



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES



Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)

Phénomène de supraconductivité à partir des équations de Ginzburg-Landau

Réalisé par : Serhan Nabil

Encadré par : Pr. Elkhomssi Mohammed

Soutenu le 17 juin 2016

Devant le jury composé de :

- | | |
|-----------------------------|-------------|
| - Pr. Elkhomssi Mohammed | FST Fès |
| - Pr. Elhilali Alaoui Ahmed | FST Fès |
| - Pr. Hilali Abdelmajid | FST Fès |
| - Pr. Fikri Majda | ENCG Agadir |

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☐ B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES



UNIVERSITÉ SIDI MOHAMMED BEN ABDELLAH

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES FÈS

DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

RAPPORT DE PROJET DE FIN D'ÉTUDES

MASTER MATHÉMATIQUE ET APPLICATION AU CALCUL
SCIENTIFIQUE

Phénomène de supraconductivité à partir des équations de Ginzburg-Landau

Réalisé par : Serhan Nabil
Soutenu le : 17 juin 2016

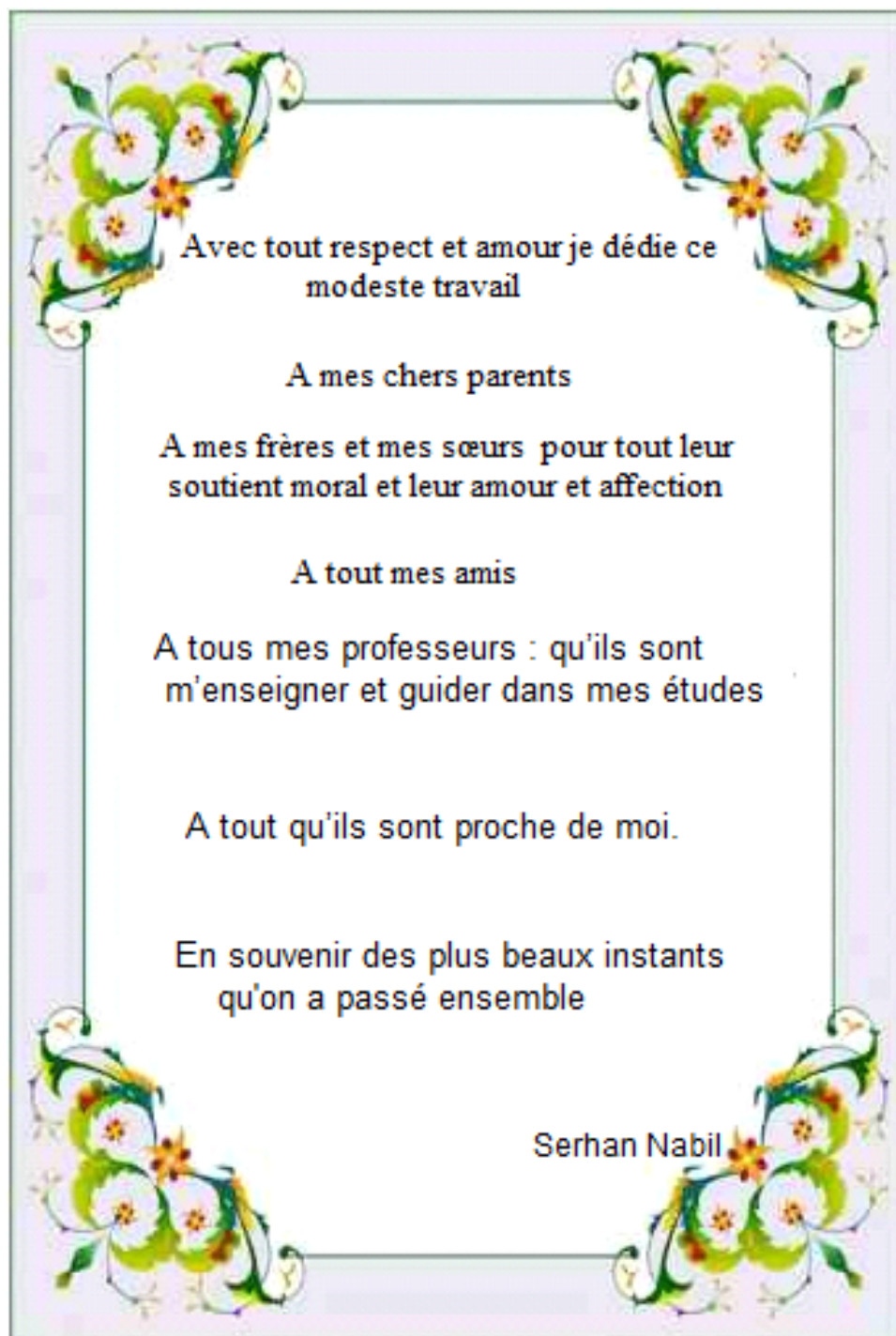
Devant le jury composé de

Pr. Elkhomssi Mohammed
Pr. Hilali Abdelmajid
Pr. Elhilali Alaoui Ahmed
Pr. Fikri Majda

Encadré par

Pr. Mohammed Elkhomssi

1^{er} Février 2016 — 17 Juin 2016



Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques MOHAMMED ELKHOMSSI, mon encadrant, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'encadrer ce modeste travail.

Vous avez bien voulu me confier ce travail riche d'intérêt et me guider à chaque étape de sa réalisation.

Vous m'avez toujours réservé le meilleur accueil, malgré vos obligations professionnelles. Vos encouragements inlassables, votre amabilité, votre gentillesse méritent toute admiration.

Je saisis cette occasion pour vous exprimer ma profonde gratitude tout en vous témoignant mon respect.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury AHMED ELHILALI ALAOUI, ABDELMAJID HILALI et MAJDA FIKRI qui nous ont honorés par leurs présence.

J'adresse également mes remerciements à toutes les professeurs du Département des Mathématiques qui ont contribué à ma formation pendant les deux années de l'étude au master MACS à la FST de Fès.

Enfin, je tiens à remercier mon père, ma mère, mes frères, mes sœurs, mes amis, mes collègues, pour leurs soutien pendant mes années d'études.

Table des matières

Remerciements	3
Table des figures	7
Introduction générale	9
1 Introduction à la supraconductivité	13
1.1 Définition de la supraconductivité	13
1.2 Historique	13
1.3 Propriétés élémentaires des matériaux supraconducteurs	15
1.3.1 Résistivité électrique	15
1.3.2 La structure microscopique	16
1.3.3 L'effet Meißner-Ochsenfeld	17
1.3.4 Comportement électrique	19
1.3.5 Surface critique	19
1.4 Types des supraconducteurs	20
1.4.1 Supraconducteur de type I	21
1.4.2 Supraconducteur de type II	21
1.4.3 Longueurs caractéristique des supraconducteurs :	22
1.4.4 Classification des supraconducteurs	22
1.4.5 Détails sur le type II	23
1.5 Applications des supraconducteurs	24
1.5.1 Le domaine médicale	24
1.5.2 Les électro-aimants	25
1.5.3 Le domaine de transport	26
1.5.4 Transport du courant électrique	26
1.5.5 Conservation de l'énergie	26
1.6 Conclusion	27
2 Théorie de F. et H. London	29
2.1 Rappel des équations de Maxwell	29
2.1.1 Équations de Maxwell dans le vide	29
2.1.2 Polarisation électrique et induction électrique	30
2.1.3 Densité d'aimantation et induction magnétique	31
2.1.4 Équations de Maxwell dans les milieux et lois de comportement	32
2.2 Modèle de Fritz et Heinz London	32
2.2.1 Équation de London	32
2.2.2 Résolution	34
3 Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau	37

3.1	Thermodynamique des supraconducteurs	37
3.1.1	L'énergie libre	38
3.2	Modèle macroscopique de Ginzburg-Landau	41
3.2.1	La théorie de Landau des transitions de phase	41
3.2.2	Densité d'énergie libre de Ginzburg-Landau (GL)	44
3.2.3	Normalisation d'énergie libre de Helmholtz	46
3.2.4	les équation de Ginzburg-Landau	47
3.2.5	Les équations de Ginzburg-Landau normalisée	47
3.2.6	La quantification du flux	48
3.2.7	comparaison avec l'équation de London	49
3.3	Lien avec l'étude de Béthuel-Brézis-Hélien	50
3.3.1	Minimisation de fonctionnelle : passage de l'énergie à l'équation . . .	50
3.3.2	Une propriété concernant la solution de l'équation de Ginzburg-Landau	53
3.3.3	Conclusion	53
	Bibliographie	57

Table des figures

1.1	Résistance électrique du Mercure en fonction de la température (kelvin)	16
1.2	attraction entre les électrons (paires de Cooper)	17
1.3	expulsion du champ magnétique dans le supraconducteur (effet Meissner)	18
1.4	lévitation d'un aimant au dessus d'un supraconducteur	18
1.5	Surface critique délimitant la région où existe la supraconductivité	20
1.6	Supraconducteur de première espèce	21
1.7	Supraconducteur de deuxième espèce	22
1.8	Disposition de cœurs "normaux" dans le supraconducteur	23
1.9	Représentation d'un filament de vorticité mettant en évidence la longueur de pénétration λ , la longueur de cohérence ξ et les courants d'écrantage.	23
1.10	scanner médical	25
1.11	Schéma d'un électroaimant	25
1.12	Train à lévitation magnétique	26
1.13	schéma de câbles supraconducteurs	26
2.1	Profil du champ magnétique dans un supraconducteur	34
2.2	Distribution d'induction magnétique $\mathbf{B}(x)$ (suivant l'axe z), et la densité de supercourant (suivant l'axe y)	35
3.1	Deux chemins menant d'un état normal en champ nul (A) �� un état supraconducteur en champ non nul (D). Sans l'effet Meissner, ces deux chemins conduiraient à deux ��tats différents en D.	38

Introduction générale

Avant cinq ans environ, nous avons pratiquement atteint le centenaire de la découverte de la supraconductivité. Bien des chercheurs dans le domaine, de par le monde, vont se poser, une fois encore, la question essentielle quant à l'origine de ce phénomène étrange. Car, en fait, après plusieurs décennies de recherche à la fois laborieuse et passionnée pour comprendre les mécanismes qui fondent ce phénomène, la question reste entière. Bien plus encore, elle a soulevé, dans la foulée de l'activité fiévreuse qui s'en est suivie, une somme d'autres questionnements et continue de poser un défi majeur à la physique de la matière condensée.

Les matériaux conventionnels utilisés dans les différents domaines de l'électrotechnique ont atteint leurs limites d'utilisation à cause des limitations de leurs performances, limitations dues aux échauffements dans les matériaux résistifs, et aux champs de saturation dans les matériaux magnétiques. A tous ses inconvénients les matériaux supraconducteurs paraissent à première vue pouvoir remédier, grâce à leurs remarquables propriétés (résistivité nulle, lévitation magnétique, densité de courants élevée, ...).

L'apparition des supraconducteurs à haute température critique a relancé l'intérêt pour les supraconducteurs, et a encouragé les recherches sur les applications de ce type de matériaux, notamment pour le transport de l'énergie électrique et la production de champs intenses. Un autre domaine d'application est la lévitation magnétique et les exploits qu'elle permet.

La résolution numérique des équations de Ginzburg-Landau nécessite une large connaissance sur le phénomène de la supraconductivité. Pour ce faire on va étudier dans ce mémoire l'origine de ces équations, commençant par une couverture générale sur les propriétés fondamentales des supraconducteurs et arrivant aux équations qui modélisent ce phénomène au niveau macroscopique.

L'objectif principal de ce mémoire est de donner un aperçu général sur les supraconducteurs, en essayant de répondre aux questions suivantes :

- Qu'est ce qu'un supraconducteur ?
- Quelle est l'origine physique de la supraconductivité ?
- Quelles sont les types des supraconducteurs ?
- Quelles sont les applications et les intérêts d'un supraconducteur ?
- Quelle est la relation avec les équations de Maxwell de l'électromagnétisme ?
- Quelles sont les principales théories qui ont tenté d'expliquer ce phénomène ?

Le mémoire est structuré comme suit :

- **Le premier chapitre** est consacré à l'étude des principales propriétés concernant le phénomène, au niveau macroscopique, microscopique, thermique et le comportement magnétique. Ainsi que les principales industrielles.
- **Le deuxième chapitre** est consacré à la présentation des équations de Maxwell, ainsi que l'étude de la théorie phénoménologique des Frères London.
- **Le troisième chapitre** a été consacré à la présentation de l'objectif de la mémoire, soit la modélisation des supraconducteurs à partir des équations phénoménologique de Ginzburg-Landau.

Enfin, nous tirons une conclusion générale résumant notre travail et nous proposons quelques suggestions futures.

Annexe

Superfluide

La superfluidité est un état de la matière dans lequel celle-ci se comporte comme un fluide dépourvu de toute viscosité, par exemple l'hélium liquide, azote liquide...

Principes thermodynamique

Premier principe

La variation de l'énergie interne $\mathcal{U}$ d'un système est égale à l'énergie qu'il a reçue sous forme de travail W ou de chaleur Q :

$$d\mathcal{U} = \delta W + \delta Q \quad (1)$$

deuxième principe

L'entropie S est croissante

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (2)$$

En remplaçant 2 dans 1 il vient

$$d\mathcal{U} = \delta W + TdS \quad (3)$$

Considérant la variation du travail en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}$

$$\delta W = \mathbf{B}dM$$

Où M est la magnétisation. Donc la variation d'énergie interne s'écrit

$$d\mathcal{U} = TdS + \mathbf{B}dM \quad (4)$$

Troisième principe

À la limite du zéro absolu, un corps pur dans un état cristallin parfait a une entropie nulle.

$$T = 0K, \forall p, \Rightarrow S = 0$$

Opérateurs différentiels

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Le gradient :

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^t$$

La divergence Le Laplacien :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Si $f = (f_x, f_y, f_z)$ est un champ de vecteur

La divergence :

$$\text{div } f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Le rotationnel :

$$\text{rot } f = \nabla \wedge f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le laplacien d'un vecteur :

$$\Delta f = (\Delta f_x, \Delta f_y, \Delta f_z)^t$$

$$\text{div}(\text{rot } f) = 0$$

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot } f) = \text{grad}(\text{div } f) - \text{div}(\text{grad } f) = \text{grad}(\text{div } f) - \Delta f$$

Théorème 0.0.1 (Gauss). $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \text{div } \mathbf{A} \, dV$ L'intégrale de $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ sur une surface S fermée est égale à l'intégrale de $\text{div } \mathbf{A} \, dV$ sur le volume V englobé par S .

Théorème 0.0.2 (Stokes). $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ L'intégrale de $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ sur une ligne l fermée est égale à l'intégrale de $\text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ sur toute surface s'appuyant sur l .

Chapitre 1

Introduction à la supraconductivité

Ce chapitre est consacré à la présentation des matériaux supraconducteurs et de leurs applications. Après un rappel de l'histoire de la supraconductivité, nous citons les propriétés fondamentales des matériaux supraconducteurs. Nous présentons aussi la définition des supraconducteurs de type I et de type II. A la fin de ce chapitre, nous citons un récapitulatif des principales applications des supraconducteurs.

1.1 Définition de la supraconductivité

La supraconductivité est la propriété que possèdent certains matériaux à ne s'opposer au passage du courant, c'est-à-dire à avoir une résistance nulle, à condition que leur température soit inférieure à une certaine valeur appelée température critique (T_c). Ces matériaux s'opposent également aux champs magnétiques externes. Ce phénomène a lieu à des températures très basses. Les courants électriques peuvent donc circuler à travers un métal sans aucune dissipation d'énergie.[1]

1.2 Historique

La supraconductivité fut découverte en 1911 par le physicien néerlandais Heike Kamerlingh Onnes, qui remarqua qu'à une température inférieure à 4,2 K (-268,8 °C), le mercure ne présentait plus aucune résistance électrique. a connu plusieurs périodes correspondant aux divers axes de recherche. On peut dégager deux étapes cruciales : avant et après 1986.

Avant 1986

Tout commença en 1911 par une découverte fortuite. Gilles HOLST, un étudiant du laboratoire du physicien hollandais Kamerlingh ONNES, travaillant sur l'étude de la résistivité du mercure à la température de liquéfaction de l'hélium, découvrit qu'elle s'annulait en dessous de 4,15 K. Ce même laboratoire accumulait les succès : trois années auparavant, première liquéfaction de l'hélium, atteignant alors la plus basse des températures connues : 4,2 K, c'est-à-dire -269°C.

Une liste des éléments simples supraconducteurs très vite établie : On s'aperçut que tous les éléments n'étaient pas supraconducteurs, et que l'Or, l'Argent et le Cuivre, considérés comme les meilleurs métaux, ne présentaient aucune trace de supraconductivité.

En 1933, Meissner et Oschenfeld découvrirent la propriété d'un barreau de métal pur à être imperméable à tout champ magnétique, que l'on appelle depuis l'effet Meissner (que l'on expliquera après).

Une autre question qu'on se posait à cette époque était de savoir d'où provenait ce phénomène, qu'aucune théorie ne savait expliquer. Entre 1935 et 1952, plusieurs théories assez puissantes ont été proposées par LONDON, GINZBURG et LANDAU, mais elles étaient incomplètes.

En 1957, une partie de la réponse fut donnée par la théorie BCS (expliqué dans le chapitre 2), mise au point par BARDEEN, COOPER et SCHRIEFFER, expliquant une théorie pouvant décrire le phénomène au niveau microscopique, alors que la découverte de celui-ci datait déjà de 45 ans.

L'année 1986

Ce fut une année charnière dans l'histoire des supraconducteurs, car c'est à ce moment-là que la théorie BCS fut remise en cause, avec la découverte d'un supraconducteur à 34K, alors que celle-ci prédisait de ne pas dépasser 30K. Neuf mois plus tard, on le découvrit à 92K. Cette année fut un tournant car de nouveaux composés ont été découverts : des oxydes métalliques céramiques contenant des lanthanides. Par conséquent, de nouvelles générations de composés apparurent tels que $Y-Ba-Cu-O$ ¹ et $Ti-Sr-Ca-Cu-O^*$. Ils permettent de dépasser la température de l'azote liquide (77K, soit $-196C$) coûtant dix fois moins cher que l'hélium liquide et refroidissant vingt fois mieux.

Après 1986

Cette découverte déclencha une course aux supraconducteurs à « haute température critique ».

En 1988, on parvint à fabriquer des supraconducteurs à plus de 100K.

En 1995, le record de température critique reproductible fut atteint avec des composés au mercure à une température de 164K mais nécessitant de hautes pressions. On ne désespère pas d'obtenir un jour des supraconducteurs à la température ambiante.

1. Les oxydes mixtes de baryum de cuivre et d'yttrium, sont des composés chimiques cristallins de formule $YBa_2Cu_3O_7$.

1.3 Propriétés élémentaires des matériaux supraconducteurs

Les propriétés fondamentales des matériaux supraconducteurs sont donc essentiellement au nombre de deux :

- une résistivité nulle,
- expulsion des lignes d'induction (Effet Meisner)

1.3.1 Résistivité électrique

Relation entre conductivité et résistivité électrique

La conductivité électrique G d'une substance est une mesure de sa capacité à laisser circuler un courant électrique. (l'unité est siemens S)

La résistance électrique ρ d'un élément de circuit est une mesure de l'opposition qu'il offre au passage d'un courant électrique. Dans un solide, la résistance est causée par les collisions que subissent les électrons du courant avec les atomes du matériau. (l'unité est l'Ohm Ω)

Il existe une relation entre la résistance et la conductance d'un élément de circuit. En effet, la résistance est l'inverse mathématique de la conductance, et inversement. La même relation existe entre l'unité de résistance (ohm, Ω) et l'unité de conductance (siemens, S).^[2]

$$G = \frac{1}{\rho} \quad (1.1)$$

La loi de Mathiessen

Au voisinage du "zéro absolu", la **conductivité électrique** des métaux est limitée par les impuretés et par les défauts statiques du réseau cristallin. Expérimentalement, la résistivité totale ρ peut s'écrire (loi de Mathiessen) :

$$\rho(T) = \rho_r + \rho_i(T)$$

où ρ_r est la résistivité résiduelle indépendante de la température due aux défauts et impuretés, et où ρ_i est la résistivité idéale due aux collisions électrons-phonons. Les processus résistifs liés d'une part aux défauts et d'autre part aux phonons sont donc décorrélés. Seule la résistivité idéale, par opposition à la résistivité résiduelle, est une propriété intrinsèque aux métaux, indépendante de la perfection cristalline du solide ^{[3] [4]}.

Résistivité nulle

La résistivité électrique des matériaux, même au zéro degré absolu, semble donc non nulle, et fixée par la diffusion des électrons sur les impuretés et les défauts dans le métal (loi de Mathiessen). Cependant, certains métaux présentent une résistivité nulle en dessous

d'une température T_c , appelée la température critique de transition supraconductrice. Ce changement de phase fut observé pour la première fois par Kammerlingh Onnes en 1911 avec du mercure (Figure 1.1).

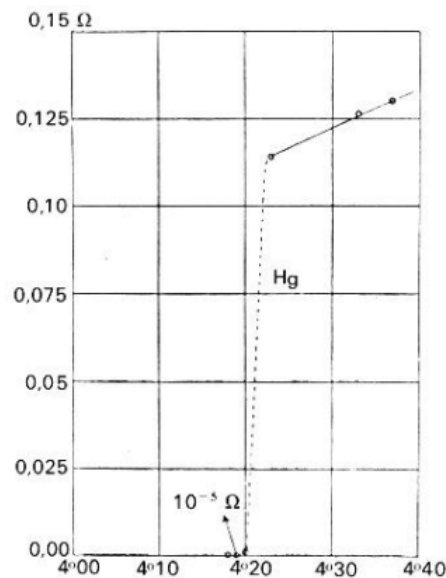


FIGURE 1.1 – Résistance électrique du Mercure en fonction de la température (kelvin)

Comment expliquer l'absence de résistivité électrique ? Les défauts ne disparaissent évidemment pas à T_c , et la supraconductivité observée dans des alliages particulièrement impurs, par exemple des alliages plomb-indium dont la résistivité résiduelle dans l'état normal est élevée. Le fait que des courants persistent sur des longueurs macroscopiques indique que le flux d'électrons n'est pas perturbé sur de telles longueurs. Il y a pratiquement autant d'obstacles que d'électrons, et pourtant ceux-ci passent imperturbablement sans les remarquer.

1.3.2 La structure microscopique

Paires de Cooper

Dans les métaux dits en paire, les électrons se déplacent deux à deux, c'est ce que l'on appelle les paires de Cooper. Elles obéissent au principe de l'interaction phonon-électron. Lorsqu'un électron traverse un réseau d'ions positifs, ceux-ci attirent d'abord le premier électron. Une fois passé, cet électron va modifier la position de ce réseau, mais très légèrement étant donné la grande inertie des ions, et de telle façon que, localement, le métal va être chargé positivement durant un certain temps, ce qui va permettre d'attirer un autre électron, qui va alors se trouver proche du premier électron, malgré la répulsion coulombienne entre ces deux particules de charge négative, étant alors trop faible pour les éloigner. On observe donc un phénomène de couplage des électrons, car le premier électron émet un phonon, qui va être absorbé par le second, et ainsi de suite... figure 1.2 [5]

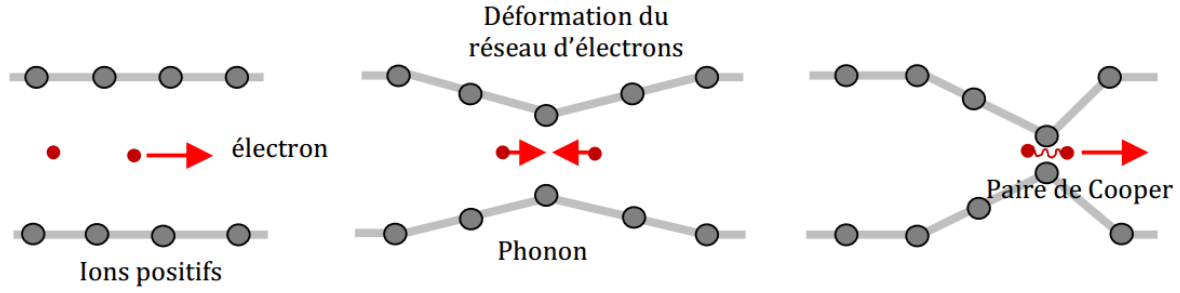


FIGURE 1.2 – attraction entre les électrons (paires de Cooper)

Lorsque la *température est élevée*, les ions du matériau sont alors en mouvement, s'agitent, et l'équilibre est alors rompu et les paires de Cooper disparaissent

A l'échelle **microscopique**, la physique quantique nous apprend que dans un métal, les électrons se comportent comme des ondes périodiques étalées sur plusieurs atomes indépendantes les unes des autres. Dès qu'un défaut se présente, ou que l'un des atomes du réseau cristallin vibre, ces ondes sont perturbées. A très basse température, quand un métal devient supraconducteur, ses électrons s'associent par paire de Cooper. Toutes les paires d'électrons se superposent alors les unes aux autres pour former une seule onde quantique qui occupe tout le matériau. Cette onde tout à fait particulière devient insensible aux défauts du matériau : ils sont trop petits pour freiner l'ensemble de l'onde. La résistance électrique a disparu.

Fonction d'onde macroscopique

La fonction d'onde de cet état quantique macroscopique doit être multiélectronique et est donc expressivement complexe. Il n'est pas utile a priori de chercher à décrire les probabilités de présence des différents électrons et l'on peut réduire cette fonction d'onde macroscopique à une fonction d'onde $\psi(x)$ permettant de représenter la variation spatiale de la densité de probabilité de présence des porteurs supraconducteurs, $|\psi(x)|^2$. Ce faisant on conserve la caractéristique importante d'une fonction d'onde qui est de comporter un facteur de phase,[6] avec

$$\psi(x) = \phi(x)\exp(i\theta(x)) \quad (1.2)$$

$$\phi(x) = |\psi(x)| \quad (1.3)$$

En règle générale, nous nous intéressons à des situations où la densité volumique de porteurs supraconducteurs $\phi(x)^2$ est uniforme spatialement au cœur d'un supraconducteur.

1.3.3 L'effet Meißner-Ochsenfeld

La « deuxième signature » des matériaux supraconducteurs est leur aptitude à expulser un champ magnétique extérieur appliqué $\mathbf{H}$ (de faible amplitude), quand ils sont refroidis en dessous de leur T_c . De la même façon, si l'on refroidit un supraconducteur, puis que l'on applique un faible champ magnétique, les lignes de flux ne pénètrent pas dans le matériau. Le champ magnétique $\mathbf{B}$ à l'intérieur du matériau est donc nul. Cette caractéristique appelée « effet Meissner » n'est pas une propriété d'un conducteur parfait qui est seulement caractérisé par sa résistance nulle [3] (Fig : 1.4).

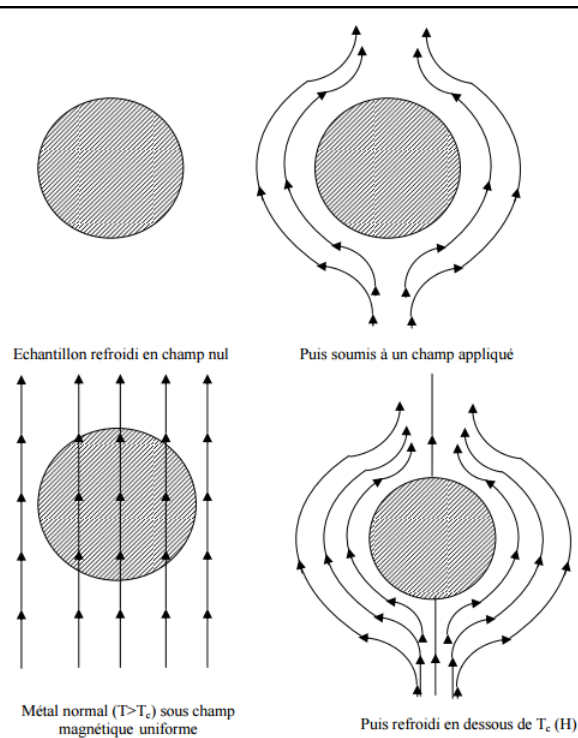


FIGURE 1.3 – expulsion du champ magnétique dans le supraconducteur (effet Meissner)

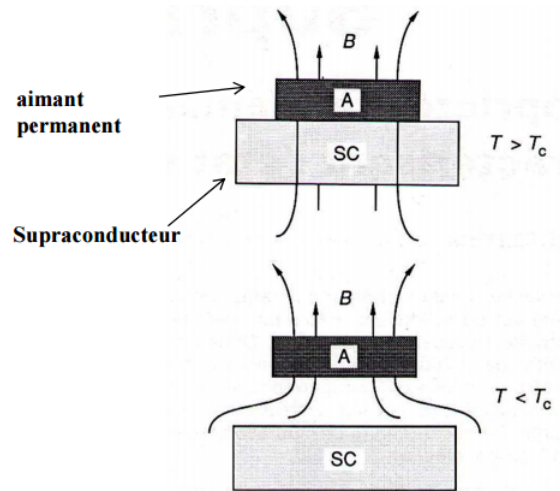


FIGURE 1.4 – lévitation d'un aimant au dessus d'un supraconducteur

Relation $B(H)$

L'induction magnétique $\mathbf{B}$ à l'intérieur d'un matériau en fonction du champ externe $\mathbf{H}_a$ et de l'aimantation M est donné par l'expression : [3] [5]

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + M)$$

avec $M = \chi\mathbf{H}$
d'où

$$\mu_0\mathbf{H}(1 + \chi) = 0 \quad \text{et } \chi = -1$$

où χ est la susceptibilité magnétique, $\mathbf{H}$ est le champ magnétique et $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique. Le matériau supraconducteur présente donc un **diamagnétisme parfait**.

Le signe et la magnitude de χ séparent les matériaux en différentes classes :

- **Diamagnétique** : $\chi < 0$ et petite, indépendante du champ extérieur ; le matériau est expulsé du champ magnétique extérieur.
(supraconducteur : diamagnétique parfait, $M = -\mathbf{H}$, $\chi = -1$, $\mathbf{B} = 0$)
- **Paramagnétique** : $\chi > 0$ et petite ($10^{-5} - 10^{-2}$), indépendante du champ extérieur ; le matériau est légèrement attiré vers le champ magnétique extérieur
- **Ferromagnétique** : $\chi > 0$ et grande ($10^{-2} - 10^6$), dépendante du champ extérieur ; le matériau est très fortement attiré vers le champ magnétique extérieur.

1.3.4 Comportement électrique

L'apparition du diamagnétisme parfait vient de la propriété du matériau à développer des supercourants. Ces courants sont des courants d'électrons qui ne perdent pas d'énergie, afin d'être maintenus éternellement sans obéir à l'effet Joule responsable de pertes d'énergie par génération de chaleur. Les courants créent l'intense champ magnétique nécessaire pour alimenter l'effet Meissner. Ces mêmes courants permettent de transmettre de l'énergie sans perte, ce qui présente l'effet le plus spectaculaire de ce type de matériau. Comme la quantité d'électrons supraconducteurs est finie, la quantité de courant qui peut soutenir le matériau est limitée. C'est pourquoi il existe un courant critique à partir duquel le matériau cesse d'être supraconducteur et commence à dissiper de l'énergie. [6] [3]

1.3.5 Surface critique

L'état supraconducteur non dissipatif est conditionné par trois grandeurs, appelées grandeurs critiques, au-delà desquelles le matériau passe dans un état fortement dissipatif. Il s'agit de la densité de courant critique J_c , de la température critique T_c et du champ magnétique critique $\mathbf{H}_c$. Ces trois grandeurs sont fonction les unes des autres et forment ainsi une surface critique (domaine supraconducteur) au-delà de laquelle le matériau retrouve l'état normal comme l'illustre la figure 1.5

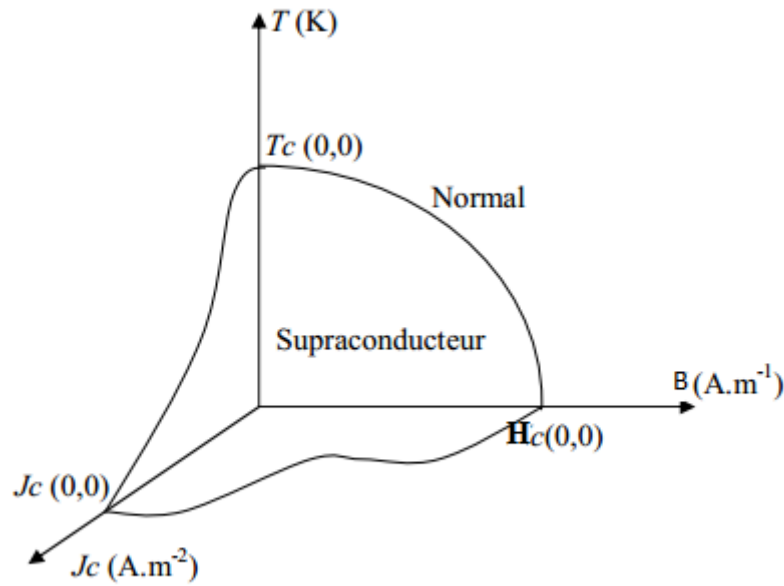


FIGURE 1.5 – Surface critique délimitant la région où existe la supraconductivité

Nous avons déjà défini la température critique qui caractérise la transition de phase d'un état normal à un état supraconducteur, en dessous de laquelle le matériau perd toute résistance à l'écoulement de courant électrique continu. De même, nous pouvons dire que le champ critique thermodynamique $\mathbf{H}_c(T)$ est le champ pour lequel la supraconductivité est détruite même si la température est en dessous de sa température critique T_c , pour peu que ce champ soit important. Ce comportement est lié à la pénétration du champ dans ce supraconducteur (Effet Meissner).

Ce champ critique va dépendre de la température et s'annule à T_c . En cela, il suit approximativement une loi en :

$$\mathbf{H}_c(T) = \mathbf{H}_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

La variation de $\mathbf{H}_c(T)$ en fonction de la température est donnée sur la **figure 1.6**

Enfin, la densité de courant critique J_c est la limite supérieure au delà de laquelle le matériau oppose une résistance non nulle au passage du courant. Autrement dit, un matériau supraconducteur ne peut pas supporter des densités de courant très élevées. Cette limitation en courant va conditionner l'utilisation des matériaux supraconducteurs en tant que conducteurs de courant.

1.4 Types des supraconducteurs

A partir de deux des trois paramètres critiques essentiels à la supraconductivité : la densité de courant critique J_c et le champ critique $\mathbf{H}_c$, on peut fixer une limite au-delà de laquelle le matériau perd des performances supraconductrices. Cependant tous les supraconducteurs n'ont pas le même comportement en présence d'un champ magnétique, la supraconductivité disparaît selon deux scénarios déferents. Ces scénarios conduisent à un classement des matériaux en supraconducteurs de **type I** et de **type II**.

1.4.1 Supraconducteur de type I

Les supraconducteurs type I ne possèdent qu'un seul champ critique $\mathbf{H}_c$, figure 1.6. Le champ magnétique pénètre sur une épaisseur appelée Longueur de pénétration de London dans laquelle se développent des supercourants. Le comportement de ce type de supraconducteurs est simple car il n'existe que deux états. L'état normal correspond à une valeur élevée de la résistance du matériau et l'état supraconducteur correspond à un diamagnétisme presque parfait. Les supraconducteurs de type I sont essentiellement des corps purs, comme le plomb (Pb), le mercure (Hg), l'indium (In) et l'étain (Sn).[1]

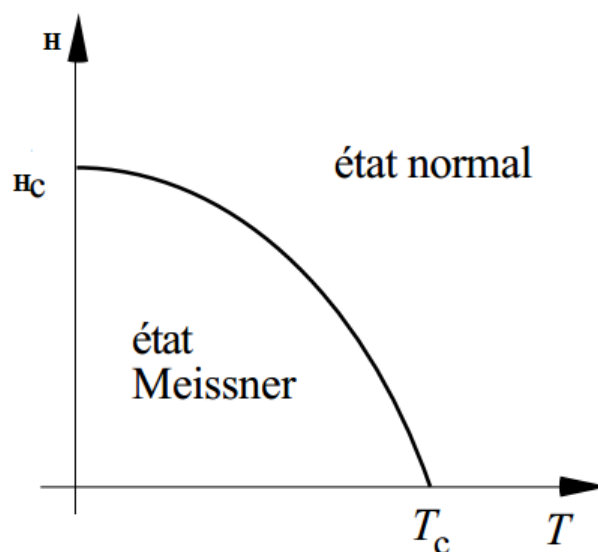


FIGURE 1.6 – Supraconducteur de première espèce

1.4.2 Supraconducteur de type II

En 1962, un deuxième type de supraconducteurs a été découvert. Ces matériaux de deuxième espèce possèdent deux champs magnétiques critiques ($\mathbf{H}_{c1}$ et $\mathbf{H}_{c2}$) dépendants de la température. Ainsi, ils peuvent se trouver dans trois états : l'état normal, l'état supraconducteur et l'état mixte. Sous $\mathbf{H}_{c1}$, le matériau est complètement à l'état supraconducteur. Lorsqu'il franchit ce champ magnétique critique, il se retrouve à l'état mixte, c'est-à-dire que le flux magnétique commence à pénétrer dans l'objet à travers de minces faisceaux appelés vortex. Le centre de chacun des vortex est caractérisé par une conductivité normale, et le flux les traversant est gardé constant par des boucles de courant persistant se formant sur leur circonférence. La densité des vortex augmente en proportion du champ appliqué. Si ce champ dépasse $\mathbf{H}_{c2}$, le matériau atteint l'état normal, de la même façon que s'il avait outrepassé la température critique sans être soumis à un quelconque champ magnétique extérieur.[1] [2]

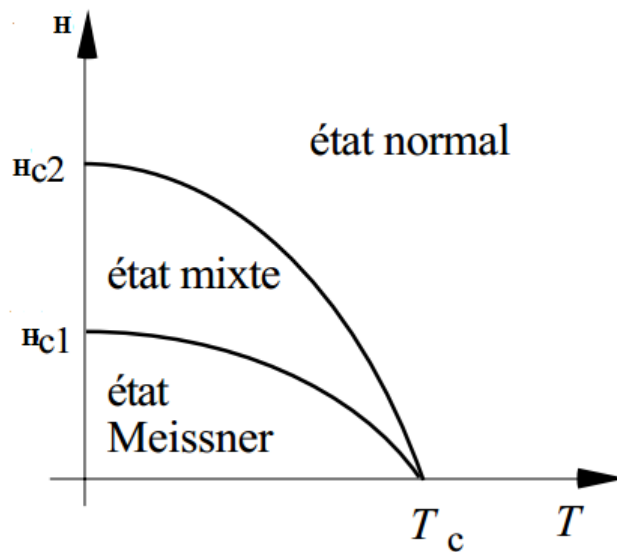


FIGURE 1.7 – Supraconducteur de deuxième espèce

1.4.3 Longueurs caractéristique des supraconducteurs :

Longueur de pénétration

La profondeur de pénétration λ , dite longueur de London, définit la longueur sur laquelle l'induction magnétique peut varier dans un matériau supraconducteur. Sa valeur algébrique est comprise entre quelques dizaines et quelques centaines de nanomètres (voir la section 2.2.1).

Longueur de cohérence

La longueur de cohérence ξ représente la dimension spatiale d'une paire de Cooper (supraconductrice), c'est-à-dire la longueur minimale sur laquelle la supraconductivité peut varier jusqu'à disparaître. Les paires de Cooper ont des dimensions réduites dans les supraconducteurs à haute température critique SHTC, où ξ est comparable aux grandeurs caractéristiques du réseau cristallin (quelques nanomètres)(voir la section 3.2.

1.4.4 Classification des supraconducteurs

Le rapport entre les deux longueurs caractéristiques λ et ξ est égale à :

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \quad (1.5)$$

La quantité κ est appelée **paramètre de Ginzburg-Landau**. Elle joue un rôle fondamental dans le calcul de l'énergie de surface. On peut montrer en effet que cette énergie est positive si $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et est négative si $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est ce critère qui permet de faire une distinction précise entre les supraconducteurs de types I et II.

- Si $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$, le supraconducteur est de type I
- Si $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$, le supraconducteur est de type II

1.4.5 Détails sur le type II

Les Vortex dans l'état mixte

La pénétration du flux se fait par des zones "normales" cylindriques, parallèles au champ magnétique appliqué; ces zones ont un axe ou "cœur" à l'état normal. Ces cœurs sont arrangés régulièrement dans une configuration triangulaire.

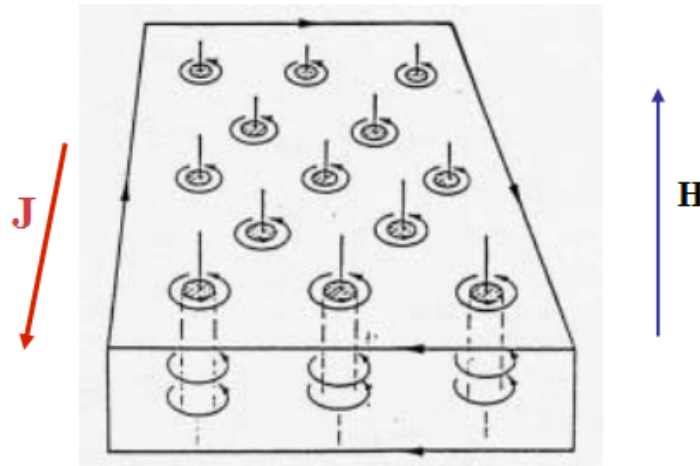


FIGURE 1.8 – Disposition de cœurs "normaux" dans le supraconducteur

Les cœurs sont encerclés par des courants supraconducteurs qui écrantent le champ dans la partie qui reste du supraconducteur. Ces courants forment ainsi des "tourbillons" ou "vortex".

Au fur et à mesure que l'on élève le champ extérieur, les vortex se rapprochent. Il existe une valeur de champ pour lequel les zones normales se touchent. A ce moment, le flux magnétique pénètre complètement le matériau => fin de l'état supraconducteur ! [7] [5]

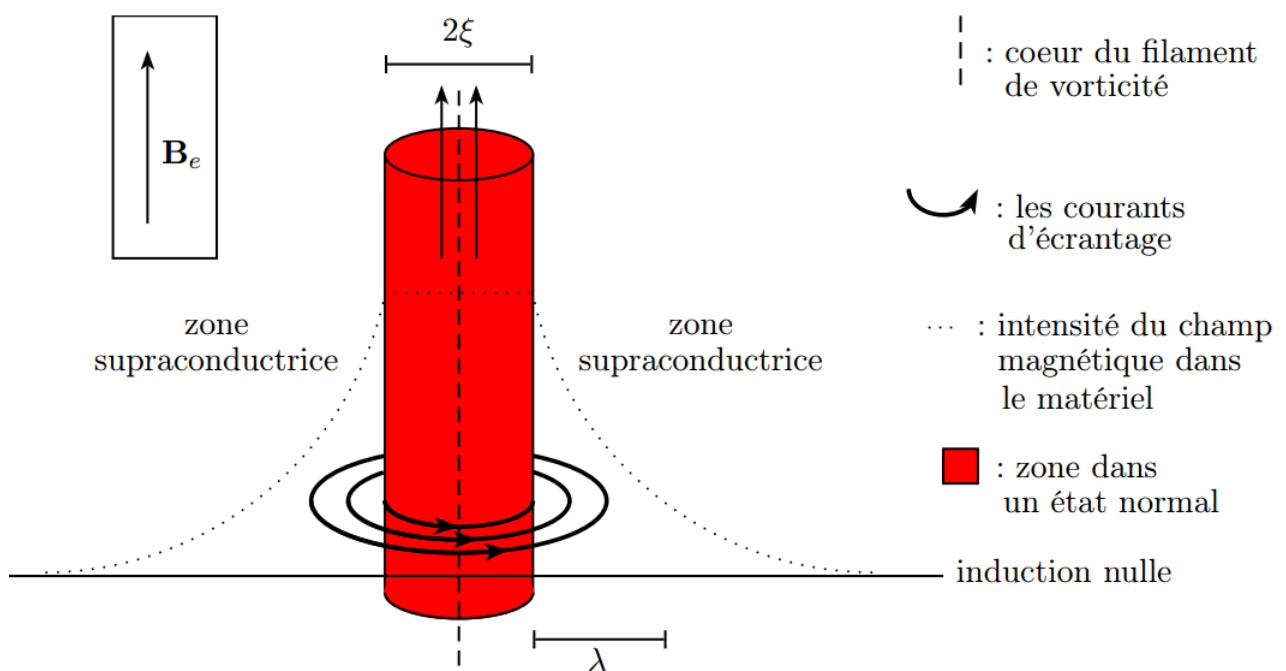
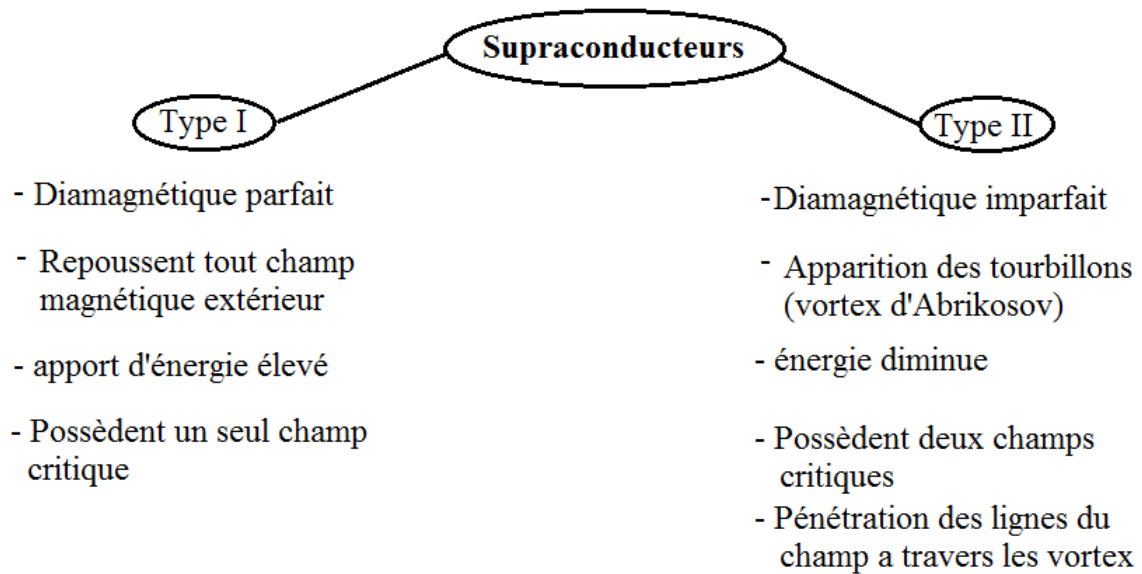


FIGURE 1.9 – Représentation d'un filament de vortécité mettant en évidence la longueur de pénétration λ , la longueur de cohérence ξ et les courants d'écrantage.



1.5 Applications des supraconducteurs

La supraconductivité a des applications industrielles dans plusieurs domaines, tels que le domaine médical, lévitation magnétique, le stockage d'énergie électrique...

1.5.1 Le domaine médicale

L'Imagerie par Résonance Magnétique, dite IRM, a révolutionné la médecine moderne en permettant de « voir » dans le corps humain, sans aucun effet néfaste contrairement à la plupart des autres méthodes comme le scanner à rayons X. L'IRM consiste à se servir des petits aimants que possèdent les noyaux des atomes du corps humain pour visualiser ce qui les entoure (le cerveau, les muscles...). Pour cela, il faut d'abord aligner ces aimants grâce à un champ magnétique dans lequel on place le patient. Plus grand est le champ, meilleure sera l'image. Pour produire ces champs, il faut faire passer un fort courant électrique dans une bobine de plusieurs milliers de tours de fil. Si on utilise des fils de métal, du cuivre par exemple, ils vont tellement s'échauffer qu'ils finiront par fondre. Voilà pourquoi dans toutes les IRM, la bobine est fabriquée avec du fil supraconducteur plongé dans un liquide très froid comme l'hélium.



FIGURE 1.10 – scanner médical

1.5.2 Les électro-aimants

La réalisation d'électro-aimants supraconducteurs constitue certainement l'application la plus courante de la supraconductivité. On les retrouve dans beaucoup de domaines. Un électroaimant est un organe électrotechnique produisant un champ électromagnétique lorsqu'il est alimenté en électricité. Il est constitué d'un bobinage et souvent d'une pièce en matériau ferromagnétique doux appelé circuit magnétique. Quand le bobinage est parcouru par un courant, il crée un champ magnétique canalisé par le circuit magnétique. La forme donnée au circuit magnétique permet, soit de concentrer l'effet du champ magnétique, soit de le canaliser.

L'électroaimant joue le rôle d'un aimant, mais il est commandé par la présence ou non du courant. Il est utilisé soit pour produire une force électromagnétique soit pour produire un champ magnétique contrôlé en une région de l'espace. L'électro-aimant fait souvent partie d'un ensemble électrique (moteur électrique, générateur, radio, télévision, magnétophone, magnétoscope, disque dur, machines diverses). Dans les moteurs et les générateurs, il est utilisé pour créer un champ électromagnétique que l'on peut contrôler.

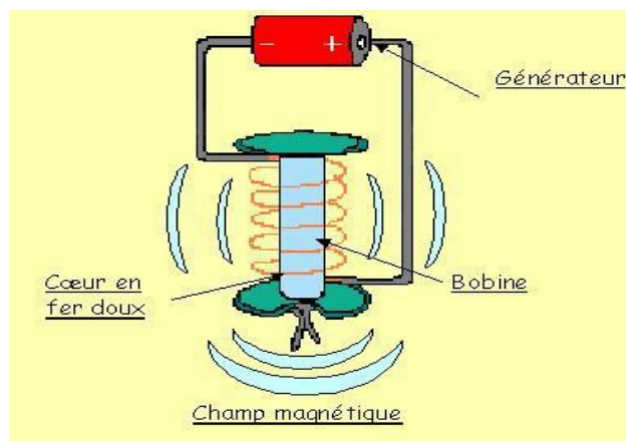


FIGURE 1.11 – Schéma d'un électroaimant

1.5.3 Le domaine de transport

Le train le plus rapide au monde est japonais, il ne touche pas les rails et il utilise des supraconducteurs ! En effet ce train lévite à plusieurs centimètres au-dessus de ses rails grâce à une technologie utilisant de puissants champs magnétiques, créés par des bobines supraconductrices placées et refroidies à bord du train.

Les wagons y roulent régulièrement à 500 km/h avec des passagers, et le record de vitesse de 581 km/h obtenu en 2003 dépasse celui du TGV.

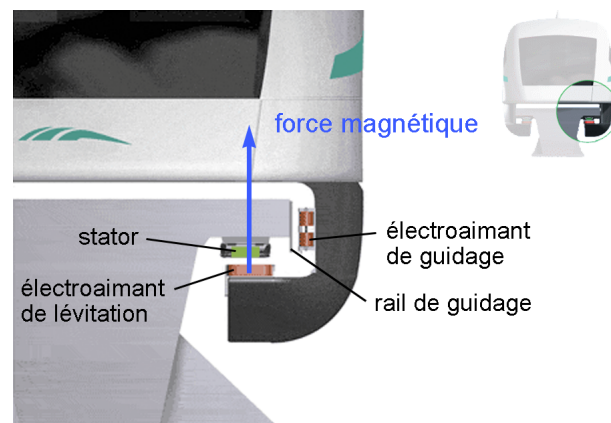


FIGURE 1.12 – Train à lévitation magnétique

1.5.4 Transport du courant électrique

L'électricité est devenue une source d'énergie incontournable dans notre vie moderne. Les câbles électriques actuels ne peuvent cependant transporter que des courants limités sous peine de trop chauffer et de fondre. Un réseau de câbles supraconducteurs permettrait de résoudre ce problème car on peut y faire circuler 10000 fois plus de courant électrique : des câbles plus petits pour plus de courant.

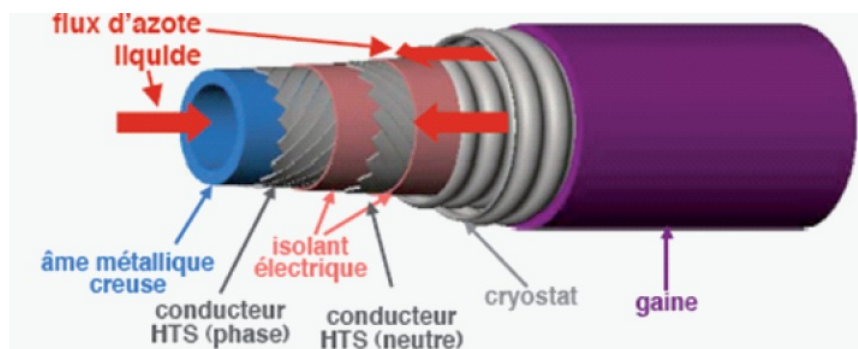


FIGURE 1.13 – schéma de câbles supraconducteurs

1.5.5 Conservation de l'énergie

Il est actuellement impossible de stocker de l'électricité pour une longue durée, car celle-ci doit être consommée très rapidement pour ne pas disparaître, c'est-à-dire dans la seconde qui suit sa production. Il pourrait être avantageux de conserver cette électricité afin de

l'utiliser postérieurement, par exemple lors d'excès de productions qui sont irrémédiablement perdus.

Le système de conservation, très simple, consiste en un anneau supraconducteur refroidi par de l'hélium liquide, et dans lequel on injecte le courant. On ferme ensuite le circuit et le courant se retrouve ainsi en circulation indéfiniment du fait qu'il n'y a aucune perte sous forme de chaleur. Revenez un an après la manipulation et vous constaterez que l'intensité du courant n'a pas bougé. Il faudra au pire revenir plus tôt et régulièrement afin de maintenir le niveau d'hélium liquide nécessaire au bon refroidissement du circuit.

1.6 Conclusion

Les matériaux supraconducteur sont caractérisés par des grandeurs magnétique et thermiques critique, chacun de ces derniers, ont des propriétés remarquable qui rendent leur utilisation envisageable dans diverse domaine d'application industriel, et surtout en électrotechnique.

Dans la deuxième partie on va étudier le comportement théorique associé au phénomène de la supraconductivité qui a été atteinte à différents niveaux. Après un rappel des équations de Maxwell nous attaquons des résultats importants décrits par des équations phénoménologiques : les équations de London et les équations de Ginzburg-Landau.

Chapitre 2

Théorie de F. et H. London

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques sont régis par les équations de Maxwell et les équations caractéristiques du milieu à étudier [7] [8].

2.1 Rappel des équations de Maxwell

2.1.1 Équations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell relient les champs électrique $\mathbf{e}$ et magnétique $\mathbf{b}$ aux sources de champs, la densité de charge ρ et la densité de courant j .
 ϵ_0 est la perméabilité du vide [9] [10]

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = \frac{-\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mu_0(j + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}) \quad (2.4)$$

où $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$, c est la vitesse de la lumière.

Considérant un morceau de matière "macroscopique", c'est à dire comportant un grand nombre d'atome. Les champs e et b , solutions des équations de Maxwell, sont des fonctions de la position qui varient beaucoup à l'échelle "microscopique" c'est à dire sur des distances interparticulaires.

Si l'on cherche à connaître l'état électrique et magnétique du morceau de matière considéré, on a rarement besoin de connaître la répartition détaillée de e et b à l'échelle interparticulaire. On sera par conséquent amené à utiliser des valeurs moyennes de ces grandeurs,

la moyenne étant d"finie sur un élément de volume ΔV englobant un nombre d'atome suffisamment grand pour que la moyenne ait un sens. On définit ainsi un "champ" électrique macroscopique" $\mathbf{E}$ et une "induction magnétique macroscopique" $\mathbf{H}$, tels que :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{e}(r) dr \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{b}(r) dr \quad (2.6)$$

On peut montrer que les équations de Maxwell 2.1 à 2.4 se conservent en moyenne, c'est à dire qu'en posant

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho(r) dr \quad (2.7)$$

$$\bar{j} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} j(r) dr \quad (2.8)$$

On obtient

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.10)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\bar{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \quad (2.11)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.12)$$

Ce système d'équation macroscopiques est valable dans tous les milieux.

2.1.2 Polarisation électrique et induction électrique

Il existe des milieux où sous l'influence d'un champ électrique appliqué extérieurement, il peut apparaître une densité moyenne ρ de charges "de polarisation". Ces milieux sont appelés diélectriques [10].

Dans ces milieux, on considère la densité moyenne de charges totale $\bar{\rho}$ comme la somme de la densité de charge de polarisation d'une part et de la densité de charges apportées de l'extérieur d'autre part, et l'on pose :

$$\bar{\rho} = \rho_p + \rho_{ext} \quad (2.13)$$

L'équation 2.9 étant linéaire, les deux équations 2.9 et 2.13 sont équivalentes à :

$$-\text{div } P = \rho_p \quad (2.14)$$

$$\text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E} + P) = \rho_{ext} \quad (2.15)$$

où P défini par 2.14 est appelé "polarisation électrique" du milieu considéré.

Le vecteur $\epsilon_0 \mathbf{E} + P$ est appelé induction électrique, et l'équation 2.15 s'écrit :

$$\text{div } D = \rho_{ext} \quad (2.16)$$

ρ_{ext} noté dorénavant ρ

2.1.3 Densité d'aimantation et induction magnétique

L'équation de conservation de la charge électrique s'écrit :

$$\operatorname{div} \bar{j} = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho_p}{\partial t} \quad (2.17)$$

D'après 2.11 on déduit :

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.18)$$

L'équation de conservation s'écrit pour les charges extérieures de densité ρ

$$\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.19)$$

où j est la densité de courant des charges apportées de l'extérieur au petit volume de matière envisagé. On a donc

$$\operatorname{div} \left(\operatorname{rot} \frac{\mathbf{H}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \left(j + \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (2.20)$$

Et par intégration, puisque $\operatorname{div}(\operatorname{rot}) = 0$

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = j + \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{rot} M \quad (2.21)$$

Le vecteur M est appelé "densité d'aimantation" (c'est la magnétisation défini dans le premier chapitre) du milieu considéré.

La comparaison des équations 2.11 et 2.21 montre que

$$\bar{j} = j + \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{rot} M \quad (2.22)$$

Examinons de près de cette relation. Elle signifie que la densité de courant microscopique moyenne est somme :

- du terme j , qui est la densité du courant électrique usuel, c'est à dire du courant produit par les charges apportées "de l'extérieur" au petit morceau de matière considéré.
- du terme $\frac{\partial P}{\partial t}$, ou "densité de courant de déplacements", qui n'est non nul qu'au moment des changement temporels de la polarisation électrique.
- du terme $\operatorname{rot} M$, ou "densité des courants ampériens" ; les calculs que nous avons fait montrent qu'aucune densité volumique de charge n'est associée aux courants ampériens.

L'équation 2.21 s'écrit alors :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - M \right) = j + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + P) = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.23)$$

On pose $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - M = \mathbf{H}$ le champ magnétique

L'équation 2.23 s'écrit alors

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.24)$$

2.1.4 Équations de Maxwell dans les milieux et lois de comportement

Dans la matière les équations de Maxwell (S.I) s'écrivent

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (2.25)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.26)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = j + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.28)$$

Lorsqu'on utilise ces équations, on considère les milieux comme continue et régis par des lois de comportement macroscopiques. Ces lois sont traduites par des relations entre les grandeurs macroscopiques $(\mathbf{H}, \mathbf{B}, D, \mathbf{E}, \rho, j)$.

Ainsi les milieux électriques sont caractérisés par des lois $D(\mathbf{E})$, les milieux magnétiques par des lois $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, les milieux conducteurs par des lois $j(\mathbf{E})$, etc... Alors que les équations de Maxwell sont valables dans tous les milieux, les équations décrivant les lois de comportement ne sont valables que dans le milieu considéré [10] [9].

On peut ajouter à ces équations électromagnétique une autre équation phénoménologique appelé équation de London.

2.2 Modèle de Fritz et Heinz London

La première théorie pour d'écrire l'état supraconducteur a été proposée par les frères London en 1935 et a été conçue pour expliquer le comportement électromagnétique des supraconducteurs. De nature phénoménologique, elle consistait à utiliser le système de Maxwell pour décrire l'effet Meissner à travers la frontière d'un supraconducteur. [10] [7] [8]

2.2.1 Équation de London

On note le supercourant ¹ par J_s . L'équation de Maxwell à l'intérieur du supraconducteur $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est de la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} J_s = \mu_0 J_s \quad (2.29)$$

L'énergie libre du système est de la forme

$$F = F_s + E_{cin} + E_{mag} \quad (2.30)$$

où F_s est l'énergie des électrons dans l'état condensé au repos. E_{cin} est l'énergie cinétique associée aux courants permanents :

$$n_s e v(r) = J_s(r), \quad \text{pour tout } r \in \Omega \quad (2.31)$$

1. Le terme "supercourant" est utilisé parce que le courant est produit sans la présence d'une différence de potentiel (électricité)

où e est la charge de l'électron, n_s est le nombre d'électrons supraconducteurs par unité de volume et v est la vitesse des porteurs de charge. Si nous supposons que $v(r)$ varie très lentement (presque une constante), nous avons

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m n_s v^2 dr = \frac{1}{2\mu_0} \lambda_L^2 \int_{\Omega} |rot \mathbf{B}|^2 dr \quad (2.32)$$

où m est la masse effective des électrons. λ_L est appelée **profondeur de pénétration** est définie par

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \quad (2.33)$$

Vérifions rapidement qu'elle a bien une unité de longueur. On a : m en M , μ_0 en $M.L.C^{-2}$, q en C et n en L^{-3}

$$[\lambda_L^2] = \frac{M}{M.L.C^{-2}C^2L^{-3}} = L^2$$

E_{mag} est l'énergie magnétique :

$$E_{mag} = \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 dr \quad (2.34)$$

Donc l'énergie libre s'écrit

$$F = F_s + \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} (\mathbf{B}^2 + \lambda_L^2 |rot \mathbf{B}|^2) dr \quad (2.35)$$

Si l'on suppose que F_s est une constante, L'énergie totale est minimale pour le profil réel $\mathbf{B}^*(r)$ du champ magnétique. La variation δF au premier ordre est donc nulle si le profil $\mathbf{B}(r)$ s'écarte du profil réel d'une quantité infinitésimale $\delta \mathbf{B}(r)$:

$$\delta F(\mathbf{B}) = \frac{1}{2\mu_0} \int [2\mathbf{B} \delta \mathbf{B} + 2\lambda_L^2 rot \mathbf{B} \delta(rot \mathbf{B})] dr$$

En utilisant $\delta rot \mathbf{B} = rot \delta \mathbf{B}$ et $rot \mathbf{B} rot \delta \mathbf{B} = rot rot \mathbf{B} \delta \mathbf{B}$ obtenu en intégrant par partie dans l'hypothèse où $\delta \mathbf{B}$ s'annule au limites du domaine d'intégration, on obtient :

$$\delta F(\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \int [\mathbf{B} + \lambda_L^2 rot rot \mathbf{B}] \delta \mathbf{B} dr = 0$$

On en déduit la seconde équation des frères London :

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 rot rot \mathbf{B} = 0 \quad (2.36)$$

comme on a

$$rot(rot \mathbf{B}) = grad(div \mathbf{B}) - div(grad \mathbf{B}) = grad(div \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B}$$

Et comme $\mathbf{B}$ est le champ magnétique il doit satisfaire l'équation (équation de Maxwell)

$$div \mathbf{B} = 0 \quad (2.37)$$

Donc on peut écrire l'équation sous la forme :

$$\boxed{\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0} \quad (2.38)$$

2.2.2 Résolution

On choisit un système d'axe tel que pour $x > 0$ on se trouve dans supraconducteur et que pour $x < 0$ nous nous trouvons dans le vide. On applique un champ magnétique extérieur selon l'axe Oz qui ne varie spatialement que selon Ox , l'équation de London s'écrit à une dimension

$$\frac{d^2 \mathbf{B}}{dx^2} = \frac{\mathbf{B}(x)}{\lambda_L^2} \quad (2.39)$$

Avec conditions aux limites : à $x = 0 \Rightarrow B(0) = B_{ex}$ et à $x \rightarrow \infty \Rightarrow B(\infty) = 0$ (effet Meissner)

Cette équation admet pour solution

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_0 e^{-x/\lambda_L}$$

La solution nous dit que $\mathbf{B}$ décroît exponentiellement à l'intérieur du supraconducteur sur l'échelle de longueur λ_L , figure 2.1. Ceci est la raison pour laquelle λ_L est appelée la profondeur de pénétration. On constate que l'équation de London red bien compte de l'expulsion du champ magnétique par le supraconducteur.

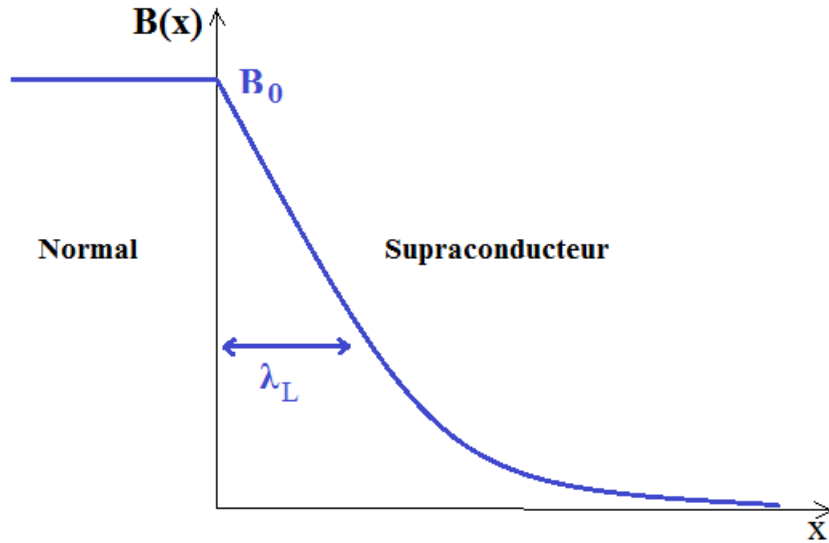


FIGURE 2.1 – Profil du champ magnétique dans un supraconducteur

L'équation de Maxwell 2.29 dans ce cas s'écrit :

$$J_s = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B(x) \end{vmatrix} = \frac{c}{4\pi} (0, -\frac{\partial}{\partial x} B(x), 0) \quad (2.40)$$

Le courant J_s est suivant la direction y

$$J_{sy} = \frac{cB_0}{4\pi\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda_L}} \quad (2.41)$$

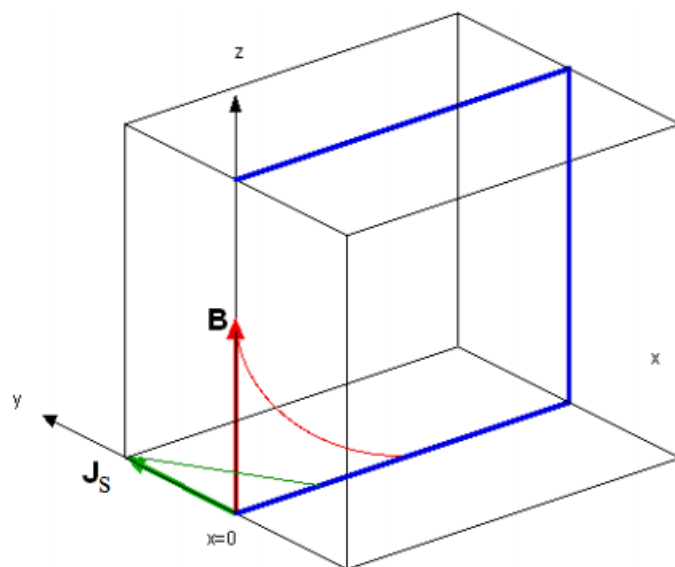


FIGURE 2.2 – Distribution d'induction magnétique $\mathbf{B}(x)$ (suivant l'axe z), et la densité de supercourant (suivant l'axe y)

Chapitre 3

Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau

Introduction

Dans ce chapitre on va étudier la partie principale de notre travail, en commençant par un rappel des propriétés thermodynamique et thermique des supraconducteurs telles que l'énergie libre et l'équation de la chaleur diffusion, puis nous dérivons les équations de Ginzburg-Landau caractérisant l'état supraconducteur par un paramètre d'ordre.

La théorie de GINZBURG-LANDAU est une description phénoménologique de l'état supraconducteur, elle est directement issue de la théorie générale des transitions de phase de LANDAU, cette théorie a été proposée par GINZBURG et LANDAU pour la description des principaux faits expérimentaux relatif au phénomène de supraconductivité [11], [12], [1]. Pour mieux comprendre cette théorie on va commencer par rappeler la théorie des transitions de phase de LANDAU [11] [2].

3.1 Thermodynamique des supraconducteurs

Dans l'optique d'une formulation théorique de la supraconductivité, un premier problème qui se pose est celui de la validité d'une description thermodynamique pour ce phénomène. Comme on va le voir, la question n'est pas triviale. En effet, si l'on suppose simplement qu'un supraconducteur est un conducteur parfait, on peut déduire des lois de l'électromagnétisme que toute modification de champ extérieur sera écrantée par des courants induits. Cette simple hypothèse n'est pas suffisante, car alors un seul point du diagramme de phases $(\mathbf{H}, T)$ ¹ peut correspondre à plusieurs états différents du système. Pour illustrer ceci, reprenons le diagramme donné en figure 1.6, et modifions le système d'un "état" A à un "état" D (figure 3.1)

1. On néglige dans toute cette discussion les dépendances de la troisième variable thermodynamique naturelle qu'est la pression.

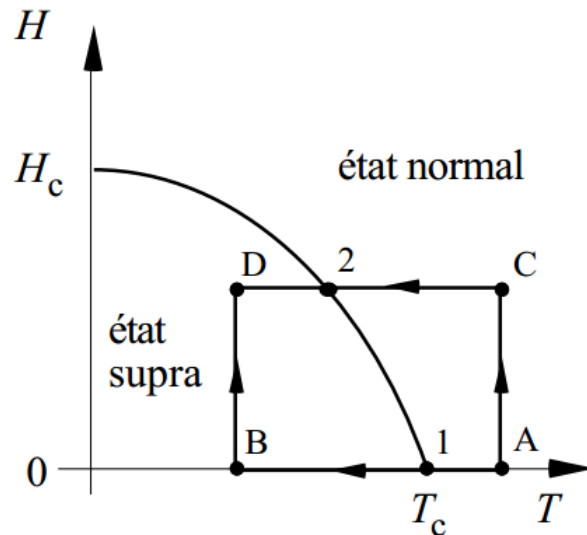


FIGURE 3.1 – Deux chemins menant d'un état normal en champ nul (A) à un état supraconducteur en champ non nul (D). Sans l'effet Meissner, ces deux chemins conduiraient à deux états différents en D.

Si la transition "état normal - état supraconducteur" a lieu en champ nul, on se retrouve bien sûr au point B avec un champ nul à l'intérieur de l'échantillon. Ensuite, même si un champ extérieur est appliqué (en allant par exemple au point D), l'écrantage assuré par l'absence de résistivité maintiendra le champ interne nul. Par contre, si un champ extérieur est appliqué avant la transition, il pénètre entièrement l'échantillon, et n'est par la suite plus écranté. Ainsi, le chemin qui mène de A à D en passant par C termine avec un état en D dans lequel le champ interne est égal au champ appliqué.

Par conséquent, on s'aperçoit que l'effet Meissner, soit l'expulsion totale du champ magnétique au moment de la transition (au point 2 de la figure 4), ne découle pas de la résistivité nulle. Son existence assure la validité d'une théorie thermodynamique de la supraconductivité

En présence d'un champ magnétique l'énergie libre d'un matériau s'abaisse s'il est paramagnétique ou augmente s'il est diamagnétique, l'expulsion d'un champ magnétique par un supraconducteur correspond à un accroissement de son énergie libre.

Pour d'écrire la transition "normale-supraconducteur" nous allons employer surtout :

L'énergie libre $\mathcal{G}(T, \mathbf{H})$

L'énergie interne $\mathcal{U}(S, \mathbf{H})$

où S est l'entropie.

3.1.1 L'énergie libre

Dans le traitement de l'état supraconducteur il est pratique d'utiliser l'énergie libre parce que l'état de supraconductivité est toujours l'état de la plus faible énergie libre à une température particulière. et les énergie libres des états normale et supraconducteur sont égale à la température de transition.

Nous allons utiliser l'énergie libre de Helmholtz

$$\mathcal{F}(T, V, M) = \mathcal{F}(T, M)$$

Il existe un autre sorte d'énergie libre (Gibbs)

$$\mathcal{G}(T, p, \mathbf{H}) = \mathcal{G}(T, \mathbf{H})$$

où les variables p et V sont omis car les effets de (pression, volume) sont négligeable pour les SC.

$M(T, \mathbf{H}) = M$ est la magnétisation (elle est produite par $\mathbf{H}$)

Nous serons consacrés par un champ magnétique appliqué constant au lieu d'une magnétisation constante, donc il est pratique de travailler avec l'enthalpie $\mathcal{H}$ au lieu de l'énergie interne $\mathcal{U}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{U} - \mathbf{H}.M \quad (3.1)$$

avec la différentielle :

$$d\mathcal{H} = TdS - M.d\mathbf{H} \quad (3.2)$$

La seconde loi de la thermodynamique nous permet de remplacer TdS par CdT pour un processus réversible (où C est la chaleur spécifique $CdT = TdS$) Alors

$$d\mathcal{H} = CdT - M.d\mathbf{H} \quad (3.3)$$

finalement l'expression de l'énergie libre de Gibbs est

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} - TdS = \mathcal{U} - TS - \mathbf{H}.M \quad (3.4)$$

implique

$$d\mathcal{G} = d\mathcal{U} - TdS - SdT - \mathbf{H}dM - M.d\mathbf{H} \quad (3.5)$$

En tenant compte de l'équation 4 il vient :

$$d\mathcal{G} = TdS + \mathbf{H}.dM - TdS - SdT - SdT - \mathbf{H}dM - M.d\mathbf{H}$$

soit donc

$$d\mathcal{G} = -SdT - M.d\mathbf{H} \quad (3.6)$$

En supposant des conditions isothermes ($dT = 0$)

$$d\mathcal{G} = -M.d\mathbf{H} \quad (3.7)$$

et examinant sa dépendant en champ magnétique dans les états supraconducteur et normal.

En traitant le cas du supraconducteur de type I, qui a la magnétisation est donnée par $M = -\frac{1}{\mu_0}\mathbf{H}$, l'équation 3.6 devient

$$d\mathcal{G}_s = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{H}d\mathbf{H} \quad (3.8)$$

En intégrant l'équation de $\mathbf{H} = 0$ à un champ $\mathbf{H}$ on obtient :

$$\mathcal{G}_s(T, \mathbf{H}) = \mathcal{G}_s(T, 0) + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{H}^2 \quad (3.9)$$

avec ,bien sur, la densité d'énergie magnétique $\frac{\mathbf{H}^2}{2\mu_0}$ est indépendante de la température T . Quand le champ magnétique appliqué $\mathbf{H}$ est égal à le champ critique $\mathbf{H}_c(T)$ pour une température particulière $T \prec T_c$, l'énergie libre devient

$$\mathcal{G}_s(T, \mathbf{H}_c(T)) = \mathcal{G}_s(T, 0) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{H}_c(T)^2 \quad (3.10)$$

En rappelant qu'à la transition, par définition, les énergie libres des deux phases sont égale, ie $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n$ nous avons donc

$$\mathcal{G}_n(T) = \mathcal{G}_s(T, 0) + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{H}_c(T)^2 \quad (3.11)$$

où $\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{H}_c(T)^2$ est la densité d'énergie magnétique associé avec le champ critique, et d'après l'état normale, $\mathcal{G}_n(T, \mathbf{H}) = \mathcal{G}_n(T)$ c-à-d $\mathcal{G}_n(T)$ ne dépend pas du champ $\mathbf{H}$ (c'est l'approche que propose la référence [2])

Nous soustrayons l'équation 3.9 de l'équation 3.11, on obtient

$$\mathcal{G}_s(T, \mathbf{H}) = \mathcal{G}_n(T) - \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{H}_c(T)^2 - \mathbf{H}^2) \quad (3.12)$$

où $\mathbf{H} \prec \mathbf{H}_c(T)$

Dans l'absence d'un champ appliqué l'équation 3.12 devient

$$\mathcal{G}_s(T, 0) = \mathcal{G}_n(T) - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{H}_c(T)^2 \quad (3.13)$$

Donc l'énergie libre de Gibbs dans l'état supraconducteur dépend de la valeur du champ critique à cette température

Nous pouvons également écrire les résultats ci-dessus en termes de la famille de l'énergie libre de Helmholtz, utilisant

$$\mathcal{F}(T, M) = \mathcal{U} - TS \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G}(T, \mathbf{H}) = \mathcal{U} - TS - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \quad (3.15)$$

implique

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{M} \quad (3.16)$$

et substituant $\mathbf{H} = M = 0$

Nous pouvons voir que la différence dans les énergies libres de Helmholtz $\mathcal{F}(T, M)$ est la même pour les potentiels de Gibbs, et par conséquent

$$\mathcal{F}_s(T, 0) - \mathcal{F}_n(T, 0) = -\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{H}_c(T)^2 \quad (3.17)$$

La quantité $\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{H}_c(T)^2$ est l'énergie de condensation.

On va utiliser ces énergies dans la section suivante pour définir la densité d'énergie libre de Ginzburg-Landau, en ajoutant une énergie lié variation de la fonction d'onde des électrons supraconducteurs

3.2 Modèle macroscopique de Ginzburg-Landau

La théorie de Ginzburg-Landau de la supraconductivité repose sur une approche générale de la théorie de transition de phase de seconde ordre que Landau avait développé en 1930. Landau avait remarqué typiquement que les transitions de phase de second ordre, tels que la température de Curie dans un matériau ferromagnétique, impliquent un certain changement dans la symétrie du système. Par exemple un aimant au-dessus de la température de Curie, T_C , a aucun moment magnétique. Mais au-dessous de T_C un moment magnétique spontané se développe. Dans la théorie de Landau, ces transitions de phase sont caractérisés par un **paramètre d'ordre** qui a zéro à l'état désordonné au-dessus de T_C , mais devient non nul au-dessous de T_C . Par exemple dans le cas d'un aimant l'aimantation $M(x)$ est un paramètre d'ordre approprié.

Pour la supraconductivité Ginzburg et Landau (GL) postulé l'existence d'un paramètre d'ordre notée ψ . Ceci caractérise l'état supraconducteur, de la même manière que l'aimantation fait dans un corps ferromagnétique. Dans l'état métallique normale au-dessus de la température critique T_c du supraconducteur, il est égal à zéro. Alors que dans l'état supraconducteur au-dessous de T_c , il est non nul.

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ \psi(T) \neq 0 & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

L'idée géniale de Ginzburg et Landau a été de décrire la transition supraconductrice à l'aide d'une pseudo-fonction d'onde complexe comme paramètre d'ordre :

$$\psi(x) = |\psi(x)|e^{i\theta} \quad (3.18)$$

Ils ont choisi la densité de superélectrons comme définition du carré de la norme du paramètre d'ordre

$$n_s = |\psi|^2 \quad (3.19)$$

Avant d'écrire les équation de Ginzburg-Landau, rappelant d'abord un petit peu sur la théorie de base de Landau sur la transition supraconducteur.

3.2.1 La théorie de Landau des transitions de phase

L'idée de base de Landau est de considérer la transition de phase comme un changement d'ordre du système (passage ordonné $\longleftrightarrow$ désordonné). Comme exemple, considérons un système magnétique à trois dimensions constitué d'un réseau de dipôles magnétiques. Si l'interaction entre ces dipôles est ferromagnétique, ces derniers tendent alors à s'aligner. En particulier, à la température absolue $T = 0\text{K}$, ils pointent tous dans la même direction. Quand la température augmente, l'agitation thermique engendre une perte d'orientation de certains dipôles. Thermodynamiquement, à une température finie T , le système tend à minimiser l'énergie libre de Helmholtz [3] [5]

$$F = U - TS$$

Pour $T > 0$, certains spins s'orientent différemment de telle sorte qu'ils augmentent à la fois U et S , mais minimisent F . On peut définir pour ce système un paramètre d'ordre ψ , égal à la fraction,

$$\psi = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-} \quad (3.20)$$

où respectivement n_+ et n_- sont les nombres de spins ² "up" et "down". A $T = 0$, choisissons n_- nul (arbitraire), et donc $\psi = 1$. Quand T augmente, ψ décroît et devient nul à une certaine température critique T_c . Au delà, dans la phase paramagnétique, $n_+ = n_-$ et $\psi = 0$. Cette dépendance en température est assez générale dans des systèmes accompagnant un changement de phase. Le paramètre d'ordre dans le cas de la supraconductivité sera associé à la densité de paires de Cooper. Le tableau 3.2.1 illustre cette suggestion par d'autres exemples.

Phénomène	Paramètre d'ordre	Exemple	T_c
Ferromagnétisme	moments magnétiques	fer	1044 K
Liquide-gaz	volume molaire	eau (22.1 MPa)	647.05 K
Superfluidité	densité de superfluide	Hélium	2.1 K
supraconductivité	densité de paires de Cooper	plomb	7.19 K

TABLE 3.1 – Exemples de transitions du second ordre, caractérisées par leur paramètre d'ordre et leur température de transition

Landau peut construire une expression de la densité d'énergie libre de l'état supraconducteur f_s à partir de celle de l'état normal f_n et autre densité d'énergie liée au paramètre d'ordre $f_{|\psi|}$ au voisinage de T_c et on écrit :

$$f_s = f_n + f_{|\psi|} \quad (3.21)$$

En outre, puisque ψ tend vers zéro à la température critique, T_c , nous pouvons étendre l'énergie libre liée au paramètre d'ordre en puissances de $|\psi|$.

$$f_{|\psi|} = a_1|\psi| + a_2|\psi|^2 + \dots + a_n|\psi|^n \quad (3.22)$$

La théorie de Landau étudie les transitions proche de la température critique T_c c'est-à-dire quand ψ est petit. l'état stable est celui qui minimise l'énergie libre permettant d'écrire la densité d'énergie libre sous la forme :

$$f_s = f_n + \lambda|\psi| + \alpha(T)|\psi|^2 + \gamma|\psi|^3 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 \quad (3.23)$$

puisque ψ est petit autour de T_c . Cette description ne peut évidemment pas généraliser tous les phénomènes de transition, mais cela fonctionne dans le cas de la supraconductivité.

La deuxième hypothèse importante de Landau est de supposer que tous les coefficients peuvent être développés en puissance de $T - T_c$. considérant une simplification de l'énergie libre 3.23 comme suit :

premièrement, la condition d'équilibre

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0 \quad (3.24)$$

2. Le spin de l'électron est une sorte de minuscule aimant qui peut s'orienter soit vers le haut, soit vers le bas (états "up" et "down"). Dans un matériau aimanté, le déplacement d'un électron va dépendre fortement de l'orientation du spin de l'électron par rapport à l'aimantation du matériau

impose que dans la phase normale, le paramètre λ soit nul pour atteindre un minimum quand $\psi = 0$, à $T > T_c$. Comme on suppose que les coefficients ne dépendent que de la température relative $T - T_c$, λ doit être nul pour tout T .

Deuxièmement, comme dans la plupart des systèmes présentant des propriétés telles que la supraconductivité, la superfluidité ou le ferromagnétisme, le terme impair ψ^3 n'intervient pas. A titre d'exemple, dans le ferromagnétisme, la valeur de l'énergie libre doit évidemment être indépendante de l'orientation initiale "up" ($\psi = +1$ dans 3.20) ou "down" ($\psi = -1$) des moments magnétiques. Par conséquent, conserver ce terme cubique violerait cette assertion.

On peut donc maintenant simplifier significativement 3.23

$$f_s = f_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 \quad (3.25)$$

Solutions uniforme

La solution de ces équations dans des cas limites simples importants va nous permettre de mettre en évidence des aspects qualitatifs fondamentaux.

L'énergie libre 3.25 est donc minimale pour

$$\text{soit } \psi(x) = 0 \quad \text{soit } |\psi|^2 = \frac{-\alpha}{\beta} \quad (= \psi_\infty^2 = n_s)$$

La première solution représente l'état normal puisque alors $f_s \equiv f_n$. La seconde solution n'est physiquement acceptable que si $\frac{\alpha}{\beta}$ est négatif. Elle représente l'état supraconducteur de densité d'énergie libre :

$$f_s = f_n - \frac{\alpha^2}{2\beta} \quad (3.26)$$

Pour définir les dépendances en température de α et β , on veut que $\psi(x) = 0$ soit la seule solution lorsque $T > T_c$, et que $\psi(x) \neq 0$ puisse exister pour $T < T_c$. Ces propriétés peuvent être atteintes si la dépendance de $\frac{\alpha}{\beta}$ est négative pour $T < T_c$, et positive pour $T > T_c$. De plus, β doit rester positif à toutes les températures, sinon f décroîtrait indéfiniment quand ψ augmente. Dès lors, les dépendances en puissance de $T - T_c$ les plus simples sont,

$$\begin{cases} \alpha(T) = \alpha_0(T - T_c) \\ \beta(T) = \beta(T_c) = \beta \end{cases} \quad (3.27)$$

Avec ces définitions de α et β , la solution est,

$$|\psi| = \begin{cases} 0 & \text{pour } T > T_c \\ \left(\frac{\alpha_0}{\beta} (T_c - T) \right)^{\frac{1}{2}} & \text{pour } T < T_c \end{cases} \quad (3.28)$$

Pour terminer, analysons le comportement du minimum de f , f_{min} , obtenu en substituant 3.28 dans l'expression de l'énergie 3.26,

$$f_{min} = \begin{cases} f_n & \text{pour } T > T_c \\ f_n - \frac{1}{2} \frac{\alpha_0^2}{\beta} (T_c - T)^2 & \text{pour } T < T_c \end{cases} \quad (3.29)$$

3.2.2 Densité d'énergie libre de Ginzburg-Landau (GL)

Énergie libre de Helmholtz et de Gibbs

L'analyse qui conduit à l'équation GL peut se faire soit en termes d'énergie libre de Helmholtz ou en termes d'énergie libre de Gibbs. [4]

- (a) Énergie libre de Helmholtz elle est appropriée pour les situations dans lesquelles $\mathbf{B} = \langle \mathbf{H} \rangle$; moyenne macroscopique est maintenue constante au lieu de $\mathbf{H}$, parce que, si $\mathbf{B}$ est constant, il n'y a pas f_{em}^3 induite et aucun apport d'énergie à partir du générateur de courant.
- (b) Énergie libre de Gibbs.

Soit la transformation de Legendre

$$g = f - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

$\mathbf{B}$ est l'induction magnétique (champ magnétique microscopique)

Cas de champ nul

Soit ψ une fonction de la position. L'équation 3.25 peut alors être considérée comme l'expression de la densité d'énergie libre évaluée au point x , et dont l'intégration sur tout l'espace représente l'énergie libre totale. Cette dépendance engendre également un terme "d'énergie cinétique" proportionnel à sa variation spatiale $|\nabla\psi|^2$. La densité d'énergie libre de Helmholtz peut dès lors s'écrire [7]

$$f_s(x) = f_n + \alpha(T)|\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(x)|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2 \quad (3.30)$$

Où $\hbar = 6,62607004 \times 10^{-34} m^2 kg/s$ est la constante de Plank.

La conséquence majeure du terme de gradient dans l'énergie libre est de préserver ψ contre toute variation rapide dans l'espace. Dans le cas contraire, sa contribution en énergie libre serait trop importante et détruirait la phase supraconductrice. Sur le plan dimensionnel, en normalisant ψ par $\psi_\infty = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}$, sa valeur à l'équilibre, (c-à-d posons $u(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_\infty}$) alors (3.30 devient,

$$f_s(x) = f_n + |\psi_\infty|^2 |\alpha| \left(-|u(x)|^2 + \frac{1}{2}|u(x)|^4 + \xi(T)^2 |\nabla u(x)|^2 \right) \quad (3.31)$$

où

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \quad (3.32)$$

représente une **longueur de cohérence**, c'est-à-dire une longueur caractéristique de variation du paramètre d'ordre $u(x) = \frac{\psi(x)}{\psi_\infty}$

Cas de présence du champ magnétique

En présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}(x)$ décrit par un potentiel vecteur $\mathbf{A}(x)$

$$\mathbf{B}(x) = \text{rot}\mathbf{A}(x) \quad (3.33)$$

De façon à préserver l'invariance de jauge du groupe $U(1)$ de l'électromagnétisme, l'expression du gradient dans 3.30 devient celle de la dérivée covariante usuelle,

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla\psi|^2 \longrightarrow \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi \right|^2 \quad (3.34)$$

avec $m^* = 2m$ et $e^* = 2e$ représentant respectivement la masse et la charge d'une paire de Cooper.

De plus, en ajoutant l'énergie de l'induction magnétique, on obtient la densité d'énergie libre de **Helmholtz** en présence d'un champ magnétique :

$$f_s(x) = f_n + \alpha(T) |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \right|^2 + \frac{|\text{rot } \mathbf{A}|^2}{2\mu_0} \quad (3.35)$$

L'énergie libre de Gibbs :

$$g_s(x) = f_n + \alpha(T) |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \right|^2 + \frac{|\text{rot } \mathbf{A}|^2}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (3.36)$$

i) quand $x = -\infty$ (la phase normale)

$$f(-\infty) = f_n + \frac{\mathbf{H}_c^2}{2\mu_0}$$

$$g(-\infty) = g_n = f_n + \frac{\mathbf{H}_c^2}{2\mu_0} - \frac{\mathbf{H}_c^2}{\mu_0} = f_n - \frac{\mathbf{H}_c^2}{2\mu_0} \quad (3.37)$$

ii) quand $x = +\infty$ (la phase supraconductrice)

$$g_s = g_s(\infty) = f_s = f_n + \alpha\psi_\infty^2 + \frac{\beta}{2}\psi_\infty^4 = f_n - \frac{\alpha^2}{2\beta} = f_n - \frac{\mathbf{H}_c^2}{2\mu_0}$$

L'équation 3.36 devient, en ajoutant et soustrayant $\frac{\mathbf{H}^2}{2\mu_0}$ et en utilisant 3.37

$$g_s(x) = f_n + \alpha(T) |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}^2}{2\mu_0} - \frac{\mathbf{H}^2}{2\mu_0}$$

Alors

$$g_s(x) = g_n + \alpha(T) |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \right|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B} - \mathbf{H}|^2 \quad (3.38)$$

Avec $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$

L'énergie libre s'obtient en intégrant la densité volumique d'énergie libre sur le volume du supraconducteur Ω :

$$\mathcal{F}(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} f_s(x) d\Omega = \mathcal{F}_n + \int_{\Omega} \left(\alpha |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{rot} \mathbf{A}|^2}{2\mu_0} \right) d\Omega \quad (3.39)$$

En réexpriment de façon plus développée ⁴ l'équation 3.39 on obtient

$$\mathcal{F}(\psi, \mathbf{A}) = \mathcal{F}_n + \int_{\Omega} \alpha \psi \bar{\psi} + \frac{\beta}{2} \psi \bar{\psi} \psi \bar{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla \psi \nabla \bar{\psi} + \frac{i\hbar e}{m^*} \mathbf{A} \psi \nabla \bar{\psi} - \frac{i\hbar e}{m^*} \mathbf{A} \psi \nabla \bar{\psi} + \frac{2e^2}{m^*} \mathbf{A}^2 \psi \bar{\psi} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} d\Omega \quad (3.40)$$

Il est aussi possible d'étudier l'énergie libre de **Gibbs**, qui prend en compte le champ magnétique appliqué **H** de façon plus explicite.

$$\mathcal{G}(\psi, \mathbf{A}) = \mathcal{G}_n + \int_{\Omega} \left(\alpha |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})\psi \right|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{H}|^2 \right) d\Omega \quad (3.41)$$

Où

$$\mathcal{F}_n = \int_{\Omega} f_n d\Omega$$

et

$$\mathcal{G}_n = \int_{\Omega} g_n d\Omega$$

Les densité d'énergies libre de la phase normale.

3.2.3 Normalisation d'énergie libre de Helmholtz

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$u = \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\psi}{\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \mathcal{A} = \frac{\mathbf{A}}{(\Phi_0/2\pi\lambda)} \quad \mathcal{B} = \frac{\mathbf{B}}{(\Phi_0/2\pi\lambda^2)} \quad \nabla \longrightarrow \lambda \nabla$$

La différence d'énergie libre de Helmholtz $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n$ devient

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right) \int_{\Omega} \mathcal{B}^2 d\Omega + |\alpha| |\psi_0|^2 \int_{\Omega} \left\{ -|u|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha| \lambda^2} \left| (-i\nabla - \frac{2e\Phi_0}{2\pi\hbar} \mathcal{A})u \right|^2 \right\} d\Omega$$

où $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{2e}$ voir section précédente.

En utilisant l'expression de la longueur de cohérence $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|}$ et la longueur de pénétration de G-L $\lambda^2 = \frac{\beta m}{4e^2 \mu_0 |\alpha|}$

$$\Delta\mathcal{F} = \frac{|\alpha| \hbar^2}{2\beta m^* \lambda^2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\beta m}{4e^2 \mu_0 |\alpha| \lambda^2} \mathcal{B}^2 + \left| (-i\nabla - \mathcal{A})u \right|^2 \right\} d\Omega + |\alpha| |\psi_0|^2 \int_{\Omega} \left(-|u|^2 + \frac{1}{2} |u|^4 \right) d\Omega$$

et on a $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$ implique qu'on a $\frac{|\alpha|^2}{\beta \kappa^2} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \right)^2$

La différence d'énergie libre de Ginzburg-Landau dans les variables adimensionnelles se simplifie donc

4. si $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ et $|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2$

$$\Delta \mathcal{F} = \frac{|\alpha|^2}{\beta \kappa} \int_{\Omega} \left\{ \mathcal{B}^2 + |(i\nabla + \mathcal{A})u|^2 + \kappa^2 \left(-|u|^2 + \frac{1}{2}|u|^4 \right) \right\} d\Omega \quad (3.42)$$

Après certaines réduction l'énergie de G-L qui caractérise l'état d'un matériau SC par deux quantité :

- une fonction d'onde $u : \Omega \mapsto \mathbb{C}$
- Un potentiel vecteur du champ magnétique $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

s'écrit donc comme suit

$$\mathcal{F}_{\epsilon}(u, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{B}^2 + |\nabla u - i\mathcal{A}u|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - |u|^2)^2 d\Omega \quad (3.43)$$

avec ϵ est un paramètre qui dépend des propriétés du supraconducteur et de la température ambiante. [ϵ est "grand" pour des SC de type I et "petit" pour des SC de type II] Avec la normalisation utilisé on a $|u| \leq 1$, et lorsque $|u| \simeq 1$ le matériau est dans un état SC alors que lorsque $|u| \simeq 0$ le matériau est dans un état normal.

Les deux états (ou phases) pouvant coexister. Ainsi les vortex correspondent à des petits régions où $|u| \simeq 0$.

3.2.4 les équation de Ginzburg-Landau

Considérant maintenant la fonctionnelle d'énergie 3.41, on doit dérivé les équation de mouvement. Plus précisément, en calculant la variation de $\mathcal{F}$ par rapport à $\bar{\psi}$ (complexe conjugué de ψ) et $\mathbf{A}$, nous allons obtenir deux équations dites de Ginzburg-Landau. pour atteindre un équilibre thermodynamique, le système doit minimiser son énergie libre par rapport à ces deux fonctions.

Variation par rapport à $\bar{\psi}$

En minimisant 3.41 par rapport à $\bar{\psi}$ on obtient la **première équation de Ginzburg-Landau** voir Appendice

$$\begin{cases} \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})^2 \psi + (\alpha + \beta|\psi|^2)\psi = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ (-i\hbar\nabla - e^*\mathbf{A})\psi \cdot n = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.44)$$

Variation par rapport à $\mathbf{A}$

La **deuxième équation de Ginzburg-Landau** se dérive en minimisant 3.40 par rapport au potentiel vecteur $\mathbf{A}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = J_s = -\frac{ie\hbar}{m^*} (\bar{\psi}(x)\nabla\psi(x) - \psi(x)\nabla\bar{\psi}(x)) - \frac{4e^2}{m^*} |\psi(x)|^2 \mathbf{A}(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \text{rot } \mathbf{A} = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.45)$$

3.2.5 Les équations de Ginzburg-Landau normalisée

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$u = \frac{\psi}{\psi_\infty} = \frac{\psi}{\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \mathcal{A} = \frac{A}{\left(\frac{\Phi_0}{2\pi\xi}\right)}$$

Pour raison de simplifier les équations d'après il est naturel d'identifier Φ_0 au rapport $2\pi\hbar/e^* = h/2e$, avec ($h = 2\pi\hbar$) c'est le quantum de flux magnétique⁵.

En utilisant les opérateurs différentiels

$$\nabla \longrightarrow \xi \nabla \quad (3.46)$$

$$\nabla^2 \longrightarrow \xi^2 \nabla^2 \quad (3.47)$$

Et nous utilisons le paramètre de Ginzburg-Landau κ , qui est défini comme étant le rapport de la profondeur de pénétration par la longueur de cohérence,

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi} \quad (3.48)$$

En utilisant cette notation, les équations de Ginzburg-Landau 3.66 et 3.45, respectivement, exprimées dans la jauge de London-Landau (parfois appelée jauge de Coulomb)

$$\nabla \cdot \mathcal{A} = 0 \quad (3.49)$$

prend les formes normalisées

$$u(1 - |u|^2) - (i\nabla - \mathcal{A})^2 u = 0 \quad (3.50)$$

avec la condition frontière

$$n \cdot (-i\nabla - \mathcal{A})u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.51)$$

On peut aussi normalisé le courant J par

$$J = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_L^2\xi\mu_0} j \quad (3.52)$$

Ce qui nous donne

$$j = \kappa^2 \nabla \times (\nabla \times \mathcal{A}) \quad (3.53)$$

La deuxième équation de GL normalisée :

$$j = \frac{-i}{2} (u^* \nabla u - u \nabla u^*) - \mathcal{A} |u|^2 \quad (3.54)$$

3.2.6 La quantification du flux

En présence du champ magnétique, un résultat intéressant résulte de 3.45. Si on écrit $\psi(x)$ comme produit d'une fonction réelle $|\psi(x)|$ et par un facteur de phase $\exp(i\theta)$, comme dans 3.18. Le gradient de ψ aura la forme

$$\nabla \psi = i\psi \nabla \theta + e^{i\theta} \nabla |\psi(r)|, \quad (3.55)$$

5. Son interprétation physique sera discutée plus en détail dans la section suivante sur la quantification du flux

et le courant total de 3.45 sera donnée par

$$J_s = \frac{\hbar e^*}{m^*} |\psi|^2 \nabla \theta - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi|^2 A = \frac{2e |\psi|^2}{m^*} (\hbar \nabla \theta - 2e A) \quad (3.56)$$

Prenant intégrale curviligne autour d'un contour fermé donne

$$\oint_C J \cdot dl = \frac{2e |\psi|^2}{m^*} \left\{ \hbar \oint_C \nabla \theta \cdot dl - 2e \oint_C A \cdot dl \right\} \quad (3.57)$$

pour garantir au paramètre d'ordre d'être univalué après un transport sur le contour C

$$\oint_C \nabla \theta \cdot dl = 2\pi k \quad (3.58)$$

où k est un entier, l'équation 3.57 peut s'écrire comme suit :

$$\frac{m^*}{4e^2 |\psi|^2} \oint_C J \cdot dl + \oint_C A \cdot dl = \frac{\hbar}{2e} \oint_C \nabla \theta \cdot dl = \frac{2\pi k \hbar}{2e} = k \Phi_0 \quad (3.59)$$

où Le quantum de flux Φ_0 à la valeur

$$\Phi_0 = \frac{h}{e^*} = \frac{2\pi \hbar}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{ Weber} \quad (3.60)$$

Il convient d'exprimer l'intégrale curviligne de A dans l'équation 3.59 en fonction du flux magnétique Φ à travers le contour fermé. Appliquant le théorème de Stokes on trouve,

$$\oint_C A \cdot dl = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi \quad (3.61)$$

L'équation 3.59 devient

$$\frac{m^*}{4e^2 |\psi|^2} \oint_C J \cdot dl + \Phi = k \Phi_0 \quad (3.62)$$

Cette expression est valable pour tous les supraconducteurs, et peut être appliquée aux états intermédiaire et mixte décrits ci-dessous. L'équation 3.62 exprime la condition selon laquelle la somme du flux Φ et l'intégral curviligne impliquant la densité du courant J est **quantifiée**.

3.2.7 comparaison avec l'équation de London

On peut déduire l'équation de London de la deuxième équation de Ginzburg-Landau, en effet

rappelant la deuxième équation de Ginzburg-Landau 3.45

$$J_s = -\frac{ie\hbar}{m^*} (\bar{\psi}(x) \nabla \psi(x) - \psi(x) \nabla \bar{\psi}(x)) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi(x)|^2 \mathbf{A}(x)$$

On suppose que $\psi = \psi_\infty$ (réel)

$$J_s = -\frac{e^{*2} \psi_\infty^2}{m^*} \mathbf{A}$$

$$\nabla \times J_s = -\frac{e^{*2}\psi_\infty^2}{m^*}\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{e^{*2}\psi_\infty^2}{m^*}\mathbf{B}$$

où

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 J_s, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Donc on a

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \right) = -\frac{e^{*2}\psi_\infty^2}{m^*}\mathbf{B}$$

où

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 e^{*2}\psi_\infty^2}{m^*}\mathbf{B}$$

Donc nous avons l'équation de London

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B}$$

avec la longueur de pénétration λ_L est défini comme avant :

$$\lambda_L^2 = \frac{m^*}{\mu_0 e^{*2} n_s}$$

où $\psi_\infty^2 = n_s$ est la densité de superélectrons.

3.3 Lien avec l'étude de Béthuel-Brézis-Hélien

Dans un travail pionnier, Béthuel-Brézis-Hélien (BBH) ont considéré un modèle simplifier, sans champ magnétique, ils ont étudié l'énergie suivante

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (1 - |u|^2)^2 d\Omega \quad (3.63)$$

On sait que la cause de l'apparition des vortex dans un SC de type II est la présence du champ magnétique. Cependant, ils ont observé que l'on pouvait mimer l'effet du champ magnétique en imposant une donnée au bord de type Dirichlet (par exemples $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^1$)

En effet les points critiques de l'énergie E_ϵ présentent des vortex qui ont les propriétés suivantes :

L'énergie est concentrée autour des vortex et est simplifiée la circulation du courants autour des vortex est elle aussi quantifiée.

De plus les vortex se repoussent et sont également repoussés par le bord.

Ces propriétés correspondent aux observation physique. Cependant BBH observent qu'imposer une donnée au bord $u = g$ sur $\partial\Omega$ ne correspond pas à une réalité physique car seul la quantité $|u|^2$ représente une quantité physique.

3.3.1 Minimisation de fonctionnelle : passage de l'énergie à l'équation

Le but de cette section est de montrer que si u est un minimiseur de 3.63, alors u vérifie

$$-\Delta u(x) = \frac{1}{\epsilon} u(x) (1 - |u(x)|^2) \quad (3.64)$$

Il va s'agir de savoir dériver la fonctionnelle E au voisinage d'un point de minimum. Ceci nécessite des idées identiques à ce qui se passe pour les fonctions réelles de variable réelle. Il s'agit juste d'adapter les notions. On rappelle la définition de la différentiabilité que l'on va appliquer à une fonctionnelle d'énergie E .

Définition 3.3.1. Soit X un ouvert d'un espace vectoriel normé et $E : X \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que E est différentiable en u si et seulement si il existe une application linéaire $L, L : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{E(u+h) - E(u) - L.h}{\|h\|} = 0 \quad (3.65)$$

On notera $E'(u) := L$ la dérivée ou différentielle de E en u

Théorème 3.3.2. Soit X un ouvert d'un espace vectoriel normé et $E : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si E est différentiable en u et si E admet un minimum en u , c'est-à-dire $\forall v \in X \quad E(u) \leq E(v)$ alors $E'(u) = 0$

Démonstration. Soit $v \in X$ fixé et ϕ une fonction de variable réelle définie au voisinage de 0 par $\phi(t) = E(u + tv)$. La condition de minimum en u implique que $\phi'(0) = 0$, soit $E'(u).v = 0$. Donc $E'(u) = 0$ puisque v est arbitraire. ■

Nous intéressent à la minimisation de la fonctionnelle E pour des conditions aux bords données, plus précisément soit

$$H_g^1 = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{C}) ; u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}$$

avec $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ donc nous intéressons au calcul de

$$\min_{u \in H_g^1} E(u)$$

Cas de dimension 1

considérant la fonctionnelle E en 1D de l'espace, et soit $\Omega =]0, 1[$

soit

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(s)|^2 ds + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^1 (1 - |u(s)|^2)^2 ds \quad (3.66)$$

La fonctionnelle E (equation 3.66) est bien différentiable car H^1 s'injecte de façon continue dans L^∞ et donc dans L^4 . Ceci donne une manière de calculer la différentielle. On peut également la calculer par le développement limité de $E(u + tv)$ qui, dans ce cas, est particulièrement simple :

$$E(u + tv) = E(u) + t \int_0^1 u'(s).v'(s) ds - \frac{1}{\epsilon} t \int_0^1 (1 - |u(s)|^2) u(s).v(s) ds + O(t^2) \quad (3.67)$$

où $u.v$ représente le produit scalaire de u par v , $u.v = uv^*$ avec v^* est le complexe conjugué. Alors

$$E'(u).v = \int_0^1 u'(s).v'(s) ds - \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 (1 - |u(s)|^2) u(s).v(s) ds$$

Si u est solution de $E'(u) = 0$ alors par une intégration par partie du premier terme conduit à :

$$\begin{aligned} 0 = E'(u).v &= - \int_0^1 u''(s).v(s)ds + [u'(s).v(s)]_0^1 - \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 (1 - |u(s)|^2)u(s).v(s)ds \\ \implies \\ 0 = E'(u).v &= - \int_0^1 \left[u''(s) + \frac{1}{\epsilon}(1 - |u(s)|^2)u(s) \right].v(s)ds + [u'(s).v(s)]_0^1 \end{aligned}$$

La difficulté se trouve sur le bord, puisque on a une condition de Dirichlet non homogène, comme g est non forcément nulle, on cherche un minimum dans $H_g^1(]0, 1[)$ et non plus dans $H_0^1(]0, 1[)$. Cependant pour se ramener à l'espace $H_0^1(]0, 1[)$ (en particulier pour obtenir que le problème est bien posé). on va utiliser une technique dite de "relèvement". On pose $u = u_g + \tilde{u}$ où $u_g \in H_g^1(]0, 1[)$ et $\tilde{u} \in H_0^1$ alors toutes les fonctions test doivent vérifier ces conditions (ie $v \in H_0^1$) et dans l'intégration par parties, il ne reste pas de terme au bord. Le problème donc se ramène a,

$$\begin{cases} \tilde{u} \in H_0^1(\Omega) \\ 0 = E'(u).v = - \int_0^1 \left[\tilde{u}''(s) + u_g''(s) + \frac{1}{\epsilon}(1 - |\tilde{u}(s) + u_g(s)|^2)(\tilde{u}(s) + u_g(s)) \right].v(s)ds \\ \forall v \in H_0^1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à la formulation

$$\begin{cases} u \in H_g^1(\Omega) \\ 0 = E'(u).v = - \int_0^1 \left[u''(s) + \frac{1}{\epsilon}(1 - |u(s)|^2)u(s) \right].v(s)ds \quad \text{pour } \forall v \in H_0^1 \end{cases}$$

si u est un minimiseur, c'est-à-dire si $E'(u) = 0$, alors en fait u'' est définie au sens faible⁶ et

$$(P) \begin{cases} u'' + \frac{1}{\epsilon}(1 - |u|^2)u = 0 \quad \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = g \end{cases}$$

Notons que $E'(u)$ peut être aussi vue comme $\frac{\partial E}{\partial u^*}$.

Cas de dimension supérieur

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $X = H^1(\Omega, \mathbb{C})$ et

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^2 + \frac{1}{4\epsilon}(1 - |u|^2)^2 \right] d\Omega \quad (3.68)$$

Un calcul similaire au cas 1D donne

$$E'(u).v = \int_{\Omega} \nabla u. \nabla v \, d\Omega - \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} (1 - |u|^2)u.v \, d\Omega$$

et $u = g$ sur $\partial\Omega$

La propriété d'intégration par parties implique que

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta u(x) = \frac{1}{\epsilon}u(x)(1 - |u(x)|^2) & \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

6. $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \text{ tq } \exists \phi \in L^2(\Omega) \text{ avec } \forall v \in C_c^1(\Omega) \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = - \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}\}$ On définit alors la différentielle au sens faible de u notée ∇u par $\nabla u := \phi$

Remarque 1: (Principe du maximum) On appelle principe du maximum continu le fait que sous certaines conditions, le minimum de la fonction u solution de l'EDP est atteint sur les bords. Cette propriété mathématique correspond à l'intuition physique qu'on peut avoir du phénomène : si on chauffe un barreau tout en maintenant ses deux extrémités à une température fixe, la température aux points intérieurs du barreau sera supérieure à celle des extrémités. Il est donc souhaitable que la solution approchée satisfasse la même propriété.

3.3.2 Une propriété concernant la solution de l'équation de Ginzburg-Landau

Proposition 3.3.3. *Toute solution de (P_1) vérifie*

$$|u| \leq 1 \quad \text{sur } \Omega \quad (3.69)$$

Preuve l'inégalité 3.69 est une conséquence du principe de maximum, en effet Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une solution du problème (P_1)

posant $v = |u|^2 - 1$

on a $-\Delta v = -\Delta u \bar{u} = -u \overline{\Delta u} - \bar{u} \Delta u - 2 \nabla u \cdot \overline{\nabla u}$

$$(P_1) \implies -\Delta v = \frac{2}{\epsilon} |u|^2 (1 - |u|^2) - 2 |\nabla u|^2 = -2 \frac{1}{\epsilon} |u|^2 v - 2 |\nabla u|^2$$

$$-\Delta v + \frac{2}{\epsilon} |u|^2 v = -2 |\nabla u|^2 \leq 0$$

Donc la fonction v satisfait

$$\begin{cases} -\Delta v + a(x)v \leq 0 & \text{sur } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $a(x) = \frac{2}{\epsilon} |u|^2$ Par le principe du maximum nous avons

$$\begin{aligned} v &\leq \max_{\partial\Omega} (v) = 0 \\ \implies |u| &\leq 1 \end{aligned}$$

3.3.3 Conclusion

Dans ce premier chapitre on a exposé la théorie phénoménologique la plus complète et la plus importante qu'elle a tenté d'expliquer le phénomène de supraconductivité. Ainsi que l'étude fondamentale de Béthuel-Brézis-Hélien qui ont tenté d'ajouter à l'énergie libre de Ginzburg-Landau une énergie libre sans champ magnétique.

Il faut tout de fois noter que malgré toutes les tentatives pour l'interprétation du phénomène de supraconductivité il subsiste toujours des points d'ombres, surtout avec l'avènement des supraconducteurs à hautes températures critiques (SHTC), qui ont remis en question la théorie microscopique de Bardeen-Cooper et Schrieffer (BCS), relançons ainsi le débat sur les origines microscopiques de la supraconductivité.

Conclusion générale

Le travail présenté est une étude de synthèse sur la supraconductivité comme phénomène physique, comme type de matériaux, et aussi et surtout comme un nouvel horizon qui s'ouvrent devant nous, nous permettant d'améliorer les performances des dispositifs et machines déjà existant, et de créer des domaines d'application et d'études propres aux supraconducteurs.

Les développements théoriques présentés au troisième chapitre visent en particulier la théorie phénoménologique de **GINZBURGE-LANDAU**. Ces développements ont démontré la complexité des concepts théorique mis en jeu pour l'interprétation de ce phénomène, et la lourdeur de l'appareil mathématique mis en jeu pour les manipulées. Donc si nous voulant travaillés sur cet aspect de la supraconductivité en doit tenir compte de ces deux défit. Une suite naturelle de ces développements peut porté sur les nouveaux développements théoriques pour expliquer le comportement des supraconducteurs à haute température critique par exemple.

Le présent manuscrit se veut être le début d'un travail portant sur les supraconducteurs. Et visant à bâtir une large base de données et de connaissances nous permettant de travailler sur le coté théorique.

Appendice

en calculant la variation de $\mathcal{F}$ par rapport à $\bar{\psi}$ (complexe conjugué de ψ) et A , nous allons obtenir deux équations dites de Ginzburg-Landau. Pour atteindre un équilibre thermodynamique, le système doit minimiser son énergie libre par rapport à ces deux fonctions.

Variation par rapport à $\bar{\psi}$

Les deux premiers termes de l'équation 3.39 ne dépendent pas de $\bar{\psi}$ donc leurs variation par rapport à $\bar{\psi}$ soit nulle. Pour les deux suivant on a :

$$\delta \left\{ \alpha |\psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(x)|^4 \right\} = \alpha \psi(x) + \beta |\psi(x)|^2 \psi(x) \quad (3.70)$$

Le troisième terme est plus délicat à minimiser, pour le calcul on oublie la position x .

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi|^2 \right\} &= \delta \left\{ \frac{1}{2m^*} [(-i\hbar\nabla - e^*A)\psi] [(i\hbar\nabla - 2eA)\bar{\psi}] \right\} \\ &= \frac{1}{2m^*} [(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] [(i\hbar\nabla - 2eA)\delta\bar{\psi}] \\ &= \frac{1}{2m^*} [(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] i\hbar\nabla\delta\bar{\psi}(x) - \frac{2eA}{2m} [(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] \delta\bar{\psi} \end{aligned}$$

En se rappelant que $\nabla \cdot (\lambda v) = \lambda \nabla \cdot v + v \cdot \nabla \lambda$ et après avoir posé $\lambda = \delta\bar{\psi}$ et $v = (i\hbar\nabla - 2eA)\psi$, on a

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi|^2 \right\} &= \frac{i\hbar}{2m^*} \nabla [\delta\bar{\psi}(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] - \frac{i\hbar}{2m^*} \nabla [(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] \delta\bar{\psi} \\ &\quad - \frac{2eA}{2m^*} [(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] \delta\bar{\psi} \\ &= \frac{i\hbar}{2m^*} \nabla [\delta\bar{\psi}(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] + \frac{1}{2m^*} [(-i\hbar\nabla - 2eA)^2\psi] \delta\bar{\psi} \end{aligned}$$

En intégrant d'abord le deuxième terme par partie, et en utilisant $\int \nabla v dV = \int v dS$ pour le premier terme on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \left\{ \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi|^2 \right\} d\Omega &= \int_S \frac{i\hbar}{2m^*} [\delta\bar{\psi}(-i\hbar\nabla - 2eA)\psi] dS + \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{2m^*} [(-i\hbar\nabla - 2eA)^2\psi] \delta\bar{\psi} d\Omega \end{aligned}$$

On fait l'hypothèse qu'aucun courant ne sort de la surface S . Cela signifie que la composante normale de l'impulsion doit être nulle.

$$n \cdot (-i\hbar\nabla - 2eA)\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad (-i\hbar\nabla - 2eA)\psi \cdot dS = 0$$

Il ne reste donc que le deuxième terme et δF devient :

$$\delta \mathcal{F} = \int_{\Omega} \left[\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - 2eA)^2 \psi \right] \delta\bar{\psi} d\Omega$$

On utilisant maintenant l'argumentation habituelle de calcul variationnel en imposant que $\delta\mathcal{F} = 0$ pour un choix arbitraire de $\delta\bar{\psi}$. On aura la **première équation de Ginzburg-Landau**

$$\boxed{\alpha\psi(x) + \beta|\psi(x)|^2\psi(x) + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - 2eA(x) \right)^2 \psi(x) = 0} \quad (3.71)$$

On aurait une équation analogue en $\bar{\psi}$ par variation par rapport à ψ .

variation par rapport au potentiel A

Faisant d'abord une transformation de deuxième terme :

$$\delta \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \mathbf{B}^2(x) d\Omega \right\} = \delta \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} (\nabla \times A(x))^2 d\Omega \right\} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla \times A(x) \cdot \nabla \times \delta A(x) d\Omega$$

En introduisant les relations mathématiques suivantes :

$$\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot \nabla \times u - u \cdot \nabla \times v$$

Et on pose $u = \delta A$ et $v = \nabla \times A$ on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \mathbf{B}^2(x) d\Omega \right\} &= -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla \times A(x)) \times \delta A(x)] d\Omega + \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla \times (\nabla \times A(x)) \cdot \delta A(x) d\Omega \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla \cdot [(\nabla \times A(x)) \times \delta A(x)] d\Omega + \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \nabla \times \mu_0 H(x) \cdot \delta A(x) d\Omega \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \int_S [(\nabla \times A(x)) \times \delta A(x)] dS + \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \mu_0 J(x) \cdot \delta A(x) d\Omega \end{aligned}$$

Le terme de surface est nul puisque nous fixons le champ à la surface (déterminé par le champ extérieur), c-à-d $\delta A = 0$ à la surface. On a

$$\delta \left\{ \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \mathbf{B}^2(x) d\Omega \right\} = \int_{\Omega} J(x) \cdot \delta A(x) d\Omega$$

Donc la variation de F_s par rapport à A donne :

$$\delta\mathcal{F} = \int_{\Omega} \left[-\frac{ei\hbar}{m^*} (\psi(x)\nabla\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x)\nabla\psi(x)) + \frac{4e^2}{m^*} |\psi(x)|^2 A(x) + J(x) \right] \delta A(x) d\Omega$$

La **deuxième équation de Ginzburg-Landau** s'écrit donc :

$$\boxed{J(x) = \frac{ie\hbar}{m^*} \left(\psi(x)\nabla\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x)\nabla\psi(x) \right) - \frac{4e^2}{m^*} |\psi(x)|^2 A(x)} \quad (3.72)$$

Bibliographie

- [1] Rémi KaHn philippe ManGin. *Supracoductivité*. EDP sciences, 2013.
- [2] R.J.Creswick R. Prozorov Charles P. Poole Jr, H.A. Farach. *Superconductivity*. Number 2ed edition. ELSEVIER, 2007.
- [3] Henri Alloul. *Physique des électrons dans les colides*. Ecole polytechnique, 2007.
- [4] J. Dalibard et F. Laloë C. Cohen-Tannoudji. *La condensation de Bose-Einstein dans les gaz, « Einstein aujourd'hui »*. EDP Sciences-CNRS Editions, 2005.
- [5] Ruslan Prozorov Charles P. Poole.Jr. *Superconductivity*. ELSEVIER, 2014.
- [6] Laurent-Patrick LEVY. *Magnétisme et Supraconductivité*. EDP Sciences-CNRS Editions, 1997.
- [7] Sylvia Serfaty. *Coloumb Gases and Ginzburg-Landau Vortices*. Zurich Lectures In advanced Mathematics, 2005.
- [8] D.A Kirzhnits V.L Ginzburg. *High temperature Supercoductivity*. 1982.
- [9] Luis César Nunes. *L'Aimant*. Lulu, 2008.
- [10] A. MAILFERT. *Propriétés electromagnétique des supraconducteurs*. Université de Paris, 1975.
- [11] Q. Tang K-H. Hoffman. *Ginzburg-Landau phase transition theory and superconductivity*. Number 1st edition. Springer Basel AG, 2001.
- [12] James F. Annett. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford University Press, 2003.
- [13] J. R. Schrieffer J. Bardeen, L. N. Cooper. *Phys. Rev* 108. 1975.
- [14] Tristan Riviere Frank Pacard. *Linear and Nonlinear Aspects of Vortices, The Ginzburg-Landau Model*. Springer Science+Business Media, LLC, 2000.
- [15] Alain Bossavit. *Computational Electromagnetism. Variational Formulations, Complementarity*. 1998.
- [16] Frédéric Hélein Haim Brezis, Fabrice Bethuel. *Ginzburg-Landau vortices*. Springer Science+Business Media, LLC, 1994.