



N° d'ordre : 02/2012

## THESE DE DOCTORAT

Présentée par

Mr : Samy Alami

Spécialité : Méthodes Numériques

Sujet de la thèse :

Modélisation des écoulements incompressibles par la méthode des éléments  
finis mixtes

Thèse présentée et soutenue le 23 Juin 2012 devant le jury composé de :

Nom/Prénom	Titre	Etablissement	
Mr. MOHCINE ZOUAK	PES	Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – FST, Fès	Président
Mr. RHALI BENAMAR	PES	Université Mohammed V - EMI, Rabat	Rapporteur
Mr. ABDELMALEK ZINE	PS	Ecole Centrale - Lyon	Rapporteur
Mr. MOHAMED AKHMOUCH	PES	Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – FST, Fès	Rapporteur
Mr. ABBASS SEDDOUKI	PH	Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – FST, Fès	Examinateur
Mr. MOHAMED EL HAMMOUMI	PES	Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – FST, Fès	Co- Directeur de thèse
Mr. AHMED EL KHALFI	PES	Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – FST, Fès	Directeur de thèse
Mr. ABDESLAM EL AKKAD	PA	CPR, Sefrou	Invité

Laboratoire d'accueil : Génie Mécanique

Etablissement : Faculté des Sciences et Techniques



## Résumé de la thèse

Le présent travail, dans ce mémoire, porte sur le développement de méthodes d'éléments finis mixtes pour la résolution des problèmes d'écoulement stationnaires ou instationnaires de fluides visqueux incompressibles. Ces écoulements sont régis par le système de Stokes dans le cas d'écoulements rampants et par le problème de Navier – Stokes dans le cas générale.

Dans un chapitre introductif, une étude bibliographique riche et bien documentée sur la modélisation numérique des problèmes d'écoulement de fluides newtoniens est présentée. En particulier, un rappel sur l'intérêt de l'utilisation des éléments finis stables et de bas degré, le développement d'algorithmes robustes, précis et efficaces pour la résolution des systèmes algébriques obtenus et enfin l'analyse a posteriori de l'erreur.

Le premier chapitre porte sur la résolution du problème de Stokes. L'approximation choisie est basée sur des éléments finis quadrangulaires de bas degré. La première section est dédiée aux rappels de formulations faibles continue et discrète du problème, ainsi qu'à la forme matricielle du système algébrique. Une étude détaillée permet de mettre en évidence la stabilité des formulations mixtes basées sur les éléments de Taylor – Hood  $Q_2-Q_1$  et  $P_2-P_1$  et l'instabilité de l'élément  $Q_1-P_0$ . Dans le but d'utiliser cet élément de bas degré, une technique de stabilisation basée sur un procédé de pénalisation est présentée. La section trois, particulièrement intéressante, présente une méthode d'estimation de la constante *inf-sup* basée sur le spectre de l'opérateur de Stokes discret.

Dans le second chapitre, les résultats obtenus précédemment sont appliqués au problème de Navier –Stokes stationnaire. Après un rappel du problème et des résultats mathématiques garantissant l'existence de solutions, une approximation basée sur la méthode des éléments finis mixtes est proposée. Le problème étant non linéaire, sa linéarisation est obtenue via l'algorithme de Newton, les systèmes algébriques sont résolus par des méthodes de type GMRES ou gradient conjugué stabilisé avec préconditionnement.

Le dernier chapitre de ce travail est consacré au problème de Navier - Stokes instationnaire. Pour traiter le terme temporel, deux schémas sont proposés. Le premier classique, de type Euler implicite et un autre plus précis. La stratégie de construction de la solution consiste en une intégration en temps complètement implicite utilisant une loi trapézoïdale stabilisée avec une méthode explicite de type Adams-Bashforth. Le système algébrique résultant est résolu par un solveur robuste basé sur les sous-espaces de Krylov.

Un travail intensif d'implémentation basé sur le logiciel Matlab, a été mis en œuvre. Des problèmes divers et variés tels que le problème de l'écoulement dans une cavité entraînée, régularisée ou non, des géométries non convexes de type marche ou encore des écoulements de type Blasius ont été abordé dans ce travail. Pour la validation, les résultats numériques sont systématiquement comparés à ceux obtenus dans la littérature spécialisée ainsi qu'à ceux obtenus par le logiciel commercial « ADINA system ».

### Mots clés :

Equations de Stokes, Equations de Navier Stokes, Méthode des éléments finis mixtes, solveurs itératifs, estimation a posteriori de l'erreur, ADINA system.

# Table des matières

<b>Notations</b> .....	<b>6</b>
<b>Chapitre 0 : Introduction et Etude bibliographique</b> .....	<b>7</b>
0.1 Introduction .....	7
0.2 Etude bibliographique .....	8
<b>Chapitre 1 : Méthode des éléments finis mixtes : application au problème de Stokes</b> .....	<b>18</b>
1.1 Approximation par éléments finis mixtes du problème de Stokes .....	18
1.1.1 Modèle mathématique .....	18
1.1.2 Formulation faible et choix des fonctions test .....	20
1.1.3 Choix des éléments finis .....	26
1.1.3.1 Eléments rectangulaires stables .....	26
1.1.3.2 Eléments rectangulaires stabilisés .....	31
1.1.3.3 Eléments triangulaires .....	36
1.1.4 Simulations Numériques .....	39
1.1.4.1 Résolution du problème de la marche .....	40
1.1.4.2 Ecoulement de Blasius .....	44
1.2 Estimation a posteriori d'erreur .....	46
1.3 Estimation de la constante de stabilité pour la méthode Q1-P0 .....	59
1.3.1 Equations du modèle .....	59
1.3.2 Estimation de la constante de stabilité .....	60
1.3.3 Simulations numériques .....	69
1.4 Conclusion .....	75
<b>Chapitre 2 : Méthode des éléments finis mixtes : application au problème de Navier - Stokes stationnaire</b> .....	<b>76</b>
2.1 Résolution du problème de Navier-Stokes stationnaire .....	76
2.1.1 Modèle mathématique .....	76
2.1.2 Formulation faible .....	77

2.1.3	Approximation par éléments finis mixtes .....	79
2.1.4	Simulations numériques .....	83
2.1.4.1	Ecoulement dans une cavité.....	84
2.1.4.2	Problème de la marche.....	90
2.1.4.3	Ecoulement de Blasius .....	92
2.2	Estimation a posteriori d'erreur .....	95
2.3	Conclusion .....	102
<b>Chapitre 3 : Résolution du problème de Navier – Stokes instationnaire par la méthode des éléments finis mixtes .....</b>		<b>104</b>
3.1	Introduction .....	104
3.2	Résolution par le schéma implicite d'Euler .....	104
3.2.1	Equations de Navier-Stokes instationnaires d'un écoulement incompressible.....	104
3.2.2	Approximation par éléments finis mixtes .....	106
3.2.3	Simulations numériques .....	108
3.3	Résolution des équations de Navier-Stokes instationnaires par la loi trapézoïdale stable .....	115
3.3.1	Equations du modèle .....	115
3.3.2	Discretisation des équations de Navier-Stokes instationnaires .....	116
3.3.3	Simulations numériques .....	125
3.4	Conclusion .....	129
<b>Chapitre 4 : Conclusions et Perspectives .....</b>		<b>130</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>		<b>132</b>