



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES
Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)

Méthode des volumes finis pour L'équation de convection-diffusion

Réalisé par: **SBAI Abdelaziz**

Encadré par: **Pr. AKHMOUCH Mohammed**

Soutenu le 21 juin 2016

Devant le jury composé de:

-Pr. AKHMOUCH Mohammed	FST Fès
-Pr. EZZAKI Fatima	FST Fès
-Pr. ELHILALI ALAOUI Ahmed	FST Fès
- Pr. HILALI Abdelmajid	FST Fès
-Pr. OUADGHIRI Anis	FST Fès

Année Universitaire 2015 / 2016

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

Remerciement

Je veux d'abord remercier ALLAH le plus puissant de nous avoir donné la force pour réaliser ce travail de master

Au terme de ce travail, je exprime mes plus vifs remerciements à Mon encadrant Mr.Mohammed Akhmouch, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques Fes (FSTF), pour avoir accepté de diriger mon projet et pour avoir fourni un sujet présentant un intérêt à la fois théorique et numérique. Il a fait preuve d'une grande patience, gentillesse et d'un esprit responsable. Nous apprécions ses efforts louables pour faire réussir ce travail. Je tiens à exprimer mes sincères remerciements aux membres du jury devant lesquels j'ai l'honneur de présenter ce modeste travail, ainsi que mes enseignants de la Faculté des Sciences et Techniques de Fes. Je remercie très vivement l'étudiant doctorant Mohammed Benzakour Amine pour son aide et ses conseils précieux et illimités et sa générosité. Merci aussi à tous les gens que j'ai eu le plaisir de côtoyer durant ces quelques années, à tous mes amis pour leur soutien moral et leur aide, plus particulièrement à Aissam, Ilyass, Nadia, ... Mes plus profonds remerciements vont à mes parents, à mes frères et soeurs. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. à qui je doit tout.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à mon chère frère Hafid, pour tout ce qu'il a fait et pour le soutien qu'il m'a apporté durant les deux dernières années

Table des matières

Remerciement	2
Introduction	2
1 Étude de l' équation de convection-difusion en 1d	8
1.1 Problème elliptique :équation de diffusion en 1D	8
1.1.1 La méthode des volumes finis pour le problème de Dirichlet :	8
1.1.2 Théorème de convergence et l'estimation de l'erreur pour le problème de Dirichlet :	10
1.1.3 Équation de convection-diffusion en 1D :	12
1.2 Résultats numériques	22
1.2.1 Estimation de l'ordre de convergence	23
2 Étude des schémas des volumes finis en 2D	26
2.1 Introduction	26
2.1.1 Problème aux limites	26
2.1.2 Les grilles et les fonctions de grilles :	28
2.2 Schémas de discrétisation :	30
2.2.1 Schéma aux différences centrées :	32
2.2.2 Schéma aux différences avant (UDS)	33
2.2.3 Schéma aux différences avant modifié(MUDS)	36

2.3	Étude de la stabilité et l'analyse d'erreur	39
2.3.1	Estimation d'erreur dans H^1 associé à la norme discrète	39
3	Simulation numérique de l'équation de transport	43
3.1	Introduction	43
3.2	Le Modèle Mathématique	44
3.2.1	Propriété des milieux poreux	44
3.2.2	Caratéristiques physiques d' un milieu poreux	45
3.2.3	Écoulement dans un milieu poreux	46
3.2.4	Équation de convection-diffusion	47
3.3	Discrétisation par la méthode des volumes finis	48
3.3.1	Étude de schéma numérique de l'équation convection-diffusion en 1D	48
3.3.2	Discrétisation en espace	49
3.3.3	Discrétisation en temps	50
3.4	Résultats numériques	52
3.4.1	Simulations Numériques	52
	Conclusion générale	56
	Bibliographie	57

INTRODUCTION

1-Définition du problème de convection-diffusion :

Différents phénomènes sont responsables du transport de la matière. La matière peut être transportée par le mouvement du fluide (transport convectif), par diffusion de zones concentrées vers des zones de concentrations plus faibles (transport diffusif) ou par d'autres phénomènes. La convection est toujours associée à un mouvement macroscopique des particules fluides. C'est très différent de la diffusion qui elle, est un mouvement microscopique à l'échelle des atomes et des molécules. D'où une intensité de transfert beaucoup plus importante pour la convection que pour la diffusion. Tous les matins, la seule solubilisation du morceau de sucre dans votre tasse de café met en œuvre différents mécanismes de transfert de matière qui font que la dissolution du morceau de sucre est plus ou moins rapide. On peut attendre que le café soit sucré par le simple fait de la diffusion qui dans ce cas est isotropique. Les particules du sucre vont dans toutes les directions avec la même intensité. Il n'y a pas de raison pour qu'une direction soit privilégiée par rapport à une autre (sauf près des parois solides). Mais si on entre en action avec une petite cuillère, le café sera sucré beaucoup plus rapidement et le transport des particules va suivre la direction de l'écoulement. D'où la particularité des schémas de convection. Ils sont étroitement liés à la direction de l'écoulement.[3]

2-Description de la méthode des volumes finis :

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis. Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation (on parle aussi de formulation faible). [13]

Principe :

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservations hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de Green, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc adaptées à la résolution de lois de conservation. [13]

3-Sujets abordés dans ce mémoire :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre nous allons étudier l'équation de diffusion et de convection-diffusion dans le cas unidimensionnel avec des conditions au bord de type de Di-

richlet en utilisant la méthode des volumes finis .Ensuite nous allons établir la convergence et l'estimation de l'erreur associée à ce problème elliptique et en terminera par présenter des simulations numériques .

Chapitre 2 : L'approximation du terme de convection dans les problèmes elliptiques par la méthode des différences finies centrées conduit à des schémas de second ordre qui sont stables seulement pour un pas de maillage suffisamment petit,le décentrement a été utilisé pour éviter les conditions de stabilité.Mais ces approximations sont seulement de premier ordre en ajoutant le terme numérique de diffusion substantielle au problème physique. Divers modifications des schémas en avant ont été proposées visant un second ordre de precision et une stabilité inconditionnelle (voir Smarskii[5]).

Notre objectif dans ce chapitre est de construire des méthodes aux différences finies centrées sur des mailles carrés satisfaisant le principe de maximum discret et ayant une approximation de second ordre.Premièrement on va commencer par l'étude d'un problème aux limites de convection-diffusion,deuxièmement on va exploiter ce problème pour construire sa discrétisation par la méthode des volumes finis en utilisant les trois schémas d'approximation des flux suivants :

- 1– Schéma aux différences centrées (CDS)
- 2– Schéma aux différences avant (UDS)
- 3– Schéma aux différences avant modifié(MUDS)

Et on va terminer ce chapitre par l'étude de l'estimation d'erreur associée à la norme discrète dans $H^1(\Omega)$.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'équation de convection-diffusion dans le cas instationnaire lié, au problème de stockage de CO_2 dans le cas monodimensionnel et nous allons traiter sa discrétisation par la méthode des volumes finis. À la fin de ce chapitre on va tester et comparer dans un milieu homogène la solution numérique avec la solution analytique en variant le pas d'espace et de temps.

Chapitre 1

Étude de l' équation de convection-difusion en 1d

1.1 Problème elliptique :équation de diffusion en 1D

Dans ce chapitre on s'intéresser à l'étude de l'équation de diffusion et de convection-diffusion dans le cas unidimensionnel avec des conditions au bord de type Dirichlet . En suite on étudiera la convergence et l'estimation de l'erreur associé à ce problème. En terminera par la simulation numérique de cette equation dans laquelle on va tester et comparer la solution analytique et la solution numérique trouvée dans un exemple clair par la méthode des volumes finis.

1.1.1 La méthode des volumes finis pour le problème de Dirichlet : Formulation d'un schéma V.F.

Le principe de méthode des **volumes finis** sera présenté. Ici le problème de Dirichlet est un opérateur différentiel du second ordre et des termes dépendants des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On considère le problème unidimensionnel suivant avec

condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ il existe une solution unique $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$. L'équation $-u''(x) = f(x)$ peut être écrite sous forme conservative $div F = f$ avec $F = -u'$.

Pour trouver l'approximation de la solution de cette équation, on définit un maillage admissible, noté par τ de $(0, 1)$ qui consiste en N volumes de contrôle, noté par $(K_i)_{i=1}^N$ et N points. de $(0, 1)$, notés par $(x_i)_{i=0}^N$ qui satisfont les hypothèses suivantes :

Définition 1.1 Soit $(K_i)_{i=1}^N, N \in \mathbb{N}$ tel que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ la famille $(x_i)_{i=0}^N$ tel que :

$$0 = x_0 = x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{N+1/2} = x_{N+1} = 1$$

On pose : $h_i = mes(K_i) = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, i = 1, \dots, N$ et donc

$\sum_{i=0}^N h_i = 1$ et on note $h_i^- = x_i - x_{i-1/2}$, $h_i^+ = x_{i+1/2} - x_i, h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i = h_i^+ + h_{i+1}^-$ et $h = \max_{i=1}^N h_i$

Les inconnus discrets sont notés par u_i , $i = 1, \dots, N$ qui sont des approximations de $u(x_i)$ c'est-à-dire $u(x_i) \simeq u_i$ qui est la moyenne de u sur K_i . On intègre la première équation du problème (1.1) sur chaque intervalle k_i :

$$\begin{aligned} \int_{k_i} -u''(x) dx &= \int_{k_i} f(x) dx, \forall i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow -u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) &= \int_{k_i} f(x) dx, \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

L' approximation de $-u'(x_{i+1/2})$ est établie à partir d' un procédé de différences finies (schéma centré). On pose :

$$F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}$$

L' approximation est consistante dans le sens où si $u \in C^2([0,1], \mathbb{R})$, alors

$$F_{i+1/2}^* = -u'(x_{i+1/2}) + O(h) \quad (1.2)$$

où $|O(h)| \leq Ch, C \in \mathbb{R}_+$ dépend seulement de $u. \exists \eta \in k_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ tel que, d'après le théorème de la moyenne on trouve :

$$\int_{k_i} f(x)dx = f(\eta) \int_{k_i} dx = h_i f(\eta) \simeq h_i f_i \text{ où } f_i = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} f(x)dx, i = 1, \dots, N$$

Finalement, le schéma aux volumes finis du problème(1.1) s'écrit

$$\begin{cases} F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i, & i = 1, \dots, N \\ F_{i+1/2} = -\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}, & i = 1, \dots, N-1 \\ F_{1/2} = -\frac{u_1}{h_{1/2}}, F_{N+1/2} = -\frac{u_N}{h_{N+1/2}} \end{cases} \quad (1.3)$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$ Le schéma numérique (1.3) peut s'écrire sous forme matricielle $AU = b$

où $U = (u_1, \dots, u_N)^T, b = (b_1, \dots, b_N)^T$ A et b sont définies par :

$$(AU)_i = \frac{1}{h_i} \left(-\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right), \forall i = 1, \dots, N \text{ et } b_i = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} f(x)dx, i = 1, \dots, N$$

1.1.2 Théorème de convergence et l'estimation de l'erreur pour le problème de Dirichlet :

L'estimation de l'erreur des volumes finis dans le cas simple :

Théorème 1.1.1 Soient $f \in C([0.1], \mathbb{R})$ et $u \in C^2([0.1], \mathbb{R})$ la solution unique de problème (1.1). Soit $\tau = (k_i)_{i=1}^N$ le maillage admissible au sens de la définition 1.1

Alors, il existe un unique vecteur $U = (u_1 \dots u_N)^T \in \mathbb{R}^n$ solution de (1.3) et $\exists c \geq 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{e_{i+1}-e_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 \leq c^2 h^2$$

et

$$|e_i| \leq Ch, \forall i = 1, \dots, N$$

avec $e_0 = e_{N+1} = 0, e_i = u(x_i) - u_i, \forall i = 1, \dots, N$

Preuve : On montre qu'il existe un unique vecteur $U = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^n$ solution de (1.3) On multiplie la première équation de (1.3) par u_i et on fait la somme sur $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \right) u_i + \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right) u_i = \sum_{i=1}^N u_i h_i f_i \\ \Rightarrow & - \sum_{i=1}^N \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \right) u_i + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \right) u_{i+1} = \sum_{i=1}^N u_i h_i f_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{u_1^2}{h_{1/2}} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 + \frac{u_N^2}{h_{N+1/2}} = \sum_{i=1}^N u_i h_i f_i, \quad (u_0 = u_{N+1} = 0)$$

Donc si $f_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$, alors la solution unique de la première équation de (1.3) est obtenue lorsque $u_i = 0$, ceci donne l'existence et l'unicité de la solution de (1.3)

Maintenant on montre la deuxième inégalité : Soit $\bar{F}_{i+1/2} = -u'(x_{i+1/2})$ pour

$i = 1, \dots, N$. On intègre l'équation $-u''(x) = f(x)$ sur k_i , on obtient

$\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} = h_i f_i$, d'après (1.3) on a :

$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = h_i f_i$, avec $G_{i+1/2} = \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2}$

Donc

$$\begin{aligned} G_{i+1/2} - G_{i-1/2} &= \bar{F}_{i+1/2} - F_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + F_{i-1/2} \\ &= (\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}) - (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) = h_i f_i - h_i f_i = 0, \forall i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

On utilise la consistance des flux de (1.2), $\exists c > 0$ dépendant de u tel que :

$$F_{i+1/2}^* = \bar{F}_{i+1/2} + R_{i+1/2} \text{ et } |R_{i+1/2}| \leq Ch$$

D'où :

$$\begin{aligned} G_{i+1/2} &= -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} - R_{i+1/2}, \quad \forall i = 0, \dots, N \\ &= -\frac{(u(x_{i+1}) - u_{i+1}) - (u(x_i) - u_i)}{h_{i+1/2}} - R_{i+1/2}, \quad \forall i = 0, \dots, N \\ &= -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} - R_{i+1/2}, \quad \forall i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Comme on a $G_{i+1/2} - G_{i-1/2} = 0 \Rightarrow -\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} + \frac{e_i - e_{i-1}}{h_{i-1/2}} - R_{i+1/2} + R_{i-1/2} = 0, \forall i = 1, \dots, N$

On multiplie cette dernière équation par e_i et on fait la somme sur $i = 1, \dots, N$:

$$-\sum_{i=1}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+1/2}} e_i + \sum_{i=1}^N \frac{(e_i - e_{i-1})}{h_{i-1/2}} e_i = \sum_{i=1}^N R_{i+1/2} e_i - \sum_{i=1}^N R_{i-1/2} e_i$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \sum_{i=1}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+1/2}} e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{(e_{i+1} - e_i)}{h_{i+1/2}} \right) e_{i+1} &= \sum_{i=0}^N R_{i+1/2} e_i - \sum_{i=0}^{N-1} R_{i+1/2} e_{i+1}, \quad (e_0 = e_{N+1} = 0) \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} &= \sum_{i=0}^N R_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i) \leq Ch \sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| \quad (*) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| \leq \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N h_{i+1/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \text{ car } \sum_{i=1}^N h_{i+1/2} = 1$$

(*) devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} &\leq Ch \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \leq Ch \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \leq C^2 h^2 \end{aligned}$$

$\forall i = 1, \dots, N$, on a :

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=1}^i e_j - e_{j-1} = \sum_{j=0}^{i-1} e_{j+1} - e_j \leq \sum_{j=0}^N |e_{j+1} - e_j| \\ |e_i| &\leq \sum_{i=0}^N |e_{i+1} - e_i| \leq \left(\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+1/2}} \right)^{1/2} \leq Ch \quad \square \end{aligned}$$

1.1.3 Équation de convection-diffusion en 1D :

Formulation de l'équation de convection-diffusion par la methode des volumes finis :

Dans cette section on s'intéresse à l'étude de l'équation linéaire de convection-diffusion unidimensionnel avec des coefficients discontinus .On rencontre ce genre d'équations en mécanique des fluides, où l'on étudie les phénomènes de convection-diffusion d'un fluide, on utilise souvent le modèle suivant :

$$\begin{cases} (-\lambda u')'(x) + au'(x) + bu(x) = f(x), x \in [0, 1] \\ u(0) = c, u(1) = d \end{cases} \quad (1.7)$$

où $\lambda \in L^\infty(0, 1)$, λ est une fonction choisie continue par intervalle dans $]0, 1[$. Pour toutes ses raisons, lorsque l'on discrétise un problème, on s'arrange pour que les discontinuités de λ coïncident avec les interfaces du maillage : Ce sont des points (en 1D) :

$$x_{i+1/2}, i = 1, \dots, N - 1$$

Soit $\lambda \in L^\infty(0, 1)$ tel qu'ils existent $\bar{\lambda}, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ pp et soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $b \geq 0$ et $f \in L^2(0, 1)$. On cherche une approximation de la solution u pour ce problème (1.7)

Remarque 1.1.1 *Le problème (1.7) a une solution unique u dans l'espace de Sobolev $H^1((0, 1))$ cette solution est continue en $[0, 1]$ mais n'est pas en général de classe C^2 .*

Maillage et schémas : Soit $\tau = (K_i)_{i=1}^N$ un maillage admissible dans le sens de la définition 1.1 On intègre l'équation (1.7) sur chaque volume de contrôle K_i , il vient :

$$(-\lambda u')(x_{i+1/2}) + (\lambda u')(x_{i-1/2}) + au(x_{i+1/2}) - au(x_{i-1/2}) + \int_{K_i} bu(x)dx = \int_{K_i} f(x)dx$$

où $(u_i)_{i=1}^N$ sont les inconnus discrets.

Pour approximer le terme convective on utilise le schéma aux différences avant : Dans le cas où $a \geq 0$ l'approximation de $au(x_{i+1/2})$ est donné par au_i , qui est le cas considéré dans la suite car ce choix garantit la stabilité de schéma, alors que l'approximation par la méthode de différence centrée c'est à dire l'approximation de $au(x_{i+1/2})$ par $\frac{a}{2}(u_i + u_{i+1})$ donne un schéma stable si $ah \leq 2\lambda$ pour un maillage uniforme de taille h et de coefficient du diffusion constant λ .

De même si $a \leq 0$, l'approximation de $au(x_{i+1/2})$ est donnée par au_{i+1} .

L'approximation de terme $bu(x)$ s'écrit :

$$\int_{k_i} bu(x)dx = bu(\eta) \int_{k_i} dx \simeq bu_i h_i, \eta \in K_i, \forall i = 1, \dots, N$$

$$\text{soit } \lambda_i = \frac{1}{h_i} \int_{k_i} \lambda(x)dx$$

puisque $\lambda|_{k_i} \in C^1(\bar{k}_i)$, $\exists C_\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que : $|\lambda_i - \lambda(x)| \leq C_\lambda h$, $\forall x \in k_i$ de fait que le schéma est conservative, la discrétisation du flux en $x_{i+1/2}$ devrait avoir la même valeur sur k_i et

k_{i+1} , à cet effet, on introduit l'inconnu auxiliaire $u_{i+1/2}$ (l'approximation de u en $x_{i+1/2}$).
 Passons maintenant à l'approximation de $H_{i+1/2}$ par $-\lambda u'(x_{i+1/2})$, puisque sur k_i et k_{i+1} , λ est continue, l'approximation de $-\lambda u'$ peut être considérée de chaque côté de $x_{i+1/2}$ en utilisant le principe de différences finies :

$$H_{i+1/2} = -\lambda_i \frac{u_{i+1/2} - u_i}{h_i^+} \text{ sur } K_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$H_{i+1/2} = -\lambda_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_{i+1/2}}{h_{i+1}^-} \text{ sur } K_{i+1}, \quad \forall i = 0, \dots, N-1$$

avec $u_{1/2} = c$ et $u_{N+1/2} = d$

Les deux approximations ci-dessus de $\lambda u'(x_{i+1/2})$ sont égales (à cause de la conservativité du flux)

Donc :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, N-1, \quad -\lambda_i \frac{u_{i+1/2} - u_i}{h_i^+} &= -\lambda_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_{i+1/2}}{h_{i+1}^-} \quad (*) \\ \Rightarrow u_{i+1/2} &= \frac{u_{i+1} \frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + u_i \frac{\lambda_i}{h_i^+}}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} H_{i+1/2} &= -\frac{\lambda_i}{h_i^+} \left[\frac{u_{i+1} \frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + u_i \frac{\lambda_i}{h_i^+}}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} - u_i \right] \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \\ \Rightarrow H_{i+1/2} &= -\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ \lambda_{i+1} + h_{i+1}^- \lambda_i} (u_{i+1} - u_i) \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \\ \Rightarrow H_{i+1/2} &= -\tau_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i) \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

où

$$\tau_{i+1/2} = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ \lambda_{i+1} + h_{i+1}^- \lambda_i}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

avec $H_{1/2} = -\frac{\lambda_1}{h_1^-} (u_1 - c)$ et $H_{N+1/2} = -\frac{\lambda_N}{h_N^+} (d - u_N)$.

Exemple 1.1.1 Si $h_i = h$, $\forall i = 1, \dots, N$, et x_i le centre de volume de contrôle K_i , donc $h_i^+ = h_i^- = \frac{h}{2}$ et $H_{i+1/2}$ devient :

$$H_{i+1/2} = -\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \lambda_i} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$$

Le schéma numérique pour l'approximation du problème (1.7) s'écrit :

$$F_{i+1/2} - F_{i-1/2} + bh_i u_i = h_i f_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (1.8)$$

avec

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et

$$F_{i+1/2} = -\tau_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) + au_i, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (1.9)$$

$$F_{1/2} = -\frac{\lambda_1}{h_1^-}(u_1 - c) + ac \text{ et } F_{N+1/2} = -\frac{\lambda_N}{h_N^+}(d - u_N) + au_N \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (1.10)$$

Estimations de l'erreur :

Théorème 1.1.2 Soient $a, b \geq 0$ et $c, d \in \mathbb{R}, \lambda \in L^\infty(0, 1)$ tel que $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ pp avec $\underline{\lambda}, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in L^1(0, 1)$. Soient u l'unique solution du problème (1.7) et $\tau = (K_i)_{i=1}^N$ un maillage admissible au sens de définition 1.1 tel que $\lambda \in C^1(\bar{K}_i)$ et $f \in C(\bar{K}_i)$, $\forall i = 1, \dots, N, y = \max \|u''\|_{L^\infty(k_i)}, i = 1, \dots, N$ et $\delta = \max \|\lambda\|_{L^\infty(k_i)}, i = 1, \dots, N$. Alors :

1. $\exists! U = (u_1, \dots, u_N)^t \in \mathbb{R}^N$ solution de (1.8) et (1.10)

2. $\exists C$ dépendant de $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, y$ et δ tel que :

$$\sum_{i=1}^N \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq Ch^2$$

et

$$|e_i| \leq Ch, i = 1, \dots, N$$

avec $e_0 = e_{N+1} = 0$ et $e_i = u(x_i) - u_i, \forall i = 1, \dots, N$.

Preuve du théorème 1.1.2 :

La preuve de ce théorème se décompose en trois étapes :

Étape 1 : L'existence et l'unicité de la solution de (1.8) et (1.10) D'abord on multiplie l'équation (1.8) par u_i et on fait la somme pour $i = 1, \dots, N$ tel que : si $c = d = f_i = 0$ alors la solution unique est nulle. En effet :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N u_i F_{i+1/2} - \sum_{i=1}^N u_i F_{i-1/2} + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^N -\tau_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i)u_i + \sum_{i=1}^N a u_i^2 + \sum_{i=1}^N \tau_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})u_i - \sum_{i=1}^N a u_i u_{i-1} + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 = 0 \\ & \Rightarrow \sum_{i=0}^N \tau_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{i=1}^N a u_i(u_i - u_{i-1}) + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 = 0 \text{ car } c = d = 0 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de ce théorème, on a $a, b \geq 0$, il suffit de montrer que

$\sum_{i=1}^N a u_i(u_i - u_{i-1}) \geq 0$ pour déduire que la seule solution du système homogène est la solution triviale $u_i = 0$. En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N a u_i(u_i - u_{i-1}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a [(u_i - u_{i-1})^2 + (u_i^2 - u_{i-1}^2)] \\ (*) \Rightarrow u_i &= u_{i+1/2} - \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-} (u_{i+1} - u_{i+1/2}), \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \\ &\Rightarrow u_{i-1} = u_{i-1/2} - \frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{h_{i-1}^+ h_i^-} (u_i - u_{i-1/2}), \quad \forall i = 2, \dots, N \\ u_i^2 - u_{i-1}^2 &= (u_{i+1/2})^2 - (u_{i-1/2})^2 + \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right)^2 (u_{i+1} - u_{i+1/2})^2 \\ &- \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{h_{i-1}^+ h_i^-}\right)^2 (u_i - u_{i-1/2})^2 - 2\left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-}\right) (u_{i+1} - u_{i+1/2}) u_{i+1/2} + 2\frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{h_{i-1}^+ h_i^-} (u_i - u_{i-1/2}) u_{i-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N (u_i^2 - u_{i-1}^2) &= \sum_{i=1}^N u_{i+1/2}^2 - \sum_{i=0}^{N-1} u_{i+1/2}^2 \\
&+ \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-} \right)^2 (u_{i+1} - u_{i+1/2})^2 - \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-} \right)^2 (u_{i+1} - u_{i+1/2})^2 \\
&- 2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-} \right) (u_{i+1} - u_{i+1/2}) u_{i+1/2} + 2 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{h_i^+ h_{i+1}^-} \right) (u_{i+1} - u_{i+1/2}) u_{i+1/2} = 0
\end{aligned}$$

$$\text{Car } u_{\frac{1}{2}} = u_{N+1/2} = u_{N+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a (u_{i-1} - u_i)^2 \geq 0 \text{ car } a \geq 0$$

D' où :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \tau_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 &= - \sum_{i=1}^N a u_i (u_i - u_{i-1}) \leq 0 \\
\Rightarrow \sum_{i=0}^N \tau_{i+1/2} (u_{i+1} - u_i)^2 + \sum_{i=1}^N b_i h_i u_i^2 &= 0 \\
\Rightarrow u_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

Alors il existe une unique solution $U = (u_1, \dots, u_N)^t$ de (1.8) et (1.10)

Étape 2 : Consistance des flux

On rappelle que $h = \max[h_i, i = 1, \dots, N]$

Soit $\bar{H}_{i+1/2} = -\lambda u'(x_{i+1/2})$ et $H_{i+1/2}^* = -\tau_{i+1/2} (u(x_{i+1/2}) - u(x_i)), \forall i = 0, \dots, N$

avec $\tau_{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_1}{h_1^-}$ et $\tau_{N+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_N}{h_N^+}$

On démontre alors qu'il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}_+^*$ dépendante de $\lambda, \bar{\lambda}, y$ et δ tel que :

$$H_{i+1/2}^* = \bar{H}_{i+1/2} + T_{i+1/2}, \quad |T_{i+1/2}| \leq C_1 h \quad \forall i = 0, \dots, N$$

Et on introduit :

$$H_{i+1/2}^{*, -} = -\lambda_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{h_i^+}, \quad \text{et}, \quad H_{i+1/2}^{*, +} = -\lambda_{i+1} \frac{u(x_{i+1} + 1) - u(x_{i+1/2})}{h_{i+1}^-} \quad (1.11)$$

Puisque $\lambda \in C^1(\bar{k}_i)$ et $u \in C^2(\bar{k}_i), \exists C(y, \delta) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\begin{aligned} H_{i+1/2}^{*, -} &= \bar{H}_{i+1/2} + \bar{R}_{i+1/2}^-, \text{ où } |\bar{R}_{i+1/2}^-| \leq Ch, \quad i = 1, \dots, N \\ H_{i+1/2}^{*, +} &= \bar{H}_{i+1/2} + \bar{R}_{i+1/2}^+, \text{ où } |\bar{R}_{i+1/2}^+| \leq Ch, \quad i = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \bar{H}_{i+1/2} = H_{i+1/2}^{*, -} - \bar{R}_{i+1/2}^- = H_{i+1/2}^{*, +} - \bar{R}_{i+1/2}^+, \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad (1.13)$$

$$\Rightarrow -\lambda_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{h_i^+} - \bar{R}_{i+1/2}^- = -\lambda_{i+1} \frac{u(x+1) - u(x_{i+1/2})}{h_{i+1}^-} - \bar{R}_{i+1/2}^+, \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow u(x_{i+1/2}) = \frac{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} u(x_{i+1}) + \frac{\lambda_i}{h_i^+} u(x_i)}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} + \frac{R_{i+1/2}^+ - R_{i+1/2}^-}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad (1.14)$$

On remplace l'expression $u(x_{i+1/2})$ dans $H_{i+1/2}^{*, -}$ qui définie par (1.11) :

$$\begin{aligned} H_{i+1/2}^{*, -} &= -\frac{\lambda_i}{h_i^+} \left[\frac{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} u(x_{i+1}) + \frac{\lambda_i}{h_i^+} u(x_i)}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} - u(x_i) \right] = -\tau_{i+1/2} (u(x_{i+1}) - u(x_i)) - \frac{\lambda_i}{h_i^+} \frac{R_{i+1/2}^+ - R_{i+1/2}^-}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} \\ &= -\tau_{i+1/2} (u(x_{i+1}) - u(x_i)) - \frac{\lambda_i}{h_i^+} S_{i+1/2} \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \text{ avec } S_{i+1/2} = \frac{R_{i+1/2}^+ - R_{i+1/2}^-}{\frac{\lambda_{i+1}}{h_{i+1}^-} + \frac{\lambda_i}{h_i^+}} \end{aligned}$$

On utilise l'égalité (1.14), il vient :

$$H_{i+1/2}^{*, -} = \bar{H}_{i+1/2} + \bar{R}_{i+1/2}^- = H_{i+1/2}^* - \frac{\lambda_i}{h_i^+} S_{i+1/2}, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow H_{i+1/2}^* = \bar{H}_{i+1/2} + \bar{R}_{i+1/2}^- + \frac{\lambda_i}{h_i^+} S_{i+1/2}, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$\Rightarrow |H_{i+1/2}^* - \bar{H}_{i+1/2}| \leq |\bar{R}_{i+1/2}^-| + \frac{\lambda_i}{h_i^+} \frac{1}{\lambda} \frac{h_i^+ h_{i+1}^-}{h_i^+ + h_{i+1}^-} |R_{i+1/2}^+ - R_{i+1/2}^-|$$

$$\Rightarrow |H_{i+1/2}^* - \bar{H}_{i+1/2}| \leq |\bar{R}_{i+1/2}^-| + \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}} \frac{h_{i+1}^-}{h_i^+ + h_{i+1}^-} |R_{i+1/2}^+ - R_{i+1/2}^-| \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow |H_{i+1/2}^* - \bar{H}_{i+1/2}| \leq |T_{i+1/2}| \leq Ch + 2Ch \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}} \max[h_i, i = 1, \dots, N]$$

$$\Rightarrow \exists C_1 \text{ telque } |H_{i+1/2}^* - \bar{H}_{i+1/2}| \leq |T_{i+1/2}| \leq C_1 h \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

On définit le flux exact :

$$\bar{F}_{i+1/2} := \bar{H}_{i+1/2} + au(x_{i+1/2}) \quad \forall i = 1, \dots, N$$

et on définit aussi ;

$$F_{i+1/2}^* := -\tau_{i+1/2}(u(x_{i+1}) - u(x_i)) + au(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N - 1$$

avec

$$F_{1/2}^* = -\frac{\lambda_1}{h_1^-}(u(x_1) - c) + ac \text{ et } F_{N+1/2}^* = -\frac{\lambda_N}{h_N^+}(d - u(x_N)) + au(x_N)$$

Comme

$$\bar{H}_{i+1/2} + T_{i+1/2} = H_{i+1/2}^* \quad \forall i = 0, \dots, N$$

On a

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^* &= H_{i+1/2}^* + au(x_i) = \bar{H}_{i+1/2} + T_{i+1/2} + au(x_i) \quad \forall i = 1, \dots, N - 1 \\ &\Rightarrow F_{i+1/2}^* = \bar{H}_{i+1/2} + au(x_{i+1/2}) + T_{i+1/2} \quad \forall i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

$$\text{car } au(x_0) = au(x_{\frac{1}{2}}) = u(0) = c \text{ et } au(x_{N+\frac{1}{2}}) = au(x_{N+1}) = u(1) = d$$

Donc :

$$F_{i+1/2}^* = \bar{F}_{i+1/2} + T_{i+1/2}$$

avec

$$|T_{i+1/2}| \leq C_1 h \quad \forall i = 0, \dots, N \quad (1.15)$$

Donc l'approximation numérique du flux est consistante.

Étape 3 : L'estimation de l'erreur

On commence par intégrer l'équation (1.7) sur chaque volume de contrôle K_i :

$$\begin{aligned} &\int_{K_i} (-\lambda u')'(x) dx + \int_{K_i} au'(x) dx + \int_{K_i} bu(x) dx = \int_{K_i} f(x) dx \\ \Rightarrow &-\lambda u'(x_{i+1/2}) + \lambda u'(x_{i-1/2}) + au'(x_{i+1/2}) - au'(x_{i-1/2}) + bh_i u(x_i) = h_i f_i \\ \Rightarrow &\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2} + bh_i(u(x_i) + S_i) = h_i f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (1.16) \end{aligned}$$

où $S_i \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une constante C_2 dépend seulement de u tel que $|S_i| \leq C_2 h, \forall i = 1, \dots, N$, donc (1.16) devient :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^* - T_{i+1/2} - F_{i-1/2}^* + T_{i-1/2} + bh_i(u(x_i) + S_i) &= h_i f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow F_{i+1/2}^* - F_{i-1/2}^* + bh_i(u(x_i) + S_i) &= T_{i+1/2} - T_{i-1/2} + h_i f_i \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.17)$$

On soustrait (1.8) à (1.17) on trouve :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^* - F_{i+1/2} - F_{i-1/2}^* + F_{i-1/2} + bh_i(u(x_i) - u_i + S_i) &= T_{i+1/2} - T_{i-1/2}, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow -\tau_{i+1/2}(u(x_{i+1}) - u(x_i)) + au(x_i) + \tau_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) - au_i + \tau_{i-1/2}(u(x_i) - u(x_{i-1})) \\ - au(x_{i-1}) - \tau_{i-1/2}(u_i - u_{i-1}) + au_{i-1} + bh_i(u(x_i) - u_i + S_i) &= T_{i+1/2} - T_{i-1/2} \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \Rightarrow -\tau_{i+1/2}(e_{i+1} - e_i) + \tau_{i-1/2}(e_i - e_{i-1}) + a(e_i - e_{i-1}) + bh_i e_i &= -bh_i S_i + T_{i+1/2} - T_{i-1/2}, \quad \forall i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.18)$$

On multiplie cette équation par e_i et on fait la somme pour $i = 1, \dots, N$

D'abord, on montre que

$$\sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N e_i^2 - \sum_{i=1}^N e_i e_{i-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=2}^{N+1} e_{i-1}^2 - \sum_{i=1}^N e_i e_{i-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N e_{i-1}^2 - \sum_{i=1}^N e_i e_{i-1} + e_N^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i-1}(e_i - e_{i-1}) + \frac{1}{2} e_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})e_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_i - e_{i-1})^2 + \frac{1}{2} (e_{N+1}^2 - e_N^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2
\end{aligned}$$

Donc (1.18) devient :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i) e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i) e_{i+1} + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N b h_i e_i^2 \\
&= - \sum_{i=1}^N b h_i S_i e_i + \sum_{i=1}^N T_{i+1/2} e_i - \sum_{i=0}^{N-1} T_{i+1/2} e_{i+1} \\
&\Rightarrow \tau_{\frac{1}{2}} e_1^2 + \sum_{i=1}^N \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)^2 + \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (e_i - e_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^N b h_i e_i^2 \\
&= - \sum_{i=1}^N b h_i S_i e_i + \sum_{i=1}^N T_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)
\end{aligned}$$

Puisque $|S_i| \leq C_2 h$ et $a, b \geq 0$ donc :

$$\sum_{i=1}^N (e_{i+1} - e_i)^2 \tau_{i+1/2} \leq \sum_{i=1}^N b h_i |e_i| C_2 h + \sum_{i=1}^N C_2 h |e_{i+1} - e_i| \quad (*)$$

On remarque que :

$$|e_i| \leq \sum_{j=1}^N |e_j - e_{j-1}| = \sum_{j=0}^{N-1} |e_{j+1} - e_j|$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|e_i| \leq \left(\sum_{i=1}^N \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_{i+1/2}} \right)^{1/2}$$

(*)devient :

$$A^2 \leq \sum_{i=1}^N C_2 b h_i h A B + A B C_1 h = C_2 b h A B + C_1 h A B \text{ car } \sum_{i=1}^N h_i = 1$$

avec

$$A = \left(\sum_{i=1}^N \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)^2 \right)^{1/2} \text{ et } B = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\tau_{i+1/2}} \right)^{1/2}$$

Puisque

$$\tau_{i+1/2} = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_i h_{i+1}^- + \lambda_{i+1} h_i^+} \geq \frac{\underline{\lambda}^2}{\bar{\lambda} (h_{i+1}^- + h_i^+)} \geq \frac{\underline{\lambda}^2}{\bar{\lambda}} \Rightarrow \frac{1}{\tau_{i+1/2}} \leq \frac{\bar{\lambda}}{\underline{\lambda}^2}$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^N (h_{i+1}^- + h_i^+) = \sum_{i=1}^N h_{i+1/2} = 1$$

Ceci donne :

$$A \leq C_2 b h \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} + C_1 \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} h \Rightarrow A \leq C_2 b h \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} + C_1 \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} h \leq c_3 h$$

où C_3 est une constante dépendant de $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, \gamma$ et δ .

$$\Rightarrow A^2 \leq \sum_{i=1}^N \tau_{i+1/2} (e_{i+1} - e_i)^2 \leq C h^2 \quad \forall i = 0, \dots, N$$

et $|e_i| \leq A.B \leq \frac{\sqrt{\bar{\lambda}}}{\underline{\lambda}} . C_3 h \leq C h, \forall i = 0, \dots, N$ ce qui achève la démonstration

1.2 Résultats numériques

Dans cette partie , nous allons présenter quelques résultats numériques sur l'équation elliptique de convection-diffusion. Dans un premier lieu, on va comparer la solution

numérique avec la solution exacte, dans un deuxième lieu, nous allons faire une analyse de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

La solution analytique

la solution analytique de l'équation de convection-diffusion :

$$\begin{cases} (-\lambda u'(x) + au'(x) + bu(x) = f(x), x \in [0, 1] \\ u(0) = c, u(1) = d \end{cases}$$

s'écrit sous la forme suivant :

$$U(x) = \exp(x) + x(x - 1)a$$

Avec $c = 1$, $d = \exp(1)$ et $f(x)$ a été trouver en substituant $U(x)$ dans l'équation de convection-diffusion et on obtient :

$$f(x) = x(2a - b) + bx^2 - (2\lambda + a) + \exp(x)(-\lambda + a + b)$$

1.2.1 Estimation de l'ordre de convergence

On définit l'erreur en norme L^∞ , $e_h = \|U - U_h\|_\infty$ et la norme L^2 , $e_h = \|U - U_h\|_2$, avec h est le pas de discrétisation d'espace et U et U_h sont respectivement la solution exacte et la solution approchée obtenue par le schéma des volumes finis. Soit p l'ordre de convergence de schéma, alors il existe une constante k tel que : $e_h \approx kh^p$. Pour estimer numériquement l'ordre de convergence, il suffit de considérer l'erreur avec un pas d'espace égale à $\frac{h}{2}$, on a alors :

$$e_{\frac{h}{2}} \approx k \frac{h^p}{2^p} \approx \frac{e_h}{2^p},$$

donc

$$2^p \approx \frac{e_h}{e_{(\frac{h}{2})}}.$$

On obtient

$$\log\left(\frac{e_h}{e_{(\frac{h}{2})}}\right) \approx p \log(2),$$

soit encore

$$p \approx \frac{\log\left(\frac{e_h}{e_{\left(\frac{h}{2}\right)}}\right)}{\log(2)} .$$

Après cette étude de l'ordre, nous présentons une étude numérique pour comparer l'erreur d'approximation numérique avec la solution analytique. Pour cela, on prend $a = 1$, $b = 1$ et $\lambda = 0.001$. On considère différentes maillages $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$, $h = \frac{1}{40}$, et $h = \frac{1}{80}$ pour calculer l'erreur en fonction de la discrétisation espace.

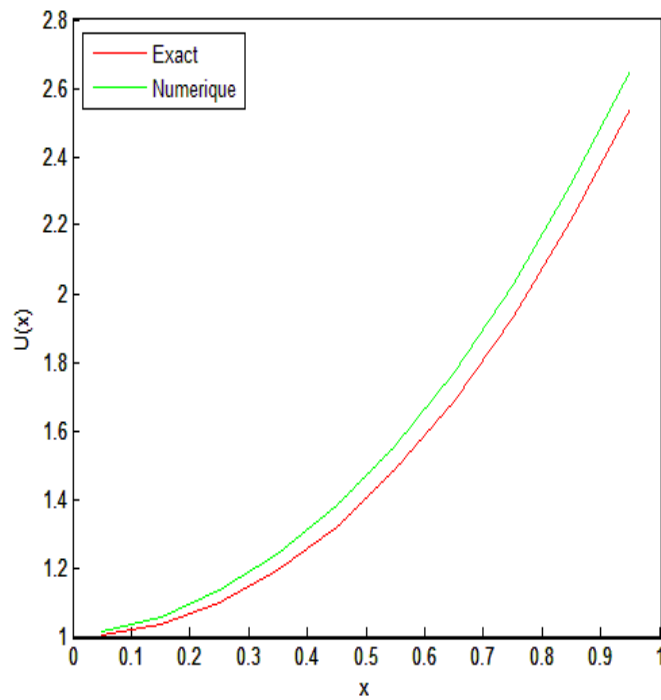


FIGURE 1.1 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique en $h=0.1$

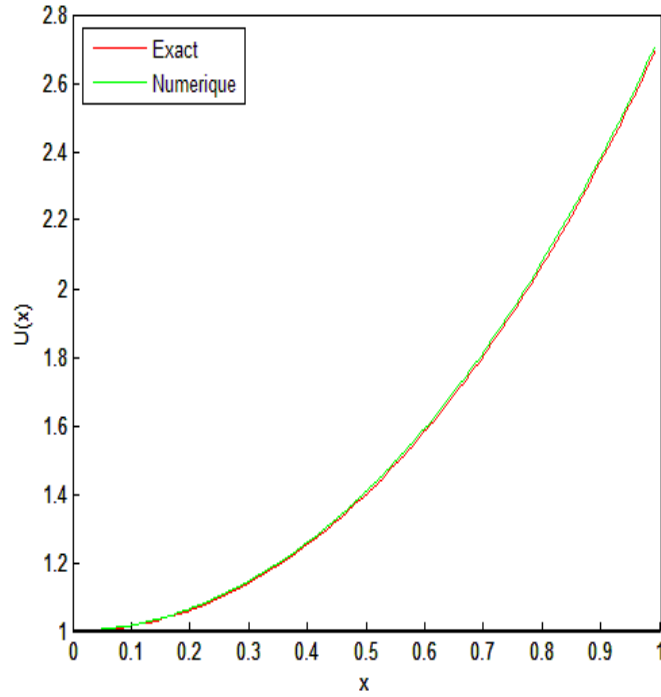


FIGURE 1.2 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique en $h=0.0125$

D’après les figures ci-dessus, on constate que lorsqu’on raffine le maillage, la solution numérique converge vers la solution exacte autrement dit l’erreur devient plus petite, ce qui est apparait dans le tableau suivant :

h	1/10	1/20	1/40	1/80
$e_h(L^\infty)$	0.1127	0.0569	0.0292	0.0148
$e_h(L^2)$	0.2275	0.1613	0.1142	0.0808
$ordre(p)$...	0.985	0.9662	0.98

TABLE 1.1 – L’erreur en fonction de pas d’espace h

Chapitre 2

Étude des schémas des volumes finis en 2D

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons des approximations pour une équation de convection-diffusion, par la méthode des volumes finies centrées sur un maillage cartésien uniforme. On commencera par introduire le problème aux limites de convection-diffusion, ensuite on va exploiter ce problème pour construire les trois schémas de discrétisations suivants :

- Schéma aux différences centrées (CDS)
- Schéma aux différences avant (UDS)
- Schéma aux différences avant modifié (MUDES)

Finallement on va terminer notre étude par l'estimation de l'erreur associée à la norme discrete H^1 qui est d'ordre $O(h^{m-1})$, $\frac{3}{2} < m \leq 3$, pour toutes solutions $u \in H^m(\Omega)$. Ces résultats peuvent être considérés comme une extension naturelle des résultats de Ewing Lazrov et Vassilevski [4].

2.1.1 Problème aux limites

Nous utilisons les notations standard de l'espace de Sobolev [10] :

$$W_p^m = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \quad m \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$$

et $W_2^m = H^m(\Omega)$. La norme dans $H^m(\Omega)$ est notée par $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ et définie par :

$$\|u\|_{m,\Omega} \equiv \left(\sum_{i=0}^m |u|_{i,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad |u|_{i,\Omega} \equiv \left(\sum_{|\alpha|=i} \|D^\alpha u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u|$$

où $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ est la norme standard de $L^2(\Omega)$. Nous utilisons également des espaces de Sobolev avec index réel $m > 0$ [10]. Nous considérons le problème suivant de convection-diffusion avec des conditions au bord de Dirichlet :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-a(x)\nabla u(x) + \underline{b}(x)u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$, $f(x)$ et $\underline{b}(x) = (b_1(x), b_2(x))$ sont des fonctions données dans Ω . Nous introduisons la forme bilinéaire sous la forme suivante :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a(x) \sum_{i=1}^2 \delta_i u(x) \delta_i v(x) dx + \int_{\Omega} (\underline{b}(x) \cdot \nabla u(x)) v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) (\nabla \cdot \underline{b}(x)) dx$$

Et la forme linéaire

$$f(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Dans ce qui suit ∂_i désigne la dérivée partielle au point x_i . Le problème variationnel associé à l'équation (2.1) peut être également formulé de la manière faible suivante : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u, v) = f(v)$ pour tous $v \in H_0^1(\Omega)$. Afin d'appliquer le théorème de Lax-Milgram la seule hypothèse non triviale à vérifier est la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$. On développe cette intégrale :

$$\int_{\Omega} (\underline{b}(x) \cdot \nabla u(x)) u(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{b}(x) u(x)) u(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{b}(x)) u^2(x) dx - \int_{\Omega} (\underline{b}(x) \cdot \nabla u(x)) u(x) dx$$

on obtient :

$$\int_{\Omega} (\underline{b}(x) \cdot \nabla u(x)) u(x) dx = -1/2 \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{b}(x)) u^2(x) dx$$

Par suite :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} a(x) \sum_{i=1}^2 (\partial_i u(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{b}(x)) u^2(x) dx \quad (2.2)$$

Les coefficients $a(x)$ et $\underline{b}(x)$ satisfont les conditions suivants :

i) $a(x) \geq \alpha > 0$, $a(x) \in W_{\infty}^1(\Omega)$

ii) $(\nabla \cdot \underline{b}(x)) \geq \beta_0 > 0$, $|b_i(x)| \leq \beta_1$, $b_i \in W_{\infty}^1(\Omega)$

d'après (2.2),il s'ensuit qu'il existe une constante $c > 0$ tel que $a(u, u) \geq C \|u\|_{1,\Omega}^2$. c'est à dire $a(u, v)$ est une forme bilinéaire coercive dans $H_0^1(\Omega)$ et d'après le lemme de Lax-Milgram le problème (2.1) possède une solution unique dans $H_0^1(\Omega)$. Pour analyser la stabilité on choisit $a(x) \in W_{\infty}^{1+\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 0$. La condition (ii) devient faible lorsque $\beta_0 = 0$ alors la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive dans $H^1(\Omega)$ et par conséquent les approximations aux différences finies auront la même propriété pour h suffisamment petit. Cependant $\beta_0 > 0$ est nécessaire pour prouver le principe du maximum discret.

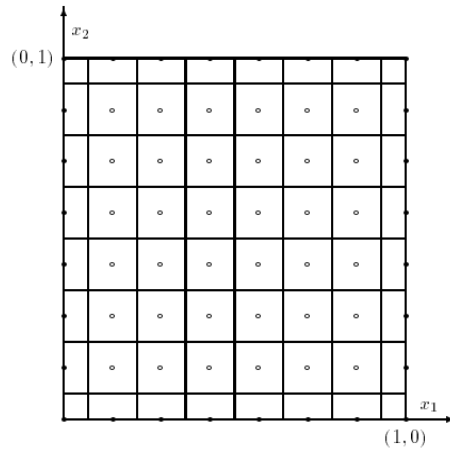


FIGURE 2.1 – Maillage "cell center"

2.1.2 Les grilles et les fonctions de grilles :

Nous supposons que Ω est un rectangle avec des côtés parallèles à l'axe x_1 et x_2 . Nous considérons le cas des maillages "cell-centered" en raison de leurs bonnes propriétés de conservation de masse, ils sont très populaires dans le transfert de chaleur,etc. Nous couvrons le plan IR^2 par des cellules carrée avec des côtes de longueur h ,les points de grilles sont des centres des volumes de contrôle (voir figure 2.1). On suppose que le bord de dirichlet Γ contient des points de grilles comme le montre (la figure 2.1) les points situés au

centre des mailles sont notés par $x = (x_1, x_2) = (x_{1,i}, x_{2,j}) = (ih, jh)$ où $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$ sont des indices entiers. Nous introduisons la notation suivante pour les diverses grilles dans $\bar{\Omega}$:

$$\bar{w} = \{(x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\Omega} : i, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$$

$$w = \bar{w} \cap \Omega, \quad \gamma = \bar{w} \setminus w$$

$$w_i^\pm = w \cup \gamma_i^\pm$$

où

$$\gamma_i^\pm = x \in \gamma : \cos(x_i, \underline{n}) = \pm 1, \quad i = 1, 2$$

ici \underline{n} désigne vecteur l'unité normale à l'extérieur de Γ . Les fonctions définies pour $x \in w$ sont appelées les fonctions de grille, on utilise toujours la double notation pour la valeur des fonctions y au point

$$x = (x_{1,i}, x_{2,j}), y(x) = y(x_{1,i}, x_{2,j}) = y_{i,j}$$

et dans les points $(x_{1,i\pm h/2}, x_{2,j}) = (x_{1,i\pm 1/2}, x_{2,j})$ et $(x_{1,i}, x_{2,j\pm h/2}) = (x_{1,i}, x_{2,j\pm 1/2})$, on a

$$y_{i,j\pm 1/2} = y(x_{1,i}, x_{2,j\pm h/2}), \quad y_{i\pm 1/2,j} = y(x_{1,i\pm h/2}, x_{2,j})$$

Pour une fonction donnée $y(x)$, $x \in \bar{w}$ nous utilisons les produits scalaires discrets et les normes suivantes :

$$(y, v) = \sum_{x \in w} h^2 y(x) v(x), \quad \|y\|_{0,w} = (y, y)^{1/2}$$

$$(y, v]_s = \sum_{x \in w_s^+} h^2 y(x) v(x), \quad \|y\|_s = (y, y]_s^{1/2}, \quad s = 1, 2$$

nous introduisons les opérateurs aux différences finies suivants pour les fonctions de grille $y(x)$:

i) Opérateur différence arrière $\Delta_1 y_{i,j} = y_{i+1,j} - y_{i,j}$ et l'opérateur différence arrière divisé

$$y_{x_1,i,j} = \Delta_1 y_{i,j} / h$$

ii) Opérateur différence avant $\Delta_1 y_{i,j} = y_{i,j} - y_{i-1,j}$ et l'opérateur différence avant divisé

$$y_{\bar{x}_1,i,j} = \bar{\Delta}_1 y_{i,j} / h$$

iii) Opérateur différence centrée divisée de second ordre :

$$y_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{\Delta_1 y_{i,j} - \bar{\Delta}_1 y_{i,j}}{h^2}$$

de même ,pour les différences qui sont définies en x_2 . Nous avons également présenté les normes discrets H^1 et H^2 :

$$|y|_{1,w}^2 = \|y_{\bar{x}_1}\|_1^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_2^2$$

$$\|y\|_{1,w}^2 = |y|_{1,w}^2 + \|y\|_{0,w}^2$$

et

$$|y|_{2,w}^2 = |y_{\bar{x}_1 x_1}|^2 + 2|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}|^2 + |y_{\bar{x}_2 x_2}|^2$$

$$\|y\|_{2,w}^2 = |y|_{2,w}^2 + \|y\|_{1,w}^2$$

nous aurons également besoin de la norme négative suivante :

$$\|y\|_{-1,w} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(y, v)|}{\|v\|_{1,w}}$$

Toutes les fonctions de grilles $y(x)$ peuvent être considérées comme un élément d'un espace vectoriel de dimension égale à n , où n est le nombre de point de la grille en w . Dans ce cas on note $y(x)$ par $y \in IR^n$, où y est un vecteur colonne de dimension n de transposé y^T .

2.2 Schémas de discrétisation :

On intègre (2.1) sur chaque volumes de contrôle e

$$\int_e \text{div}[(-a(x)\nabla u(x)) + \underline{b}(x)u(x)]dx = \int_e f(x)dx$$

puis en utilisant la formule de green et en divisant par h^2 on obtient :

$$\frac{1}{h^2} \int_{\partial e} [-a\nabla u \cdot \underline{n} + u \underline{b} \cdot \underline{n}]d\gamma = \frac{1}{h^2} \int_e f(x)dx \quad (2.3)$$

Où \underline{n} est le vecteur normal unité orienté vers l'extérieur de ∂e .

∂e est la réunion des interfaces de volumes de contrôle c'est à dire $\partial e = s_1^+ \cup s_2^+ \cup s_1 \cup s_2$.

Le côté gauche de l'inégalité (2.3) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{1}{h^2} \left[\int_{\partial e} V d\gamma + \int_{\partial e} W d\gamma \right] = \frac{1}{h^2} \left[\int_{s_1^+} V d\gamma + \int_{s_1^+} W d\gamma + \int_{s_1} V d\gamma + \int_{s_1} W d\gamma + \int_{s_2^+} V d\gamma + \int_{s_2^+} W d\gamma + \int_{s_2} V d\gamma + \int_{s_2} W d\gamma \right] \quad (2.4)$$

Où V et W sont notés par :

$$W = -a(\gamma)\nabla u(\gamma).\underline{n} \text{ et } V = \underline{b}(\gamma).\underline{nu}(\gamma)$$

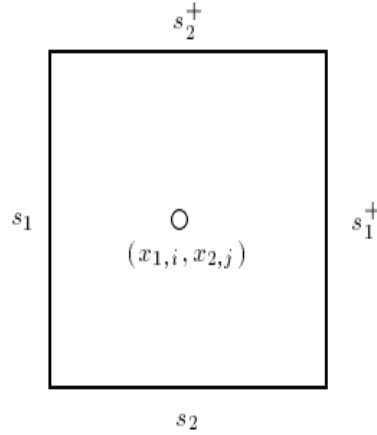


FIGURE 2.2 – Cellule $e(x)$

Dans le but de construire le schéma aux différences finies on doit diviser l'approximation de l'équation d'équilibre (3.4) en deux parties :

$$A^{(2)}y + A^{(1)}y \tag{2.5}$$

où $A^{(2)}$:la partie résultante du rapprochement des dérivées secondes et $A^{(1)}$ provient du rapprochement des dérivés premières

y : est une approximation de la solution exacte u . Les expressions $A^{(1)}y$ et $A^{(2)}y$ s'écrivent sous la forme suivante :

$$A^{(2)}y = w_{1,i,j}^+ - w_{1,i,j} + w_{2,i,j}^+ - w_{2,i,j}, \quad x \in w \quad A^{(1)}y = v_{1,i,j}^+ - v_{1,i,j} + v_{2,i,j}^+ - v_{2,i,j}, \quad x \in w \tag{2.6}$$

où $w_l^+, w_l, v_l^+, v_l,$

$l = 1, 2$ sont respectivement les approximations des intégrales

$$\int_{s_1^+} V d\gamma, \int_{s_1} V, \int_{s_2^+} V d\gamma, \int_{s_2} V d\gamma, \text{ et } \int_{s_1^+} W d\gamma, \int_{s_1} W d\gamma, \int_{s_2^+} W d\gamma, \int_{s_2} W d\gamma$$

Dans but de compléter le schéma aux différences finies ,nous devons exprimer les flux numériques $w_l^+, w_l, v_l^+, v_l, l = 1, 2$ par les valeurs approximatives $y(x)$ des solutions $u(x)$ au niveau des points de maillage .

Nous considérons les approximations suivantes :

- 1– Schéma aux différence centrées (Central difference scheme,CDS)
- 2– Schéma aux différences avant (Upwind difference scheme ,UDS)
- 3– Schéma aux différences avant modifié(Modified upwind difference scheme,MUDS)

2.2.1 Schéma aux différences centrées :

Ce schéma est dit " centrée " à cause de l'analogie de $A^{(1)}$ est une approximation aux différences centrées de la première dérivée.

Premièrement ,nous récrivons les flux $:-a(x)\nabla u(x) = (W_1(x), W_2(x))$ sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x_l} = -\frac{W_l(x)}{a(x)}, \quad x \in \Omega, \quad l = 1, 2.$$

Après ,nous intégrons l'équation pour $l = 1$ le long de l'intervalle d'extrémité $s(x_{1,i-1}, x_{2,j})$ et $(x_{1,i}, x_{2,j})$,on obtient :

$$u_{i,j} - u_{i-1,j} = - \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i}} \frac{W_1(s, x_{2,j})}{a(s, x_{2,j})} ds \approx -W_{1,i-1/2,j} \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i}} \frac{ds}{a(s, x_{2,j})}$$

nous pouvons maintenant écrire les relations approximatives suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \int_{s_1} W_1(x) ds &\approx \frac{hW_{1,i-1/2,j}}{h^2} \approx -\frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i}} \frac{ds}{a(s, x_{2,j})} \right)^{-1} \frac{[u_{i,j} - u_{i-1,j}]}{h} \\ \frac{1}{h^2} \int_{s_2} W_2(x) ds &\approx \frac{hW_{2,i,j-1/2}}{h^2} \approx -\frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} \int_{x_{2,j-1}}^{x_{2,j}} \frac{ds}{a(x_{1,i}, s)} \right)^{-1} \frac{[u_{i,j} - u_{i,j-1}]}{h} \end{aligned}$$

Les relations approximatives nous permettent de définir les relations suivantes :

$$w_l^+(x) \equiv w_{l,i,j}^+ = -\frac{k_{l,i,j}^+}{h} y_{x_{l,i,j}}, \quad l = 1, 2, \quad w_l(x) \equiv w_{l,i,j} = -\frac{k_{l,i,j}}{h} y_{\bar{x}_{l,i,j}}, \quad l = 1, 2 \quad (2.7)$$

Où

$$k_{1,i,j} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{1,i-1}}^{x_{1,i}} \frac{ds}{a(s, x_{2,j})} \right)^{-1}, \quad k_{1,i,j}^+ = k_{1,i+1,j}, \quad k_{2,i,j} = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{2,j-1}}^{x_{2,j}} \frac{ds}{a(x_{1,i}, s)} \right)^{-1}, \quad k_{2,i,j}^+ = k_{2,i,j+1} \quad (2.8)$$

Les intégrales $\int_{s_i^+} V_l^+(x)ds, \int_{s_l} V_l(x)ds$ peuvent être approchées comme suit ($l = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2} \int_{s_1^+} V_1^+(x)ds &\approx \frac{b_{1,i+1/2,j}}{h} \left[\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right] \\ \frac{1}{h^2} \int_{s_1} V_1(x)ds &\approx \frac{b_{1,i-1/2,j}}{h} \left[\frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \right]\end{aligned}$$

Et donc nous pouvons définir les approximations par

$$\begin{aligned}v_{1,i,j}^+(x) &= B_{1,i,j}^+(y_{i+1,j} + y_{i,j}), \quad B_{1,i,j}^+ = \frac{b_{1,i+1/2,j}}{2h}, \\ v_{1,i,j}(x) &= B_{1,i,j}(y_{i,j} + y_{i-1,j}), \quad B_{1,i,j} = \frac{b_{1,i-1/2,j}}{2h}, \\ v_{2,i,j}^+(x) &= B_{2,i,j}^+(y_{i,j} + y_{i,j+1}), \quad B_{2,i,j}^+ = \frac{b_{2,i,j+1/2}}{2h}, \\ v_{2,i,j}(x) &= B_{2,i,j}(y_{i,j} + y_{i,j-1}), \quad B_{2,i,j} = \frac{b_{2,i,j-1/2}}{2h},\end{aligned}\tag{2.9}$$

Substituant l'équation (2.7) et (2.9) dans (2.5) on obtient la discrétisation du Schéma aux différences centrées. Ce schéma est stable si le nombre de peclét local satisfait l'inégalité[10],[2]suivant :

$$\frac{|b_l(\cdot, \cdot)|h}{2k_l(\cdot, \cdot)} \leq 1\tag{2.10}$$

Évidement, cela est vrai lorsque h est suffisamment petit .Dans la suite de ce chapitre, nous ne tenons pas compte du schéma de CDS, en raison de sa stabilité conditionnelle .

2.2.2 Schéma aux différences avant (UDS)

Le schéma aux différences avant (UDS) est l'une des méthodes qui permettent de trouver une approximation finie stable pour les problèmes aux limites de convection-diffusion ,il utilise une approximation décentrée qui permet d'approcher les dérivées premières .Dans ce cas $A^{(2)}$ est définie comme dans CDS et les termes v_1 et v_1^+ dans $A^{(1)}$ sont approchés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}v_{1,i,j}^+(x) &= (B_{1,i,j}^+ - |B_{1,i,j}^+|)y_{i+1,j} + (B_{1,i,j}^+ + |B_{1,i,j}^+|)y_{i,j} \\ v_{1,i,j}(x) &= (B_{1,i,j} - |B_{1,i,j}|)y_{i,j} + (B_{1,i,j} + |B_{1,i,j}|)y_{i-1,j}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Pour étudier les propriétés du schéma aux différences avant (UDS) nous avons besoin des résultats auxiliaires suivants :

Proposition 2.2.1 Si $\underline{b}(x) \in (W_\infty^{1+\alpha}(\Omega))^2$, $\alpha > 0$ et $\nabla \underline{b}(x) \geq \beta_0$ pour certains $\beta_0 > 0$, alors il existe h_0 tel que pour tout $h \in (0, h_0)$ l'inégalité suivante s'écrit sous la forme :

$$(B_{1,i,j}^+ - B_{1,i,j}) + (B_{2,i,j}^+ - B_{2,i,j}) \geq c_0$$

où : $c_0 = \beta_0 - O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 2$.

Preuve :

Considérons la fonction linéaire suivante :

$$l(b_1) = \frac{b_{1,i+1/2,j} - b_{1,i-1/2,j}}{h} - \frac{\partial b_{1,i,j}}{\partial x_1}.$$

Cette fonction est bornée pour $b_1 \in (W_\infty^{1+\alpha}(\Omega))$, $0 \leq \alpha \leq 2$ et nulle pour tous les polynômes de second degré. Par application du lemme de Bramble-Hilbert[10] on obtient :

$$|l(b_1)| \leq Ch^\alpha |b_1|_{1+\alpha, \infty, e}.$$

L'inégalité est valable aussi pour b_2 ensuite par utilisation de l'inégalité triangulaire et de l'hypothèse $\nabla \underline{b}(x) \geq \beta_0$ on arrive à l'inégalité souhaitée.

Remarque 2.2.1 La proposition ci-dessus signifie que si la divergence du vecteur \underline{b} est supérieure à $\beta_0 > 0$, donc sa discrétisation est définie par :

$$\frac{b_{1,i+1/2,j} - b_{1,i-1/2,j}}{h} + \frac{b_{1,i,j+1/2} - b_{1,i,j-1/2}}{h}$$

qui est également positif pour h suffisamment petit.

Nous avons d'abord prouvé que le schéma considéré est monotone .

Proposition 2.2.2 Le Schéma aux différences avant (UDS) satisfait le principe du maximum discrét et la matrice correspondante A est une M -matrice

Preuve :

Soit $a_{i+k,j+l}$ le coefficient associé à $y_{i+k,j+l}$, $k, l = -1, 0, 1$, donc pour prouver la proposition ci-dessus il suffit de vérifier les conditions suivantes[10] :

1. $a_{i,j} > 0$

2. $a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j-1}$ et $a_{i,j+1}$ sont négatives.

3. $a_{i,j} - \sum_{k,l \pm 1} a_{i+k,j+l} > 0$ c-à-d la diagonale de A est strictement positive.

Nous avons :

1. $a_{i,j} = \sum_{l=1}^2 \left[\left(\frac{k_{l,i,j}^+}{h} + \frac{k_{l,i,j}}{h} \right) + B_{l,i,j}^+ - B_{l,i,j} + |B_{l,i,j}^+| + |B_{l,i,j}| \right] > 0$

2.

$$|B_{l,i,j}| + B_{l,i,j} \geq 0 \Rightarrow -\left(\frac{k_{l,i,j}}{h} + |B_{l,i,j}| + B_{l,i,j} \right) < 0$$

$$B_{l,i,j}^+ - |B_{l,i,j}| \leq 0 \Rightarrow -\frac{k_{l,i,j}^+}{h} + B_{l,i,j}^+ - |B_{l,i,j}| < 0$$

3.

$$a_{i,j} - \sum_{k,l \pm 1} a_{i+k,j+l} = 2 \sum_{l=1}^2 (B_{l,i,j}^+ - B_{l,i,j}) \geq 2c_0 > 0.$$

Maintenant nous allons nous focaliser sur la positivité de l'opérateur A_h et la matrice A . Dans la section 1, nous avons montré que la forme bilinéaire correspondante au problème continu (2.1) est H_0^1 - *elliptique*. Dans la proposition suivante nous établissons que l'analoge discret de la forme bilinéaire garde cette propriété.

Proposition 2.2.3 *Si $\underline{b}(x) \in (W_\infty^{1+\alpha}(\Omega))^2$, $\alpha > 0$ et $\nabla \underline{b}(x) \geq \beta_0$ alors la matrice A de UDS est une matrice réelle positive et il existe une constante C de telle sorte que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$(A_h y, y) \geq C \|y\|_{1,w}^2, \text{ pour tout, } y \in D^0 = \{y, y|_\gamma = 0.\}$$

La constante C ne dépend que du rapport $\frac{a(x)}{|\underline{b}(x)|}$.

Preuve :

Soit $z(x)$ et $y(x)$ des fonctions de grilles de D^0 donc

$$(A_h y, z) = - \sum_{x \in w} \sum_{l=1}^2 h^2 \left[\frac{k_{l,i,j}^+}{h} y_{x_i,i,j} - \frac{k_{l,i,j}}{h} y_{\bar{x}_l,i,j} \right] z_{i,j} + \sum_{x \in w} \sum_{l=1}^2 h^2 [v_{l,i,j}^+ - v_{l,i,j}] z_{i,j} \equiv I + \sum_{l=1}^2 J_l. \quad (2.12)$$

Nous transformons les sommes dans la formule (2.12) en utilisant la sommation par partie on obtient :

$$I = \sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 k_{l,i,j} y_{\bar{x}_{l,i,j}} z_{\bar{x}_{l,i,j}}$$

En utilisant (2.11) nous réécrivons J_1 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{x \in w} h^2 [(B_{1,i,j}^+ - |B_{1,i,j}^+|) y_{i+1,j} + (B_{1,i,j}^+ + |B_{1,i,j}^+|) y_{i,j} - (B_{1,i,j} - |B_{1,i,j}|) y_{i,j} \\ &\quad - (B_{1,i,j} + |B_{1,i,j}|) y_{i-1,j}] z_{i,j} \\ &= \sum_{x \in w} h^2 [B_{1,i,j}^+ y_{i+1,j} - B_{1,i,j} y_{i-1,j}] z_{i,j} + \sum_{x \in w} h^2 [B_{1,i,j}^+ - B_{1,i,j}] y_{i,j} z_{i,j} \\ &\quad - \sum_{x \in w} h^2 [|B_{1,i,j}^+| \Delta_1 y_{i,j} - |B_{1,i,j}| \overline{\Delta}_1 y_{i,j}] z_{i,j} \end{aligned} \quad (2.13)$$

nous transformons maintenant le premier terme dans la dernière égalité

$$\sum_{x \in w} h^2 [B_{1,i,j}^+ y_{i+1,j} - B_{1,i,j} y_{i-1,j}] z_{i,j} = \sum_{x \in w} h^2 [B_{1,i,j}^+ y_{i+1,j} - B_{1,i,j} y_{i,j}] z_{i,j} + \sum_{x \in w} h^2 B_{1,i,j} (y_{i,j} - y_{i-1,j}) z_{i,j}.$$

En utilisant la sommation par parties pour le premier terme ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{x \in w} h^2 [B_{1,i,j}^+ y_{i+1,j} - B_{1,i,j} y_{i-1,j}] z_{i,j} = \sum_{x \in w} h^2 B_{1,i,j} (z_{i,j} \overline{\Delta}_1 y_{i,j} - y_{i,j} \overline{\Delta}_1 z_{i,j})$$

finalement , nous obtenons :

$$\begin{aligned} (A_h y, z) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 B_{l,i,j} (z_{i,j} \overline{\Delta}_1 y_{i,j} - y_{i,j} \overline{\Delta}_1 z_{i,j}) + \sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 [B_{l,i,j}^+ - B_{l,i,j}] y_{i,j} z_{i,j} \\ &\quad + \sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 (k_{l,i,j} + |B_{l,i,j}|) y_{\bar{x}_{l,i,j}} z_{\bar{x}_{l,i,j}} \end{aligned}$$

Posons $z = y$ dans la formule ci-dessus et par l'utilisation de la *proposition*2.3.1 on arrive à démontrer l'inégalité.

2.2.3 Schéma aux différences avant modifié(MUDS)

Nous avons déjà montré que UDS est seulement de premier ordre $O(h)$ de précision. Dans le but d'obtenir une matrice à diagonale dominante et d'atteindre l'ordre de $O(h^2)$ en précision, nous modifions le schéma UDS de la manière suivante[12](voir aussi[2])

$$\begin{aligned}\int_{s_1} b_1 u d\gamma &= (B_{1,i,j}h^2 - |B_{1,i,j}h^2|)u_{i,j} + (B_{1,i,j}h^2 + |B_{1,i,j}h^2|)u_{i-1,j} + O(h) \\ &= I_1 + O(h)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{s_1} b_1 u d\gamma &= B_{1,i,j}h^2(u_{i,j} + u_{i-1,j}) + O(h^2) \\ &= I_2 + O(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{s_1} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_1 u\right) d\gamma &= -k_{1,i,j} \overline{\Delta_1} u_{i,j} + I_2 + O(h^2) \\ &= -(k_{1,i,j} - |B_{1,i,j}h^2|) \overline{\Delta_1} u_{i,j} + I_1 + O(h^2) \\ &= -\frac{k_{1,i,j}}{1 + |B_{1,i,j}h^2|/k_{1,i,j}} \overline{\Delta_1} u_{i,j} \\ &\quad - (k_{1,i,j} - |B_{1,i,j}h^2| - \frac{k_{1,i,j}^2}{k_{1,i,j} + |B_{1,i,j}h^2|}) \overline{\Delta_1} u_{i,j} + I_1 + O(h^2) \\ &= -\frac{k_{1,i,j}}{1 + |B_{1,i,j}h^2|/k_{1,i,j}} \overline{\Delta_1} u_{i,j} + \frac{B_{1,i,j}^2 h^4}{k_{1,i,j} + |B_{1,i,j}h^2|} \overline{\Delta_1} u_{i,j} + I_1 + O(h^2) \\ &= -\frac{k_{1,i,j}}{1 + |B_{1,i,j}h^2|/k_{1,i,j}} \overline{\Delta_1} u_{i,j} + I_1 + O(h^2)\end{aligned}$$

Dans cette dernière étape nous avons pris en considération que $B_1 h^2 = O(h)$. Ces formules montrent que si nous voulons obtenir un schéma aux différences finies de second ordre nous devons choisir w_1^+, w_1, v_1^+ et v_1 de manière à satisfaire les conditions suivantes :

$$w_{1,i,j}^+ + v_{1,i,j}^+ = -\frac{\tilde{k}_{1,i,j}^+}{h} y_{x_{i,i,j}} + (B_{1,i,j}^+ - |B_{1,i,j}^+|) y_{i+1,j} + (B_{1,i,j}^+ + |B_{1,i,j}^+|) y_{i,j}$$

$$w_{1,i,j} + v_{1,i,j} = -\frac{\tilde{k}_{1,i,j}}{h} y_{\bar{x}_{i,i,j}} + (B_{1,i,j} - |B_{1,i,j}|) y_{i,j} + (B_{1,i,j} + |B_{1,i,j}|) y_{i-1,j}$$

On remarque ici que nous avons divisé le schéma en deux parties seulement pour faciliter l'étude de l'analyse de l'erreur. Ensuite nous définissons le schéma aux différences avant

modifié (MUDS) comme suit : $A^{(1)}$ est identique à celui de CDS et les expressions w_l et w_l^+ dans $A^{(2)}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} w_{l,i,j}^+ &= -\frac{1}{h}(\tilde{k}_{l,i,j}^+ + |B_{l,i,j}^+ h^2|)y_{x_{l,i,j}}, \quad l = 1, 2 \\ w_{l,i,j} &= -\frac{1}{h}(\tilde{k}_{l,i,j} + |B_{l,i,j} h^2|)y_{\bar{x}_{l,i,j}}, \quad l = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Où

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{1,i,j} &= \frac{k_{1,i,j}}{1 + |B_{1,i,j} h^2|/k_{1,i,j}}, \quad \tilde{k}_{1,i,j}^+ = \tilde{k}_{1,i+1,j} \\ \tilde{k}_{2,i,j} &= \frac{k_{2,i,j}}{1 + |B_{2,i,j} h^2|/k_{2,i,j}}, \quad \tilde{k}_{2,i,j}^+ = \tilde{k}_{2,i+1,j} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Proposition 2.2.4 *MUDS satisfait le principe du maximum discret et la matrice correspondante A est une $M -$ matrice*

Proposition 2.2.5 *Si $\underline{b}(x) \in (W_\infty^{1+\alpha}(\Omega))^2$, $\alpha > 0$ et $\nabla \underline{b}(x) \geq \beta_0$ alors la matrice A de MUDS est une matrice réelle positive et il existe une constante C de telle sorte que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$(A_h y, y) \geq C \|y\|_{1,w}^2, \quad \text{pour tout, } y \in D^0 = \{y, y|_\gamma = 0.\}$$

La constante C ne dépend que du rapport $\frac{\alpha(x)}{|\underline{b}(x)|}$.

En résumé ,l'approximation suivante permet de formuler le problème discret (2.1) sous la forme suivante : Trouver $y(x)$, qui satisfait l'équation de différence finies :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 (w_l^+(x) - w_l(x)) + \sum_{l=1}^2 (v_l^+(x) - v_l(x)) &= \phi, \quad \text{dans } w \\ y(x) &= 0, \quad \text{sur } \gamma \end{aligned} \quad (2.16)$$

où w_l et v_l sont définies par (2.7),(2.14),(2.9) et (2.11) respectivement et $\phi = \frac{1}{h^2} \int_e f(x) dx$.

Ces schémas peuvent s'écrire sous la forme d'un système d'équations algébriques linéaires

$$Ay = \phi \quad (2.17)$$

2.3 Étude de la stabilité et l'analyse d'erreur

La stabilité du problème (2.17) a une conséquence simple sur la positivité de la matrice A . Pour le savoir, on doit prouver le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *Pour tous les schémas aux différences finies considérés nous avons l'estimation a priori suivante :*

$$\| y \|_{1,w} \leq C \| \phi \|_{-1,w}$$

Où y est la solution discrète et ϕ le côté droit du système (2.17) (la constante C ne dépend pas de y et ϕ)

Preuve :

La preuve est basée sur la coercivité de l'opérateur A et sur la définition de la norme $\| \cdot \|_{-1,w}$

$$\| y \|_{1,w}^2 \leq (A_h y, y) = C(\phi, y) \leq C \| \phi \|_{-1,w} \| y \|_{1,w}$$

Remarque 2.3.1 *Puisque $\| \phi \|_{-1,w} \leq \| \phi \|_{0,w}$ et $\| y \|_{0,w} \leq \| y \|_{1,w}$ nous pouvons également obtenir l'estimation suivante :*

$$\| y \|_{0,w} \leq C \| \phi \|_{0,w}$$

2.3.1 Estimation d'erreur dans H^1 associé à la norme discrète

L'analyse d'erreur présentée ici est faite dans le cadre général des méthodes développées dans [1] et [8]. On considère seulement les cas où $a(x) = 1$. Soit

$$z(x) = y(x) - u(x), \quad x \in w$$

l'erreur de la méthode de différences finies. Remplaçant $y = z + u$ dans (2.17) on obtient

$$Az = \phi - Au \equiv \psi. \tag{2.18}$$

Par utilisation de (2.4) et (2.17), on transforme ψ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{1}{h} \int_{s_l^+} -\frac{\partial u}{\partial x_l} d\gamma - hw_l^+ \right] - \left[\frac{1}{h} \int_{s_l} -\frac{\partial u}{\partial x_l} d\gamma - hw_l \right] \right\} \\ & + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{h} \left\{ \left[\frac{1}{h} \int_{s_l^+} b_l u d\gamma - hv_l^+ \right] - \left[\frac{1}{h} \int_{s_l} b_l u d\gamma - hv_l \right] \right\} \equiv \psi_1 + \psi_2 = \psi \end{aligned}$$

Dans laquelle l'erreur de troncature locale ψ a été divisée en deux termes :

$$\begin{aligned} \psi_1 & \equiv \frac{1}{h} \sum_{l=1}^2 [\eta_l^+(x) - \eta_l(x)], & \psi_2 & \equiv \frac{1}{h} \sum_{l=1}^2 [\mu_l^+(x) - \mu_l(x)] \\ \eta_l & = \frac{1}{h} \int_{s_l} -\frac{\partial u}{\partial x_l} d\gamma - hw_l, & \mu_l & = \frac{1}{h} \int_{s_l} b_l u d\gamma - hv_l \end{aligned} \quad (2.19)$$

où ψ_2 désigne l'approximation d'erreur des dérivées premières et ψ_1 est l'approximation d'erreur des dérivées secondes . Les composantes de l'erreur de troncature locale η_l et μ_l sont définies sur w_l^+ , $l = 1, 2$ En utilisant la sommation par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} (\psi_2, z) & = \sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 \left[\frac{\eta_l^+(x) - \eta_l(x)}{h} \right] z(x) = - \sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 \eta_l(x) z_{\bar{x}_l} \\ & \leq \left(\sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 \eta_l^2(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{l=1}^2 \sum_{x \in w} h^2 z_{\bar{x}_l}^2 \right)^{1/2} \leq (\|\eta_1\|_1 + \|\eta_2\|_2) \|z\|_{1,w}. \end{aligned}$$

De même :

$$(\psi_1, z) \leq (\|\mu_1\|_1 + \|\mu_2\|_2) \|z\|_{1,w}.$$

En résumant ces résultats et par exploitation des propositions (2.2.3) et (2.2.5) nous obtenons les résultats principales suivants :

Lemme 2.3.2 *L'erreur $z(x) = (y(x) - u(x))$, $x \in w$ de tous les schémas de différences finies considérés satisfait l'estimation a priori suivante :*

$$\|z\|_{1,w} \leq C \sum_{l=1}^2 (\|\eta_l\|_1 + \|\mu_l\|_1) \quad (2.20)$$

Où les composantes η_l, μ_l , $l = 1, 2$ de l'erreur de troncature locale sont définies par (2.19) avec le flux approximatif w_l^+, w_l, v_l^+ et v_l , $l = 1, 2$ est déterminé par (2.7), (2.11), et (2.14) des schémas UDS et MUDS ,respectivement (La constante C ne dépend pas de h ou z)

Dans l'objectif d'utiliser l'estimation (2.20) du lemme (2.3.2) on doit majorer les normes associées à des composantes d'erreur de troncature locale η_l, μ_l , $l = 1, 2$ définie par (2.19). Ces estimations sont données dans le lemme donné ci-dessous :

Lemme 2.3.3 *On suppose que la solution du problème (2.1) est H^m -régulière, $3/2 < m$ et les composantes de l'erreur de troncature locale η_l, μ_l , $l = 1, 2$ définissent par (2.21) avec des flux approximatifs w_l^+, v_l^+ et v_l , $l = 1, 2$ définie par (2.7), (2.11), (2.14) et (2.16) Alors l'estimation suivante est vérifiée :*

$$|\eta_l| \leq Ch^{m-2}|u|_{m, \bar{e}}, \quad 3/2 < m \leq 3 \quad (2.21)$$

$$|\mu_l| \leq \begin{cases} Ch^{m-1} \|b_l\|_{1, \infty, \Omega} |u|_{m, \bar{e}} & \text{pour MUDS} \\ C[\|b_l\|_{0, \infty, \Omega} |u|_{1, \bar{e}} + h^{m-1} \|b_l\|_{1, \infty, \Omega} |u|_{m, \bar{e}}] & \text{pour UDS} \end{cases} \quad (2.22)$$

Où $1 < m \leq 2$; $\bar{e} = e_{i-1, j} \cup e_{i, j}$, pour $l = 1$ et $\bar{e} = e_{i, j-1} \cup e_{i, j}$, pour $l = 2$

Maintenant, on arrive au résultat principal de ce paragraphe

Théorème 2.3.1 *Si la solution $u(x)$ du problème (2.1) est H^m -régulière, avec $3/2 < m \leq 3$ Alors :*

i) *Le schéma MUDS défini par (2.14) et (2.9) et d'ordre de convergence $O(h^{m-1})$ dans la norme discrète associée à $H^1(\Omega)$*

$$\|y - u\|_{1, w} \leq Ch^{m-1} (1 + h^\delta (\|b_1\|_{0, \infty, \bar{e}} + \|b_2\|_{1, \infty, \bar{e}})) \|u\|_{m, \Omega}$$

ii) *Le schéma UDS défini par (2.7) et (2.11) est au plus de premier ordre de convergence dans l'espace $H^1(\Omega)$ associé à la norme discrète et*

$$\|y - u\|_{1, w} \leq Ch(\|b_1\|_{0, \infty, \Omega} + \|b_2\|_{0, \infty, \Omega}) |u|_{1, \Omega} + Ch^{m-1} (1 + h^\delta (\|b_1\|_{1, \infty, \Omega} + \|b_2\|_{1, \infty, \Omega})) \|u\|_{m, \Omega}.$$

avec

$$\delta = \begin{cases} 1, & 3/2 < m \leq 2 \\ 3 - m, & 2 \leq m \leq 3 \end{cases}$$

Preuve :

Dans le lemme 2.3.3 nous avons prouvé l'estimation des composantes $\eta_l, \mu_l, l=1,2$ de l'erreur de troncature locale. Donc

$$\|\eta_l\| = \left(\sum_{x \in w_l^+} h^2 \eta_l^2(x) \right)^{1/2} \leq Ch^{m-1} \left(\sum_{x \in w_l^+} |u|_{m,\bar{e}}^2 \right)^{1/2} \leq Ch^{m-1} |u|_{m,\Omega}.$$

De la même manière ,pour $\|\mu_l\|$

$$\|\mu_1\|_1 \leq Ch^m \|u\|_{m,\Omega} \|b_1\|_{1,\infty,\Omega}$$

Lorsque le schéma MUDES est utilisé,et

$$\|\mu_1\|_1 \leq C(h^m \|u\|_{m,\Omega} \|b_1\|_{1,\infty,\Omega} + h \|b_1\|_{1,\infty,\Omega} |u|_{1,\Omega})$$

par ailleurs,ce qui termine la preuve.

Chapitre 3

Simulation numérique de l'équation de transport

3.1 Introduction

La simulation numérique est un ensemble des calculs réalisées via un ordinateur, et pouvant générer plusieurs phénomènes complexes dont on voudrait étudier l'évolution. Pour surmonter ces difficultés, on doit reposer sur un modèle mathématique comportant des équations aux dérivées partielles. On va s'intéresser dans ce chapitre à la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles liées au problème de stockage de CO₂. L'hydrodynamique des écoulements est décrite par un système d'équations composé de la loi de Darcy et de l'équation de conservation de la masse. Le changement climatique apparaît comme l'un des principaux dangers qui menacent notre environnement. Le CO₂ est cité comme l'un des facteurs de risque majeurs, puisque son augmentation serait responsable de la tendance au réchauffement climatique, et pourrait avoir des conséquences dramatiques si aucune mesure n'est prise. Le transport, le captage et le stockage de CO₂ constituent un défi important pour lutter contre l'accumulation de CO₂ dans l'atmosphère. Une autre solution est de réduire la consommation d'énergie fossile, ou de mettre en œuvre des combustibles ou des carburants émettant moins de CO₂ par unité d'énergie produite. La technique du stockage du dioxyde de carbone pourrait limiter les émissions de CO₂.

dans l'atmosphère. Le principe est de capturer le CO₂ par un dispositif et le compresser puis l'injecter dans des réservoirs ayant pour propriétés de ne plus le laisser échapper. Parmi ces réservoirs possibles on peut utiliser d'anciennes mines de sel, des nappes aquifères salines, d'anciennes réservoirs de pétrole ou de gaz naturel, et tout autres sorte de réservoirs géologiques étanches et profond. Lors de l'injection de CO₂, différents phénomènes interviennent :

- Le transport : convection, diffusion, dispersion.
- Les réactions chimiques : dissolution de CO₂ dans l'eau, réactions entre l'eau et les roches. On se restreint dans ce chapitre au phénomène de transport plus particulièrement l'équation de convection-diffusion. A cette équation de transport, on peut adjoindre différents termes décrivant les mécanismes chimiques. La résolution de l'équation du transport nécessite de connaître la vitesse de l'écoulement, ensuite nous allons traiter la discrétisation de cette équation mono-dimensionnelle par la méthode des volumes finis. La suite du chapitre se concentre sur la simulation numérique dans un milieu homogène, dans lequel nous allons tester et comparer le schéma de discrétisation avec la solution analytique en variant le coefficient de diffusion et le pas de discrétisation spatial et temporel.

3.2 Le Modèle Mathématique

Dans cette section, nous décrivons quelques notions fondamentales liées à la description d'un milieu poreux et au transport de solutés réactifs à travers ce milieu. L'objectif est de rappeler l'origine des équations que nous allons traiter dans la suite de ce travail. Ces équations sont dérivées principalement par applications de la loi physique du transfert de masse.

3.2.1 Propriété des milieux poreux

Un milieu poreux est un solide contenant les espaces vides (pores), reliés ou non, dispersés dans lui d'une façon régulière ou aléatoire. Ces soi-disant pores peuvent contenir une série de fluides tels que l'air, l'eau, le pétrole etc. Si les pores représentent une certaine

partie du volume en bloc, on peut former un réseau complexe qui peut porter des fluides.

La porosité :

Le sol et le sous-sol ne peuvent contenir de l'eau que s'ils possèdent une porosité significative. La porosité totale d'un sol ou d'une roche est le rapport du volume des vides et des interstices V_p de cette roche par rapport au volume total de l'échantillon V_0

$$\phi = \frac{V_p}{V_0},$$

où V_p : Volume des pores et V_0 : Volume total.

La porosité ϕ varie entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide).

La perméabilité :

La perméabilité d'un milieu poreux, notée k , caractérise l'aptitude de se laisser traverser par un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. Cette constante caractéristique d'un milieu poreux, dépend de la forme des grains, de la porosité et de la connectivité des pores [13]. Donc, indépendante des caractéristiques du fluide. Elle représente le volume de fluide traversant en une unité de temps, sous l'effet d'une unité de gradient de pression une unité de section orthogonale à la direction d'écoulement.

La conductivité hydraulique :

La conductivité hydraulique (K) est un coefficient dépendant des propriétés du milieu poreux et de celles du fluide concerné, qui exprime l'aisance qu'à ce fluide à se déplacer à travers la tortuosité des vides ou encore l'aptitude du milieu poreux à laisser circuler ce fluide à travers lui.

3.2.2 Caractéristiques physiques d' un milieu poreux

Le milieu poreux présente deux couples de caractéristiques physiques :

- isotropie ou anisotropie
- homogénéité ou hétérogénéité

Un milieu est dit isotrope lorsque ses caractéristiques physiques (granulométrie en particulier) sont constantes dans les trois directions de l'espace. Dans le cas contraire, il est anisotrope.

Un milieu est homogène lorsqu'il présente, en tous points dans le sens de l'écoulement, des caractéristiques physiques constantes. Dans le cas contraire, le milieu est hétérogène.

Un milieu poreux homogène peut être isotrope ou anisotrope. Un milieu poreux hétérogène est toujours anisotrope Figure 3.1.

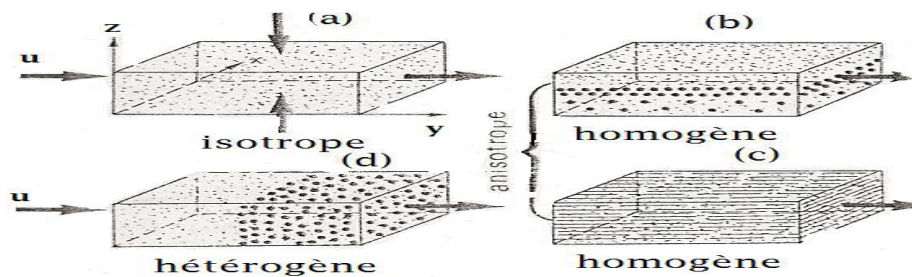


FIGURE 3.1 - figure d'isotropie (a) et anisotropie (b, c, d). Homogénéité (b, c) et hétérogénéité (d)

3.2.3 Écoulement dans un milieu poreux

Le processus d'écoulement est gouverné par les relations issues de la loi de *Darcy* et de l'équation de conservation de la masse.

a) Loi de Darcy :

La loi expérimentale de Darcy ou loi de Darcy a été établie par Henry Darcy (1856)[7]. Elle est notamment utile pour calculer les écoulements souterrains de l'eau ou liquide, verticalement à travers le sol vers la nappe par exemple, ou à travers un milieu poreux (comme, par exemple, dans un barrage en terre).

Pour un fluide incompressible la loi de Darcy s'écrit :

$$u = -\frac{k\rho g}{\mu}\nabla\left(\frac{P}{\rho g} + z\right) = -\kappa\nabla h. \quad (3.1)$$

- u : Le vecteur vitesse de Darcy.
- k : La perméabilité intrinsèque du milieu.
- ρ : La masse volumique du fluide.
- g : La constante de gravité.
- z : La cote verticale.
- P : La pression.
- $h = \frac{P}{\rho g} + z$: La charge hydraulique.
- κ : Le tenseur de perméabilité.
- μ : La viscosité.

b) L'équation de conservation de la masse :

L'équation de conservation de la masse exprime le principe de la conservation de la masse d'un fluide en mouvement, dans un volume élémentaire, elle s'écrit sous la forme :

$$S\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(u) = f. \quad (3.2)$$

- S : Le coefficient d'emmagasinement.
- f : Le terme source pour l'espèce par unité de volume, qui modélise le cas échéant, l'émission par une source ponctuelle.

3.2.4 Équation de convection-diffusion

L'équation du transport avec convection-diffusion est donné par :

$$\phi\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(-D\vec{\nabla}C) + \text{div}(C\vec{u}) = f. \quad (3.3)$$

- C : La concentration de soluté, $[ML^{-3}]$
- \vec{u} : La vitesse de filtration de l'écoulement c.à.d la vitesse de Darcy, $[LT^{-1}]$
- ϕ : La porosité.
- f : Le terme source, $[MT^{-1}]$.
- D : Le tenseur de dispersion-diffusion représentant la contribution de la dispersion cinématique et de la diffusion moléculaire.

On résout d'abord l'équation de Darcy et la conservation de la masse indépendamment du transport pour obtenir la vitesse. En suite, cette vitesse est utilisée pour simuler le transfert du polluant.

3.3 Discrétisation par la méthode des volumes finis

3.3.1 Étude de schéma numérique de l'équation convection-diffusion en 1D

Nous allons considérer l'équation de convection-diffusion monodimensionnelle sur un intervalle borné $\Omega =]0; L[$. Cette équation peut s'écrire de la manière suivante :

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (-D \frac{\partial c}{\partial x} + uc) = f \quad 0 < x < L, 0 < t < T \quad (3.4)$$

Conditions initiales et aux bords

A cette équation, on associe une condition initiale $C(x, 0) = C_0(x)$ et des conditions aux bords. Dans la suite, on choisit d'imposer en $x = 0$ une condition de Dirichlet $C(t, 0) = C_g(t)$, et en $x = L$ $C(t, L) = C_d(t)$.

On suppose que la porosité ϕ_i et la diffusion D_i sont constantes sur la maille i . On choisit d'évaluer $D_{i+1/2}$ en faisant une moyenne harmonique de D_i et D_{i+1} et On choisit d'évaluer le flux convectif de la manière à ce qu'il soit décentré en amont. La moyenne

harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses.

Notations indicielles

On note C_i la valeur discrète de $C(x)$ au point (x_i) soit $C_i = C(x_i)$.

De même pour la dérivée de $C(x)$ au noeud (x_i) on note :

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_i$$

On approche $\frac{\partial C_i}{\partial x}$ par le quotient différentiel $\frac{C_{i+1}-C_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$.

On approche $\frac{\partial C^n}{\partial t}$ par le quotient différentiel $\frac{C^{n+1}-C^n}{\Delta t}$.

On note $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$.

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x) dx$$

Δt désigne le pas du temps

$$D_{i+1/2} = \frac{2D_i D_{i+1}}{D_i + D_{i+1}} \quad \text{avec } D_{1/2} = D_1 \text{ et } D_{N+1/2} = D_N \text{ et } h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

3.3.2 Discrétisation en espace

On traite la discrétisation en espace et en temps séparément on utilise le schéma implicite en temps pour les différents termes de l'opérateur du transport. Pour la discrétisation en espace, et pour toutes les expériences numériques, on utilise une méthode des volumes finis centrées sur les mailles. Les mailles sont notées par les indices $i = 1, \dots, N$ et les extrémités des mailles par les indices $i + 1/2, i = 0, \dots, N$. L'intervalle $[0, L]$ est divisé en N intervalles $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de longueur $h_i, i = 1, \dots, N$ avec $x_{1/2} = 0, x_{N+1/2} = L$.

On écrit l'équation (3.1) sous la forme :

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f \tag{3.5}$$

où : $\varphi(x, t) = -D \frac{\partial c}{\partial x} + uc$ est le flux de soluté traversant le point x à l'instant t . Ce flux est la somme de deux flux $\varphi = \varphi_d + \varphi_c$ un flux de diffusion $\varphi_d = -D \frac{\partial c}{\partial x}$ et un flux de convection $\varphi_c = uc$.

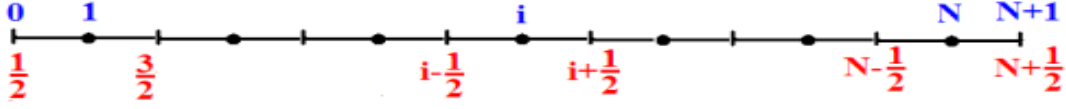


FIGURE 3.2 – Discrétisation du domaine Ω .

On intègre l'équation (3.5) sur $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ on obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \phi \frac{\partial c}{\partial t} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f dx$$

$$\phi_i h_i \frac{dc_i}{dt} + \varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2} = f_i h_i$$

$$\phi_i h_i \frac{dc_i}{dt} + \varphi_{a,i+1/2} + \varphi_{d,i+1/2} - \varphi_{a,i-1/2} - \varphi_{d,i-1/2} = f_i h_i$$

où les flux $\varphi_{a,i+1/2}$ et $\varphi_{d,i+1/2}$ sont définis par :

$$\varphi_{d,i+1/2} = -D_{i+1/2} \left(\frac{C_{i+1} - C_i}{h_{i+1/2}} \right), \quad \varphi_{a,i+1/2} = u c_i$$

3.3.3 Discrétisation en temps

Convection et diffusion : schéma implicite

On discrétise l'intervalle $[0, T]$ par le pas de temps Δt , et on note par C_i^n la valeur de $C_i(n\Delta t)$.

Le schéma totalement implicite s'écrit : On intègre (3.5) en un point x_i par rapport au temps donc on aura :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_i \frac{\partial C_i}{\partial t} dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_i dt$$

on approche $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_i, t)$ par le coefficient différentiel $\frac{\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}}{h_i}$ tel que $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ donc on obtient :

$$\phi_i (C_i^{n+1} - C_i^n) + \Delta t \frac{\varphi_{i+1/2}^{n+1} - \varphi_{i-1/2}^{n+1}}{h_i} = \Delta t f_i^n$$

où $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ce qui donne :

$$h_i \phi_i (C_i^{n+1} - C_i^n) + (\varphi_{d,i+1/2}^{n+1} + \varphi_{a,i+1/2}^{n+1} - \varphi_{d,i-1/2}^{n+1} - \varphi_{a,i-1/2}^{n+1}) \Delta t = f_i^n h_i \Delta t$$

on a alors après remplacement des quantités :

$$\begin{aligned} \Phi_i h_i C_i^{n+1} - D_{i+1/2} \Delta t \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - C_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} \right) + D_{i-1/2} \Delta t \left(\frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{h_{i-1/2}} \right) + u \Delta t C_i^{n+1} \\ - u \Delta t C_{i-1}^{n+1} = \Phi_i h_i C_i^n + f_i^n h_i \Delta t \end{aligned}$$

En regroupant les termes on obtient :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{D_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \Delta t - u \Delta t \right) C_{i-1}^{n+1} + \left(\phi_i h_i + \frac{D_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \Delta t + \frac{D_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \Delta t + u \Delta t \right) C_i^{n+1} \\ - \left(\frac{D_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \Delta t \right) C_{i+1}^{n+1} = \phi_i h_i C_i^n + f_i^n h_i \Delta t \end{aligned}$$

Conditions aux bords

Pour $i = 1$, on a imposé une condition de Dirichlet à gauche donc on sait la concentration au point x_0 :

$$h_1 \phi_1 (C_1^{n+1} - C_1^n) + (\varphi_{d,3/2}^{n+1} + \varphi_{a,3/2}^{n+1} - \varphi_{d,1/2}^{n+1} - \varphi_{a,1/2}^{n+1}) \Delta t = f_1^n h_1 \Delta t$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left(\phi_1 h_1 + \frac{D_{3/2}}{h_{3/2}} \Delta t + u \Delta t + \frac{D_{1/2}}{h_{1/2}} \Delta t \right) C_1^{n+1} - \frac{D_{3/2}}{h_{3/2}} \Delta t C_2^{n+1} \\ = \phi_1 h_1 C_1^n + \left(\frac{D_{1/2}}{h_{1/2}} \Delta t + u \Delta t \right) C_1^{n+1} + f_1^n h_1 \Delta t \end{aligned}$$

Lorsque $i = N$, on a

$$\begin{aligned} h_N \phi_N (C_N^{n+1} - C_N^n) + (\varphi_{d,N+1/2}^{n+1} + \varphi_{a,N+1/2}^{n+1} - \varphi_{d,N-1/2}^{n+1} - \varphi_{a,N-1/2}^{n+1}) \Delta t \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_N^n h_N \Delta t \end{aligned}$$

Par la condition de Dirichlet imposée dans les hypothèses on a :

$$\begin{aligned} \phi_N h_N (C_N^{n+1} - C_N^n) - \left(\frac{D_{N+1/2}}{h_{N+1/2}} \right) C_{N+1}^{n+1} \Delta t + \left(\frac{D_{N+1/2}}{h_{N+1/2}} \right) C_N^{n+1} \Delta t + \left[u C_N^{n+1} + \frac{D_{N-1/2}}{h_{N-1/2}} (C_N^{n+1} - C_{N-1}^{n+1}) \right. \\ \left. - u C_{N-1}^{n+1} \right] \Delta t = f_N^n h_N \Delta t \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} C_{N-1}^{n+1} \left(-\frac{D_{N-1/2}}{h_{N-1/2}} - u \right) \Delta t + C_N^{n+1} \left(\phi_N h_N + u \Delta t + \frac{D_{N+1/2}}{h_{N+1/2}} + \frac{D_{N-1/2}}{h_{N-1/2}} \Delta t \right) \\ = \phi_N h_N C_N^n + \left(\frac{D_{N+1/2}}{h_{N+1/2}} \right) C_{N+1}^{n+1} \Delta t + f_N^n h_N \Delta t. \end{aligned}$$

Le système linéaire :

On a donc un système linéaire sous la forme $AC = B$ avec $C = (c_1^{n+1}, \dots, c_N^{n+1})^T$ est la solution de système. La matrice tridiagonale A est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \phi_1 h_1 + a_d + a_v & -a_v & & & 0 \\ -a_d & \phi_2 h_2 + a_d + a_v & -a_v & & \\ & -a_d & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -a_v \\ 0 & & & -a_d & \phi_N h_N + a_d + a_v \end{pmatrix}$$

avec $a_d = \frac{D_{i-\frac{1}{2}}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \Delta t + \Delta t u$ et $a_v = \frac{D_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \Delta t$

Le vecteur de second membre B contient les conditions aux limites.

$$B = \begin{pmatrix} (2\frac{D_1}{h_2+h_1} + u)\Delta t c_1^{n+1} + \phi_1 h_1 c_1^n + \Delta t h_1 f_1^n \\ \phi_2 h_2 c_2^n + f_2^n h_2 \Delta t \\ \vdots \\ \phi_{N-1} h_{N-1} c_{N-1}^n + f_{N-1}^n h_{N-1} \Delta t \\ \phi_N h_N c_N^n + f_N^n h_N \Delta t + (\frac{D_{N+1/2}}{h_{N+1/2}}) C_d^{n+1} \Delta t \end{pmatrix}$$

Pour calculer C^{n+1} , il est alors nécessaire d'inverser la matrice A . Il faut alors absolument utiliser un algorithme d'inversion par exemple LU Comme A est à diagonale strictement dominante i. e :

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

Donc A est inversible, et le problème discret admet une unique solution.

3.4 Résultats numériques

3.4.1 Simulations Numériques

La solution analytique

Dans un domaine monodimensionnel on peut obtenir la solution analytique de l'équation de convection-diffusion on impose une concentration constante en $x = 0$ et $x = 1$ à

$t \geq 0$ sous la forme :

$$\begin{cases} c(x, t) = \exp(x) + x(x - 1)uDt \\ d_1 = c(0, t) = 1 \\ d_2 = c(1, t) = \exp(1) \end{cases}$$

$f(x, t)$ a été trouvé en substituant $c(t, x)$ dans l'équation de transport :

$$f(x, t) = x(x - 1) + 2utx - t(u + 2D) + \exp(x)(u - D)$$

Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique

Sur toutes les figures ,les courbes rouges représentent les solutions analytiques les courbes bleues représentent la concentration dans le cas de schéma implicite.

On fixe le pas de temps à $dt = 0.001$ et on prend

$u = 10, \phi = 1$ et $D = 0.1$.

Les figures ci-dessous représentent l'évolution de la concentration dans le milieu homogène au différent pas de maillage h .

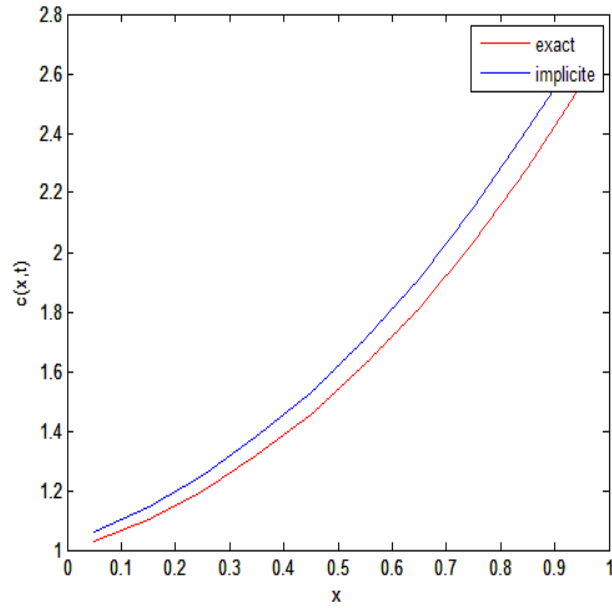


FIGURE 3.3 – Evolution de la concentration avec $h=0.1$

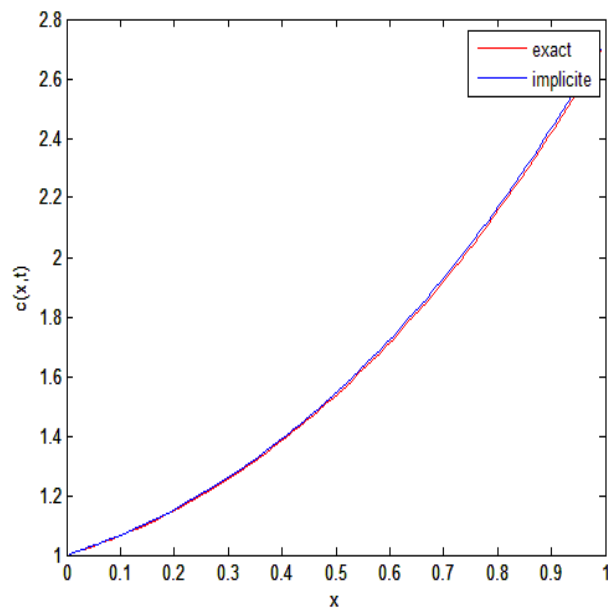


FIGURE 3.4 – Evolution de la concentration avec $h=0.0125$

D'après les figures ci-dessus, on constate que lorsqu'on raffine le maillage, la solution numérique converge vers la solution exacte autrement dit l'erreur devient plus petit, ce

qui est apparait dans le tableau suivant :

h	1/10	1/20	1/40	1/80
$e_h(L^\infty)$	0.1528	0.0803	0.0410	0.0208
$e_h(L^2)$	0.3116	0.2174	0.1537	0.1082
<i>ordrep</i>	...	0.928	1.017	0.979

TABLE 3.1 – L'erreur en fonction de h

Deuxième test :

Dans cas tests on fixe $dt = 0.001$, $u = 10$ et $\phi = 1$, on fait varier le coefficient de diffusion et on étudie l'erreur entre la solution exacte avec la solution numérique aux différents pas de maillage :

h	1/10	1/20	1/40	1/80
$e_h(L^\infty)$	0.1023	0.0544	0.0284	0.0145
$e_h(L^2)$	0.2199	0.1633	0.1193	0.0859
<i>ordre</i>	...	0.911	0.937	0.9698

TABLE 3.2 – L'erreur en fonction de h , quand $D=1$

h	1/10	1/20	1/40	1/80
$e_h(L^\infty)$	0.1787	0.0909	0.0457	0.0228
$e_h(L^2)$	0.3329	0.2315	0.1623	0.1142
<i>ordre</i>	...	0.9751	1.992	1

TABLE 3.3 – L'erreur en fonction de h , quand $D=0.001$

h	1/10	1/20	1/40	1/80
$e_h(L^\infty)$	0.1791	0.0912	0.0460	0.0231
$e_h(L^2)$	0.3332	0.2317	0.1625	0.1144
<i>ordre</i>	...	0.9736	0.9873	0.9937

TABLE 3.4 – L'erreur en fonction de h , quand $D=0.00001$

Les tableaux ci dessus montrent que l'erreur augmente quand le coefficient de diffusion et plus petit c'est-à-dire lorsque le milieu est caractérisé par une faible diffusion .

Conclusion générale

Les méthodes des volumes finis présentent des qualités considérables qui les font souvent employées pour les équations de conservations, les problèmes industriels, biologiques, etc dans lesquels de nombreux phénomènes physiques sont couplés.

Dans la première partie de ce travail, nous avons appliqué une approche numérique aux volumes finis pour la résolution de l'équation de convection-diffusion stationnaire unidimensionnel, dans laquelle nous avons prouvé la consistance et la convergence du schéma trouvé, puis nous avons présenté des tests numériques.

Dans la deuxième partie, on s'est intéressé à l'étude de l'équation de convection-diffusion en deux dimensions par la méthode des volumes finis en utilisant différents schémas d'approximation des flux numériques. Nous avons étudié un schéma numérique qui est inconditionnellement stable et de second ordre de précision.

Dans la troisième partie, nous nous sommes intéressés à la résolution numérique de l'équation de transport dans un milieu homogène. Une comparaison entre la solution analytique et la solution numérique a été présentée tout en mettant en oeuvre différentes valeurs de pas de maillage et de coefficients de diffusion.

Bibliographie

- [1] : A.A. SAMARSKII,R.D LAZAROV, AND V.L.MAKAROV,Difference schemes for Differential Equations Having Generalized solutions,Vyssshaya Shkola Publishers,Moskow,1987(Russian).
- [2] :A.A.SAMARSKII,Theory of Difference Schemes, Nauka,Moskow,1983(Russian).
- [3] : Abbés Azzi, « Méthodes numériques appliquées aux calculs des écoulements et du transfert de chaleur », Faculté de Génie mécanique USTO, 2001
- [4] :A.K.RUNCHAL,Convergence and accuracy of three finite difference schemes for a two-dimensional convection and conduction problem,Int.J.Meth.Engin,4(1972),pp.541-550.
- [5] :B.HEINRICH,Finite Difference methods on Irregular Networks,Akademie-Verlog,Berlin,1987.
- [6] :Gallouet.T, R.Herbin and R.Eymard :Finite Volume Methods , SIAM J.January 2003.
- [7] : Laila AMIR, Modèle couplés en milieu poreux. PhD thèses, Université Paris Dauphine, 2008.
- [8] : N. Z. Sun and J. F. Thovert, Mathematical modeling of ground water pollution,Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [9] :O.AXELSSON AND I.GUSTAFSON ,A modified upwind scheme for convective transport equations and the use for conjugate gradient method for the solution of non-symmetric systems of equations,J.int.Math.Appl,.23(11)(1979) ,pp.867-889.
- [10] :R.A.ADAMS,Sobolev Spaces,Academic Press,New york,1975.
- [11] :R.D.LAZROV,ILYAD.MISHEV AND P.S VASSILEVSKI.Finite volume methods for convection-diffusion problems .AMS 65N05,65 N15.
- [12] :R.E.EWING,R.D.LAZAROV AND P.S.VASSILEVSKI,Local refinement techniques forelliptic problems on cell-centred grids .I.Error analysis,Math Comp,56(194)(1991),pp.437-461.
- [13] : Serge PIPERNO, Systèmes hyperboliques instationnaires et méthodes de type DG,(Cermics-ENPC), 2007