



**Université Sidi Mohammed Ben Abdellah  
Faculté des Sciences et Techniques Fès**



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES  
POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE LICENCE SCIENCES ET  
TECHNIQUES

---

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES  
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES  
ELLIPTIQUES**

---

*Réalisé par :*

Fatima ezzahra  
EL YAHYAOUI

*Encadré par :*

Dr. Mohamed  
BELLAHMAR

SOUTENUE LE 09 JUIN 2016 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

M. Mohamed BELLAHMAR	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques -FES-
M. Mohammed EL KHOMSSI	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques -FES-
M. Abdelmajid HILALI	Professeur à la Faculté des Sciences et Techniques -FES-

## **Remerciements**

Louange à Dieu Tout-Puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Puis je tiens à remercier chaleureusement mon encadrant Monsieur Mohamed BELLAHMAR, pour son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements s'adressent aux membres du jury : M. Mohammed EL KHOMSSI, M. Abdelmajid HILALI et M. Mohamed BELLAHMAR pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# **Dédicace**

## **À MES CHERS PARENTS ET MES MEILLEURS FRÈRES**

**Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.**

**Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.**

**Ce travail est le fruit des sacrifices que vous avez consentis pour mon éducation et ma formation.**

# SOMMAIRE

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>2</b>
<b>DÉDICACE</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Espaces de Sobolev</b>	<b>8</b>
1.1 Notions de distributions . . . . .	8
1.1.1 Définitions . . . . .	8
1.2 Espace de Sobolev . . . . .	10
<b>2 Généralités et classification des EDP</b>	<b>13</b>
2.1 EDP du premier ordre . . . . .	13
2.2 EDP linéaires du second ordre . . . . .	14
2.3 Conditions aux limites . . . . .	14
2.4 Classification des EDP linéaires du second ordre . . . . .	15
<b>3 Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique</b>	<b>17</b>
3.1 La méthode des Différences Finies . . . . .	17
3.1.1 Différences Finies en 1D . . . . .	17
3.1.2 Différences Finies en 2D . . . . .	20
3.2 La méthode des Volumes Finis . . . . .	23
3.2.1 Volumes Finis en 1D . . . . .	23
3.2.2 Volumes Finis en 2D . . . . .	26
3.3 La méthode des Éléments Finis . . . . .	30
3.3.1 Éléments Finis en 1D . . . . .	31
3.3.2 Éléments Finis en 2D . . . . .	34
3.4 Les propriétés d'un schéma numérique . . . . .	36
3.4.1 Le principe du maximum discret . . . . .	36
3.4.2 problème bien posé . . . . .	37
3.4.3 Conditionnement . . . . .	38
3.4.4 Stabilité . . . . .	38

## SOMMAIRE

3.4.5	La consistance . . . . .	39
3.4.6	La convergence . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Application numérique des méthodes</b>	<b>45</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>

# Introduction

La plupart des phénomènes mécaniques, physiques, biologiques ou économiques sont modélisées à l'aide d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et le développement de ces sciences passe en partie par une meilleure compréhension des propriétés des solutions de ces équations aux dérivées partielles. Bien plus, dans de

nombreux domaines de pointe (industrie aéronautique, industrie pétrolière, industrie nucléaire, problèmes de la fusion contrôlée, prévision météorologique, etc.), le progrès technique nécessite de résoudre numériquement des systèmes d'équations aux dérivées partielles parfois très compliqués afin d'obtenir des propriétés quantitatives des solutions. Avec les progrès toujours aussi foudroyants des performances des ordinateurs, la simulation numérique des phénomènes devient plus souple, plus facile à réaliser, et surtout plus économique, que la simulation expérimentale et tend de plus en plus à s'y substituer.

Les notions d'infini et de continu sont couramment utilisées. La solution exacte d'un problème d'équations aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel. En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

Ce travail a pour objet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques par trois familles de méthodes numériques : les différences finies, les volumes finis et les éléments finis.

Dans le premier chapitre, on présente les espaces de Sobolev qui se sont imposés comme l'outil moderne fournissant le cadre adéquat pour la recherche des solutions des EDP.

## SOMMAIRE

Pour en savoir plus voir [1],[2],[3],[4].

Comme on va s'intéresser à résoudre un type des EDP, le deuxième chapitre va nous amener à des généralités et des définitions sur les EDP, pour en savoir plus de quoi s'agit il.

Son contenu s'inspire de [5], [6], [7], [8] et [9].

L'objet du troisième chapitre sera la présentation des méthodes numériques de résolution des EDP elliptiques :

- ▶ Différences Finies c'est la méthode la plus simple, elle est fondée sur le développement de Taylor.
- ▶ Éléments Finis qui s'appuie sur une formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles.
- ▶ Volumes Finis qui se base sur l'intégration de l'équation sur chaque volume après bien sure découpage du domaine de travail. Puis on va parler des propriétés d'un schéma numérique.

Il est très largement inspiré de [10], [11], [12], [15] et [17].

Le dernier chapitre sera réservé à une application numérique de l'équation de Laplace avec les méthodes dont on a déjà parlé.

Pour ceux qui vont savoir plus, on conseilla la lecture de [7] et [17].

Nous terminons ce mémoire par une conclusion sur ce qu'on a fait durant ce mémoire .

## Notation

— Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$  un multi-entier.

On note :

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_N} x_N} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N.$$

—  $\Delta. = \text{div}(\nabla.)$

—  $u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

—  $\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

—  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$

—  $L^2(\Omega)$  : l'espace des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$

—  $H$  : l'espace de Hilbert

—  $H^1 = \{u : u \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n\}$

—  $H_0^1 = \{v / v \in H^1, v|_{\partial\Omega} = 0\}$



# Chapitre 1

## Espaces de Sobolev

Avant d'attaquer l'objectif de ce mémoire, nous donnons dans ce chapitre quelques rappels et compléments des espaces de Sobolev.<sup>1</sup>

### 1.1 Notions de distributions

On ne donne ici que quelques éléments de la théorie des distributions.

#### 1.1.1 Définitions

**Définition 1** (Espace de fonctions-test). Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On note  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^N$  dont le support est un compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  (c'est à dire nulles hors de  $K$ ). On note  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  l'ensemble des restrictions à  $\bar{\Omega}$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ .

**Définition 2** (Distributions). On dit que  $u$  est une distribution sur  $\Omega$  si  $u$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \langle u, \varphi \rangle$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante : Pour tout  $K$  compact de  $\Omega$ , il existe un entier  $k$  et une constante  $C_K$  tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \text{Supp}(\varphi) \subset K, |\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq k} \{\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

---

1. Serguei Lvovitch Sobolev(6 octobre 1908-3 janvier 1989)est mathématicien et physicien atomique russe de soviétique.

On note  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'espace des distributions sur  $\Omega$ , et c'est l'espace dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  ( c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  ).

**Remarque 1.** Dans cette définition, lorsque, l'entier  $k$  peut être choisi indépendant de  $K$ , on dit que la distribution est d'ordre fini. La plus petite valeur de  $k$  possible est appelée l'ordre de  $u$ .

**Lemme 1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $n \geq 1$ , et soient  $f$  et  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  alors :

$$\left[ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx \right] \Leftrightarrow [f = g p.p.]$$

**Remarque 2.** -Quand reconnaît-on une fonction dans une distribution ?  
Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On suppose qu'il existe  $c > 0$  telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad | \langle u, \varphi \rangle | \leq C_K \|\varphi\|_{L^2}.$$

Alors, par densité de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ ,  $u$  se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur  $L^2(\Omega)$ . Par le théorème de représentation de Riesz, on dira même que  $u \in L^2(\Omega)$ .

Plus généralement, soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad | \langle u, \varphi \rangle | \leq c \|\varphi\|_{L^2}, (1 < p < +\infty)$$

Alors  $u$  est identifiable avec une fonction de  $L^{p'}(\Omega)$ , où  $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ .

**Définition 3** (Dérivation des distributions.). Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Pour  $1 \leq i \leq N$ , on note  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle.$$

Pour  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on note  $\nabla u \in \mathcal{D}'(\Omega)^N$ . De même, si  $\alpha$  est un multi-entier, on note  $\partial^\alpha u$  la distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

**Remarque 3.** Si  $f \in C^1(\Omega)$ , on a, de façon classique et par simple intégration par parties sur un segment,  $\varphi$  étant nulle au voisinage de  $\partial\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$$

La dérivée de  $f$  au sens des distributions est donc la dérivée usuelle.

**Remarque 4.** La dérivation est une opération continue sur  $\mathcal{D}'(\Omega)$  : il est facile de voir que si  $u_n \rightarrow u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors  $\forall \alpha$  multi-entier,  $\partial^\alpha u_n \rightarrow \partial^\alpha u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

## 1.2 Espace de Sobolev

**Définition 4.** Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels. Plus précisément, un espace de Sobolev est un espace vectoriel de fonctions muni de la norme obtenue par la combinaison de la norme  $L^p$  de la fonction elle-même ainsi que de ses dérivées jusqu'à un certain ordre. Les dérivées sont comprises dans un sens faible, au sens des distributions afin de rendre l'espace complet.

Les espaces de Sobolev sont un outil très important et très adapté à l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, les solutions d'équations aux dérivées partielles, appartiennent plus naturellement à un espace de Sobolev qu'à un espace de fonctions continues dont les dérivées sont comprises dans un sens classique (mais rien n'empêche d'avoir de la chance).

**Définition 5.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On dit que  $u \in H^1(\Omega)$  si  $u \in L^2(\Omega)$  et si, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la distribution  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$  (ou, de façon équivalente, si la distribution  $\nabla \in L^2(\Omega)^N$ ).

On considère sur cet espace le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

et la norme induite

$$\|u\|_{H^1} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Théorème 1.** L'espace  $H^1(\Omega)$  muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert<sup>2</sup> séparable.

**Définition 6** (L'espace  $H_0^1(\Omega)$ ). On appelle  $H_0^1(\Omega)$  le complété de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

**Définition 7.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  On définit les espaces de Sobolev suivants :

1. Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \text{ multi-entier t.q. } |\alpha| \leq m, \partial_{\alpha} u \in L^2(\Omega)\}$
2. Pour  $1 \leq p \leq \infty$  et  $m \in \mathbb{N}$ , on définit l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\omega); \partial_{\alpha} u \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |\alpha| \leq m.\}$$

Notons que pour  $m = 0$ , l'espace  $W^{m,p}(\omega)$  est l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ .

---

2. espace préhilbertien complet

**Proposition 1** ( Structure d'espace vectoriel ). *Les espaces  $H^m(\Omega)$  sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_H^m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, D^\alpha u \rangle_{L^2}.$$

Notons que  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$

Une norme naturelle sur  $W^{m,2}(\Omega)$  est définie par :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

où  $\|\cdot\|_{L^p}$  désigne la norme dans  $L^p$ .

Muni de cette norme  $W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach (c.à.d. un espace vectoriel normé complet).

On peut montrer que la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

est une norme équivalente à la précédente. L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  a donc les mêmes propriétés quelle que soit la norme utilisée. Ces normes sont notées indifféremment  $\|\cdot\|_{m,p}$  ou  $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ .

**Remarque 5.** (Espaces de Sobolev et continuité) *En dimension 1 d'espace ( $N = 1$ ), avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , tout élément de  $W^{1,p}(]a, b[)$  (qui est donc une classe de fonctions) peut être assimilé à une fonction continue, au sens où il existe un représentant de la classe qui est continu. Ceci tient au fait qu'en dimension 1, toute "fonction" de  $W^{1,p}(]a, b[)$  peut s'écrire comme l'intégrale de sa dérivée.*

$$u \in W^{1,p}(]a, b[) \Leftrightarrow \{ \exists \tilde{u} \in C(]a, b[) \text{ et } v \in L^p(]a, b[); u = \tilde{u} \text{ p.p. et } \tilde{u}(x) = \tilde{u}(a) + \int_a^x v(s) ds \}$$

En dimension strictement supérieure à 1, ceci est faux. En particulier  $H^1 \not\subset C(\Omega)$ , comme le prouve l'exemple suivant :

soit  $\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2, |x_i| < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}$ , et  $u$  la fonction définie sur  $\Omega$  par

$$u(x) = (\ln(|x|))^\gamma, \text{ avec } \gamma \in ]0, \frac{1}{2}[$$

Alors  $u \in H^1(\Omega)$ , mais  $u \notin L^\infty(\Omega)$ , et donc en particulier  $u \notin C(\Omega)$ .

## 1.2 Espace de Sobolev

**Théorème 2** (Lax-Milgram). *Soit  $a$  une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert  $H$ . On suppose que les propriétés suivantes ont lieu :*

➤  *$a$  est continue, c'est-à-dire : il existe une constante  $M > 0$  telle que*

$$|a(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \forall u \in H, \forall v \in H.$$

➤  *$a$  est elliptique, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que*

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|^2, \quad \forall u \in H$$

*Alors, pour tout élément  $L \in H^*$  (toute forme linéaire continue sur  $H$ ), il existe un élément unique  $u \in H$  tel que*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

# Chapitre 2

## Généralités et classification des EDP

Les EDP sont un sujet de recherche actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts de math, comme, par exemple, transformée de Fourier et la théorie des distributions.

Donc soit la définition suivante :

**Définition 8.** Une EDP est une équation contenant en plus de la variable dépendante ( $u$  ci-dessous) et les variables indépendantes ( $x, y, \dots$  ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F(x, y, \dots, u, Du, \dots, D^\alpha u) = 0$$

Une telle équation est dite d'ordre  $m$  quand elle contient au moins une dérivée partielle d'ordre  $m$ .

Toute fonction  $u = f(x_1, \dots, x_N)$  qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci.

L'équation ci-dessus est dite :

- Linéaire : si  $F$  est linéaire en  $u, Du, \dots, D^\alpha u$ ,
- Semi-linéaire : si  $F$  est linéaire en  $Du, \dots, D^\alpha u$ ,
- Quasi-linéaire : si  $F$  est linéaire en  $D^\alpha u$ ,
- Non-linéaire : si  $f$  n'est pas linéaire en au moins une dérivée.

### 2.1 EDP du premier ordre

On s'intéressera également aux EDP linéaires du premier ordre à partir d'un exemple fondamental.

## 2.2 EDP linéaires du second ordre

### Equation de transport

En dimension 1 d'espace, on cherche  $u = u(x, t)$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$ , vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La fonction  $u$  représente par exemple une quantité en  $x$  et à l'instant  $t$  transportée par une vitesse  $c \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 EDP linéaires du second ordre

Donnons quelques exemples fondamentaux d'EDP linéaires du second ordre qu'on étudiera dans les chapitres suivants :

### Équation de Laplace

En dimension  $n$ , on cherche  $u = u(x_1, \dots, x_N)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans un ouvert } \Omega \\ u = g & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

### Équation des ondes

Pour un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on cherche  $u = u(x_1, \dots, x_N, t)$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, t = 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0(x) \end{cases}$$

## 2.3 Conditions aux limites

Pour qu'un problème elliptique (qu'on va voir dans la section suivante) admette une unique solution, il faut typiquement ajouter des conditions aux limites en tous les points de la frontière  $\partial\Omega$ .

Donc qu'est ce qu'une condition aux limites ?

**Définition 9.** Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des EDP sur une frontière. Ces conditions imposent une valeur de  $u$  ou de ses dérivées au bord du domaine.

Il existe plusieurs types de conditions aux limites, citons ici :

— **Dirichlet-valeurs aux bords :**

Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul.

**Exemple 1.**

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = d \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $d$  est une fonction, si  $d = 0$  on qualifiera le problème d'homogène, dans le cas contraire il sera dit non homogène.

— **NEUMANN-GRADIENTS AUX BORDS :**

La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien définie.

**Exemple 2.**

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega \text{ (} n \text{ normale à } \partial\Omega \text{)} \end{cases}$$

où  $g$  est une fonction.

— **MIXTE - GRADIENTS ET VALEURS AUX BORDS :**

Cette condition est composée des deux premières conditions imposées sur la frontière.

**Exemple 3.** On note  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = d \text{ sur } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ sur } \partial\Omega_2 \end{cases}$$

## 2.4 Classification des EDP linéaires du second ordre

Pour un domaine (ouvert connexe)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné et de frontière régulière, on considère l'équation linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\sum_{i=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + cu(x) = f(x) \text{ dans } \Omega$$

avec  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $c$  et  $f$  sont données.

On prend  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$  et  $b = (b_i)_{i=1,\dots,N}$  L'équation ci-dessus est dite :

- **PARABOLIQUE** en  $x \in \Omega$  si  $A(x)$  admet  $N - 1$  valeurs propres non nuls de même signe et une valeur propre nulle,
- **HYPERBOLIQUE** en  $x \in \Omega$  si  $A(x)$  n'admet que des valeurs propres non nuls et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé.



## 2.4 Classification des EDP linéaires du second ordre

— **ELLIPTIQUE** en  $x \in \Omega$  si la matrice  $A(x)$  n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe,<sup>1</sup>

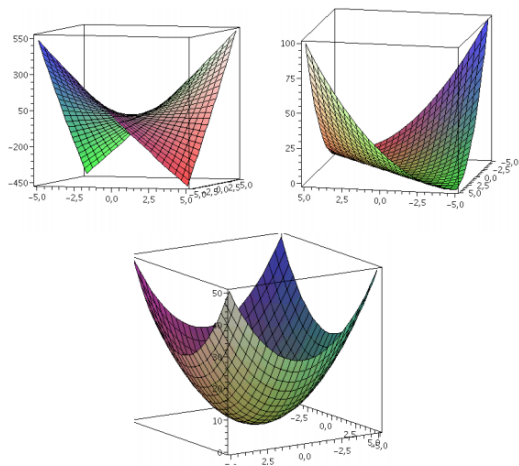


FIGURE 2.1 – 'z = P (x, y) de type hyperbolique, parabolique et elliptique'

### Définition 10. Condition d'ellipticité

*On dit que l'équation (2.4.1) est elliptique ou bien que l'opérateur L est elliptique si :*

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \langle A(x)\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n (a_{ij}\xi_i\xi_j) \geq \alpha |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega$$

La classe qui va nous intéresser au long de ce mémoire est l'EDP elliptique linéaire.

1. preuve :en utilisant la condition d'ellipticité :en effet, soit  $\lambda$  une valeur propre de A et  $u \neq 0$  un vecteur propre associé. On a d'une part  $\langle Au, u \rangle \geq \alpha |u|^2$  et d'autre part  $\langle Au, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda |u|^2$ , on en déduit  $\lambda \geq \alpha > 0$  donc toutes les valeurs propres de A sont strictement positives

# Chapitre 3

## Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

### 3.1 La méthode des Différences Finies

L'idée générale est d'approcher les dérivées apparaissant dans le problème continu par des différences divisées ou combinaison de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœud du maillage<sup>1</sup> grâce aux développements de Taylor.

#### 3.1.1 Différences Finies en 1D

on prend le problème suivant avec conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $f$  est une fonction continue.

On va étudier la résolution numérique de ce problème en supposant la solution  $u$  régulière (autrement dit  $u \in C^2([0, 1])$ ). On admettra que le problème est bien posé ( qu'on va voir au suivant chapitre ).

---

1. discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou aussi, une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis.

### 3.1 La méthode des Différences Finies

**Remarque 6.** Pour que la solution  $u$  du problème (3.1.1) soit régulière, il est nécessaire que  $f$  soit continue. Dans ce cas, il est alors assez simple de déterminer  $u$ . L'intérêt de développer une méthode numérique pour résoudre l'équation (3.1.1) réside dans le fait que cette méthode s'adapte ensuite à tout problème elliptique et s'écrit simplement dans le cas de l'équation (3.1.1).

#### Étapes de la méthode

On décrit cette méthodes en 3 étapes :

##### 1<sup>re</sup> étape : choix de la discrétisation, maillage

**Remarque 7.** Toutes les méthodes numériques présupposent la discrétisation du domaine géométrique afin de passer d'un problème continu à une infinité d'inconnues à un problème discret ne comptant qu'un nombre fini d'inconnues.

Soit  $(x_k)_{k=0, \dots, N+1}$  une subdivision de  $[0, 1]$ , avec :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

Pour  $i = 0, \dots, N$ , on note  $h_i := x_{i+1} - x_i$  et on définit le pas de maillage par :

$$h := \max_{i=1}^N h_i$$

Pour simplifier, on se limitera à un pas constant :

$$h = h_i, \forall i = 0, \dots, N.$$

On a alors  $x_{i+1} = x_i + h, \forall i = 0, \dots, N$ .

La première étape de la méthode consiste à remplacer le problème (3.2.1) par

$$\begin{cases} -u''(x_i) = f(x_i), \forall i = 1, \dots, N \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1.1')$$

##### 2<sup>e</sup> étape : Construction d'un schéma numérique

On rappelle le théorème de Taylor sous la forme de Young :

**Théorème 3.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  au voisinage d'un point  $x \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $h$  réel

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \theta(h^{n+1})$$

### CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

Cette formule est appelée formule de Taylor d'ordre  $k$ .

On suppose  $u \in C^2(0, 1)$ . Effectuons un développement de Taylor en  $x_i$

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \theta(h^3),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \theta(h^3)$$

où  $|\theta(h^3)| \leq ch^3$  et  $c$  une constante indépendante de  $h$ . En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'expression suivante :

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + \theta(h)$$

Donc  $\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$  est une approximation de  $u''(x_i)$ . Avec ce choix d'approximation, on peut approcher le problème (3.1.1') par le problème discret suivant :

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

#### QUELQUES SCHEMAS EN 1D

Différences finies avant, ordre 1

	$u_i$	$u_{i+1}$	$u_{i+2}$	$u_{i+3}$	$u_{i+4}$
$\Delta x u'_i$	-1	1			
$\Delta x^2 u''_i$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u'''_i$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies arrière, ordre 1

	$u_{i-4}$	$u_{i-3}$	$u_{i-2}$	$u_{i-1}$	$u_i$
$\Delta x u'_i$				-1	1
$\Delta x^2 u''_i$			1	-2	1
$\Delta x^3 u'''_i$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 2

	$u_{i-2}$	$u_{i-1}$	$u_i$	$u_{i+1}$	$u_{i+2}$
$2\Delta x u'_i$		-1		1	
$\Delta x^2 u''_i$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u'''_i$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Différences finies centré, ordre 4

	$u_{i-3}$	$u_{i-2}$	$u_{i-1}$	$u_i$	$u_{i+1}$	$u_{i+2}$	$u_{i+3}$
$12\Delta x u'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u''_i$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u'''_i$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

### 3.1 La méthode des Différences Finies

#### 3<sup>e</sup> étape : Passage au problème matriciel

Il est très pratique d'utiliser une formulation matricielle en faisant apparaître le vecteur des inconnues discrètes :

$$-\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, le vecteur  $U_h$  est solution du système matriciel :  $A_h U_h = b_h$

**Bilan 1.** Ainsi, on a la méthode suivante pour obtenir une approximation numérique de la solution  $u$  de (3.1.1)

- On choisit un pas de maillage  $h > 0$  petit (détermine la subdivision  $(x_i)_{i=0, \dots, N+1}$ ).
- On détermine une approximation de  $u''(x_i)$  par les développements de Taylor,
- On en déduit un système matriciel  $A_h U_h = b_h$  dont la solution  $U_h = (u(x_1), \dots, u(x_N))^t$  approche le vecteur  $(u(x_1), \dots, u(x_N))^t$ .
- On résout le système  $A_h U_h = b_h$

**Remarque 8.** Le choix du pas de maillage  $h$  détermine le nombre  $N+2$  de points de discrétisation. Ainsi, si  $h$  est très petit, le nombre  $N+2$  de points considérés est très grand et l'approximation  $U_h$  est une meilleure représentation de la solution  $u$ . Dans la pratique, un pas de maillage  $h$  trop petit peut entraîner un coût de calcul prohibitif et il est donc nécessaire de déterminer un pas de maillage suffisamment petit pour obtenir une bonne approximation sans que le temps de calcul soit trop long.

#### 3.1.2 Différences Finies en 2D

Le principe est exactement le même que celui de la dimension 1, la seule différence réside dans l'écriture.

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega = ]0, 1[^2, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.2)$$

### CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

où  $u = u(x, y)$ ,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  et  $\partial\Omega$  est le bord de  $\Omega$ .

On commence par définir un maillage de  $\Omega$ .

On pose

$$x_i := ih \text{ et } y_j := jh,$$

$$\text{où } 0 \leq i, j \leq N+1, h = \frac{1}{N+1} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

On va déterminer  $u_{i,j}$  qui approche  $u(x_i, y_j)$ .

Par le développement de Taylor on a

$$\partial_x^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \theta(h^3)$$

et

$$\partial_y^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} + \theta(h^3).$$

Un schéma numérique possible est alors de l'approximation suivante de  $\Delta u(x_i, y_j)$

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

Avec cette notation, le problème discrétisé est :

trouver  $u_{i,j}$  tels que

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{i,j} = f(x_i, y_j) & \text{pour } 1 \leq i, j \leq n \\ u_{0,j} = u_{N+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 & \text{pour } 1 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Pour écrire ce problème sous forme matricielle, on pose

$$U_h = (u_{11}, \dots, u_{1N}, u_{21}, \dots, u_{2N}, \dots, u_{N1}, \dots, u_{NN})^t$$

Alors le problème s'écrit

$$A_h U_h = b_h$$

où  $A_h \in \mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^{N^2}$  et  $b_h \in \mathbb{R}^{N^2}$  sont donnés par

### 3.1 La méthode des Différences Finies

$$A_h = -\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} B & C & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C \\ 0 & \dots & \dots & C & B \end{pmatrix},$$

et

$$b_h = (f(x_1, y_1), \dots, f(x_1, y_N), f(x_2, y_1), \dots, f(x_N, y_N))^T,$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{et} \quad C = I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

**Exemple 1.** Soit  $u(x, y) := -x(x-1)y(y-1)\exp(xy)$  et  $f = -\Delta u$ , de sorte que  $u$  est solution de (3.1.2). Sur la figure ci-dessous, s'est tracé les isovaleurs de l'approximation de  $u$  donnée par (3.1.3) pour un pas d'espace  $h = 0.02$  que l'on compare à la solution exacte  $u$ .

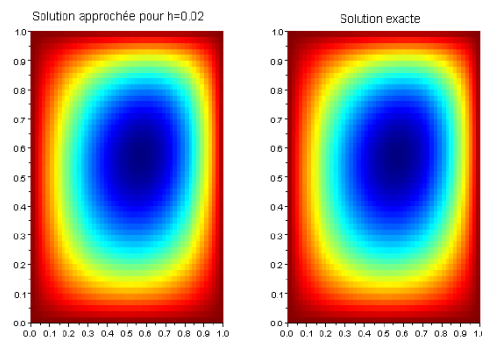


FIGURE 3.1 – Comparaison entre solution approchée et solution exacte pour le problème de Dirichlet en dimension 2

### Avantages et Inconvénients des différences finies

AVANTAGES	INCONVÉNIENTS
Méthode simple	Forte régularité des solutions nécessaire
Rapidité et performance des algorithmes	Peu de souplesse de maillage
Facilité de monter en ordre	Conditions de type Neumann difficiles à gérer
Grand nombre d'EDP approchables	

## 3.2 La méthode des Volumes Finis

La méthode des volumes finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale.

Ces méthodes s'utilisent initialement pour des lois de conservations hyperboliques. Mais des développements récents en ont permis une utilisation sur des équations elliptiques ou paraboliques.

### Maillage du domaine

soit  $\Omega$  l'ensemble d'espace associé à l'EDP qui nous intéresse.

On appelle volumes de contrôle les éléments de la suite  $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ , cette suite définissant un maillage du domaine  $\Omega$ , vérifiant

- $K_i$  un ouvert de  $\Omega$
- $K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^n \bar{K}_i = \bar{\Omega}$

### 3.2.1 Volumes Finis en 1D

On présente la méthode, en considérant le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

**Remarque 9.** En dimension 1, les volumes de contrôle sont des réunions d'intervalles ouverts.

**UN MAILLAGE VOLUMES FINIS  $\tau$  DE  $]0, 1[$  :**



### 3.2 La méthode des Volumes Finis

- ◇ Volume de contrôle : des intervalles ouverts  $(K_i)_{1 \leq i \leq N}$  qui recouvrent  $]0, 1[$  :

$$K_i = ]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[ \text{ avec,}$$

$$0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$$

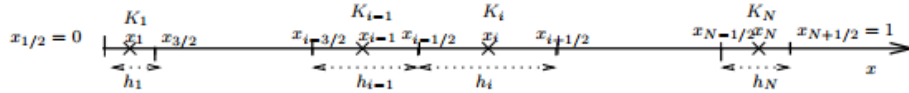


FIGURE 3.2 – Maillage volumes finis en 1D

- ◇ Centres : Une famille de points  $x_i \in K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .
- ◇ Bord : par commodité on pose aussi  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$ .
- ◇ La mesure de  $K_i$  :  $h_i = |K_i| = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ .
- ◇ La distance entre les centres de deux volumes voisins :  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$ .
- ◇ Le pas de maillage :  $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$

#### FORMULATION EN VOLUMES FINIS :

La discrétisation spatiale par les Volumes Finis consiste à intégrer sur chaque volume de contrôle l'équation du problème(3.2.1) :

$$-\int_{K_i} u''(x) dx = \int_{K_i} f(x) dx$$

Ce qui donne après intégration :

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x_{i-\frac{1}{2}}) = h_i \tilde{f}_i \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (3.2.2)$$

où  $\tilde{f}_i$  désigne la valeur moyenne de  $f$  dans  $K_i$ ,

$$i.e. \quad \tilde{f}_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx.$$

La quantité  $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$  (resp.  $-u'(x_{i-\frac{1}{2}})$ ) représente le flux rentrant qu'on note  $F_{i+\frac{1}{2}}$  (resp. flux sortant qu'on note  $F_{i-\frac{1}{2}}$ ) associé à la cellule  $K_i$ , au point  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  (resp. en  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ ).

Donc on peut écrire (3.2.2) comme suit :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i \tilde{f}_i$$

CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

Il reste maintenant à exprimer  $F_{i-\frac{1}{2}}$  en fonctions des inconnues  $u_i$ . L'approximation la plus naturelle est de prendre la valeur moyenne de  $u'(x)$  sur le segment  $[x_{i-1}, x_i]$ , soit :

$$F_{i-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx = -\frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_{i-\frac{1}{2}}} = -\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

avec  $h_{i-\frac{1}{2}} = \frac{h_{i-1} + h_i}{2}$

Le même démarche sur  $[x_i, x_{i+1}]$  pour  $F_{i+\frac{1}{2}}$ , on obtient :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

Ces expressions ne sont pas valables pour  $i = 1$  en  $x_{\frac{1}{2}} = 0$  et  $i = N$  en  $x_{N+\frac{1}{2}} = 1$ . Il se pose alors le problème du traitement des bords qui exige une formulation particulière. Une possibilité est de définir une maille fictive à gauche et une autre à droite de l'intervalle  $[0, 1]$ , et d'affecter une valeur moyenne de la fonction  $u$  dans ces deux mailles. Une autre possibilité est

- Considérer la valeur moyenne de  $F_{\frac{1}{2}}$  non plus sur le segment  $[x_0, x_1]$  qui n'est pas défini mais sur le segment  $[x_{\frac{1}{2}}, x_1]$ .

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{h_1} \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_1} u'(x) dx = \frac{2u_1}{h_1}$$

- Considérer la valeur moyenne de  $F_{N+\frac{1}{2}}$  non plus sur le segment  $[x_N, x_{N+\frac{1}{2}}]$  qui n'est pas défini mais sur le segment  $[x_1, x_{N+\frac{1}{2}}]$ .

$$F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{2}{h_N} \int_{x_N}^{x_{N+\frac{1}{2}}} u'(x) dx = \frac{2u_N}{h_N}$$

La discrétisation en volumes finis est donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} &= h_i \tilde{f}_i \quad \forall i = 2, \dots, N-1 \\ \frac{2u_1}{h_1} - \frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} &= h_1 \tilde{f}_1 \\ \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} + \frac{2u_N}{h_N} &= h_N \tilde{f}_N \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un maillage régulier de pas  $h$ . La discrétisation en Vo-

### 3.2 La méthode des Volumes Finis

lumes Finis devient :

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \tilde{f}_i \quad \forall i = 2, \dots, N-1$$

$$\frac{3u_1 - u_2}{h^2} = h_1 \tilde{f}_1$$

$$\frac{3u_N - u_{N-1}}{h^2} = h_N \tilde{f}_N$$

Sous forme matricielle, ceci s'exprime :

$$A_h U_h = b_h$$

avec

$$U_h = (u_i)_{1 \leq i \leq N}, (b_h)_i = \tilde{f}_i \quad \text{et} \quad A_h \text{ égale à}$$

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

#### 3.2.2 Volumes Finis en 2D

On va résoudre l'équation de Poisson par une méthode de Volumes Finis dans un domaine polygonal  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On cherche une fonction  $u = u(x)$  définie pour  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.1')$$

avec des fonctions  $f$  et  $g$  données.

On va d'abord définir un maillage admissible au sens des Volumes Finis, puis on donnera la formulation en Volumes Finis du problème (3.2.1').

#### MAILLAGE

On définit un maillage  $\tau$  de  $\Omega$  par des volumes de contrôle (ou cellules)  $K$  de la façon suivante :

### CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

1. Les volumes de contrôle  $K$  sont des polygones convexes tels que

$$\bar{\Omega} = \cup_{K \in \tau} \bar{K}$$

2. Pour chaque cellule  $K$ , il existe un point  $x_K \in K$  appelé centre, tel que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- Pour chaque cellule  $L$  adjacente à  $K$ , le segment de droite  $(x_K, x_L)$  est perpendiculaire à l'arête  $e$  commune aux deux cellules  $K$  et  $L$ . On notera  $e = K|L$

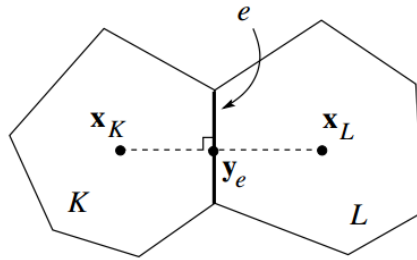


FIGURE 3.3 – CELLULES ADMISSIBLES D'UN MAILLAGE VOLUMES FINIS

- Pour chaque arête  $e$  appartenant au bord  $\partial\Omega$ , la droite passant par  $x_K$  et perpendiculaire à l'arête  $e$ , intersecte  $e$ . Un tel maillage sera dit admissible au sens des Volumes Finis.

#### FORMULATION EN VOLUMES FINIS

Rappelons dans un premier lieu la formule de la divergence qu'on aura besoin :

**Définition 11. ( Formule de la divergence )** Soit  $u$  un champs de vecteur défini sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $n$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\partial\Omega$ . On définit l'opérateur divergence par l'unique opérateur différentiel tel que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, dx$$

On intègre l'équation de Poisson sur une cellule  $K$ .

$$\int_K -\Delta u \, dx = \int_K f \, dx$$

Par la formule de la divergence, on obtient

$$-\int_{\partial K} \nabla u \cdot n \, d\Gamma = |K| f_K \quad (3.2.2')$$

### 3.2 La méthode des Volumes Finis

où  $n$  désigne la normale unitaire dirigée à l'extérieur de  $K$  et où on a noté  $f_K$  la valeur moyenne de  $f$  dans la cellule  $K$

i.e.

$$f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f dx$$

On note  $\varepsilon_K$  l'ensemble des arêtes de la cellule  $K$  et on décompose son bord :

$$\partial K = \cup_{e \in \varepsilon_K} e$$

La relation (3.2.2') s'écrit alors

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} - \int_e \nabla u \cdot n_{K,e} d\Gamma = |K| F_K$$

où on a noté  $n_{K,e}$  la normale unitaire à  $e$  dirigée vers l'extérieur de  $K$ .

On approche le flux à travers l'arête  $e$  :

$$- \int_e \nabla u \cdot n_{K,e} d\Gamma \simeq F_{K,e}$$

où  $F_{K,e}$  est le flux numérique à travers l'arête  $e$ , associé à la cellule  $K$ .

Le schéma "Volumes Finis" s'écrit

$$\sum_{e \in \varepsilon_K} F_{K,e} = |K| f_K, \quad \forall K \in \tau$$

On considère les inconnues  $(u_K)_K \in \tau$  associées à chaque volume de contrôle, avec les approximations :

$$u_K \simeq \frac{1}{|K|} \int_K u(x) dx.$$

On désigne également par  $(u_e)_{e \in \varepsilon_K}$  des valeurs associées aux arêtes de la cellule  $K$ .

Ces valeurs seront utilisées de façon intermédiaire et finalement éliminées.

On va distinguer les cas selon qu'un arête  $e$  appartient ou non au bord  $\partial\Omega$ .

- Soit une arête  $e$  d'une cellule  $K$  telle que  $e \not\subset \partial\Omega$  c'est-à-dire qui n'appartient pas au bord de  $\Omega$ .
  - Pour un centre  $x_K \notin e$ , le flux numérique  $F_{K,e}$  est choisi égal à :

$$F_{K,e} = - \frac{u_e - u_K}{d_{K,e}} |e|$$

### CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

où  $d_{K,e}$  est la distance de  $x_K$  à l'arête  $e \in \partial K$ . Le choix de  $F_{K,e}$  est donné pour  $x_K \notin e$  de sorte que  $d_{K,e} \neq 0$ .

Pour éliminer les valeurs  $(u_e)$ , on suppose qu'il y a conservation des flux numériques à travers les arêtes. Précisément, pour l'arête  $e = K|L$  commune aux deux volumes de contrôle  $K$  et  $L$ , on impose :

$$F_{K,e} = -F_{L,e}$$

Autrement dit,

$$-\int_e \nabla u \cdot n_{K,e} d\Gamma = \int_e \nabla u \cdot n_{L,e} d\Gamma \text{ (on a } n_{K,e} = -n_{L,e}\text{)}.$$

On écrit alors :

$$F_{K,e} = -\frac{(u_e - u_K)}{d_{K,e}}|e| = -F_{L,e} = \frac{(u_e - u_L)}{d_{L,e}}$$

$$\Rightarrow d_{L,e}u_K + d_{K,e}u_L = (d_{K,e} + d_{L,e})u_e. \text{ avec } d(x_K, x_L) = d_{K,e} + d_{L,e}$$

Par conséquent,

$$u_e = \frac{d_{L,e}u_K + d_{K,e}u_L}{|x_K - x_L|}$$

On obtient donc

$$F_{K,e} = -\frac{(u_K - u_L)}{|x_K - x_L|}|e|$$

- Pour un centre  $x_K \in e$ , on choisit  $u_K = u_L$  où  $L$  est la cellule adjacente ayant l'arête  $e$  en commun avec  $K$ . Cela revient à fusionner les cellules  $K$  et  $L$ . Donc pour une cellule  $K$  strictement située à l'intérieur de  $\Omega$ , on peut supposer que  $x_K \notin \partial\Omega$ .

- Soit une arête  $e$  d'une cellule  $K$  telle que  $e \subset \partial\Omega$  c'est-à-dire qui appartient au bord de  $\Omega$ . Dans ce cas, on utilise la relation

$$(d_{K,e}F_{K,e} = (u_K - u_e)|e|)$$

avec

$$u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma \text{ (} e \subset \partial\Omega\text{)}$$

Autrement dit, dans ce cas, la valeur  $u_K$  est connue dans ces cellules.

Donc le schéma "Volumes Finis" s'écrit

### 3.3 La méthode des Éléments Finis

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_K} F_{K,e} = |K| f_K, \quad \forall K \in \tau$$

avec :

$$F_{K,e} = -\frac{(u_K - u_L)}{|x_K - x_L|} |e|$$

$$d_{K,e} F_{K,e} = (u_K - u_e) |e| \quad \text{où} \quad u_e = \frac{1}{|e|} \int_e g d\Gamma \quad \text{si} \quad e \subset \partial\Omega$$

Il s'agit donc d'un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnus (  $N =$  nb de volumes de contrôle dans  $\tau$  )

$$A_h U_h = b_h$$

#### Avantages et Inconvénients des volumes finis

AVANTAGES	INCONVÉNIENTS
Moins coûteux que EF	Peu de résultats théoriques
Maillage quelconque	
Facilité à traiter les chocs	

### 3.3 La méthode des Éléments Finis

La méthode des éléments finis est un cas particulier des méthode de Galerkin.<sup>2</sup> Elle consiste donc à approcher dans un sous-espace de dimension finie, un problème écrit sous forme variationnelle dans un espace de dimension infinie. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres, par exemple, ses valeurs en certains points (les nœuds du maillage).

De nombreux codes de calculs de structure reposent sur les Éléments Finis : ANSYS, CADD5, CATIA...

#### Maillage du domaine

2. sont une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu en un problème discret. Cette approche est attribuée aux ingénieurs russes **Ivan Boubnov**(1911) et **Boris Galerkin**(1913)

La méthode des éléments finis repose sur un découpage de l'espace selon un maillage. D'habitude l'on choisit un maillage carré ou triangulaire mais rien n'interdit de choisir des maillages plus complexes.

**Définition 12** (Élément fini). *On appelle élément fini la donnée d'un triplet  $(K, P_K, \Sigma_K)$  avec*

- $K$  est un domaine géométrique,
- $P_K$  est un espace de fonctions sur  $K$ , qu'on appelle espace des fonctions de base,
- $\Sigma_K$  est un ensemble de formes linéaires sur  $P_K$ , qu'on appelle degrés de liberté.

### 3.3.1 Éléments Finis en 1D

Soit le problème avec condition de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

après multiplication par  $v \in H_0^1$ , on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1 \quad (3.3.2)$$

d'où une nouvelle formulation du problème (3.3.1), dite formulation variationnelle, qui s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Chercher la fonction } u \in H_0^1([0, 1]) \text{ t.q. :} \\ (u', v') = (f, v) \end{cases}$$

Une solution de cette forme variationnelle s'appelle solution faible du problème de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Soit  $\tilde{V}$  un sous-espace vectoriel de  $H_0^1$  de dimension  $N$  finie.

Soient  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ ,  $N$  fonctions linéairement indépendantes de  $H_0^1$ .



### 3.3 La méthode des Éléments Finis

Ces fonctions constituent une base du sous-espace  $\tilde{V}$ .  
Ainsi toute fonction  $\tilde{u}$  de  $\tilde{V}$  peut se décomposer selon :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x)$$

Résoudre le problème de départ revient à chercher une solution  $\tilde{u} \in \tilde{V}$  telle que :

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x) \tilde{v}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

C'est-à-dire chercher  $N$  réels  $u_1, u_2, \dots, u_N$  vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x) \tilde{v}'(x) dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}$$

Ou encore :

$$\sum_{j=1}^N u_j \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \quad \forall \phi_i \in \tilde{V}$$

soient  $A$  la matrice  $N \times N$  d'élément courant  $a_{ij}$  et  $B$  le vecteur à  $N$  inconnues.

Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire :

$$AU = B$$

Il reste maintenant à choisir les  $N$  fonctions  $\phi_i$  de façon à ce que le système soit simple à résoudre numériquement.

#### Choix des fonctions $\phi_i$ : les éléments finis

L'intervalle  $]0,1[$  est discrétisé en  $N$  points de coordonnées  $x_i$ . Les fonctions  $\phi_i(x)$  sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice  $A$  est tridiagonale. Il est possible de choisir pour éléments finis

CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

des fonctions de degré 2 ou plus.

Le calcul de la matrice  $A$  fait intervenir les dérivées  $\phi'_i(x)$  simples à calculer :

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice  $A$ , tridiagonale et symétrique. Les trois termes des diagonales sont :

$$a_{ii} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}}$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_{i-1,i} = \int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_{i-1}(x) dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}$$

Et calculons les composantes du vecteur  $B$  par une méthode des trapèzes (chaque intégrale sur un segment élémentaire sera évaluée comme l'aire du trapèze correspondant), soit :

$$b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = f_i \left( \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right)$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc , sous forme indicelle :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i$$

**Remarque 10.** constatons que cette méthode et la méthode des différences finis sont rigoureusement identiques. Ceci n'est plus vérifié quand les composantes du vecteur  $B$  ne sont plus évaluées avec une méthode des trapèzes.

Dans le cas où les  $N$  points de l'intervalle  $]0,1[$  sont régulièrement espacés avec un pas  $h$ .

La discrétisation en Élément Finis devient :

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i \quad \forall i = 1, \dots, N$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0$$

Soit sous forme matricielle :

### 3.3 La méthode des Éléments Finis

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}$$

**Bilan 2.** La méthode des Eléments Finis 1D consiste donc à :

- Choisir  $N$  points entre 0 et 1 et choisir les fonctions  $\phi_i$
- Construire la matrice  $A$
- Déterminer le vecteur  $B$  (avec une méthode d'intégration)
- Résoudre le système linéaire  $A.U = B$  où  $U$  désigne le vecteur des inconnues.

#### 3.3.2 Éléments Finis en 2D

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ ;  $C^1$  par morceaux; on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.1')$$

**Remarque 11.** C'est la même démarche que dans le cas des éléments finis 1D

Rappelons tout d'abord la formule de Green

**Corollaire 1.** Soit  $\Omega$  Pour toute fonction  $u$  de  $H^2(\Omega)$  et toute fonction  $v$  de  $H^1(\Omega)$ , on a la formule de Green :

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma$$

#### L'approche de la méthode

Supposons que la solution  $u$  de (3.3.1') est suffisamment régulière, par exemple  $u \in H^2$ .

### CHAPITRE 3 : Méthodes de résolution numérique d'une EDP elliptique

Alors en multipliant les deux membres de l'équation par une "fonction test"  $v \in H_0^1$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

En utilisant la formule de Green et en tenant compte du fait que  $v|_{\partial\Omega} = 0$  on obtient

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_{\Omega} f v \, dx \Leftrightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1 \quad (3.3.2')$$

La méthode des éléments finis permet alors de résoudre, de manière approchée, le problème (3.3.2').

On se donne une famille de sous espace  $V_h \subset H_0^1$  de dimension finie  $N_h$ . Le paramètre  $h$  est destiné à tendre vers 0.

Par le théorème de Lax-Milgram (vu au premier chapitre), il est immédiat que le problème :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_h \quad (3.3.3')$$

admet une unique solution.

Comme  $V_h$  est de dimension finie, on peut noter  $\psi_1, \dots, \psi_{N_h}$  sa base .

Comme  $u_h \in V_h$ , on peut en déduire qu'il existe  $a_1, \dots, a_{N_h}$  dans  $\mathbb{R}$  tels que :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} a_i \psi_i$$

Dans la formulation (3.3.3') il est nécessaire et suffisant de prendre  $v_h = \psi_j$  puisque les  $(\psi_j)_j$  forment une base de  $V_h$ . Par linéarité, les éléments  $(a_j)_j$  se déterminent par résolution de :

$$A_h U_h = f$$

où  $A_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j$  et  $f_j = \int_{\Omega} f \psi_j$ .

#### Avantages et Inconvénients des éléments finis

AVANTAGES	INCONVÉNIENTS
Existence d'une solution faible	Coût de calcul très important
Maillage robuste et souple	EDP non-linéaire mal gérées

## 3.4 Les propriétés d'un schéma numérique

### 3.4.1 Le principe du maximum discret

C'est une méthode classique pour les schémas numériques des EDP elliptiques de démontrer un principe du maximum discret et d'en déduire l'existence et l'unicité du problème discret. Donc ferons appel à ce principe :

**Proposition 2.** (Principe du maximum discret). Soit  $b \in \mathbb{R}^N$  tel que  $b_i \geq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Si  $U \in \mathbb{R}^N$  vérifie  $A_h U = b$ , où  $A_h$  est donnée par (3.2.2), alors

$$U_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

**Dém.** Soit  $k$  le plus petit entier tel que  $U_k = \min_{i=1}^N U_i$   
on suppose que  $U_k < 0$   
Trois cas sont possibles :  $k = 1$ ,  $1 < k < N$ ,  $k = N$

►  $k = 1$   $(AU)_1 = b_1 \geq 0$  entraîne  $-\frac{U_2 - 2U_1}{h^2} \geq 0 \Rightarrow U_2 \leq 2U_1$

or  $U_1 = \min_{i=1}^N U_i \leq U_2$  donc  $2U_1 \leq U_2 + U_1 < U_2$  car  $U_1 < 0$

Finalemnt  $U_2 < U_2$  : impossible.

►  $k = N$  on procède de la même manière pour  $1 < k < N$ ,

$$(AU)_k = b_k \text{ entraîne}$$

$$-\frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{h^2} \geq 0, \text{ d'où } (U_{k+1} - U_k) + (U_{k-1} - U_k) \leq 0$$

or  $U_{k+1} - U_k \geq 0$  et  $U_{k-1} - U_k \geq 0$  donc  $(U_{k+1} - U_k) + (U_{k-1} - U_k) = 0$ .

$$\text{Alors } U_k = U_{k-1} = U_{k+1},$$

en réitérant le même raisonnement sur  $k-1$  qu'on aboutit au cas  $k = 1$  vu précédemment.

L'hypothèse  $U_k < 0$  est donc fausse, d'où  $U_k \geq 0$ .

$$\text{Alors } 0 \leq U_k \leq U_i \text{ pour tout } i = 0, \dots, n.$$

On peut maintenant montrer le résultat suivant :

**Proposition 3.** Le système matriciel  $A_h U_h = b_h$  ( c'est le système qu'on obtient dans les trois méthodes ) admet une unique solution.

**Remarque 12.** Le principe du maximum discret est l'ingrédient clé pour la démonstration de la Proposition 4.

**Dém.** Supposons que le système  $A_h U_h = b_h$  admet deux solutions  $U$  et  $V$ . Alors  $W = U - V$  est solution de  $A_h W = 0$  donc  $A_h W \geq 0$  et  $A_h W \leq 0$ . Par le principe du maximum discret, on en déduit  $W \geq 0$  et  $W \leq 0$  d'où  $W = 0$  donc  $U = V$ . En particulier on en déduit que l'application linéaire associée à la matrice  $A_h$  est injective or, en dimension finie, toute application linéaire injective est bijective donc la matrice  $A_h$  est inversible et le système  $A_h U_h = b_h$  admet une unique solution.

### 3.4.2 problème bien posé

**Définition 13.** Selon une définition due à Hadamard à propos des modèles mathématiques de phénomènes physiques, un problème est bien posé si sa solution existe, est unique et dépend continûment des données.<sup>3</sup>

Celle-ci est de grande importance dans la résolution numérique des e.d.p. pour s'assurer que la solution approchée calculée est effectivement proche de la solution exacte du problème considéré.

Les conditions aux limites jouent un rôle essentiel quant au caractère bien posé ou non d'un problème.

Pour une EDP du second ordre linéaire à coefficient constants, on a un problème bien posé dans les cas suivants (conditions suffisantes :

#### Tableau récapitulatif

Type	Frontière	Conditions
Hyperbolique	ouverte	Cauchy
Parabolique	ouverte	Dirichlet ou Neumann
Elliptique	fermée	Dirichlet ou Neumann

3. Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(E', \|\cdot\|_{E'})$  2 evn et  $F$  une application de  $E$  dans  $O$  (ouvert de  $E'$ ) et soit  $u$  solution de  $\mathcal{A}(u) = f$

$u$  dépend continûment de la donnée  $f$  si :

$$f^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ dans } E' \Rightarrow u^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$$

Si  $\mathcal{A}$  est linéaire la continuité est traduit par :

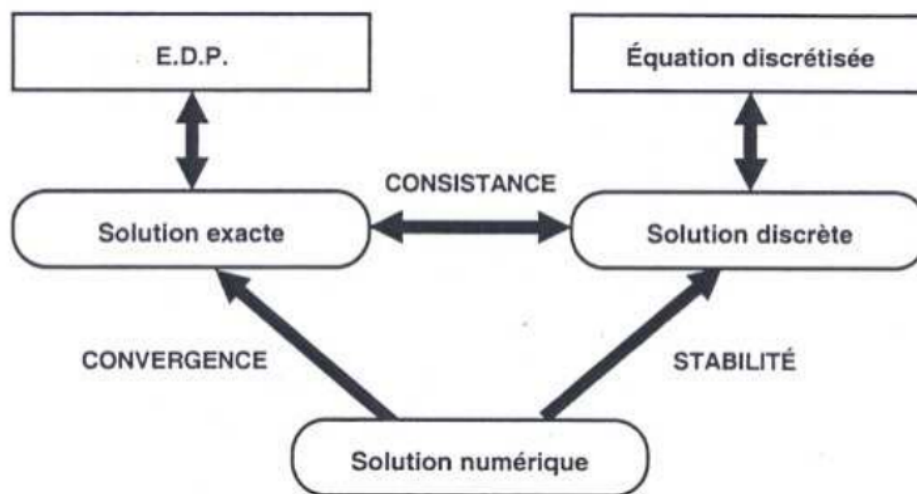
$$\exists C \text{ tq } \|\mathcal{A}(u)\|_{E'} \leq C \|u\|_E$$

### 3.4 Les propriétés d'un schéma numérique

#### 3.4.3 Conditionnement

Le conditionnement mesure la dépendance de la solution d'un problème numérique par rapport aux données du problème, ceci afin de contrôler la validité d'une solution calculée par rapport à ces données. En effet, les données d'un problème numérique dépendent en général de mesures expérimentales et sont donc entachées d'erreurs. De façon plus générale, on peut dire que le conditionnement associé à un problème est une mesure de la difficulté de calcul numérique du problème. Un problème possédant un conditionnement bas est dit bien conditionné et un problème possédant un conditionnement élevé est dit mal conditionné.

Les notions dont on va parler maintenant permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution discrète des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.



Solution exacte, numérique et discrète

#### 3.4.4 Stabilité

La stabilité est une propriété de la solution obtenue. Elle se réfère à la propagation des erreurs au cours des étapes du calcul, à la capacité de l'algorithme de ne pas trop amplifier d'éventuels écarts, à la précision des résultats obtenus, mais elle ne se limite pas aux erreurs d'arrondis et à leurs conséquences. Une solution est dite stable si elle est bornée dans l'espace et/ou le temps. La valeur de la stabilité peut parfois (souvent) être exprimée en fonction du pas de dis-

crétisation.

Les algorithmes dédiés à la résolution d'équations aux dérivées partielles (en particulier la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis) se basent sur une discrétisation ou un maillage de l'espace : dans ce cas, la stabilité se réfère à un comportement numérique robuste lorsque le pas de discrétisation ou la taille des mailles tend vers 0.

La stabilité d'un schéma n'a aucun lien avec la solution exacte du problème traité (convergence).

**Définition 14.** *Un schéma numérique est dit stable pour la norme  $\|\cdot\|$  si sa solution (quand elle existe) est continue pour la norme  $\|\cdot\|$  par rapport aux données. En particulier, pour le schéma  $A_h U_h = b_h$ , cela signifie qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  et  $b_h$  telle que  $\|U_h\| \leq C \|b_h\|$*

**Remarque 13.** *La constante de stabilité permet de déterminer l'erreur commise en approchant le second membre.*

### 3.4.5 La consistance

c'est la propriété qui assure que la solution exacte des équations discrétisées tende vers la solution exacte des équations continues lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro.

**Définition 15.** *(Erreur de consistance)*

*On appelle erreur de consistance  $R$  d'un schéma numérique la quantité obtenue en remplaçant, dans le schéma numérique, l'inconnue par la solution exacte  $u$ . En particulier, pour le schéma  $A_h U_h = b_h$ , on a  $R = A_h U - b_h$  où  $U = (u(x_1), \dots, u(x_N))^t$ .*

Dans le cadre du schéma numérique  $A_h U_h = b_h$ , l'erreur de consistance  $r_i$  au point  $x_i$  ( $i$ -ème coordonnée de  $R$ ) est donnée par

$$r_i = -\frac{1}{h^2}((u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))) - f(x_i)$$

**Définition 16** (Ordre d'un schéma). *On dit qu'un schéma numérique à  $N$  points de discrétisation est d'ordre  $p \in \mathbb{N}$ , s'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  indépendante de la solution exacte telle que l'erreur de consistance vérifie*

$$\max_{i=1, \dots, N} |r_i| \leq Ch^p.$$

De plus, on dit que le schéma est consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i=1, \dots, N} |r_i| = 0$$

Dans le cadre du schéma  $A_h U_h = b_h$  on a :



### 3.4 Les propriétés d'un schéma numérique

**Lemme 2.** Si la solution exacte  $u$  vérifie  $u \in C^4(0, 1)$  alors le schéma  $A_h U_h = b_h$  est consistant d'ordre 2. Précisément, on a

$$|r_i| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}|, \forall i = 1, \dots, N.$$

**Dém.** Puisque  $u \in C^4([0, 1])$  on a le développement de Taylor à l'ordre 4 :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) + \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\xi_i),$$

où  $\xi_i \in [0, 1]$ .

Le dernier terme  $\frac{h^4}{24} u^{(4)}(\xi_i)$  est le reste de la formule de Taylor.

on a

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2} u''(x_i) - \frac{h^3}{6} u^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\nu_i),$$

où  $\nu_i \in [0, 1]$ . On en déduit

$$\begin{aligned} r_i &= -\frac{1}{h^2} (u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})) - f(x_i) \\ &= -\frac{1}{h^2} (h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\xi_i) + \frac{h^4}{24} u^{(4)}(\nu_i) - f(x_i)) \\ &= -u''(x_i) - f(x_i) + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\nu_i)) \end{aligned}$$

Or, comme  $u$  est la solution exacte de (3.2.1) on a  $-u''(x_i) = f(x_i)$  donc

$$r_i = \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\nu_i))$$

On en déduit le résultat du lemme 2.

**Remarque 14.** On peut remarquer que si, de plus,  $u$  vérifie  $u^{(4)} = 0$  alors  $r_i = 0$  donc  $u_i = u(x_i)$ .

#### 3.4.6 La convergence

Contrairement à la consistance, qui est une propriété locale, la convergence est de portée globale. On dit qu'une solution numérique converge vers la solution analytique si elle tend vers elle en tout point de l'espace (c'est le cas qu'on a traité) lorsque les paramètres de discrétisation tendent vers 0.

C'est évidemment bien la convergence (souvent difficile à prouver) d'un schéma numérique que nous visons, mais la stabilité et la consistance (plus faciles à prouver) sont des outils très efficace, et ceci via le très beau théorème de Lax :

**Théorème 4 (Lax).** Dans un problème bien posé, et avec un schéma numérique consistant, la stabilité est la condition nécessaire et suffisante pour la convergence.

En d'autres termes : consistance + stabilité  $\Rightarrow$  convergence

**Définition 17.** Pour un schéma numérique  $A_h U_h = b_h$ , on appelle erreur de discrétisation ( ou de convergence ) le vecteur  $e \in \mathbb{R}$  dont les coefficients sont :

$$e_i := u(x_i) - u_i, \forall i = 1, \dots, N.$$

où  $u$  est la solution exacte de (3.2.1).

De plus, on dit que le schéma numérique converge en norme  $\|\cdot\|$  si l'erreur de discrétisation tend vers 0 en norme  $\|\cdot\|$  lorsque le pas  $h$  tend vers 0.

**Théorème 5.** Soit  $u$  la solution exacte d'un problème continu et  $U_h$  la solution du schéma numérique. On suppose  $u \in C^4([0, 1])$ . Alors, l'erreur de discrétisation vérifie

$$\|e\|_\infty \leq \frac{h^2}{96} \|u^{(4)}\|_\infty.$$

Donc le schéma numérique (3.2.1) converge en norme  $\|\cdot\|$  et est d'ordre 2.

**Remarque 15.** L'ordre de convergence du schéma est important pour comparer différents schémas. Le pas  $h$  étant petit (donc inférieur à 1), la quantité  $h^p$  est d'autant plus petite que  $p$  est grand. Ainsi l'ordre de convergence d'un schéma détermine sa vitesse de convergence.

Maintenant on va voir ces propriétés numériques pour le schéma des volumes finis :

## Analyse mathématiques du schéma des volumes finis

**Proposition 4** (Existence de la solution du schéma volumes finis ). Soit  $f \in C([0, 1])$  et  $u \in C^2([0, 1])$  solution de (3.2.1). Soit  $(K_i)_{i=1, \dots}$  le maillage. Alors il existe une unique solution  $u_h$ .

**Dém.**

Le schéma s'écrit

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

( où on a posé  $u_0 = u_{N+1} = 0$  (3.4.1) )

En multipliant par  $u_i$  et en sommant de  $i=1$  à  $N$ , on obtient donc :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} u_i + \sum_{i=1}^N \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} u_i = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

### 3.4 Les propriétés d'un schéma numérique

En effectuant un changement d'indice sur la deuxième somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} u_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} u_i = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

En regroupant les sommes, on a donc :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_1^2}{h_{\frac{1}{2}}} + \frac{u_N^2}{h_{N+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^N h_i f_i u_i$$

Si  $f_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ , on a bien alors  $u_i = 0$ . Ceci démontre l'unicité de  $(u_i)_{i=1, \dots, N}$  solution de (3.2.3)-(3.4.1), et donc son existence, puisque le système (3.2.3)-(3.4.1) est un système linéaire d'ordre  $N$ . (On rappelle qu'une matrice carré d'ordre  $N$  est inversible ssi son noyau est réduit à 0.

**Lemme 3** (Consistance des flux). Soit  $u \in C^2([0, 1])$  solution de (3.2.1). On se donne une subdivision de  $[0, 1]$ . On appelle  $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$  le flux exact en  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , et  $F_{i+\frac{1}{2}}^* = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}}$  le quotient différentiel qui approche la dérivée première  $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ . On dit que le flux numérique  $f_{i+\frac{1}{2}}$  est consistant s'il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  ne dépend que de  $u$  telle que l'erreur de consistance sur le flux, définie par :

$$R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}^*,$$

vérifie

$$R_{i+\frac{1}{2}} \leq Ch \quad (3.4.2)$$

**Remarque 16.** Si  $x_{i+\frac{1}{2}}$  est au centre de l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , l'erreur de consistance sur les flux est d'ordre 2, i.e. il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  ne dépend que de  $u$  telle que  $R_{i+\frac{1}{2}} \leq Ch^2$ .

Notons que cette propriété de consistance est vraie sur les flux, et non pas sur l'opérateur  $-u''$ .

**Définition 18** (Conservativité). On dit que le schéma volumes finis (3.2.3)-(3.4.1) est conservatif, au sens où, lorsqu'on considère une interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  entre  $K_i$  et  $K_{i+1}$ , le flux numérique entrant dans une maille est égal à celui sortant de l'autre.

C'est grâce à la conservativité et à la consistance des flux qu'on va montrer la convergence du schéma volumes finis.

**Théorème 6** (Convergence du schéma volumes finis). *On suppose que la solution  $u$  de (3.2.1) vérifie  $u \in C^2([0,1])$ . On pose pour  $e_i = u(x_i) - u_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ , et  $e_0 = e_{N+1} = 0$ . Il existe  $C \geq 0$  ne dépendant que de  $u$  tel que*

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch^2. \quad (3.4.3)$$

$$\sum_{i=0}^N h e_i^2 \leq Ch^2. \quad (3.4.4)$$

$$\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq Ch \quad (3.4.5)$$

(On rappelle que  $h = \sup_{i=1, \dots, N} h_i$ )

**Dém.** : Écrivons le schéma volumes finis (3.2.3) :

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i,$$

L'équation exacte intégrée sur la maille  $K_i$  :

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i,$$

où  $\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}$  est défini dans le lemme , et soustrayons :

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}} + F_{i-\frac{1}{2}} = 0$$

En introduisant  $R_{i+\frac{1}{2}} = \bar{F}_{i+\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}$  , on obtient :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}^* + F_{i-\frac{1}{2}} = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}}$$

Ce qui s'écrit encore, au vu de la définition de  $e_i$ ,

$$-\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i) + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_i - e_{i-1}) = -R_{i+\frac{1}{2}} + R_{i-\frac{1}{2}}.$$

On multiplie cette dernière égalité par  $e_i$  et on somme de 1 à N :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_i - e_{i-1})e_i = \sum_{i=1}^N -R_{i+\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=1}^N R_{i-\frac{1}{2}}e_i.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i)e_i + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}}(e_{i+1} - e_i)e_{i+1} = \sum_{i=1}^N -R_{i+\frac{1}{2}}e_i + \sum_{i=0}^{N-1} R_{i-\frac{1}{2}}e_{i+1}.$$

### 3.4 Les propriétés d'un schéma numérique

En réordonnant les termes, on obtient, en remarquant que  $e_0 = e_{N+1} = 0$  :

$$\sum_{i=1}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \sum_{i=0}^N R_{i+\frac{1}{2}}(e_{i+1} - e_i).$$

Or,  $R_{i+\frac{1}{2}} \leq Ch$ . On a donc

$$\sum_{i=1}^N -\frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}} \sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \left( \sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|^2}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left( \sum_{i=0}^N h_{i+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En remarquant que  $\sum_{i=0}^N = 1$ , on déduit que :

$$\sum_{i=0}^N \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \leq Ch \left( \sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|^2}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$\left( \sum_{i=0}^N \frac{|e_{i+1} - e_i|^2}{\sqrt{h_{i+\frac{1}{2}}}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch.$$

On a ainsi démontré (3.4.3). Démontrons donc (3.4.5). Pour obtenir une majoration de  $|e_i|$  par  $Ch$ , on remarque que :

$$|e_i| = \left| \sum_{j=1}^i e_j - e_{j-1} \right| \leq \sum_{j=1}^i |e_j - e_{j-1}| \leq \sum_{j=1}^N |e_j - e_{j-1}|$$

On en déduit, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$|e_i| \leq \left( \sum_{j=1}^i \frac{|e_j - e_{j-1}|^2}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^i h_{j+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui entraîne  $\max_{i=1, \dots, N} |e_i| \leq Ch$ . Notons que de cette estimation, on déduit immédiatement l'estimation (3.4.4).

# Chapitre 4

## Application numérique des méthodes

Comparons les trois méthodes sur le cas simple précédemment exposé. On choisit comme fonction  $f(x) = \sin(\pi x)$ . L'EDP à résoudre est donc :

$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(\pi x), & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La solution analytique du problème est

$$u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$$

Notons par un indice 'a' la solution analytique.

Divisons l'intervalle  $]0, 1[$  en dix segments réguliers de pas  $h = 0.1$ . Pour les discrétisations avec les différences finies et les éléments finis, il y a  $N = 9$  nœuds de calculs. Et pour la méthode des volumes finis, il y a  $N = 10$  mailles de calculs. La solution discrète obtenue avec les différences finies (ou les éléments finis) est reportée dans le tableau suivant :

$x_i$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$u_i$	0.0316	0.06	0.0826	0.09716	0.10216	0.09716	0.0826	0.06	0.0316
$(u_i)_a$	0.0313	0.0595	0.082	0.09636	0.10113	0.09636	0.082	0.0595	0.0313
erreur	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$

Méthode des différences finies et des éléments finis

Le programme sous Scilab pour les méthodes différences finis et éléments finis s'écrit :

```

**** Equation de Poisson 1D avec condition Dirichlet ****
err=[];
for k=2:10
N=2^k;
h=1/(N+1);
deff('y=f(x)', 'y=sin(%pi*x)')
A=zeros(N,N);
for i=2:N-1
    A(i,i)=2;
    A(i,i+1)=-1;
    A(i,i-1)=-1;
end
A(1,1)=2;A(N,N)=2;A(1,2)=-1;A(N,N-1)=-1;
A=1/(h^2)*A;
b=zeros(N,1);
for i=1:N
    b(i)=f(i*h);
end
u=inv(A)*b
deff('y=ue(x)', 'y=1/(%pi^2)*sin(%pi*x)')
x=0:h:1;uapp=[0;u;0];usol=ue(x);
xex=0:0.001:1;uex=ue(xex);
if (k==2) then
    figure(1) // trace de uapp et uex
    clf()
    plot2d(x,uapp,5)
    plot2d(xex,uex)
    legends(['uapp', 'uex'],[5,1])
end
err=[err,max(abs(uapp-usol'))];
end
figure(2) // trace de l'erreur
clf()
plot2d1('g11',2.^(2:10),err,1);
plot2d1('g11',[10^1,10^2],[10^(-1),10^(-3)],2)
legends(['erreur'],[2])

```

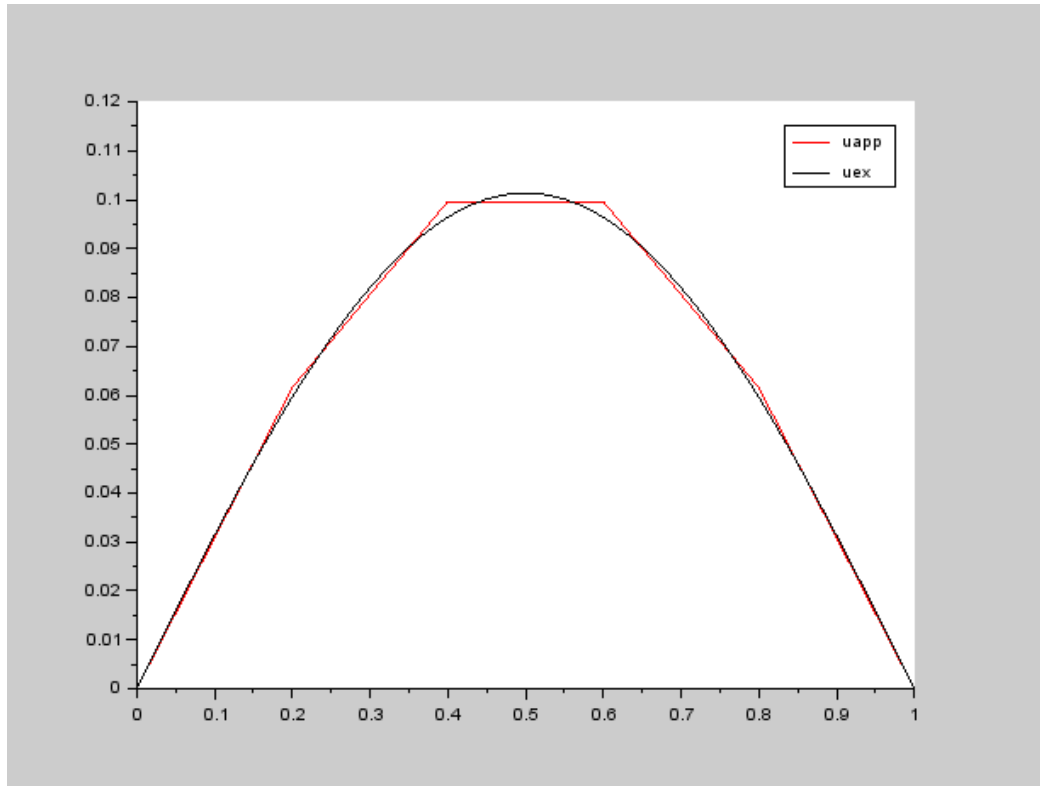


FIGURE 4.1 – SOLUTION EXACTE ET SOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATION DE POISSON 1D SUR [0,1]

Pour la méthode des volumes finis :

La valeur moyenne par maille obtenue avec les Volumes Finis est reportée dans le tableau ci-dessous.

Le calcul de la valeur moyenne de  $f(x)$  dans la  $i$ -ème maille est :

$$\tilde{f}_i = f_i\left(\frac{\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}\right)$$

Notons  $(\tilde{u}_i)_a$  la valeur moyenne de la solution analytique calculée sur la  $i$ -ème maille soit :

$$(\tilde{u}_i)_a = \frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} u(x) dx = u_i\left(\frac{\frac{\pi}{2}h}{\frac{\pi}{2}h}\right)$$

$x_i$	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
$u_i$	0.01589	0.04612	0.07184	0.0905	0.1003	0.1003	0.0905	0.07184	0.04612	0.01589
$(\tilde{u}_i)_a$	0.01585	0.046	0.07164	0.09028	0.1001	0.1001	0.09028	0.07164	0.046	0.01585
erreur	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$

Méthode des volumes finis



On remarque d'après les deux tableaux ci-dessus que les trois méthodes permettent d'obtenir des résultats avec une bonne précision. L'erreur la plus faible est obtenue avec la méthode des Volumes Finis.

## Conclusion

En conclusion, ce travail a pour but l'étude et la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c-à-d n'évoluant pas au cours du temps), comme prototype de ce type d'équation on a l'équation de Laplace.

Pour résoudre numériquement ces équations on a analysé trois méthodes de résolution ( Différences Finies, Éléments Finis et Volumes Finis ), mais avant on a défini l'espace adapté à ces méthodes : utilisation d'espaces de Sobolev.

Les questions essentielles lorsqu'on approche  $u$ , la solution exacte de l'EDP, par  $u_h$  une solution approchée, sont :

- ▶ la convergence : c'est à dire savoir si  $u_h$  tend vers  $u$  et en quel sens ?
- ▶ la précision : si  $\|u - u_h\|$  tend vers 0, à quelle vitesse ?
- ▶ la stabilité : si on perturbe les données, comment est perturbée la solution ?

pour cela on a parlé des propriétés d'un schéma numérique.

Enfin, pour bien comprendre l'importance de ces méthodes d'obtenir une bonne précision, on a donné une application numérique (l'équation de Laplace en 1D) .

# Bibliographie

- [1] Eric Darrigrand, Florian Méhats, *Équations aux Dérivées Partielles Elliptiques*, Université de Rennes 1, version du 19 janvier 2015.
- [2] P.A.Raviart,J.M.Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson.
- [3] J.-M. Bony. Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier. Editions de l'Ecole polytechnique, Ellipses, 2001.
- [4] *Master ACSYON, Le Théorème de Lax-Milgram*,  
URL :[http://www.unilim.fr/pages\\_perso/jacques-arthur.weil/M1/Thera/Lax\\_Milgram.pdf](http://www.unilim.fr/pages_perso/jacques-arthur.weil/M1/Thera/Lax_Milgram.pdf)
- [5] *EDP*,  
URL :[http://www.lacim.uqam.ca/~bedard/notes/cours\\_MAT4112/MAT4112\\_ch1\\_v2007.pdf](http://www.lacim.uqam.ca/~bedard/notes/cours_MAT4112/MAT4112_ch1_v2007.pdf)
- [6] J.-F. Scheid, *Méthodes numériques pour la dynamique des fluides*, Université de Lorraine.
- [7] Vincent Manet, *Méthode des éléments finis*
- [8] *Conditions aux limites*,  
URL :[https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition\\_aux\\_limites](https://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_aux_limites)
- [9] Aude Ronde pierre , Adeline Rouchon, *Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles - Étude théorique*, INSA Toulouse.
- [10] Pierre Puiseux, *Différences finies pour équations aux dérivées partielles*
- [11] J-H SAIAC, *Méthode des éléments finis*
- [12] David Manceau, *Résolution pratique des équations aux dérivées partielles*
- [13] J.-F. Scheid, *Volumes Finis*, Université de Lorraine.
- [14] KAMAL GUERAOUÏ, *Méthode des volumes finis*, Université Mohammed V– Agdal Rabat
- [15] Tony Lelièvre, *Équations aux dérivées partielles*
- [16] *Equation de Poisson 1D avec condition Dirichlet*,  
URL :<http://dumas.perso.math.cnrs.fr/poisson2015.sci>

## BIBLIOGRAPHIE

- [17] Eric Concalvès da Silva , *Méthodes et analyse numérique*, Institut Polytechnique de Grenoble .