition $\tau_a y$ est définie et dérivable sur $a + I$ avec
$(\tau_a y)'(t) = y'(t-a) = f(y(t-a)) = f(\tau_a y(t))$.

Théorème 2.3.2 [2] :
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si J est un ouvert et si f est de classe C^1 alors pour tout $y_0 \in J$, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' & = f(y) \\ y(0) & = y_0 \end{cases}$$

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Corollaire 2.3.3 [2] :
Les solutions de l'équation $y' = f(y)$ sont alors constantes ou injectives.

Démonstration :
Soit (I, y) une solution de l'équation $y' = f(y)$ non injective.
Il existe $a < b \in \mathbb{R}$ tel que $y(a) = y(b)$.
Par le théorème de Rolle, il existe $t_0 \in]a, b[$, tel que $y'(t_0) = 0$ et alors $f(y(t_0)) = 0$. Posons $y_0 = y(t_0)$ de sort que vérifie $f(y_0) = 0$.
Puisque la fonction $t \longmapsto y_0$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = f(y)$,c'est une solution maximale et y en est la restriction. Ainsi y est une fonction constante.
Exemple Résolvons l'équation

$$(E) : \ y' = 1 + y^2$$

Soit (I, y) une solution de (E).

$$\forall t \in I, \ \frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} = 1$$

Il existe un $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \ arctan(y(t)) = t + C$$

Or $arctan(y(t)) \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\forall t \in I, \ t + C \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ et \ y(t) = \tan(t + C)$$

Résumons :
Si y est solution de (E) sur un intervalle I alors

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in I,\ t + C \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ et\ y(t) = \tan(t + C)$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions.
Ainsi les solutions maximales de (E) sont les fonctions $t \longmapsto \tan(t+C)$ définie sur $]-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C[$.

Conclusion

Dans ce rapport nous avons vu dans le premier chapitre les équations différentielles linéaires et les méthodes de résolution selon le type de l'équation :
Les équations différentielles linéaires du premier ordre.
Les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.
Les équations différentielles linéaires scalaires.
Dans le deuxième chapitre nous intéressons aux équations différentielles non linéaires :
Les équations différentielles du premier ordre.
Les équations différentielles non linéaires à variables séparables :
Une étude qualitative.
Les équations différentielles autonome du premier ordre.
Alors ce rapport est un résumé de l'étude des équations différentielles linéaires et non linéaires.

Bibliographie

[1] : Mathématiques 2^e année • Claude Deschamps . André Warusfel . Jean François Ruaud • François Moulin., Mathématiques 2^e Dunod, Paris ISBN 2 10 005412 0 Édition 2001.
[2] :Cours Mathématiques MP David Delaunay . , Édition Marktinge 2002.
[3] : Cours de Mathématique • Jean VOEDTS Cours de Mathématique 11 juin 2013 . http ://mp.cpgedupuydelome.fr