



# THESE

Présentée à



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH  
Faculté des Sciences et Techniques  
FES

Pour l'obtention du diplôme

**DOCTORAT**  
En Probabilité et Statistique

par

**FETTAH AKHIAT**

221  
TM

---

---

## Contribution à la Convergence des Ensembles Aléatoires Pettis intégrables et Ensembles Aléatoires Bochner intégrables

---

---

*Date de soutenance : 21 Juillet 2011. Devant le Jury :*

Prof. A. Elhilali Alaoui	FST Univ. de Fez	Maroc	Président
Prof. O. Ammor	FST Univ. de Fez	Maroc	Examineur
Prof. E. Azroul	FSDH Univ. de Fez	Maroc	Examineur
Prof. M. El Khomssi	FST Univ. de Fez	Maroc	Rapporteur
Prof. F. Ezzaki	FST Univ. de Fez	Maroc	Directeur de Thèse
Prof. A. L. Faik	FS Univ. de Meknes	Maroc	Rapporteur

---

## Résumé

---

*Dans ce travail nous avons démontré des nouveaux résultats de convergence des martingales, sur-martingales et mils multivoques suivant plusieurs topologies introduites par Mosco et Beer. Nous avons étendu ces résultats aux martingales, mils et GFT Pettis intégrables. Nous avons prouvé l'existence d'une représentation de Castaing d'un pramart multivoque par des pramarts sélections. Après avoir démontré l'existence de l'espérance conditionnelle d'une multifonction Pettis intégrable ainsi que plusieurs propriétés des ensembles aléatoires Pettis intégrables, nous avons établis des nouveaux résultats de convergence des martingales régulières et sur-martingale multivoque Pettis intégrables.*

**Mots Clés:** Ensembles aléatoires, Intégrale de Pettis, Espérance Conditionnelle, Fonctions Pettis intégrables, Martingales, Mils, Pramarts, GFT, Mosco Convergence, Topologie Linéaire, Topologie de Mackey.

---

# Table des Matières

---

Dédicace	ii
Remerciements	iii
Introduction	1
<b>1 Convergence des Martingales multivoques</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	10
1.2 Préliminaires	11
1.3 Convergence des martingales et mils à valeurs dans $ck(E)$	13
1.4 Espérance conditionnelle et Convergences dans la théorie de l'intégral de Pettis	22
1.5 Convergence des martingales Pettis-intégrables	34
<b>2 Convergence des GFT et Mils multivoques</b>	<b>40</b>
2.1 Introduction	45
2.2 Notations et préliminaires	46
2.3 Convergences des GFT à valeurs convexe faiblement compacts	48
2.4 Convergences des Mils et GFT multivoques Pettis-intégrables	56
<b>3 Théorème de représentation des Pramarts multivoques</b>	<b>64</b>
3.1 Introduction	69
3.2 préliminaires et Rappels	70
3.3 Décomposition des Pramarts multivoques	71
3.4 Représentation des Pramarts multivoques	76

3.5	Pramarts multivoques dans un espace dual .....	80
<b>3</b>	<b>Théorème de Levy pour l'intégrale de Pettis</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction .....	89
4.2	préliminaires et Rappels .....	89
4.3	Espérance conditionnelle au sense de Pettis. ....	91
4.4	Convergence des Martingale de type Levy .....	97
4.5	Convergence des Supermartingales Pettis intégrables .....	102
	<b>Annexes</b>	<b>106</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>115</b>
	<b>Résumé</b>	<b>116</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>117</b>