THESE

Présentée à

UNIVERSITÉ S. M. BEN ABDELLAH - FES
Faculté des Sciences et Techniques de FES

Pour l'obtention du :

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Par

Chahrazade BAKKARI

Contenus, Polynômes Gaussiens et Propriétés de Prüfer

Soutenue le 25 Juin 2008

Devant le Jury

Prof. S. Bazzoni	Univ. Padova	Italie	Membre
Prof. A. Bouvier	Haut Conseil de l'Educ	France	Président
Prof. M. Fontana	Univ. Roma III	Italie	Membre
Prof. S. Glaz	Univ. Connecticut	USA	Membre Rapporteur
Prof. S. Kabbaj	KFUPM	Arabie Saoudite	Membre
Prof. T. Lucas	Univ. North Carolina	USA	Membre Rapporteur
Prof. N. Mahdou	FST Univ. Fès	Maroc	Directeur de Thèse
Prof. A. Mimouni	KFUPM & Univ. Fès	Arabie Saoudite & Maroc	Membre Rapporteur
Prof. M. Sobrani	FST Univ. Fès	Maroc	Membre Rapporteur

RESUME

Cette thèse se situe dans un domaine lien entre l'algèbre commutative et l'algèbre homologique, et touche deux conjectures: la conjecture de Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos :"Tout polynôme non nul Gaussien est de contenu localement principal" et celle de Bazzoni-Glaz :"Un anneau Gaussien R est tel que $wdim(R) = 0, 1$, ou ∞".

Soient R un anneau et $f(X)$ un polynôme de $R[X]$. Le contenu de $f(X)$, noté $c_R(f)$ est par définition l'idéal de R engendré par tous les coefficients de f. Le polynôme $f(X)$ sera dit Gaussien si $c(fg) = c(f)c(g)$ pour tout $g(X) \in R[X]$. Et un anneau R sera dit Gaussien si tout polynôme à coefficients dans R est Gaussien.

Notre présente thèse est formée de deux axes faisant l'objet de cinq chapitres recouvrant cinq publications. Dans un premier axe formant le premier chapitre, nous donnons -à partir des produits fibrés - une nouvelle classe d'anneaux non intègres solutions de la conjecture de Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos, tout en se mettant loin, des exemples d'anneaux donnés par Glaz et Vasconcelos, Heinzer et Huneke, Loper et Roitman, et Lucas.

Dans un second et principal axe formant les quatres derniers chapitres, nous avons adopté les extensions d'un domaine de Prüfer aux anneaux contenant des diviseurs de zéro (que nous appelerons les propriétés de Prüfer), et nous nous sommes consacrés ensuite, à l'étude de leur transfert dans différent modèles de constructions, à citer: les extensions triviales, les sous-anneaux rétractés, et les produits fibrés.

En effet, les domaines de Prüfer qui ont été définis par Heinz Prüfer en 1932, comme étant les domaines où tout idéal de type fini est inversible, ont connu, à travers les années, plusieurs extensions aux anneaux contenant des diviseurs de zéro. Et ces extensions sont bien ordonnées selon le sens suivant:

R Semi-héréditaire $\Rightarrow w.dim(R) \leq 1 \Rightarrow R$ arithmétique $\Rightarrow R$ Gaussian $\Rightarrow R$ anneau de Prüfer

Glaz a donné des exemples prouvant que ces implications sont, en général, irréversibles. Mais, rares sont ces exemples; la raison qui nous a conduit à mener l'étude du transfert de ces propriétés dans différent constructions.

Nous avons enrichi ainsi la littérature par des classes nouvelles et originales d'anneaux de Prüfer non Gaussiens, d'anneaux Gaussiens non arithmétiques et d'anneaux arithmétiques R tels que $wdim(R) > 1$. En conséquences, nous avons assuré d'une part, la conjecture de Bazzoni-Glaz, et d'autre part, offert de nouvelles classes d'anneaux répondant à la conjecture de Kaplansky-Tsang-Glaz-Vasconcelos.

Contents