UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Département de Mathématiques
Master : « Recherche Opérationnelle et Statistique - Structures Discrètes »

MÉMOIRE DE PROJET DE FIN D'ÉTUDES
Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques
(MST)

Martingales à la limite

Réalisée par : Abdouljabbar Yahia OMARI
Encadré par : Professeur Fatima EZZAKI

Soutenu le : 15 juin 2016

Devant le jury composé de :

Professeur SIDKI Omar	**Président**
Professeur EL HILALI ALAOUI Ahmed	**Membre**
Professeur HILALI Abdelmajid	**Membre**
Professeur EZZAKI Fatima	**Encadrante**

Année universitaire 2015 / 2016

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES - SAÏS
B.P. 2202 - Route d'Imouzzer - FES

Table des matières

1 Introduction

Dans les années récentes, l'étude des fonctions multivoques mesurables a été développée de manière extensive avec des application en mathématiques économiques et au problème de contrôle optimal.

Ce travail est divisé en six sections.

Dans la première section, nous donnons des définitions et notations utiles.

La deuxième section présente la théorie de l'espérance conditionnelle multivoque et des martingales multivoques comme généralisation du cas simple où l'on traite avec des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach. Ainsi nous citons la mesurabilité des fonctions multivoques et la notion de décomposabilité qui jouera un rôle principal dans la construction de l'espérance conditionnelle multivoque, nous formulons l'espace de famille de fonctions multivoques intégrablement bornées à valeurs dans l'ensemble des parties d'un espace de Banach et certains de ses sous-espaces, nous donnons quelques propriétés des fonctions multivoques et espérance conditionnelle dans ces espaces.

La troisième section donne une vue générale sur la convergence des martingales multivoques et traite, notamment, la convergence presque sûre, la convergence scalaire et la convergence de Mosco.

Dans la quatrième section, nous introduisons les martingales à la limites (Mil) et nous établissons, dans un premier cas, leur convergence de Mosco dans l'espace des fonctions multivoques intégrablement bornées à valeurs faiblement compactes convexes dans un espace de Banach séparable ayant la propriété de Radon-Nikodym (RNP) de dual aussi séparable. Le deuxième cas établit les convergences scalaire et de Mosco pour les martingales à la limite faiblement compacts convexes sans RNP.

Cinquièmement, nous obtenons la convergence scalaire et convergence de Mosco pour les pramarts multivoques..

Finalement, nous comparons les différentes notions traitées dans les sections précédentes : martingale, martingale en limite, amart et pramart, et nous vérifions si l'on peut construire une théorie générale.

2 Notations et définitions

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: un espace probabilisé ;
- $(\mathcal{F}_n,\, n \geq 1)$: une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$;
- T : ensemble des temps d'arrêt bornés sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$
- X : un espace de Banach séparable muni d'une norme $\|\|$, X^* son dual séparable ;
- $\mathcal{P}(X)$: famille des parties de X ;
- Fonction multivoque : c'est une fonction $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$;
- Domaine d'une fonction multivoque F : $D(F) = \{\omega \in \Omega \,:\, F(\omega) \neq \emptyset\}$;
- Graphe d'une fonction multivoque F : $G(F) = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \,:\, x \in F(\omega)\}$;
- $F^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,:\, F(\omega) \cap A \neq \emptyset\}$ où $A \in \mathcal{P}(X)$;
- P_F : distribution de F définie par : $P_F(A) = P\left(F^{-1}(A)\right) \quad A \in \mathcal{P}(X)$, pour une fonction multivoque F.
- $\overline{\mathcal{P}}(X)$: famille des parties fermées de X ;
- $\mathcal{O}(X)$: famille des ouverts de X ;
- $wkc(X)$: famille des parties faiblement compactes convexes de X ;
- $cb(X)$: famille des parties fortement convexes bornées de X ;
- $cf(X)$: famille des parties convexes fermées de X ;
- $cfb(X)$: famille des parties convexes fermées bornées de X ;
- $ck(X)$: famille des parties convexes compactes de X ;
- $wkcf(X)$: famille des parties faiblement compactes convexes fermées de X ;
- $skcf(X)$: famille des parties fortement compactes convexes fermées de X ;
- $U^- = \{C \in cf(X) \,:\, C \cap U \neq \emptyset\} \qquad \forall C \in \mathcal{P}(X)$. Dans cette définition, $cf(X)$ peut être remplacé par $wkc(X)$, $skc(X)$, $ck(X)$ ou $cfb(X)$ selon le contexte ;
- $\mathcal{E}$: σ-algèbre d'Effros de $cf(X)$ (ou $cfb(X)$, ou $ck(X)$, ou $wkc(X)$). C'est la tribu sur $cf(X)$ (ou $cfb(X)$, ou $ck(X)$, ou $wkc(X)$) engendrée par par la classe $\{U^- \,:\, U \in \mathcal{O}(X)\}$;
- $\mathscr{M}\,[\Omega; X]$: ensemble des fonctions multivoques à valeurs fermées ;
- $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}$: famille des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f|^p$ soit intégrable $(1 \leq p < \infty)$;
- $\mathscr{L}^p_X(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $\mathscr{L}^p_X$: famille des fonctions $f : \Omega \longrightarrow X$ telle que $\|f\|^p$ soit intégrable $(1 \leq p < \infty)$;
- $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ou, en abrégé, $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$: famille des fonctions $\mathcal{B}$-mesurables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f|^p$ soit intégrable $(1 \leq p < \infty)$;
- $\mathscr{L}^1_X(\Omega, \mathcal{B}, P)$ ou, en abrégé, $\mathscr{L}^1_X(\mathcal{B})$: famille des fonctions $\mathcal{B}$-mesurables $f : \Omega \longrightarrow X$ telle que $\|f\|^p$ soit intégrable $(1 \leq p < \infty)$;

- $S_F^p(\mathcal{B}) = \{f \in \mathscr{L}_X^p(\mathcal{B}) \,:\, \forall \omega \in \Omega \; f(\omega) \in F(\omega)\}$ où $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une fonction multivoque et $(1 \le p < \infty)$;
- $S_F^p = S_F^p(\mathcal{F})$;
- $S^1_{E^{\mathcal{B}}F}(\mathcal{B}) = \{E^{\mathcal{B}} f \,:\, f \in \mathscr{L}_F^1\}$ où $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une fonction multivoque ;
- $S^1_{b(X)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $S^1_{b(X)}$: famille des fonctions multivoques intégrablement bornées ;
- $S^1_{bc(X)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $S^1_{bc(X)}$: famille des fonctions multivoques intégrablement bornées convexes ;
- $S^1_{bck(X)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $S^1_{bck(X)}$: famille des fonctions multivoques intégrablement bornées convexes compactes ;
- $S^1_{wkcf(X)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $S^1_{wkcf(X)}$: famille des fonctions multivoques à valeurs dans $wkcf(X)$ intégrablement bornées ;
- $S^1_{skcf(X)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou, en abrégé, $S^1_{skcf(X)}$: famille des fonctions multivoques à valeurs dans $skcf(X)$ intégrablement bornées ;
- Intégrale d'une fonction multivoque F :

$$\int_\Omega F\,dP = \left\{ \int_\Omega f\,dP \,:\, f \in \mathscr{L}_F^1 \right\}$$

- $d(x, C) = \inf_{c \in C} \| x - c \| \qquad \forall C \in \mathcal{P}(X)$;
- Distance de Hausdorff :

$$H(C, D) = \max \left\{ \sup_{x \in C} d(x, D), \sup_{x \in D} d(x, C) \right\} \qquad \forall C, D \in \mathcal{P}(X) \,;$$

- Si F_1, $F_2 \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{X}}$, la fonction $\omega \longmapsto H(F_1(\omega), F_2(\omega))$ est intégrable. On définit alors :

$$\Delta(F_1, F_2) = \int_\Omega H(F_1(\omega), F_2(\omega))\; dP \tag{2.1}$$

- Fonction d'appui : $\delta^*(x^*, C) = \sup_{x \in C} \langle x, x^* \rangle \qquad \forall x^* \in X^* \; \forall C \in \mathcal{P}(X)$;
- $\|C\| = \sup_{x \in C} \|x\| \qquad \forall C \in \mathcal{P}(X)$ (rayon de C) ;
- τ_M : topologie de Mosco. C'est la topologie sur les parties de X faiblement fermées dont une base de voisinages est :

$$\{V^- \,;\, V \text{ fortement ouvert}\} \quad \text{et} \quad \{(K^c)^+ \,:\, K \text{ faiblement compact}\}$$

où, pour tout $C \in \mathcal{P}(X)$, $C^+ = \{A \in \mathcal{P}(X) \,:\, A \subset C\}$ et $C^- = \{A \in \mathcal{P}(X) \,:\, A \cap C \neq \emptyset\}$;

- τ_L : topologie linéaire dans $cf(X)$. C'est la topologie sur $cf(X)$ engendrée par les ensembles de la forme U^-, où U est un ouvert de X, et les ensembles

$$\Lambda(x^*, \alpha) = \{C \in cf(X) \ : \ \delta^*(x^*, C) < \alpha\}$$

où $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;

- τ_H : topologie associée à la distance de Hausdorff ;
- τ_{Ma} : topologie de Mackey. C'est la topologie sur X engendrée par tous les ensembles absolument convexes et faiblement compacts dans X^* ;
- Convergence pour la topologie scalaire : une suite $\{C_n \ : \ n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(X)$ converge vers $C \in \mathcal{P}(X)$ pour la topologie scalaire et l'on note $\tau_s\text{-}\lim C_n = C$ si :

$$\delta^*(x^*, C) = \lim_{n \to +\infty} \delta^*(x^*, C_n) \qquad \forall x^* \in X^* ;$$

- Convergence pour la topologie de Mosco : une suite $\{C_n \ : \ n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(X)$ converge vers $C \in \mathcal{P}(X)$ au sens de Mosco et l'on note $\tau_M\text{-}\lim C_n = C$ si : $C = s - \mathrm{Li} C_n = w - \mathrm{Ls} C_n$ où :

$$\begin{aligned} s - \mathrm{Li} C_n &= \left\{ x \in X \ : \ \forall n \geq 1 \, \exists x_n \in C_n \ \ (x_n)_n \xrightarrow{s} x \right\} \\ w - \mathrm{Ls} C_n &= \left\{ x \in X \ : \ \exists \left(C_{n_k}\right)_k \text{ sous-suite de } (C_n)_n \text{ et } \forall k \geq 1 \, \exists x_k \in C_{n_k} \ \ (x_k)_k \xrightarrow{w} x \right\} ; \end{aligned}$$

- Une fonction $M : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(X)$ est dénombrablement additive si $M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ pour tout suite $(A_n, \, n \geq 1)$ à éléments deux à deux disjoint de $\mathcal{F}$;
- Une fonction $M : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(X)$ est dite une mesure si M est dénombrablement additive et $M(\emptyset) = \{0\}$;
- Une mesure multivoque M est absolument continue par rapport à P si $P(A) = 0 \Rightarrow M(A) = \{0\}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$;
- Si M est une mesure multivoque, la variation V_M de M est définie par :

$$V_M(A) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|M(A_i)\|$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les partitions finies mesurables de A.

Si $V_M(\Omega) < \infty$ on dit que M est à variation bornée ;

- Si $\{C_n \ : \ n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(X)$, la somme $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} C_n$ est définie par les propriétés suivantes :

(1) pour tout $k \geq 1$, $\dot{\sum}_{n=1}^{k} C_n = \overline{\sum_{n=1}^{k} C_n}$;

(2) $\dot{\sum\limits_{n=1}^{\infty}} C_n$ est fermé borné ;

(3) $\lim_k H\left(\dot{\sum\limits_{n=1}^{k}} C_n, \dot{\sum\limits_{n=1}^{\infty}} C_n\right) = 0$

• Une fonction multivoque à valeurs fermées convexes est une $\dot{\sum}$-mesure si $M(\emptyset) = \{0\}$ et $M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \dot{\sum}_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ pour tout suite (A_n) éléments deux à deux disjoint de $\mathcal{F}$.

• Un espace X est complètement régulier si il est séparé et :

$\forall x \in X, \forall A \in \overline{\mathcal{P}}(X) \setminus \{x\}$ $\exists f$ continue telle que :

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [0,1] \\ y &\longmapsto 0 \text{ si } y = x \quad \text{et } 1 \text{ si } y \in A \end{aligned}$$

3 Propriétés des multifonctions

3.1 Mesurabilité et décomposabilité

Théorème 3.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et X un espace métrique séparable.*

Soit $F : \Omega \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}(X)$ une fonction multivoque mesurable à valeurs dans $\overline{\mathcal{P}}(X)$.

On considère les conditions suivantes :

1. Pour toute borélien $B \subset X$, $F^{-1}(B) \in \mathcal{F}$;

2. Pour toute fermé $C \subset X$, $F^{-1}(C) \in \mathcal{F}$;

3. Pour toute ouvert $O \subset X$, $F^{-1}(O) \in \mathcal{F}$;

4. $D(F) \in \mathcal{F}$ et, pour tout $x \in X$, l'application $\omega \longmapsto d(x, F(\omega))$ est une fonction mesurable de $\omega \in \Omega$vers $\mathbb{R}$;

5. $D(F) \in \mathcal{F}$ et il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions définies sur $D(F)$ à valeurs dans X et telle que $F(\omega) = \overline{\{f_n, \, n \geq 1\}}$ pour tout $\omega \in \Omega$;

6. $G(F)$ est $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_X$-mesurable, $\mathcal{B}_X$ étant la la tribu borélienne de X.

Alors on a les résultats suivants :

a. 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Leftrightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 6. ;

b. Si X est complet, alors 3. $\Rightarrow$ 5. ;

c. Si X est complet et s'il existe sur $\mathcal{F}$ une mesure σ-finie complète, les conditions 1. à 6. sont équivalentes.

Corollaire. *Soient F_1, $F_2 \in \mathscr{M}[\Omega; X]$ et $p \in [1, +\infty]$. Si $S_{F_1}^p = S_{F_2}^p \neq \emptyset$, alors $F_1(\omega) = F_2(\omega)$ pour P-presque tout $\omega \in \Omega$.*

Lemme 3.2. *Soient $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$ et $p \in [1, +\infty]$. Si $S_F^p \neq \emptyset$, il existe une suite $\{f_n, \, n \geq 1\} \subset S_F^p$ telle que $F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega), \, n \geq 1\}}$ pour tout $\omega \in \Omega$.*

Démonstration. Puisque $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$, d'après le théorème 3.1, il esiste une suite $\{g_j,\, j \geq 1\}$ de fonctions mesurables telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $F(\omega) = \overline{\{g_j(\omega),\, j \geq 1\}}$.

Soit $f \in S_F^p$. Pour $j \geq 1$ et $m \geq 1$, définissons :

$$\begin{aligned} B_{jm} &= \{\omega \in \Omega \,:\, m-1 \leq \|g_j(\omega)\| < m\} \\ f_{jm} &= 1_{B_{jm}} g_j + 1_{B_{jm}^c} f \end{aligned}$$

Alors $\{f_{jm}\,,\, j \geq 1,\, m \geq 1\} \subset S_F^p$ et, pour tout $\omega \in \Omega$, on a : $F(\omega) = \overline{\{f_{jm}(\omega),\, j \geq 1,\, m \geq 1\}}$.

□

Lemme 3.3. *Soient $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$ et $p \in [1, +\infty[$. Soit $\{f_n,\, n \geq 1\} \subset S_F^p$ telle que $F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega),\, n \geq 1\}}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors, pour tout $f \in S_F^p$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une partition mesurable finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω telle que :*

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} f_i \right\|_p < \epsilon$$

Démonstration. Soit $f \in S_F^p$ et tout $\epsilon > 0$, alors $f(\omega) \in F(\omega)$, pour tout $\omega \in \Omega$.

Prenons $\epsilon > 0$, alors il existe une partition mesurable dénombrable $\{B_i,\, i \geq 1\}$ de Ω telle que :

$$\|f(\omega) - f_i(\omega)\| < \epsilon^p \qquad \forall \omega \in B_i \; \forall i \geq 1$$

et définissons une partition finie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de la manière suivante :

$$A_1 = B_1 \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i \right) \qquad \text{et} \qquad A_i = B_i \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} f_i \right\|_p^p &= \int_\Omega \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} f_i \right\|^p dP \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} f_i \right\|^p dP + \sum_{i \geq n+1}^{\infty} \int_{B_i} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} f_i \right\|^p dP \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} \|f(\omega) - f_i(\omega)\|^p \, dP + \sum_{i \geq n+1}^{\infty} \int_{B_i} \|f(\omega) - f_1(\omega)\|^p \, dP \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} \epsilon^p \, dP + \sum_{i \geq n+1}^{\infty} \int_{B_i} \epsilon^p \, dP = \epsilon^p \end{aligned}$$

□

Théorème 3.4. *Soient* F_1, $F_2 \in \mathscr{M}\left[\Omega; X\right]$ *deux fonctions multivoques à valeurs fermés et* F *la fonction multivoque définie par* $F(\omega) = \overline{F_1(\omega) + F_2(\omega)}$. *Alors* $F \in \mathscr{M}\left[\Omega; X\right]$. *En outre, si* $S^p_{F_1}$ *et* $S^p_{F_2}$ *sont non vides, pour* $p \in [1, +\infty[$, *alors* $S^p_F = \overline{S^p_{F_1} + S^p_{F_2}}$, *la fermeture dans* $\mathscr{L}^p_X(\Omega)$.

Démonstration. Le premier résultat est trivial et découle du théorème 3.1 puisque X est un espace de Banach et de l'équivalence 2.$\Longleftrightarrow$5.

Soit $p \in [1, +\infty[$ tel que $S^p_F \neq \emptyset$. Par lemme 3.2, il existe deux suites $\{f_{1i},\, i \geq 1\} \subset S^p_F$ et $\{f_{2j},\ j \geq 1\} \subset S^p_F$ tel que $F_1(\omega) = \overline{\{f_{1i}(\omega),\, i \geq 1\}}$ et $F_2(\omega) = \overline{\{f_{2j}(\omega),\, \geq 1\}}$pour tout $\omega \in \Omega$. Donc $F(\omega) = \overline{\{f_{1i}(\omega) + f_{2j}(\omega),\, i, j \geq 1\}}$ pour tout $\omega \in \Omega$ et par lemme 3.3 on peut choisir une partition $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de Ω, et des entiers $i_1, ..., i_n$et $j_1, ..., j_n$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k}(f_{1i_k} + f_{2j_k}) \right\|_p < \epsilon$$

d'où $S^p_F \subset \overline{S^p_{F_1} + S^p_{F_2}}$. □

Proposition 3.5. *Soient* $F \in \mathscr{M}\left[\Omega; X\right]$ *et* $p \in [1, +\infty[$. *Si* $S^p_F \neq \emptyset$, *alors* S^p_F *est convexe si et seulement si* $F(\omega)$ *est convexe pour* P*-presque tout* $\omega \in \Omega$.

Définition 3.6. Soit M\, un ensemble de fonctions mesurables $f : \Omega \longrightarrow X$.

On dit que M est **décomposable** si on a :

$$\forall f_1, f_2 \in M \;\; \forall A \in \mathcal{F} \qquad 1_A f_1 + 1_{\Omega \setminus A} f_2 \in M$$

Remarque. Si M est décomposable, alors $\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} f_i \in M$ pour toute partition mesurable finie $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de Ω et toute suite finie $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset M$.

Théorème 3.7. *Soit* M *un sous-ensemble non vide fermé de* $\mathscr{L}^p_X$,$1 \leq p \leq \infty$. *Alors il existe un* $F \in \mathscr{M}\left[\Omega; X\right]$ *tel que :* $M = S^p_F$ *si et seulement si* M *est décomposable.*

Démonstration. Soit M un sous-ensemble de $\mathscr{L}^p_X$ non vide, fermé, décomposable. Appliquons Lemme 3.2. Il existe une suite $\{f_i,\, i \geq 1\} \subset \mathscr{L}^p_X$ telle que$\{f_i\left(\omega\right),\, i \geq 1\}$ soit dense dans X, pour tout $\omega \in \Omega$.

Pour tout i, soit $\alpha_i = \inf \left\{ \left\| f_i - g \right\|_p \,:\, g \in M \right\}$ et une suite $\{g_{ij},\, j \geq 1\} \subset M$ telle que $\left\| f_i - g_{ij} \right\|_p \longrightarrow \alpha_i$.

On définit $F \in \mathscr{M}\left[\Omega; X\right]$ par :

$$F\left(\omega\right) = \overline{\{g_{ij}\left(\omega\right) : i, j \geq 1\}} \qquad \omega \in \Omega.$$

Montrons que $M = S_F^p$:

Par le Lemme 3.3, on peut prendre une partition mesurable finie $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \Omega$ et $\{h_1, ..., h_n\} \subset \{g_{ij},\, i, j \geq 1\}$ telles que :

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} h_k \right\|_p < \varepsilon$$

Puisque $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{A_k} h_k \in M$, on a donc $f \in M$. D'où $S_F^p \subset M$.

Supposons que $M \neq S_F^p$. Alors il existe $f \in M$, $A \in \mathcal{F}$ avec $P(A) > 0$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\inf_{i,j} \|f(\omega) - g_{ij}(\omega)\| \geq \delta \qquad \forall \omega \in A$$

Prenons un entier i fixe tel que l'ensemble :

$$B = A \cap \left\{ \omega \in \Omega \,:\, \|f(\omega) - f_i(\omega)\| < \frac{\delta}{3} \right\}$$

ait une mesure strictement positive et soit :

$$g_j^{'} = 1_B f + 1_{\Omega \setminus B} g_{ij} \qquad j \geq 1$$

Alors puisque $\{g_j,\, j \geq 1\} \subset M$ et

$$\|f_i(\omega) - g_{ij}(\omega)\| \geq \|f(\omega) - g_{ij}(\omega)\| + \|f(\omega) - f_i(\omega)\| > 2\frac{\delta}{3} \qquad \forall \omega \in B$$

on a pour $j \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|f_i - g_{ij}|\|_p^p - \alpha_i^p &\geq \|f_i - g_{ij}\|_p^p - \left\| f_i - g_j^{'} \right\|_p^p \\
&= \int_B \left(\|f_i(\omega) - g_{ij}(\omega)\|^p - \left\| f_i(\omega) - g_j^{'}(\omega) \right\|^p \right) dP(\omega) \\
&\geq \left(\left(2\frac{\delta}{3} \right)^p - \left(\frac{\delta}{3} \right)^p \right) P(B) > 0
\end{aligned}$$

Pour j tendant vers l'infini, on obtient la contradiction. Donc : $M = S_F^p$.

L'implication réciproque est triviale car, pour $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$, S_F^p est nécessairement décomposable. $\square$

3.2 Intégrabilité

Définition 3.8. Une fonction multivoque $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est dite **intégrablement bornée** s'il existe $\rho \in L^1$ tel que $\|x\| \leq \rho(\omega)$ pour tous $x \in X$ et $\omega \in \Omega$ tels que $x \in F(\omega)$.

Remarque. Si $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$, il est clair que F est intégrablement bornée si et seulement si la fonction $\omega \longrightarrow \|F(\omega)\|$ est intégrable.

Si $S_F^p \neq \emptyset$:

$$\sup_{f \in S_F^p} \|f\|_1 = \int_\Omega \|F(\omega)\| \, d\mu$$

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 3.9. *$F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$. Alors F est intégrablement bornée si et seulement si S_F^1 est non vide et borné dans $\mathscr{L}_X^1$.*

Proposition 3.10. *Muni de la métrique Δ, définie par l'équation (2.1), $S^1_{b(X)}$ est un espace métrique complet et $S^1_{cb(X)} \supset S^1_{ckb(X)}$ sont des sous-espaces fermés de $S^1_{b(X)}$.*

Théorème 3.11. *On suppose que X est un espace réflexif et soit $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $F \in S^1_{bc(X)}$;
(2) S_F^1 est non vide, borné et convexe dans $\mathscr{L}_X^1$;
(3) S_F^1 est non vide, faiblement compact et convexe dans $\mathscr{L}_X^1$.

Intégrale de Bochner

Soit $F \in \mathscr{M}[\Omega; X]$. L'intégrale de F est définie par :

$$\int_\Omega F \, dP = \left\{ \int_\Omega f \, dP \ : \ f \in S_F^1 \right\}$$

dite intégrale de Bochner.

Théorème 3.12. *L'intégrale de Bochner des fonctions multivoques $\int_\Omega F \, dP$ a les propriétés suivantes :*

(1) $H\left(\overline{\int_\Omega F_1 \, dP}, \overline{\int_\Omega F_2 \, dP}\right) \leq \Delta(F_1, F_2) \quad \forall F_1, F_2 \in S^1_{b(X)}$
(2) $\overline{\int_\Omega (F_1 + F_2) dP} = \overline{\int_\Omega F_1 \, dP} + \overline{\int_\Omega F_2 \, dP} \quad \forall F_1, F_2 \in S^1_{b(X)}$

Démonstration. Soient $F_1,F_2 \in S^1_{b(X)}$. Pour $f_1 \in S^1_{F_1}$, on a :

$$\begin{aligned}
\inf_{f_2 \in S^1_{F_2}} \left\| \int_\Omega f_1 dP - \int_\Omega f_2 dP \right\| &\leq \inf_{f_2 \in S^1_{F_2}} \int_\Omega \| f_1(\omega) - f_2(\omega) \| \, dP(\omega) \\
&= \int_\Omega d\left(f_1(\omega), F_2(\omega)\right) dP(\omega) \\
&\leq \Delta(F_1, F_2)
\end{aligned}$$

ainsi on a :

$$d\left(x, \overline{\int_\Omega F_2 dP}\right) \leq \Delta(F_1, F_2) \qquad \forall x \in \overline{\int_\Omega F_1 dP}$$

et de même :

$$d\left(y, \overline{\int_\Omega F_1 dP}\right) \leq \Delta(F_1, F_2) \qquad \forall y \in \overline{\int_\Omega F_2 dP}$$

d'où (1)

(2) est immédiate d'après théorème 3.4. □

Théorème 3.13. *Soit $F \in \overline{S^1_{bc(X)}}$, alors une fonction $f \in \mathscr{L}^1_X$ est dans S^1_F si et seulement si $\int_A f \, dP \in \overline{\int_A F} \, dP$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. De plus, si X est séparable, le même résultat est vrai pour $F \in S^1_{bc(X)}$.*

3.3 Espérance Conditionnelle Multivoque

Pour $f \in \mathscr{L}^1_X$ et $\mathcal{F}_1$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$, l'espérance conditionnelle $E(f/\mathcal{F}_1)$ de f par rapport à $\mathcal{F}_1$ est définie par la fonction $E(f/\mathcal{F}_1) \in \mathscr{L}^1_X(\mathcal{F}_1)$ telle que :

$$\int_A E(f/\mathcal{F}_1) \, dP = \int_A f \, dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

Théorème 3.14. *Soi t $F \in S^1_{b(X)}$, alors il existe un unique $\xi(\mathrm{F}/\mathcal{F}) \in \mathscr{L}^1_X(\mathcal{F})$ tel que : $S^1_{\xi(F/\mathcal{F})} = \overline{\left\{E(f/\mathcal{F}) :: f \in S^1_F\right\}}$.*

*$S^1_{\xi(F/\mathcal{F})}$ est appelée **espérance conditionnelle** de F par rapport à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soit $M = \left\{E(f/\mathcal{F}) : f \in S^1_F\right\}$. Puisque$M$ est décomposable par rapport à $\mathcal{F}$, alors $\overline{M}$ est décomposable par rapport à $\mathcal{F}$ et $\overline{M}$ est non vide borné dans $\mathscr{L}^1_X(\mathcal{F})$. Donc, d'après le théorème 3.7, la proposition 3.9 et le corolaire du théorème 3.1, il existe $\xi(\mathrm{F}/\mathcal{F}) \in \mathscr{L}^1_X(\mathcal{F})$ tel que $\overline{M} = S^1_{\xi(F/\mathcal{F})}$. □

Remarque. Par la proposition 3.5 on a : $F \in S^1_{cb(X)} \Longrightarrow \xi(F/\mathcal{F}) \in S^1_{cb(X)}(\mathcal{F})$

Théorème 3.15. *L'espérance conditionnelle* $F \longmapsto \xi(F/\mathcal{F})$ *sur* $S^1_{b(X)}$ *satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Delta\left(\xi\left(F_1/\mathcal{F}\right), \xi\left(F_2/\mathcal{F}\right)\right) \leq \Delta\left(F_1, F_2\right) \quad \forall F_1, F_2 \in S^1_{b(X)}$
   En particulier $\int_\Omega \|\xi(F/\mathcal{F}(\omega))\| \, dP(\omega) \leq \int_\Omega \|F(\omega)\| \, dP(\omega) \quad \forall F \in S^1_{b(X)}$
2. $\xi\left(F_1 + F_2/\mathcal{F}\right) = \xi\left(F_1/\mathcal{F}\right) + \xi\left(F_2/\mathcal{F}\right) \quad \forall F_1, F_2 \in S^1_{b(X)}$
3. $\xi(\beta F/\mathcal{F}) = \beta\xi(F/\mathcal{F}) \quad \forall F \in S^1_{b(X)} \ \forall \beta \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Démonstration. Soient $F, F_1, F_2 \in \mathscr{L}^1_X$. Posons $B = \xi(F/\mathcal{F})$, $B_1 = \xi(F_1/\mathcal{F})$ et $B_2 = \xi(F_2/\mathcal{F})$.

1. On définit l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{x \in B_1(\omega)} d(x, B_2(\omega)) \geq \sup_{x \in B_2(\omega)} d(x, B_1(\omega))\right\}$
   on a :

$$
\begin{aligned}
\Delta(B_1, B_2) &= \int_\Omega H(B_1(\omega), B_2(\omega)) \, dP(\omega) \\
&= \int_A \sup_{x \in B_1(\omega)} d(x, B_2(\omega)) \, dP(\omega) + \int_{\Omega \setminus A} \sup_{x \in B_2(\omega)} d(x, B_1(\omega)) \, dP(\omega) \\
&= \sup_{b_1 \in S^1_{B_1}} \int_A d(b_1(\omega), B_2(\omega)) \, dP(\omega) + \sup_{b_2 \in S^1_{B_2}} \int_{\Omega \setminus A} d(b_2(\omega), B_1(\omega)) \, dP(\omega) \\
&= \sup_{b_1 \in S^1_{B_1}} \inf_{b_2 \in S^1_{B_2}} \int_A \|b_1(\omega) - b_2(\omega)\| \, dP(\omega) + \sup_{b_2 \in S^1_{B_2}} \inf_{b_1 \in S^1_{B_1}} \int_{\Omega \setminus A} \|b_1(\omega) - b_2(\omega)\| \, dP(\omega) \\
&= \sup_{f_1 \in S^1_{F_1}} \inf_{f_2 \in S^1_{F_2}} \int_A \|E(f_1/\mathcal{F})(\omega) - E(f_2/\mathcal{F})(\omega)\| \, dP(\omega) + \\
&\qquad + \sup_{f_2 \in S^1_{F_2}} \inf_{f_1 \in S^1_{F_1}} \int_{\Omega \setminus A} \|E(f_1/\mathcal{F})(\omega) - E(f_2/\mathcal{F})(\omega)\| \, dP(\omega) \\
&\leq \sup_{f_1 \in S^1_{F_1}} \inf_{f_2 \in S^1_{F_2}} \int_A \| f_1(\omega) - f_2(\omega) \| \, dP(\omega) + \sup_{f_2 \in S^1_{F_2}} \inf_{f_1 \in S^1_{F_1}} \int_{\Omega \setminus A} \| f_1(\omega) - f_2(\omega) \| \, dP(\omega) \\
&= \int_A \sup_{x \in F_1(\omega)} d(x, F_2(\omega)) \, dP(\omega) + \int_{\Omega \setminus A} \sup_{x \in F_2(\omega)} d(x, F_1(\omega)) \, dP(\omega) \\
&\leq \int_\Omega H(F_1(\omega), F_2(\omega)) \, dP(\omega) = \Delta(F_1, F_2)
\end{aligned}
$$

2. On a par le théorème 3.4 :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^1_{\xi(F_1+F_2/\mathcal{F})} &= \overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in \overline{S^1_{F_1}+S^1_{F_2}}\right\}}\\
&= \overline{\left\{E\left(f_1/\mathcal{F}\right)+E\left(f_2/\mathcal{F}\right)\,:\, f_1\in S^1_{F_1}, f_2\in S^1_{F_2}\right\}}\\
&= \overline{\left\{S^1_{B_1}+S^1_{B_2}\right\}} \qquad (\text{avec } B_i=E\left(F_i/\mathcal{F}\right)\ i=1,2)\\
&= S^1_{B_1+B_2}
\end{aligned}
$$

alors

$$
\xi\left(F_1+F_2/\mathcal{F}\right) \;=\; B_1+B_2=\xi\left(F_1/\mathcal{F}\right)+\xi\left(F_2/\mathcal{F}\right)
$$

3.Soit $\beta\in\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$, alors :

$$
\begin{aligned}
S^1_{\xi(\beta F/\mathcal{F})} &= \overline{\left\{E\left(\beta f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}\\
&= \overline{\left\{\beta E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}
\end{aligned}
$$

Montrons que : $\overline{\left\{\beta E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}=\beta\overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}$

On a, par définition de l'adhérence : $\overline{\left\{\beta E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}\supset\beta\overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}$.

Soient $f\in\overline{\left\{\beta E\left(f/\mathcal{F}\right)\,:\, f\in S^1_F\right\}}$ et $\{f_n,\, n\geq 1\}\subset S^1_F$ telle que :

$$
\left\|\beta\left(\omega\right)E(f_n/\mathcal{F})\left(\omega\right)-f\left(\omega\right)\right\|\to 0 \qquad \text{p.s.}
$$

Pour $A=\{\omega\in\Omega\,:\,\beta\left(\omega\right)\neq 0\}\in\mathcal{F}$, on définit :

$$
\begin{aligned}
g_n &= 1_A f_n+1_{\Omega\backslash A}f_1 \qquad \forall n\geq 1\\
g &= 1_A\beta^{-1}f+1_{\Omega\backslash A}E\left(f_1/\mathcal{F}\right)
\end{aligned}
$$

alors $\{g_n,\, n\geq 1\}\subset S^1_F$, ce qui entraîne que $\left\|E\left(g_n/\mathcal{F}\right)\right\|\leq\left\|\xi\left(F/\mathcal{F}\right)\right\|$ p.s.

Or $\left\|\beta\left(E(f_n/\mathcal{F})\left(\omega\right)-\beta^{-1}f\left(\omega\right)\right)\right\|\to 0$ p.s., donc $\left\|E\left(g_n/\mathcal{F}\right)\left(\omega\right)-g\left(\omega\right)\right\|\to 0$ p.s.

On conclue alors que $f=\beta g\in\beta\overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}\right):f\in S^1_F\right\}}$

D'où $\overline{\left\{\beta E\left(f/\mathcal{F}\right):f\in S^1_F\right\}}\subset\beta\overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}\right):f\in S^1_F\right\}}$ et, par suite, on a l'égalité.

Donc on a $S^1_{\xi(\beta F/\mathcal{F})}=\beta S^1_{\xi(F/\mathcal{F})}=S^1_{\beta\xi(F/\mathcal{F})}$.

Ceci donne que $\xi\left(\beta F/\mathcal{F}\right)=\beta\xi\left(F/\mathcal{F}\right)$. $\square$

Théorème 3.16.

1. *Si $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$ sont des sous-tribus de $\mathcal{F}$ et $F\in S^1_{cb(X)}\left(\mathcal{F}\right)$, alors $\xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)$ pris dans $(\Omega,\mathcal{F}_1,P)$ est égale à celle prise dans l'espace $(\Omega,\mathcal{F}_2,P)$;*

2. $\xi\left(\xi\left(F/\mathcal{F}_2\right)/\mathcal{F}_1\right)$=$\xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)$ *pour* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ *des sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *et* $F \in S^1_{cb(X)}$

Démonstration.

1. Soit $F \in S^1_{cb(X)}$, alors :

$$\begin{aligned} S^1_{\xi(F/\mathcal{F}_1)} &= \overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}_1\right) : f \in S^1_F\right\}} \\ &= \overline{\left\{E\left(E\left(f/\mathcal{F}_2\right)/\mathcal{F}_1\right) : f \in S^1_F\right\}} \\ &= \overline{\left\{E\left(g/\mathcal{F}_1\right) : g \in S^1_F\left(\mathcal{F}_2\right)\right\}} \end{aligned}$$

2. Soient $F \in S^1_{cb(X)}$et $B = \xi\left(F/\mathcal{F}_2\right)$. En remplaçant, dans l'égalité précédente, F par B on obtient :

$$\begin{aligned} S^1_{\xi(B/\mathcal{F}_1)} &= \overline{\left\{E\left(g/\mathcal{F}_1\right) : g \in S^1_B\left(\mathcal{F}_2\right)\right\}} \\ &= \overline{\left\{E\left(E\left(f/\mathcal{F}_2\right)/\mathcal{F}_1\right) : f \in S^1_F\right\}} \\ &= \overline{\left\{E\left(f/\mathcal{F}_1\right) : f \in S^1_F\right\}} \end{aligned}$$

donc $\xi\left(B/\mathcal{F}_1\right) = \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)$, c'est-à-dire :

$$\xi\left(\xi\left(F/\mathcal{F}_2\right)/\mathcal{F}_1\right) = \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)$$

□

Théorème 3.17. *Soit* $\mathcal{F}_1$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$.

1. *Si* $F \in S^1_{b(X)}$, *alors :*

$$\overline{\int_A^{(\mathcal{F}_1)} \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP} = \overline{\int_A F\, dP} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

2. *Si* $F \in S^1_{cb(X)}$, *alors :*

$$\overline{\int_A \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP} = \overline{\int_A F\, dP} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

3. *Si* $F \in \overline{S^1_{cb(X)}}$, *alors* $\xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)$*est uniquement déterminée comme la fonction dans* $\overline{S^1_{cb(X)}\left(\mathcal{F}_1\right)}$ *satisfaisant :*

$$\overline{\int_A \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP} = \overline{\int_A F\, dP} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

4. *Si X^* est séparable et $F \in S^1_{cb(X)}$, alors $\xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)$est uniquement déterminée comme la fonction dans $S^1_{cb(X)}\left(\mathcal{F}_1\right)$ satisfaisant :*

$$\overline{\int_A \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP} = \overline{\int_A F\, dP} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

5. *Si X est réflexif et $F \in S^1_{cb(X)}$, alors :*

$$\int_A^{(\mathcal{F}_1)} \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP = \int_A \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP = \int_A F\, dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

Démonstration.

1. Soient $F \in S^1_{b(X)}$et $A \in \mathcal{F}_1$. Si $g \in S^1_{\xi(F/\mathcal{F}_1)}$, alors il existe une suite $\{f_n,\, n \geq 1\} \subset S^1_F$ telle que $\left\|g - E\left(f_n/\mathcal{F}_1\right)\right\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc on a :

$$\int_A g\, dP = \lim_n \int_A E\left(f_n/\mathcal{F}_1\right)\, dP = \lim_n \int_A f_n\, dP \in \overline{\int_A F\, dP}$$

ainsi :

$$\overline{\int_A^{(\mathcal{F}_1)} \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP} \subset \overline{\int_A F\, dP}$$

L'inclusion inverse se traite de la même façon.

2. Soient $F \in S^1_{cb(X)}$et $A \in \mathcal{F}_1$, alors on a :

$$S^1_{\xi(F/\mathcal{F}_1)}(\mathcal{F}_1) = \left\{E\left(f/\mathcal{F}_1\right)\, :\, f \in S^1_F\right\}$$

alors :

$$\int_A^{(\mathcal{F}_1)} \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP = \left\{\int_A E\left(f/\mathcal{F}_1\right)\, dP\, :\, f \in S^1_{\xi(F/\mathcal{F}_1)}\right\} = \int_A \xi\left(F/\mathcal{F}_1\right)\, dP$$

et d'après 1. on obtient le résultat.

3. Si $F \in S^1_{cb(X)}$, alors :

$$\xi\left(F/\mathcal{F}_1\right) \in S^1_{cb(X)} \qquad \forall F \in S^1_{cb(X)}$$

Pour prouver l'unicité, il suffit de montrer que, si F_1,$F_2 \in S^1_{cb(X)}$:

$$\left(\overline{\int_A F_1\, dP} = \overline{\int_A F_2\, dP} \;\; \forall A \in \mathcal{F}\right) \Longrightarrow F_1 = F_2$$

Soient F_1,$F_2 \in S^1_{cb(X)}$ telles que :

$$\overline{\int_A F_1\, dP} = \overline{\int_A F_2\, dP} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Alors, d'après théorème 3.13, on a $S^1_{F_1} = S^1_{F_2}$d'où $F_1 = F_2$. Ainsi 3. est prouvé

5. Supposons X réflexif et soit $F \in S^1_{cb(X)}$. Alors, d'après théorème 3.11, S^1_F est faiblement compact. Donc, d'après 1. et2., on obtient le résultat. □

4 Martingales multivoques

4.1 Propriétés générales

Dans cette section, $(\mathbb{T}, \leq)$ désigne un ensemble ordonné filtrant et $\{\mathcal{F}_\tau,\ \tau \in \mathbb{T}\}$ une famille de sous-σ-algèbres de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$si $\tau_1 \leq \tau_2$.

Définition 4.1. Le système $\{f_\tau, \mathcal{F}_\tau,\ \tau \in \mathbb{T}\}$est une **martingale** à valeurs dans X si :

1. La famille $\{f_\tau,\ \tau \in \mathbb{T}\}$ est adaptée à la famille $\{\mathcal{F}_\tau,\ \tau \in \mathbb{T}\}$, c'est-à-dire :

$$\forall \tau \in \mathbb{T} \qquad f_\tau \in \mathscr{L}^1_X(\mathcal{F}_\tau)\ ;$$

2. $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T} \qquad \tau_1 \leq \tau_2 \Longrightarrow f_{\tau_1} = E\left(f_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}\right).$

Le système $\{F_\tau, \mathcal{F}_\tau,\ \tau \in \mathbb{T}\}$ est une **martingale multivoque** si :

1.La famille $\{f_\tau,\ \tau \in \mathbb{T}\}$ est adaptée à la famille $\{\mathcal{F}_\tau,\ \tau \in T\}$, c'est-à-dire :

$$\forall \tau \in \mathbb{T} \qquad F_\tau \in S^1_{cb(X)}(\mathcal{F}_\tau)\ ;$$

2. $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T} \qquad \tau_1 \leq \tau_2 \Longrightarrow F_{\tau_1} = \xi\left(F_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}\right).$

Proposition 4.2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $F_n : \Omega \longrightarrow cfb(X)$ une fonction multivoque. $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **martingale multivoque** à valeurs dans $S^1_{cfb(X)}(\mathcal{F})$ si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

a) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable ;
b) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|F_n(\bullet)\| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}_n, P)$;
c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall i \leq n\ \forall A \in \mathcal{F}_i : \displaystyle\int_A F_i(\omega)\, P(d\omega) = \int_A F_n(\omega)\, P(d\omega).$

Démonstration. Evidente □

Théorème 4.3. *Soit $\{F_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale multivoque. On suppose qu'il existe $F \in S^1_{cbf(X)}$ telle que $F_n = \xi(F/\mathcal{F}_n)$, pour tout $n \geq 1$. On pose $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right)$ et $F_\infty = \xi(F/\mathcal{F}_\infty)$. Si X est réflexif, alors $H(F_n(\omega), F_\infty(\omega)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ p.s. et $\Delta(F_n, F_\infty) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Démonstration. Voir [13]. □

Définition 4.4. Une famille $\{f_\tau, \tau \in \mathbb{T}\}$de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **uniformément intégrable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau_0 \in \mathbb{T}$ et $\alpha > 0$ tel que $\tau \geq \tau_0 \Longrightarrow \int_{|[f_\tau|>\alpha]} |f_\tau| \, dP < \varepsilon$.

Remarque. On peut montrer que le fait que $\{f_\tau, \tau \in \mathbb{T}\}$ soit uniformément intégrable est équivalent à :

1. $\exists \tau_1 \in \mathbb{T} \quad \sup_{\tau \geq \tau_1} \int_\Omega |f_\tau| \, dP < \infty$
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau_0 \in \mathbb{T}$ et $\delta > 0$ tels que : $\tau > \tau_0$ et $P(A) < \delta \Longrightarrow \int_A |f_\tau| \, dP < \varepsilon$

Définition 4.5. On dit qu'une suite $\{F_n, n \geq 1\} \subset S^1_{ckb(X)}$ satisfait **la condition d'Uhl** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact convexe $K \subset X$ tel que : pour tout $\beta > 0$, il existe un ensemble $A_\beta \in \mathcal{F}$ tel que $P(A_\beta) \geq 1 - \varepsilon$ et :

$$\bigcup_{n\geq 1} \int_A F_n \, dP \subset P(A) K + \beta B \qquad \forall A \in A_\beta \cap \mathcal{F}$$

où B est la boule unité de X.

Théorème 4.6. *Soit $\{F_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale multivoque dans $S^1_{ckb(X)}$. Alors $H(F_n(\omega), F_\infty(\omega)) \longrightarrow 0$ avec $F_\infty \in S^1_{ckb(X)}$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\{\|F_n(\bullet)\|, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable,*
2. *$\{F_n, n \geq 1\}$ satisfait la condition d'Uhl.*

Démonstration. Voir [12] □

Définition 4.7. L'espace de Banach X, possède la propriété de Radon-Nikodym, en abrégé RNP si, pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et toute probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ absolument continue par rapport à P ($Q \ll P$), il existe $f \in \mathscr{L}^1_X$ telle que :

$$Q(A) = \int_A f \, dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

Théorème 4.8. *On suppose que X possède la propriété RNP et que X^* est séparable. Soit $\{F_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ une martingale dans $S^1_{cb(X)}$. Si $\{\|F_n(\bullet)\|, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable, il existe une unique $F_\infty \in S^1_{ckb(X)}$ telle que : $F_n = \xi(F_\infty/\mathcal{F}_n)$, pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. On définit $M = \left\{ f \in \mathscr{L}_X^1 \ : \ E\left(f/\mathcal{F}_n\right) \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right) \ \forall n \geq 1 \right\}$. Alors M est non vide, fermé, borné, convexe et décomposable dans $\mathscr{L}_X^1$.

1. On voit facilement que M est fermé et convexe car, pour tout $n \geq 1$, $S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right)$ est convexe.

2. M est décomposable. En effet :

Soient $f, g \in M$ et $A \in \mathcal{F}$. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$f_n = E\left(f/\mathcal{F}_n\right) \quad \text{ et } \quad g_n = E\left(g/\mathcal{F}_n\right).$$

Par le théorème de convergence des martingales, on a :

$$f_n\left(\omega\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\left(\omega\right) \quad \text{ et } \quad g_n\left(\omega\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g\left(\omega\right).$$

Prenons :

$$h_n = E\left(\mathbf{1}_A/\mathcal{F}_n\right) f_n + E\left(\mathbf{1}_{\Omega\setminus A}/\mathcal{F}_n\right) g_n \qquad n \geq 1$$

on a : $f, g \in M$

donc : $f_n = E\left(f/\mathcal{F}_n\right),\ g_n = E\left(g/\mathcal{F}_n\right) \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right)$

alors :

$$\forall n \geq 1 \qquad h_n \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right)$$

d'où $\{\|h_n(\bullet)\|,\, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.

Comme $h_n\left(\omega\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h\left(\omega\right)$ avec $h = \mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_{\Omega\setminus A} g$, on déduit alors que$\|h_n - h\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $m > n$, alors :

$$E\left(h_m/\mathcal{F}_n\right) \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right) \quad \text{ et } \quad \left\|E\left(h/\mathcal{F}_n\right) - E\left(h_m/\mathcal{F}_n\right)\right\|_1 \leq \|h - h_m\|_1$$

donc, pour $m \to +\infty$, on obtient $E\left(h/\mathcal{F}_n\right) \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right)$. Ce qui entraîne alors que : $h \in M$ et ainsi M est décomposable.

3. M est borné. En effet, on a :

$$\forall f \in M \qquad \|f\|_1 = \left\|E\left(f/\mathcal{F}_n\right)\right\|_1 \leq \sup_n \int_\Omega \|F_n\left(\omega\right)\| \, dP(\omega) < +\infty$$

car la suite $\{\|F_n(\bullet)\|,\, n \geq 1\}$ est uniformément intégrable.

4. M est non vide. En effet :

montrons que

$$\forall n \geq 1 \ \ \forall f \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right) \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists g \in M \quad : \quad \left\|\int_A f\, dP - \int_A g\, dP\right\| \leq \varepsilon \quad \forall A \in \mathcal{F}_n \qquad (4.1)$$

Supposons $n = 1$. Soient $f \in S^1_{F_1}(\mathcal{F}_1)$ et $\varepsilon > 0$.

Nous construisons une suite de fonctions $\{f_j,\, j \geq 1\}$ telles que : $f_1 = f$ et, $j \geq 1$:

$f_j \in S^1_{F_j}(\mathcal{F}_j)$ et $\left\| f_j - E\left(f_{j+1}/\mathcal{F}_j\right)\right\|_1 \leq \varepsilon/2^j$ $\Big($car $(F_j,\, j \geq 1)$ est une martingale et, pour $j \geq 1$, $f_j \in S^1_{F_j}(\mathcal{F}_j)\Big)$.

Alors, pour $m > j \geq k$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_A f_j\, dP - \int_A f_m\, dP \right\| &= \left\| \sum_{i=j}^{m-1} \int_A \left(f_i - E\left(f_{i+1}/\mathcal{F}_i\right)\right) dP \right\| \\
&\leq \sum_{i=j}^{m-1} \left\| f_i - E\left(f_{i+1}/\mathcal{F}_i\right)\right\|_1 \leq \sum_{i=j}^{m-1} \varepsilon/2^i \leq \varepsilon/2^{j-1} \quad \forall A \in \mathcal{F}_k \quad (4.2)
\end{aligned}$$

ainsi, pour tout $A \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$, la limite $\lambda(A) = \lim_m \int_A f_m\, dP$ existe (puisque X est complet). Puisque $\{\|F_m(\bullet)\|,\, m \geq 1\}$ est uniformément intégrable, donc la limite $\lambda(A)$ existe pour tout $A \in \mathcal{F}$ et, X possède la propriété RNP donc il existe $g \in \mathscr{L}^1_X$ tel que

$$\lambda(A) = \int_A g\, dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

et, puisque $E\left(f_m/\mathcal{F}_j\right) \in S^1_{F_j}(\mathcal{F}_j)$ pour $m \geq j$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_A E\left(g/\mathcal{F}_j\right) dP &= \int_A g\, dP \\
&= \lim_m \int_A f_m\, dP \\
&= \lim_m \int_A E\left(f_m/\mathcal{F}_j\right) dP \in \overline{\int_A^{(\mathcal{F}_j)} F_j\, dP} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_j
\end{aligned}$$

donc, d'après théorème 3.13, on a

$$E\left(g/\mathcal{F}_j\right) \in S^1_{F_j}(\mathcal{F}_j) \qquad \forall j \geq 1$$

donc $g \in M$ et M est alors non vide.

5. En prenant $j = k = 1$ et $m \to +\infty$ dans l'équation (4.2), on obtient :

$$\left\| \int_A f\, dP - \int_A g\, dP \right\| \leq \varepsilon \qquad \forall A \in \mathcal{F}_1$$

c'est-à-dire l'équation (4.1) est vérifiée pour $n = 1$.

Le théorème 3.7 et les propositions 3.5 et 3.9 entraînent alors qu'il existe $F_\infty \in S^1_{cb(X)}$ telle que $M = S^1_{F_\infty}$.

On conclue donc que :

$$\overline{\left\{ \int_A f \, dP \, : \, f \in S^1_{F_n}\left(\mathcal{F}_n\right) \; \forall n \geq 1 \right\}} = \overline{\left\{ \int_A g \, dP \, : \, g \in M \right\}}$$

donc

$$\forall n \geq 1 \; \forall A \in \mathcal{F}_n \qquad \overline{\int_A^{(\mathcal{F}_n)} F_n \, dP} = \overline{\int_A F_\infty \, dP}$$

Alors, d'après théorème **3.17**, on a :

$$F_n = \xi\left(F_\infty / \mathcal{F}_n\right) \qquad \forall n \geq 1$$

6. Unicité :

Soit $G \in S^1_{cb(X)}$ telle que :

$$F_n = \xi\left(G / \mathcal{F}_n\right) \qquad \forall n \geq 1$$

alors on déduit que :

$$\overline{\int_A G \; dP} = \overline{\int_A F_\infty \; dP} \qquad \forall A \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$$

Pour $A \in \mathcal{F}$, prenons une suite $\{A_k, \, k \geq 1\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ telle que : $P\left(A \triangle A_k\right) \longrightarrow 0$ d'où

$$H\left(\overline{\int_A G \, dP}, \overline{\int_{A_k} G \, dP}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad H\left(\overline{\int_A F_\infty \, dP}, \overline{\int_{A_k} F_\infty \, dP}\right) \longrightarrow 0$$

Ainsi on a :

$$\overline{\int_A G \; dP} = \overline{\int_A F_\infty \; dP} \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

alors, d'après théorème 3.13 , on conclue que $S^1_G = S^1_{F_\infty}$ d'où $G = F_\infty$.

□

4.2 Convergence des martingales multivoques

4.2.1 Propriétés de la topologie linéaire τ_L

Proposition 4.9. *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{\infty\}}$*une suite dans* $cf\,(X)$*. Alors :*

$$A_\infty = \tau_L - \lim_n A_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ \ d\,(x, A_\infty) = \lim_n d\,(x, A_n) & \forall x \in X \\ et & \\ (ii)\ \ \delta^*\,(x^*, A_\infty) = \lim_n \delta^*\,(x^*, A_n) & \forall x^* \in X^* \end{cases}$$

Dans cette sous-section, nous supposons que le dual topologique X^**est fortement séparable, c'est-à-dire pour la topologie forte.*

Soient $D = \{x_k, k \geq 1\}$ *une partie dénombrable dense de* X *et* $D^* = \{x_k^*, k \geq 1\}$*une partie dénombrable dense de* X^**.*

Si $A_1, A_2 \in cbf\,(X)$*, on pose :*

$$\delta\,(A_1, A_2) = \max\{\delta_1\,(A_1, A_2)\,, \delta_1\,(A_1, A_2)\}$$

avec

$$\delta_1\,(A_1, A_2) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} \times \frac{|d\,(x_k, A_1) - d\,(x_k, A_2)|}{1 + |d\,(x_k, A_1) - d\,(x_k, A_2)|}$$

et

$$\delta_2\,(A_1, A_2) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} \times \frac{\mid \delta^*\,(x_k^*, A_1) - \delta^*\,(x_k, A_2) \mid}{1 + \mid \delta^*\,(x_k, A_1) - \delta^*\,(x_k, A_2) \mid}$$

Alors $(cbf\,(X)\,, \delta)$*est un espace métrique.*

Définition 4.10. Une suite $\{A_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{P}\,(X)$ est dite **uniformément bornée** si :

$$\sup_{n\geq 1} \parallel A_n \parallel < +\infty$$

Proposition 4.11. *Soit* $\left\{A_n, n \in \overline{\mathbb{N}}\right\}$*une suite uniformément bornée dans* $cf(X)$*. Alors* $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ *converge vers* A_∞ *pour la métrique* δ *si et seulement si* $A_\infty = \tau_L - \lim_n A_n$*.*

Démonstration. D'après la proposition 4.9, on a :

$$A_\infty = \tau_L - \lim_n A_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ \ d\left(x, A_\infty\right) = \lim_n d\left(x, A_n\right) & \forall x \in X \\ \text{et} & \\ (ii)\ \ \delta^*\left(x^*, A_\infty\right) = \lim_n \delta^*\left(x^*, A_n\right) & \forall x^* \in X^* \end{cases}$$

La famille de fonctions $\{d(\bullet, A),\ A \in cf(X)\}$ est équicontinue sur X. En effet : Soit $x, y \in X$, alors :

$$\exists a \in A\ d\left(x, A\right) = \inf_{z \in A} \|x - z\| = \|x - a\|$$

et

$$\exists b \in A\ d\left(y, A\right) = \inf_{z \in A} \|y - z\| = \|y - b\|$$

Posons $\|x - y\| < |\varepsilon - \|a - b\||$. Donc

$$\begin{aligned} \|x - y\| + \|a - b\| &< \varepsilon \\ \|x - a + a - y + b - b\| + \|a - b\| &< \varepsilon \\ \|x - a - (y - b) - (b - a)\| + \|a - b\| &< \varepsilon \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Big|\|x - a\| - \|y - b\| - \|b - a\| + \|a - b\|\Big| &< \varepsilon \\ \left|d\left(x, A\right) - d\left(y, A\right)\right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

donc la famille $\{d\left(\bullet, A\right),\ A \in cf\left(X\right)\}$ est équicontinue sur X.

En outre, pour tous $x^* \in X^*$et $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\delta^*\left(x^*, A_n\right) \leq \|x^*\| . \sup_{k \geq 1} \|A_k\|$$

Prenons $\varepsilon > 0$, $\|x^* - y^*\| < \frac{\varepsilon}{\sup_{k \geq 1} \|A_k\|}$, alors :

$$\|x^* - y^*\| . \sup_{k \geq 1} \|A_k\| < \varepsilon$$

alors

$$\left|\delta^*\left(x^* - y^*, A_n\right)\right| < \|x^* - y^*\| . \sup_{k \geq 1} \|A_k\| < \varepsilon$$

ce qui entraîne

$$| \delta^* (x^*, A_n) - \delta^* (y^*, A_n) | < \varepsilon$$

on déduit alors que la famille $\{\delta^* (\bullet, A), \ A \in cf(X)\}$ est équicontinue sur X^*. Le théorème d'Ascoli entraine alors que :

$$A_\infty = \tau_L - \lim_n A_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \ \ d(x_k, A_\infty) = \lim_n d(x_k, A_n) & \forall k \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ (ii) \ \ \delta^* (x_k^*, A_\infty) = \lim_n \delta^* (x_k^*, A_n) & \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et ceci entraîne, d'après la définition de δ, que : $\lim_n \delta^* (A_n, A_\infty) = 0$ □

Proposition 4.12. *L'espace métrique $(cf(X), \delta)$ est séparable.*

4.2.2 Convergence des martingales

Soit τ la topologie sur $cf(X)$ telle que $(cf(X), \tau)$soit complètement régulier. Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne engendré par la topologie τ sur $cf(X)$. On note $\mathcal{C}^b (cf(X), \tau)$ l'ensemble des fonctions $f : cf(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées et continues par rapport à τ.

Définition 4.13. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}}$une suite de fonctions multivoques $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurables à valeurs dans $cf(X)$. On dit que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$converge en distribution vers F_∞ par rapport à τ si et seulement si la suite des distributions $(P_{F_n}, \ n \in \mathbb{N})$ converge faiblement vers la distribution P_{F_∞}sur $\mathcal{C}^b (cf(X), \tau)$. Ce qui est équivalent à

$$\forall f \in \mathcal{C}^b (cf(X), \tau) \quad \lim_n \int_\Omega f(F_n(\omega))\, dP(\omega) = \int_\Omega f(F_\infty(\omega))\, dP(\omega)$$

Théorème 4.14. *On suppose que X est séparable réflexif. Soit $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale multivoque à valeurs dans $S^1_{cfb(X)}(\mathcal{F})$ telle que :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \ dP(\omega) < +\infty.$$

Alors il existe $F_\infty \in \mathrm{S}^1_{cbf(X)}(\mathcal{F})$ telle que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers F_∞ par rapport à τ_L.

Démonstration. On a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \ dPd\omega < +\infty$ est équivalent à l'existence de $F \in \mathrm{S}^1_{cbf(X)}(\mathcal{F})$ telle que : $F_n = \xi(F/\mathcal{F}_n)$, pour tout $n \geq 1$. D'où d'après théorème 4.3 on déduit que :

$$H(F_n(\omega), F_\infty(\omega)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ p.s$$

et donc $F_\infty = \tau_L - \lim_n F_n$ $\square$

Lemme 4.15. *Supposons que X possède la propriété de Radon-Nikodym relativement à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et que X^* est fortement séparable. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $S^1_{cwk(X)}(\mathcal{F})$ telle que :*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \; P(d\omega) < +\infty$;

(ii) il existe un ensemble $N_0 \in \mathcal{F}$ négligeable (c-à-d :$P(N_0) = 0$) tel que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|F_n(\omega)\| < +\infty \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_0$$

(iii) $\overline{\left\{\int_A F_n \, dP, \, n \in \mathbb{N}\right\}}$ *est faiblement compact ;*

(iv) pour chaque $x^* \in X^*$, il existe $g_{x^*} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}$ telle que la suite $(\delta^*(x^*, F_n), n \in \mathbb{N})$ converge presque sûrement vers g_{x^*}.

Alors il existe un ensemble aléatoire $F_\infty \in S^1_{cwk(x)}$ tel que, pour chaque $x^* \in X^*$, la suite $(\delta^*(x^*, F_n), n \in \mathbb{N})$ converge presque sûrement vers $\delta^*(x^*, F_\infty)$.

Théorème 4.16. *Supposons X séparable et soit $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale multivoque à valeurs dans $S^1_{cfw(X)}(\mathcal{F})$ telle que :*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \; P(d\omega) < +\infty$;

(ii) il existe un ensemble aléatoire $K : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ et un ensemble négligeable $N_0 \in \mathcal{F}$ tels que :

$$F_n(\omega) \subset K(\omega) \qquad \forall (\omega, n) \in (\Omega \setminus N_0) \times \mathbb{N}.$$

Alors il existe un ensemble aléatoire $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}(\mathcal{F})$ tel que $(F_n, n \in \mathbb{N})$ converge presque sûrement vers F_∞ relativement à τ_L.

Proposition 4.17. *On suppose X séparable. Soit $N_1^* = \left\{e_j^*, \, j \in \mathbb{N}\right\}$ dense pour la topologie de Mackey dans la boule unité fermée B^* de X^*. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $cwk(X)$ et $A_\infty = s - \mathrm{Li}\, A_n \in cwk(X)$ tel que :*

$$\delta^*\left(e_j^*, A_\infty\right) = \lim_n \delta^*\left(e_j^*, A_n\right) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Alors :

$$d(x, A_\infty) = \lim_n d(x, A_n) \quad \forall x \in X$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on a :

$$d(x, A_n) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left[< e_j^*, x > - \delta^*\left(e_j^*, A_n\right)\right]$$

et on a

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \lim_n < e_j^*, x > - \delta^*\left(e_j^*, A_n\right) = < e_j^*, x > - \delta^*\left(e_j^*, A_\infty\right)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on a :$< e_j^*, x > -\delta^*\left(e_j^*, A_n\right) \leq d\left(x, A_n\right)$.
Donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$, on obtient :

$$< e_j^*, x > -\delta^*\left(e_j^*, A_n\right) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} d\left(x, A_n\right) \qquad (*)$$

En prenant la borne supérieure en $j \in \mathbb{N}$ dans $(*)$on obtient :

$$d\left(x, A_\infty\right) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} d\left(x, A_n\right) \quad (**)$$

En outre, on a :

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} d\left(x, A_n\right) \leq d\left(x, s - \operatorname{Li} A_n\right) = d\left(x, A_\infty\right) \quad \forall x \in X \qquad (***)$$

En effet, soit $y \in A_\infty = s - \operatorname{Li} A_n$
Prenons $y_n \in A_n$ tel que $\|y_n - y\| \longrightarrow 0$
on a

$$d\left(x, A_n\right) \leq \|x - y_n\|$$

donc

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} d\left(x, A_n\right) \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - y\|$$

d'où

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} d\left(x, A_n\right) \leq d\left(x, A_\infty\right)$$

donc d'après $(**)$ et $(***)$, on déduit que :

$$d\left(x, A_\infty\right) = \lim_n d\left(x, A_n\right) \quad \forall x \in X$$

□

Théorème 4.18. *Supposons que X possède la propriété de Radon-Nikodym relativement à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et que X^* est fortement séparable. Soit $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale multivoque à valeurs dans $S^1_{cwkf(X)}(\mathcal{F})$ telle que :*

(i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \; P(d\omega) < +\infty$;

(ii) $\overline{\left\{\int_A F_n \, dP, \, n \in \mathbb{N}\right\}}$ *est faiblement compacte.*

Alors il existe un ensemble aléatoire $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}(\mathcal{F})$ tel que $(F_n, \, n \in \mathbb{N})$ converge presque sûrement vers F_∞ relativement à τ_L.

Démonstration. Étape 1 :

On a : $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \; P(d\omega) < +\infty$ et $\overline{\left\{\int_A F_n \, dP, \, n\in\mathbb{N}\right\}}$ est faiblement compact tel que $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S^1_{cwkf(X)}(\mathcal{F})$

Donc d'après lemme 4.15 : il existe un ensemble aléatoire $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}(\mathcal{F})$ tel que :

$$\delta^*\left(x^*, F_\infty\right) = \lim_n \delta^*\left(x^*, F_n\right) \quad x^* \in X^*$$

<u>Étape 2</u> :

(1) on a X possède la propriété de Radon-Nikodym relativement à $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et X^* est fortement séparable avec les deux conditions :

$(i)\sup_{n\in\mathbb{N}} \displaystyle\int_\Omega \|F_n(\omega)\| \; P(d\omega) < +\infty;$

(ii) $\overline{\left\{\int_A F_n \, dP, \, n\in\mathbb{N}\right\}}$ est faiblement compacte.

Donc d'après le théorème 5.7 vu et démontré ci-dessous, on déduit qu'il existe $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}(\mathcal{F})$ tel que : $\tau_M - \lim F_n = F_\infty$ p.s.

Et d'après proposition 4.17, on déduit que :

$$d\left(x, F_\infty\right) = \lim_n d\left(x, F_n\right) \qquad \forall x \in X$$

On conclue que :

$$F_\infty = \tau_L - \lim_n F_n$$

□

5 Martingales à la limite (Mil)

5.1 Convergence dans un espace RNP

Définition 5.1. On suppose que le dual fort $X^{*'}$ de X est séparable. Une suite adaptée $\{F_n, \, n \geq 1\} \subset S^1_{cwk(X)}$ est une **mil** (martingale à la limite) [1] si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq p \qquad P\left(\sup_{p\leq q\leq n} H\left(F_q, \xi\left(F_n | \mathcal{F}_q\right)\right) > \epsilon\right) < \epsilon$$

Remarque. Il est à noter que si $\{F_n, n \geq 1\}$ est un mil dans $S^1_{cwk(X)}$, alors pour tout $x^* \in B'$, boule unité de X^*, la suite $\{\delta\left(x^*, F_n\right), \, n \geq 1\}$ est un mil dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}$ et ceci puisque :

$$H\left(F_q, \xi\left(F_n | \mathcal{F}_q\right)\right) = \sup_{x^*\in B'} \left|\delta^*\left(x^*, F_p(\bullet)\right) - E\left(\delta^*\left(x^*, F_n(\bullet)\right) | \mathcal{F}_q\right)\right|$$

1. mil : abréviation de l'expression en anglais « **m**artingale **i**n **l**imit »

Théorème 5.2. *On suppose que X^* est séparable. Soit $F \in S^1_{cwk(X)}$. Alors on a :*

$$\tau_M - \lim_n \xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega) = F(\omega) \qquad p.s.$$

Démonstration. Il faut montrer que :

$$w - \mathrm{Ls}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega) \subset F(\omega) \subset s - \mathrm{Li}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega) \qquad \text{p.s.}$$

1. $F(\omega) \subset s - \mathrm{Li}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega)$ p.s. :
Soit $f \in \mathscr{L}^1_X(\mathcal{F})$. Par théorème de Lévy on a : $\lim_n E\left(f|\mathcal{F}_n\right) = f$ p.s.
Puisque, pour tout $n \geq 1$, $E\left(f|\mathcal{F}_n\right) \in \xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)$, alors : $f \in s - \mathrm{Li}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)$, d'où :

$$F(\omega) \subset s - \mathrm{Li}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega) \quad \text{p.s.}$$

2. $w - \mathrm{Ls}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega) \subset F(\omega)$ p.s. :
Soit $(e^*_k)_{k\geq 1}$ une suite dense dans X^*pour la topologie de Mackey. On a :

$$\lim_n \delta^*\left(e^*_k, \xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\bullet)\right) = \lim_n \xi\left(\delta^*\left(e^*_k, F(\bullet)\right)|\mathcal{F}_n\right) = \delta^*\left(e^*_k, F(\bullet)\right)$$

Pour x dans $w - \mathrm{Ls}\xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega)$, il existe une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ avec $x_k \in \xi\left(F|\mathcal{F}_{n_k}\right)$ tel que (x_k) converge faiblement vers x.

Pour tout $j \geq 1$, on a :

$$\left\langle e^*_j, x\right\rangle = \lim_k \left\langle e^*_j, x_k\right\rangle \leq \limsup_n \delta^*\left(e^*_j, \xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\bullet)\right) = \delta^*\left(e^*_j, F(\bullet)\right) \quad \text{p.s.}$$

D'après le lemme 34 dans Castaing and Valadier ([7]), on conclue que $x \in F(\omega)$. □

Lemme 5.3. *Soient $(A_n, n \geq 1)$ et $(B_n, n \geq 1)$ deux suites dans $cf(X)$ telles que :*

$$\lim_n H\left(A_n, B_n\right) = 0 \qquad et \qquad \tau_M - \lim_n A_n = A$$

alors :

$$\tau_M - \lim_n B_n = \tau_M - \lim_n A_n = A$$

Démonstration. Voir [6]. □

Théorème 5.4. *Soit $\varphi : \Omega \times X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable telle que :*

$$\varphi(\omega, 0) = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega,$$

Pour tous $\rho, r \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble $\{x \in \rho B : \varphi(\omega, x) < r\}$ est convexe faiblement compact.

Soit $(F_n,\, n \geq 1)$ un mil borné dans $\mathscr{L}_X^1$ telle que :

$$\sup_{n\geq 1} \int_\Omega \varphi\left(\omega, F_n(\omega)\right)\, dP(\omega) < +\infty$$

Alors il existe $F_\infty \in \mathscr{L}_X^1$ telle que $\left(F_n - \xi\left(F_\infty | \mathcal{F}_n\right)\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\{0\}$.

Démonstration. D'après Castaing ([3], théorème 3.9), il existe une sous-suite $(F_{n_k},\, k \geq 1)$ de la suite $(F_n,\, n \geq 1)$ et une suite croissante $\{B_k,\, k \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ vérifiant $\lim_k P\left(B_k\right) = 1$ telles que la suite $(\mathbf{1}_{B_k} F_{n_k},\, k \geq 1)$ soit faiblement relativement compacte dans $\mathscr{L}_X^1$. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\mathbf{1}_{B_k} F_{n_k},\, k \geq 1)$ converge faiblement dans $\mathscr{L}_X^1$ vers une fonction intégrable $F_\infty \in \mathscr{L}_X^1$ et que $\left(\mathbf{1}_{B_k^c} F_{n_k},\, k \geq 1\right)$ converge p.s. vers 0.

Comme $(F_n,\, n \geq 1)$ est un mil borné dans $\mathscr{L}_X^1$, alors pour tout $x^* \in X^*$, $(\langle x^*, F_n\rangle\,,\, n \geq 1)$ est un mil réel borné. En utilisant le théorème 4, p. 1193 dans Talagrand ([11]), on déduit que, pour $x^* \in X^*$, la suite $(\langle x^*, F_n\rangle\,,\, n \geq 1)$ converge p.s. vers une fonction réelle intégrable f_{x^*}. Puisque, pour tout $k \geq 1$, on a : $F_{n_k} = \mathbf{1}_{B_k} F_{n_k} + \mathbf{1}_{B_k^c} F_{n_k}$ et que la suite $\left(\mathbf{1}_{B_k^c} F_{n_k},\, k \geq 1\right)$ converge p.s. vers 0, ceci entraîne que $(\langle x^*, \mathbf{1}_{B_k} F_{n_k}\rangle\,,\, k \geq 1)$ converge p.s. vers f_{x^*}. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on obtient :

$$\int_A \lim_{n\to+\infty} \langle x^*, F_n\rangle\, dP(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_A \langle x^*, \mathbf{1}_{B_k} F_{n_k}\rangle\, dP(\omega) = \int_A \langle x^*, F_\infty\rangle\, dP(\omega)$$

Donc $(F_n,\, n \geq 1)$ converge scalairement vers F_∞ p.s. Par conséquent, $\left(F_n - \xi\left(F_\infty | \mathcal{F}_n\right)\right)_{n\geq 1}$ est un mil borné qui converge scalairement p.s. vers 0. Le théorème 6, p. 1193 dans Talagrand ([11]) entraîne alors que $\left(F_n - \xi\left(F_\infty | \mathcal{F}_n\right)\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\{0\}$. □

Le théorème suivant est une variante du théorème ci-dessus.

Théorème 5.5. *Supposons que X et X^*possèdent la propriété de Radon-Nikodym et soit $(F_n,\, n \geq 1)$ une mil bornée dans $\mathscr{L}_X^1$. Alors il existe $F_\infty \in \mathscr{L}_X^1$ telle que $\left(F_n - \xi\left(F_\infty | \mathcal{F}_n\right)\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $\{0\}$.*

Démonstration. Notons, d'abord, que pour tout $x^* \in X^*$, le mil réel $\left(\langle x^*, F_n\rangle\right)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers une fonction intégrable. D'après la décomposition de Gaposhkin-Slaby, il existe une sous-suite $(F_{n_k},\, k \geq 1)$ de la suite $(F_n,\, n \geq 1)$ et une suite croissante $\{A_p,\, p \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ vérifiant $\lim_p P\left(A_p\right) = 1$ telles que, pour tout $p \geq 1$, la suite $\left(\mathbf{1}_{A_p} F_{n_k},\, k \geq 1\right)$ soit uniformément intégrable. Ceci entraîne alors que :

$$\forall p \geq 1 \ \forall A \in \mathcal{F} \cap A_p \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_A \langle x^*, F_n \rangle \ dP(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_A \langle x^*, F_{n_k} \rangle \ dP(\omega).$$

En utilisant le théorème 3.1 dans [5], nous déduisons alors qu'il existe une sous-suite $(G_i,\, i \geq 1)$ de $(F_{n_k},\, k \geq 1)$ et $F_\infty \in \mathscr{L}^1_X$ telles que, pour tout $u \in \mathscr{L}^\infty_{X^*}(\mathcal{F} \cap A_p)$, on ait :

$$\lim_{i\to+\infty} \int \langle u, G_i \rangle \ dP = \int \langle u, F_\infty \rangle \ dP$$

En particulier, pour tous $x^* \in X^*$ et $A \in \mathcal{F} \cap A_p$, nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A \langle x^*, F_n \rangle \ dP(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_A \langle x^*, F_{n_k} \rangle \ dP(\omega) = \int \langle u, F_\infty \rangle \ dP$$

Ce qui entraîne que, pour tous $x^* \in X^*$ et $p \geq 1$, il existe un ensemble négligeable $N^p_{x^*} \subset A_p$ tel que, pour tout $\omega \in A_p \setminus N^p_{x^*}$, on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x^*, F_n(\omega) \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x^*, F_\infty(\omega) \rangle$$

Comme $\lim_p P(A_p) = 1$, on voit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x^*, F_n(\omega) \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x^*, F_\infty(\omega) \rangle \quad \text{p.s.}$$

ce qui signifie que $(F_n,\, n \geq 1)$ converge scalairement vers F_∞ p.s.

La preuve se termine exactement comme dans le théorème précècdent. $\square$

Théorème 5.6. *On suppose que X^* muni de la topologie forte est séparable et que X possède la propriété de Radon-Nikodym.*

Soit $(F_n,\, n \geq 1)$ une suite bornée dans $S^1_{cwk(X)}$ telle que :

1. *Pour toute sous-suite $(F_{n_m},\, m \geq 1)$ de $(F_n,\, n \geq 1)$ et tout $A \in \mathcal{F}$ pour lequel la suite $(\mathbf{1}_A F_{n_m},\, m \geq 1)$ est uniformément intégrable dans $S^1_{cwk(X)}$, l'ensemble $\left\{\int_A F_{n_m}\, dP \,,\, m \geq 1\right\}$ est faiblement relativement compact ;*
2. *Pour tout $x^* \in X^*$, la suite $(\delta^*(x^*, F_n)\,,\, n \geq 1)$ converge en probabilité vers une fonction intégrable φ_{x^*}.*

Alors il existe $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}$ telle que : pour tout $x^* \in X^*$, il existe un ensemble négligeable $N_{x^*} \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $\omega \notin N_{x^*}$, on ait :

$$\varphi_{x^*}(\omega) = P\text{-}\lim_n \delta^*(x^*, F_n(\omega)) = \delta^*(x^*, F_\infty(\omega))$$

Démonstration. D'après la décomposition de Gasposhkin-Sably, il existe une sous-suite $(F_{n_k},\, k \geq 1)$ de $(F_n,\, n \geq 1)$ et une suite croissante $\{A_p,\, p \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ vérifiant $\lim_p P(A_p) = 1$ telles que, pour tout $p \geq 1$, la suite $\left(\mathbf{1}_{A_p} F_{n_k}\, ,\, k \geq 1\right)$ soit uniformément intégrable dans $S^1_{cwk(X)}$.

D'après l'hypothèse 1. du théorème : pour tout $A \in \mathcal{F} \cap A_p$, l'ensemble $\left\{\int_A F_{n_k}\, dP\, ,\, k \geq 1\right\}$ est faiblement relativement compact dans X. En utilisant un critère de compacité ([2, 3, 4]) et la démonstration de Castaing-Clauzure ([3], théorème 3.1), il existe une sous-suite $(G_i)_i$ de $(F_n)_n$ telle que, pour tout $p \geq 1$,$\left(1_{A_p} G_i\right)$ soit uniformément intégrable, et $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}$ telle que, pour tout $x^* \in X^*$et tout $A \in A_p \cap \mathcal{F}$, on ait :

$$\lim_i \int_A \delta^*\left(x^*, G_i\right) dP = \int_A \delta^*\left(x^*, F_\infty\right) dP$$

D'après 2., pour tout $x^* \in X^*$, on a :

$$\varphi_{x^*}(\omega) = P\text{-}\lim_n \delta^*\left(x^*, F_n(\omega)\right) \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}$$

alors, pour tout $p \geq 1$, $\lim_n \delta^*\left(x^*, G_i\right) = \varphi_{x^*}$ dans $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}\left(A_p, A_p \cap \mathcal{F}, P_{|A_p}\right)$. Donc pour tout $x^* \in X^*$ fixé ;

$$\lim_i \int_A \delta^*\left(x^*, G_i\right) dP = \int_A \varphi_{x^*} dP = \int_A \delta^*\left(x^*, F_\infty\right) dP \quad \forall A \in A_p \cap \mathcal{F}$$

donc, dans A_p, on a :

$$\varphi_{x^*} = \delta^*\left(x^*, F_\infty\right) \quad \text{p.s.}$$

et comme $\lim_p P(A_p) = 1$, alors dans Ω on a :

$$\varphi_{x^*} = \delta^*\left(x^*, F_\infty\right) \quad \text{p.s.}$$

□

Théorème 5.7. *On suppose que X^*est séparable et que X possède la propriété de RNP. Soit $(F_n,\, n \geq 1)$ une mil bornée dans $S^1_{cwk(X)}$ et telle que : pour toute sous-suite $(F_{n_m},\, m \geq 1)$ de $(F_n,\, n \geq 1)$ et tout $A \in \mathcal{F}$ pour lequel la suite $(\mathbf{1}_A F_{n_m},\, m \geq 1)$ est uniformément intégrable dans $S^1_{cwk(X)}$, $\left\{\int_A F_{n_k} dP,\, k \geq 1\right\}$ est faiblement compact dans X.*

Alors il existe $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}$ telle que :

$$\lim_n H\left(F_n, \xi\left(F_\infty | \mathcal{F}_n\right)\right) = 0 \;\; p.s.$$

et donc

$$\tau_M - \lim F_n = F_\infty \ \ p.s.$$

Démonstration. Pour tout $x^* \in B^{'}$, la suite $(\delta^* (x^*, F_n), n \geq 1)$ converge vers une fonction intégrable φ_{x^*}.

Appliquons le théorème 5.6, avec les mêmes notations : il existe $F_\infty \in S^1_{cwk(X)}$ telle que : pour tout $x^* \in B^*$ on ait :

$$\lim_i \delta (x^*, G_i) = \varphi_{x^*} = \delta^* (x^*, F_\infty)$$

donc, d'après [6], on a :

$$\lim_n H (F_n, \xi (F_\infty | \mathcal{F}_n)) = 0 \quad \text{p.s.}$$

et donc, d'après le théorème 5.2, on a :

$$\tau_M - \lim F_n = F_\infty \quad \text{p.s.}$$

□

Pour la suite de ce travail, on note N_1^* un sous-ensemble dénombrable dense pour la topologie de Mackey dans la boule B^* fermée de X^*. On note aussi N^* l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de N_1^*, d'où N^* est un sous-ensemble dense dans X^* pour la topologie de Mackey.

5.2 Convergence dans un espace sans RNP

Lemme 5.8. *Soit $M : \mathcal{F} \longrightarrow cwkb(X)$ une mesure absolument continue par rapport P à variation bornée, sans atome et satisfaisant la condition d'Uhl. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble faiblement compact K_ε et un ensemble mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant $P(\Omega_\varepsilon^c) < \varepsilon$ tels que :*

$$\forall A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F} \quad M(A) \subset P(A) K_\varepsilon$$

Alors il existe une fonction multivoque Γ à valeurs dans $cwkb(X)$tel que :

$$M(A) = \int_A \Gamma \, dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Proposition 5.9. *Soit $M : \mathcal{F} \longrightarrow cwkb(X)$ une mesure absolument continue par rapport P à variation bornée, sans atome et satisfaisant la condition d'Uhl pour la topologie faible. Alors* *il existe une unique fonction multivoque* $\Gamma \in S^1_{cwkb(X)}$ *telle que :*

$$M(A) = \int_A \Gamma \, dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Démonstration. Supposons que $M : \mathcal{F} \longrightarrow cwkf(X)$ est une mesure absolument continue par rapport P à variation bornée, sans atome et satisfaisant la condition d'Uhl pour la topologie faible.

Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble faiblement compact K_ε et un ensemble mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant $P(\Omega_\varepsilon^c) < \varepsilon$ tels que :

$$\forall A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F} \quad M(A) \subset P(A) K_\varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $K_\varepsilon \in cwkb(X)$ tel que la condition d'Uhl soit satisfaite. Prenons une suite$\{A_n^\varepsilon, n \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ telle que $P(A_n^\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$M(A) \subset P(A) K + \frac{1}{n^2} B \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A \in \mathcal{F} \cap A_n^\varepsilon$$

Posons :

$$A_\varepsilon = \limsup_n A_n^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n^\varepsilon$$

Alors $P(A_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$.

Soit $A \in \mathcal{F} \cap A_\varepsilon$, alors on a : $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m^\varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

Pour $n \geq 1$ fixé, on définit :

$$S_n = A_n^\varepsilon, \; S_{n+1} = A_{n+1}^\varepsilon \setminus A_n^\varepsilon, \ldots, S_{n+k+1} = A_{n+k+1}^\varepsilon \setminus \left(\bigcup_{m=n}^{n+k} A_m^\varepsilon \right)$$

Les ensembles $S_m, \; m \geq n$, sont deux-à-deux disjoints et $A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m^\varepsilon = \bigcup_{m=n}^{\infty} S_m$. Alors :

$$\begin{aligned} M(A) &= \sum_{m=n}^{\infty} M(A \cap S_m) \subset \sum_{m=n}^{\infty} \left(P(A \cap S_m) K + \frac{1}{m^2} B \right) \\ &= P(A) K + \left(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) B \end{aligned}$$

Ainsi $M(A) \subset P(A) K$. Donc, par lemme *5.8,* il existe une fonction Γ à valeurs dans $cwkf(X)$ telle que :

$$M(A) = \int_A \Gamma \, dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

$\square$

Théorème 5.10. *Soit* $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *un mil à valeurs dans* $cwkb(X)$.

On suppose que $\{F_n,\, n \geq 1\} \subset S^1_{b(X)}$ *et satisfait la condition d'Uhl pour la topologie faible. Alors il existe* $F \in S^1_{cwkbf(X)}$ *telle que p.s. :*

$$\tau_s - \lim F_n = F \quad p.s.$$

De plus, si X^**est séparable, alors* $H\left(F_n, \xi\left(F/\mathcal{F}_n\right)\right) \longrightarrow 0$ *p.s. et donc* $\tau_M - \lim F_n = F$ *p.s.*

Démonstration. De même que pour la proposition 5.9, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble K_ε faiblement compact et un ensemble mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant $P(\Omega_\varepsilon^c) < \varepsilon$ tels que :

$$\forall A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F} \quad \bigcup_{n\geq 1} \int_A F_n dP \subset P(A)\, K_\varepsilon \tag{5.1}$$

Pour tout $x^* \in N^*$, $(\delta^*(x^*, F_n),\, n \geq 1)$ est une mil réelle dans $S^1_{b(\mathbb{R})}$. Donc il existe un ensemble négligeable $U \subset \Omega$ et une fonction réelle intégrable φ_{x^*} telle que :

$$\delta^*(x^*, F_n(\omega)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_{x^*}(\omega) \qquad \forall x^* \in N^*\, \forall \omega \in U^c.$$

D'après l'équation 5.1, on a :

$$\int_A F_n dP \subset \int_A K\, dP \qquad \forall A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F} \tag{5.2}$$

Ainsi $F_n(\omega) \subset K_\varepsilon$ pour tout $\omega \in U_\varepsilon^c$ avec $U_\varepsilon^c \subset U^c \cap \Omega_\varepsilon$ et $P(\Omega_\varepsilon) = P(U_\varepsilon^c)$.
On déduit que : $(\delta^*(\bullet, F_n(\omega)))_{n\geq 1}$ est équicontinue pour la topologie de Mackey pour $\omega \in U_\varepsilon^c$.
D'où

$$\delta^*(x^*, F_n(\omega)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_{x^*}(\omega) \qquad \forall x^* \in N^*\, \forall \omega \in U_\varepsilon^c.$$

Pour $A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F}$, on définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \psi_A : & X^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x^* & \longmapsto & \int_A \varphi_{x^*} dP \end{array}$$

D'après l'équation 5.2, on a :

$$\psi_A(\bullet) \leq \delta^*(\bullet, P(A)\, K_\varepsilon) \qquad \forall A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F}$$

Puisque $\psi_A(\bullet)$ est sous-linéaire, elle est continue pour la topologie de Mackey sur X^*, donc il existe un ensemble convexe fermé non vide $M(A) \subset X$ tel que : $\delta^*(\bullet, M(A)) = \psi_A(\bullet)$.
Or $\{F_n,\, n \geq 1\} \subset S^1_{b(X)}$ d'où M est à variation bornée dans Ω_ε.

D'après 5.1, on a : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant $P(\Omega_\varepsilon^c) < \varepsilon$ et un ensemble K faiblement compact tels que :

$$\forall A \in \Omega_\varepsilon \cap \mathcal{F} \quad M(A) \subset P(A)\, K_\varepsilon \qquad (*)$$

Posons $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, alors on a :

$$M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}}\right) = M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right) + M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}} \setminus \Omega_{\frac{1}{k}}\right)$$

Puisque $M(\bullet)$ est à variation finie et absolument continue, on a :

$$\begin{aligned}
H\left(M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right), M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}}\right)\right) &= \max\left\{\sup_{x\in M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right)} d\left(x, M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}}\right)\right), \sup_{x\in M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}}\right)} d\left(x, M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right)\right)\right\} \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}}\right) - M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right)\right)_i \right\| \\
&\leq \sup \sum_{i=1}^{n} \left\| \left(M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}} \setminus \Omega_{\frac{1}{k}}\right)\right)_i \right\| \\
&\leq V_M\left(\Omega_{\frac{1}{k+p}} \setminus \Omega_{\frac{1}{k}}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

d'où $\left(M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right),\, k \geq 1\right)$ est une suite de Cauchy. Or $\left(\overline{\mathcal{P}}(X), H\right)$ est complet, donc cette suite admet une limite convexe fermée $M(\Omega) = H - \lim M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right)$. Et puisque $M\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right) \in cwkf(X)$, alors $M(\Omega) \in cwkf(X)$.

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, si $A \subset \Omega_{\frac{1}{k}}$ pour un certain k, alors $M(A)$ est faiblement compact.

Si, pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $A \setminus \Omega_{\frac{1}{k}}$ est non vide, en procédant comme précédemment, on définit pour tout $k \geq 1$, $M(A) = H - \lim M\left(A \cap \Omega_{\frac{1}{k}}\right)$. Donc $M(A)$ est faiblement compact et M est absolument continue par rapport P.

Elle est aussi à variation bornée. En effet, soit $\Pi = \{A_1, A_2, ..., A_{i_n}\}$ une partition finie de Ω. Puisque $M(A) = H - \lim M\left(A \cap \Omega_{\frac{1}{k}}\right)$, alors pour tout $\eta > 0$ et $i \in \{1, 2, ..., i_n\}$, il existe

k_i tel que :

$$k \geq k_i \Longrightarrow \sup_{x^* \in B^*} \left| \delta^* \left(x^*, M\left(A_i\right)\right) - \int_{A \cap \Omega_{\frac{1}{k}}} \varphi_{x^*} \right| < \frac{\eta}{2^i}$$

Soit $k_\Pi = \max\{k_i : i = 1, ..., i_n\}$, alors :

$$\begin{aligned}
V_M(\Omega) &= \sup_\Pi \sum_{i=1}^{i_n} \|M(A_i)\| \\
&\leq \sup_\Pi \sum_{i=1}^{i_n} \sup_{x^* \in B^*} |\delta^*(x^*, M(A_i))| \\
&\leq \sup_\Pi \sum_{i=1}^{i_n} \left(\sup_{x^* \in B^*} \left| \delta^*(x^*, M(A_i)) - \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} dP + \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} dP + \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} dP \right| \right) \\
&\leq \sup_\Pi \sum_{i=1}^{i_n} \left(\sup_{x^* \in B^*} \left| \delta^*(x^*, M(A_i)) - \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} + dP \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} dP \right| + \sup_{x^* \in B^*} \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} dP \right) \\
&\leq \sup_\Pi \sum_{i=1}^{i_n} \left(\frac{\eta}{2^i} + \sup_{x^* \in B^*} \liminf_m \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \delta^*(x^*, F_m) \, dP \right) \quad \text{car} \quad \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \varphi_{x^*} dP \leq \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \delta^*(\bullet, F_m) \, dP \\
&\leq \eta + \sup_\Pi \sum_{i=1}^{i_n} \liminf_m \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \|F_m\| \, dP \\
&\leq \eta + \sup_\Pi \liminf_m \sum_{i=1}^{i_n} \int_{A \cap \Omega_{1/k_\Pi}} \|F_m\| \, dP \\
&\leq \eta + \sup_m \int_\Omega \|F_m\| \, dP < \infty
\end{aligned}$$

Montrons que $M(\bullet)$ est dénombrable additive.

On a : une fonction M à valeurs dans un ensemble tel que $M(A)$ soit faiblement compact, pour tout $A \in \mathcal{F}$, est une mesure variation bornée si et seulement si c'est une $\dot{\sum}$-mesure à variation bornée. Ainsi, il faut montrer que :

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n)$$

pour toute suite $\{A_n, n \geq 1\}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux-à-deux disjoints.

Puisque $M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ et $\dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n)$ sont fermés, l'égalité précédente reste vraie si la distance de Hausdroff entre ces deux ensembles est égale à 0.

D'après la définition de la distance Hausdorff, on voit que, pour tous C, A, B fermés convexes, on a $H(A,B) = H(A+C, B+C)$. On l'applique sur $M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ et $\dot{\sum}_{n=1}^{\infty} M(A_n)$ fermés et convexes, on a donc :

$$
\begin{aligned}
H\left(M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n)\right) &= H\left(M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) - M\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)\right), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n) + \left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) - M\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)\right)\right) \\
&= H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) + M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) - M\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n) + \left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) - M\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)\right)\right) \\
&= H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) + M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n) + \left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) - M\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)\right)\right) \\
&\leq H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) + M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n) + \left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n)\right)\right) \\
&\leq H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) + M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right), \left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n)\right)\right) + H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n)\right) \\
&= \left\| M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)\right\| + H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n), \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n)\right) \\
&= \left\| M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)\right\| + H\left(\dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n), \dot{\sum_{n=1}^{k}} M(A_n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} M(A_n)\right) \\
&= \left\| M\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)\right\| + \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} M(A_n)\right\| \\
&\leq 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \|M(A_n)\| \\
&= 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \sup_{x \in M(A_n)} ||x|| \\
&\leq 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \sup \sum_{i=1}^{\infty} \|M((A_n)_i)\| \qquad \text{avec } (A_n)_i \text{ partition de } A_n \\
&\leq 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} V_M(A_n)
\end{aligned}
$$

Puisque M est à variation bornée, la dernière expression tend vers 0. D'où

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \dot{\sum_{n=1}^{\infty}} M(A_n)$$

donc M est une $\dot{\sum}$-mesure et, par suite, c'est une mesure à variation bornée.

D'après lemme 5.8, il existe une fonction $F \in cwkf(X)$ telle que :

$$M(A) = \int_A F \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Or on a :

$$\delta^*(x*, M(A)) = \psi_A(x^*) = \int_A \varphi_{x^*} dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

donc

$$\int_A \delta^*(x*, F)\, dP = \delta^*\left(x*, \int_A F\, dP\right) = \int_A \varphi_{x^*} dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

d'où :

$$\delta^*(x*, F) = \varphi_{x^*} \quad \text{p.s.}$$

On conclue que

$$\lim_n \delta^*(x*, F_n(\omega)) = \delta^*(x*, F(\omega)) \qquad \forall x^* \in N^* \ \forall \omega \in U^c$$

D'après 5.2, pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\int_A F_n dP \subset \int_A K_{\frac{1}{k}} dP \quad \forall A \in \Omega_{\frac{1}{k}} \cap \mathcal{F}$$

Ainsi : il existe un ensemble $U_{\frac{1}{k}}^c \subset U^c \cap \Omega_{\frac{1}{k}}$ et $P\left(\Omega_{\frac{1}{k}}\right) = P\left(\Omega_{\frac{1}{k}} \setminus U_{\frac{1}{k}}\right)$ et $F_n(\omega) \subset K_{\frac{1}{k}}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in U_{\frac{1}{k}}^c \cap \Omega_{\frac{1}{k}}$. D'où $(\delta^*(\bullet, F_n(\omega)), n \geq 1)$ est équicontinue pour la topologie de Mackey, pour $\omega \in U_{\frac{1}{k}}^c \cap \Omega_{\frac{1}{k}}$.

Pour $k \to \infty$, on définit l'ensemble $\Omega_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(U_{\frac{1}{k}}^c \bigcap \Omega_{\frac{1}{k}}\right)$. La suite $(\delta^*(\bullet, F_n(\omega)), n \geq 1)$ est équicontinue pour la topologie de Mackey, pour tout $\omega \in \Omega_0$. Ainsi

$$\tau_s - \lim F_n(\omega) = F(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega_0$$

De plus, F est intégrablement bornée. La convergence scalaire de $(F_n)_n$ vers F implique

que $\left\|F(\omega)\right\| \leq \liminf_n \|F_n(\omega)\|$ et, d'après la lemme de Fatou, on a :

$$\int_\Omega \left\|F(\omega)\right\| dP(\omega) \leq \int_\Omega \liminf_n \|F_n(\omega)\| \, dP(\omega) \leq \liminf_n \int_\Omega \|F_n(\omega)\| \, dP(\omega) < \infty$$

On suppose, maintenant, que X^*est séparable. D'après théorème 6 dans [6], il existe un ensemble négligeable $U_1 \subset \Omega_0$ tel que :

$$\forall \omega \in U_1 \quad H\left(F_n(\omega), \xi\left(F|\mathcal{F}_n\right)(\omega)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par le théorème 5.2 on a :

$$\tau_M - \lim \xi\left(F|\mathcal{F}_n\right) = F \quad \text{p.s.}$$

Ainsi le théorème 5.7 implique que :

$$\tau_M - \lim F_n = F \quad \text{p.s.}$$

□

6 Pramarts

On rappelle que T désigne l'ensemble des temps d'arrêt bornés relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

Définition 6.1. Une famille adaptée $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $cwk(X)$ est un **pramart** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_0 \in T$ tel que :

$$\forall \sigma, \tau \in T \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \tau \Longrightarrow P\left(H\left(F_\sigma, \xi\left(F_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right)\right) > \varepsilon\right) < \varepsilon$$

Définition 6.2. Si $X = \mathbb{R}$, on dit que $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est un **sous-pramart** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_0 \in T$ tel que :

$$\forall \sigma, \tau \in T \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \tau \Longrightarrow P\left(\left(F_\sigma - \xi\left(F_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right)\right)^+ > \varepsilon\right) \leq \varepsilon$$

Définition 6.3. Une suite $(F_n^m, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}(m \in \mathbb{N}^*)$ de sous-pramarts réels est dite uniforme si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_0 \in T$ tel que :

$$\forall \sigma, \tau \in T \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \tau \Longrightarrow P\left(\sup_m \left(F_\sigma^m - \xi\left(F_\tau^m/\mathcal{F}_\sigma\right)\right)^+ > \varepsilon\right) \leq \varepsilon$$

Définition 6.4. Si $X = \mathbb{R}$, on dit que $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ est un pramart si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\sigma_0 \in T$ tel que :

$$\forall \sigma, \tau \in T \quad \sigma_0 \leq \sigma \leq \tau \Longrightarrow P\left(\left|F_\sigma(\bullet) - \xi\left(F_\tau / \mathcal{F}_\sigma\right)(\bullet)\right| > \varepsilon\right) \leq \varepsilon$$

Lemme 6.5. (lemme de Egghe)

Soit $(F_n^m, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$une suite uniforme de sous-pramarts réels positifs. On suppose qu'il existe une suite $\{n_k,\, k \geq 1\} \subset \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\sup_k \int_\Omega \sup_m F_{n_k}^m(\omega)\, dP(\omega) < \infty$$

Alors $(F_n^m)_{n \geq 1}$ converge p.s. vers une fonction intégrable F_∞^m et on a :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_m F_n^m = \sup_m F_\infty^m$$

Proposition 6.6. *Soient $H \subset X$ et $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(x_0) = 0$, alors $\sup_{x \in H} f(x) = \sup_{x \in H} f^+(x)$ avec $f^+ = \sup(f, 0)$.*

Notation. On désigne par N_1^* sous-ensemble dénombrable dense pour la topologie de Mackey dans la boule B^* fermée de X^*.

On note N^* l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires appartenant à N_1^*, d'où N^*est un sous-ensemble dense dans X^* pour la topologie de Mackey.

Lemme 6.7. *Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$une suite dans $cwk(X)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Il existe $K \in cwk(X)$ tel que $C_n \subset K \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$;*

(2) $\lim_{n \to \infty} \delta^*(x^*, C_n)$ *existe pour tout $x^* \in N^*$.*

Alors il existe $C \in cwk(X)$ tel que :

$$\forall x^* \in X^* \qquad \delta^*(x^*, C) = \lim_{n \to \infty} \delta^*(x^*, C_n)$$

Démonstration. d'après (1) $\delta^*(x^*, C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équicontinue pour la topologie de Mackey et d'après (2), on déduit que $\delta^*(x^*, C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$admet une limite pour tout $x^* \in X^*$, donc il existe $C \in cwk(X)$ tel que

$$\delta^*(x^*, C) = \lim_{n \to \infty} \delta^*(x^*, C_n) \quad \forall x^* \in X^*$$

$\square$

Lemme 6.8. (Lemme de Hess)

Soit $(F_n,\, n \geq 1)$ *une suite de multifonctions mesurables à valeurs dans* $cwk(X)$*. On suppose que :*

(1) *Il existe une multifonction* G *à valeurs dans* $cwk\,(X)$ *telle que :*

$$F_n\,(\omega) \subset G\,(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega\, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

(2) *Pour tout* $x^* \in \mathbb{N}^*$*, la suite* $(\delta^*\,(x^*, F_n\,(\omega)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge presque sûrement.*

Alors :

(a) *Il existe une multifonction* F_∞ *mesurable à valeurs dans* $cwk\,(X)$ *et un sous-ensemble négligeable* $B \subset \Omega$ *vérifiant :*

$$\delta^*\,(x^*, F_\infty\,(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \delta^*\,(x^*, F_n\,(\omega)) \quad \forall x^* \in X^*\, \forall\omega \in \Omega \setminus B$$

(b) *Si* $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} E\,(\|F_n\,(\bullet)\|) < \infty$, F_∞ *est intégrablement bornée.*

Démonstration. (a) Puisque N^* est dénombrable, on peut trouver un sous-ensemble négligeable B tel que : $\lim_{n\to\infty} \delta^*\,(x^*, F_n\,(\omega))$ existe pour tout $x^* \in X^*$ et $\omega \in \Omega \setminus B$;

Par le lemme 6.7, on a pour tout $\omega \in \Omega \setminus B$, avec $K = G\,(\omega)$ et $C_n = F_n\,(\omega)$, il existe une multifonction F_∞ à valeurs dans $cwk\,(X)$ telle que :

$$\delta^*\,(x^*, F_\infty\,(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \delta^*\,(x^*, F_n\,(\omega)) \qquad \forall x^* \in X^* \quad \forall\omega \in \Omega \setminus B$$

(b) Pour $C \in cwk\,(X)$, on a : $\left\|C\right\| = \sup\limits_{x^*\in N_1^*} \delta^*\,(x^*, C)$. D'où :

$$\liminf_{n\to\infty} \|F_n\,(\omega)\| \geq \left\|F\,(\omega)\right\| \quad \forall\omega \in \Omega \setminus B$$

Par le lemme de Fatou on déduit que :

$$E\,(\|F_n\,(\bullet)\|) \leq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} \|F_n\,(\omega)\|\, dP \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \|F_n\,(\omega)\|\, dP \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} E\,(\|F_n\,(\bullet)\|) < \infty.$$

d'où le résultat. □

Théorème 6.9. *On suppose que* X *est séparable. Soit* $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq1}$ *une suite adaptée à valeurs dans* $cwk\,(X)$*. On suppose que :*

$$\overline{\mathrm{co}\left(\bigcup_n F_n\,(\omega)\right)} \in cwk\,(X)$$

(1) *Si* $(F_n,\, n \geq 1)$ *est un pramart tel que* $\sup_n \int_\Omega |\delta^*\,(x^*, F_n)| < \infty$ *pour tout* $x^* \in X^*$,

alors il existe une multifonction mesurable $F_\infty : \Omega \to cwk(X)$ et un sous-ensemble négligeable $B \subset \Omega$ tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x^*, F_n(\omega)) = \delta^*(x^*, F_\infty(\omega)) \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus B$$

(2) Si $(F_n,\, n \geq 1)$ est un pramart tel que :$\int_\Omega d(0, F_n(\bullet))\, dP < \infty$, alors $S^1_{F_\infty} \neq 0$ et $\tau_L - \lim F_n(\omega) = F_\infty(\omega)$ et $\tau_M - \lim F_n(\omega) = F_\infty(\omega)$

Démonstration.

(1) Supposons que $(F_n,\, n \geq 1)$ est un pramart tel que $\sup_n \int |\delta^*(x^*, F_n)| < \infty$ pour tout $x^* \in N^*$.

On a $\delta^*(x^*, F_n)$ est un pramart réel borné, donc il admet une limite. Par le lemme de Hess (Lemme **6.8**), il existe une multifonction mesurable $F_\infty : \Omega \to cwk(X)$ et un ensemble N_ε négligeable tels que :

$$\lim_n \delta^*(x^*, F_n(\omega)) = \delta^*(x^*, F_\infty(\omega)) \qquad \forall x^* \in X^* \ \forall \omega \in \Omega \setminus N_\varepsilon$$

(2) Supposons que $(F_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est un pramart tel que $\int_\Omega d(0, F_n(\bullet))\, dP < \infty$.

Soient N un sous-ensemble de X dénombrable dense pour la topologie de la norme dans X et x fixé dans N.

Pour $x^* \in X^*$ et $\omega \in \Omega$, on pose :

$$\varphi_n(\omega, x^*) = \langle x^*, x\rangle - \delta^*(x^*, F_n(\omega))$$

Montrons que $(\varphi_n^+(\bullet, x^*), \mathcal{F}_n)$ $\forall x^* \in N^*$ est une suite uniforme positive de sous-pramarts réels, avec $\varphi_n^+ = \sup(\varphi_n, 0)$

Soient $\tau, \sigma \in T$ avec $\sigma \leq \tau$.

D'après l'inégalité de Jensen, il existe un sous-ensemble négligeable $N_{x^*,x} \subset \Omega$ tel que :

$$|E(\varphi_\tau(\bullet, x^*)/\mathcal{F}_\sigma)(\omega)| \leq E(|\varphi_\tau|(\bullet, x^*)/\mathcal{F}_\sigma)(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N_{x^*,x}$$

On note $N_x = \bigcup_{x^*\in N^*} N_{x^*,x}$, alors, pour tout $\omega \in \Omega \setminus N_x$, on a :

$$
\begin{aligned}
\varphi_\sigma^+ - E\left(\varphi_\tau^+/\mathcal{F}_\sigma\right) &= \frac{1}{2}\Big(\varphi_\sigma + |\varphi_\sigma| - E\left(\varphi_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right) + E\left(|\varphi_\tau|/\mathcal{F}_\sigma\right)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\varphi_\sigma - E\left(\varphi_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right) + |\varphi_\sigma| - E\left(|\varphi_\tau|/\mathcal{F}_\sigma\right)\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\varphi_\sigma - E\left(\varphi_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right) + |\varphi_\sigma - E\left(\varphi_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right)|\Big) \\
&= \left(\varphi_\sigma - E\left(\varphi_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right)\right)^+
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\sup_{x^*\in N_1^*}\left(\varphi_\sigma^+(\omega,x^*) - E\left(\varphi_\tau^+(\bullet,x^*)/\mathcal{F}_\sigma\right)(\omega)\right) &\leq \sup_{x^*\in N_1^*}\left(\delta^*\left(x^*,\xi\left(F_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right)(\omega) - \delta^*\left(x^*,F_\sigma(\omega)\right)\right)\right)^+ \\
&\leq H\left(F_\sigma(\omega),\xi\left(F_\tau/\mathcal{F}_\sigma\right)(\omega)\right)
\end{aligned}
$$

Puisque $(F_n,\, n\geq 1)$ est un pramart, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\sigma_0\in T$ tel que :

$$
\forall\tau,\sigma\in T \qquad \tau\geq\sigma\geq\sigma_0 \Longrightarrow P\left(\sup_{x^*\in N_1^*}\left(\varphi_\sigma^+(\bullet,x^*) - E\left(\varphi_r^+(\bullet,x^*)/\mathcal{F}_\sigma\right)\right)\geq\varepsilon\right)\leq\varepsilon
$$

D'après (1), on a :

$$
\lim_{n\to\infty}\varphi_n^+(\omega,x^*) = \varphi^+(\omega,x^*)
$$

avec :

$$
\varphi(\omega,x^*) = \langle x^*,x\rangle - \delta^*\left(x^*,F_\infty(\omega)\right)
$$

En appliquant le lemme de Egghe (Lemme 6.5) pour le pramart réel positif $\left(\varphi_n^+(\bullet,x^*),\mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$, on obtient :

$$
\lim_{n\to\infty}\sup_{x^*\in N_1^*}\varphi_n^+(\omega,x^*) = \sup_{x^*\in N_1^*}\varphi^+(\omega,x^*) \qquad \forall x^*\in N_1^*\ \forall\omega\in\Omega\setminus\Big(N_1\cup N_x\Big)
$$

Si on pose $B = N_1\cup\left(\bigcup_{x\in N} N_x\right)$, donc d'après proposition 5.6 on a :

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d\left(x, F_n\left(\omega\right)\right) &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x^*\in N_1^*} \varphi_n\left(\omega, x^*\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{x^*\in N_1^*} \varphi_n^+\left(\omega, x^*\right) \\
&= \sup_{x^*\in N_1^*} \varphi^+\left(\omega, x^*\right) \\
&= \sup_{x^*\in N_1^*} \varphi\left(\omega, x^*\right) \\
&= d\left(x, F_\infty\left(\omega\right)\right) \qquad \forall x \in N \ \ \forall \omega \in \Omega \setminus B
\end{aligned}
$$

Or la suite $\left(d\left(\bullet, F_n\left(\omega\right)\right)\right)_{n\geq 1}$ est équicontinue pour tout $\omega \in \Omega \setminus B$. On en déduit que :

$$
\lim_{n\to\infty} d\left(x, F_n\left(\omega\right)\right) = d\left(x, F_\infty\left(\omega\right)\right) \qquad \forall x \in X
$$

Donc :

$$
\tau_L - \lim F_n\left(\omega\right) = F_\infty\left(\omega\right)
$$

En particulier on a :

$$
\tau_M - \lim F_n\left(\omega\right) = F_\infty\left(\omega\right)
$$

Par le lemme de Fatou on a alors :

$$
\int_\Omega d\left(0, F_\infty(\omega)\right)\, dP(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega d\left(0, F_n(\omega)\right)\, dP(\omega) \leq \sup_n \int_\Omega d\left(0, F_n(\omega)\right)\, dP(\omega) < \infty
$$

d'où $S^1_{F_\infty} \neq \{0\}$. □

Remarque. Puisque tout pramart est une mil, le théorème 5.10 reste valide en remplaçant mil par pramart

7 Comparaison et conclusion

Théorème 7.1. ([14])

Tout amart multivoque à valeurs dans un espace de Banach est une martingale à la limite.

Démonstration. On suppose que $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$ n'est pas une mil, alors il existe $\beta, \delta>0$ tels que :

$$
P\left(\sup_{p\leq q\leq n} H\left(F_q, \xi\left(F_n / \mathcal{F}_q\right)\right) > \delta\right) > \beta
$$

Soit un entier N. Alors, on a :

$$P\left((\exists q \geq N)\,(\exists n \geq q)\ :\ H\left(F_q, \xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right)\right) > \delta\right) > \beta$$

Donc il existe N_0, $N \leq N_0$ tel que

$$P\left(\exists q, n\ N \leq q \leq n \leq N_0\ :\ H\left(F_q, \xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right)\right) > \delta\right) > \beta$$

Pour $N \leq q \leq N_0$, on définit :

$$A_q = \left\{\exists n\ :\ q \leq n \leq N_0 \text{ et } H\left(F_q, \xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right)\right) > \delta\right\}$$

et $A = \bigcup_{q=N}^{N_0} A_q$. Ainsi $A_q \in \mathcal{F}_q$ pour tout q et $P(A) > \beta$. On définit τ_1 et τ_2 par :

$$\tau_1(\omega) = \begin{cases} \min\left(q\ :\ N \leq q \leq N_0 \text{et } \omega \in A_q\right) & \text{pour } \omega \in A \\ N_0 & \text{pour } \omega \notin A \end{cases}$$

$$\tau_2(\omega) = \begin{cases} \min\left(n\ :\quad q \leq n \leq N_0 \text{ et } \left\|F_q(\bullet) - \xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right)(\bullet)\right\| > \delta\right) & \text{pour } \omega \in A_q \setminus \left(A_N \cup A_{N+1} \cup \ldots \cup A_{q-1}\right) \\ N_0 & \text{pour } \omega \notin A \end{cases}$$

On a $\{\tau_1 = q, \tau_2 = n\} \in \mathcal{F}_n$, pour $n \geq q$. Donc :

$$\begin{aligned} \left\|\xi\left(F_{\tau_1}\right) - \xi\left(F_{\tau_2}\right)\right\| &= \left\|\sum_{q=N}^{N_0}\sum_{n=q}^{N_0} \xi\left(\left(F_n - F_q\right) 1_{\{\tau_1 = q, \tau_2 = n\}}\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{q=N}^{N_0}\sum_{n=q}^{N_0} \xi\left(\left(\xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right) - F_q\right) 1_{\{\tau_1 = q, \tau_2 = n\}}\right)\right\| \\ &= \left\|\xi\left(\left(\xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right) - F_q\right) 1_A\right)\right\| \\ &= \left\|\xi\left(F_n/\mathcal{F}_q\right) - F_q\right\| P(A) > \delta\beta \end{aligned}$$

Alors, pour tout entier N, il existe $\tau_1, \tau_2 \in T$, $N \leqq \tau_1 \leq \tau_2$ tels que :

$$\left\|\xi\left(F_{\tau_1}\right) - \xi\left(F_{\tau_2}\right)\right\| > \delta\beta$$

D'où $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n \geq 1}$ n'est pas un amart. □

Définition 7.2. Une suite adaptée $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n \geq 1}$ dans $\mathscr{L}^1_{wkc(X)}$ est un GFT (Game Fairer with

Time) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \geq 1$ tel que pour $n \geq m \geq p$, on ait :

$$P\left(H\left(F_n, \xi\left(F_m|\mathcal{F}_n\right)\right) > \epsilon\right) < \epsilon$$

Remarque. Toute martingale est un mil

Tout mil est un GFT.

Tout amart est un mil.

Tout pramart est un mil.

Donc les théorèmes de convergence des mils s'appliquent pour les amarts et les pramarts.

Ceci nous mène à poser la question si une théorie générale peut être construite sur la notion de la martingale à la limite. Le théorème qui suit donne une réponse négative à cette question. Nous démontrons que certaines propriétés vérifiées par les amarts ne s'appliquent pas pour les martingales à la limite.

Théorème 7.3. ([14])

(1) *La décomposition de Riesz ne s'applique pas pour les mils. Il existe un mil $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$ qui ne peut pas être représentée sous la forme $F_n = Y_n + Z_n$, avec $\left(Y_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$ une martingale et $\int_A Z_n dP \to 0 \;\; \forall A \in \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$.*

(2) *Le Théorème d'arrêt de Doob ne s'applique pas pour les mils et GFT. Il existe un mil $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$ et une suite de temps d'arrêt $\left(\tau_n\right)_{n\geq 1}$ avec*

$$P\left(\tau_n = \infty\right) > 0, \;\; \textit{pour tout } n \geq 1,$$

tels que $\left(F_{\tau_n}, \mathcal{F}_{\tau_n}\right)_{n\geq 1}$ ne soit pas un GFT, donc pas un mil.

Démonstration.

(1) Soit $(F_n,\, n \geq 1)$ converge, $\mathcal{F}_n = \sigma\left(F_1, F_2, ...\right)$. On suppose qu'il existe un ensemble $A \in \bigcup_m \mathcal{F}_m$ tel que $\int_A F_n dP$ ne converge pas. Alors $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$ est un mil n'admettant pas une décomposition de Riesz.

(2) Soit $(A_n,\, n \geq 1)$ une suite indépendante telle que : $P\left(A_1\right) = 0$ et $P\left(A_n\right) = \frac{1}{n^2}$ pour $n > 1$. Pour $n \geq 1$, on définit $F_n = n 1_{A_n}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\left(F_1, F_2, ..., F_n\right)$. On a donc $F_n \longrightarrow 0$ p.s. et si $n < m$, $\xi\left(F_m|\mathcal{F}_n\right) - F_n = \xi\left(F_m\right) - F_n \longrightarrow 0$ p.s. Donc $\left(F_n, \mathcal{F}_n\right)_{n\geq 1}$ est une mil.

Soit $\sigma = \inf\left(n \,:\, F_n \neq 0\right)$, alors $P\left(\sigma = \infty\right) = \prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Pour $n \geq 1$, soit $Y_n = F_{\tau_n}$et $\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{\tau_n}$,$\omega \in \left\{\sigma = \infty\right\}$. Alors :

$$\sup_{p\leq n\leq m} H\left(Y_n(\omega), \xi\left(Y_m/\mathcal{H}_n\right)(\omega)\right) = +\infty$$

d'où $\left(Y_n, \mathcal{H}_n\right)$ n'est pas un GFT.

Soit M une constante strictement positive et $m > n$ tels que $\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} \geq M$.$\omega \in A_2^c \cap ... \cap A_n^c$ et $\xi\left(Y_m/\mathcal{H}_n\right)$ une valeur moyenne de $Y_m\left(\omega\right)$. Alors :

$$\begin{aligned} \xi\left(Y_m\left(\omega\right)/\mathcal{H}_n\right) &= \sum_{k=n+1}^{m} k\left(\prod_{j=n+1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{j^2}\right)\right)\frac{1}{k^2} \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} \geq M \end{aligned}$$

d'où $Y_m\left(\omega\right) = 0$. □

Références

[1] A. Choukairi (1994), On Almost Sure convergence of Vector Valued Pramarts and Multivalued Pramarts, Journal of Convex Analysis, Vol 3, n° 2, p. 245-254.

[2] C. Castaing (1989), Sur la décomposition de Slaby, Application aux problèmes de convergence en Probabilité. Économie mathématique, Théorie du Contrôle, Minimisation. Séminaire d'Analyse Convexe, Université Montpellier 2, Exposé n° 3.

[3] C. Castaing (1990), Quelques problèmes de convergence en probabilités. Économie mathématique, Théorie du Contrôle, Minimisation. Université Montpellier 2.

[4] C. Castaing et P. Clauzure (1985), Compacité faible dans $\mathscr{L}_X^1$ et dans l'espace des multifonctions intégrablement bornées et Minimisation. *Ann. Mat. Pura. ed App.*, IV, Vol. CXL, p. 345–364.

[5] C. Castaing et P. Clauzure (1988), Version multivoque et vectorielle d'un résultat de Brooks-Chacon. Séminaire d'Analyse Convexe, Université Montpellier 2, Exposé n° 4.

[6] C. Castaing et F. Ezzaki (1990), Some convergence results for multivalued martingales in the limit, Séminaire d'Analyse Convexe, Université Montpellier 2, Exposé n° 1.

[7] C. Castaing and M. Valadier (1977), *Convex Analysis and Measurable Multifunctions,* Lecture Notes, n° 580, Springer-Verlag, Berlin.

[8] C. Hess (1989), On Multivalued Martingales Whose values may be unbounded : martingale selectors and Mosco convergence, Seminaire Analyse convexe Montpellier, Expose 8, Journal of Multivariate Analysis, 39, n° 1, p. 175-201.

[9] F.Hiai and H.Umegaki (1977),Integrals, Conditional Expectations, and Martingales of Multivalued Functions,journal of multivariate analysis, n° 7,p. 149-182.

[10] L. Egghe (1984), Convergence of adapted sequences of Pettis-Integrable Func- tions, Pacic Journal of Mathematics, Vol. 114, n° 2, p. 345-366.

[11] M. TALAGRAND (1985), Some structure results for martingales in the limit and pramarts. *The Annals of Probability,* Vol. 13, n° 4, p. 1192–1203.

[12] JR. Uhl J. J. (1969), Applications of Radon-Nikodym theorems to martingale convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.,* Vol. 145, p. 271–285.

[13] Z.-P. Wang and X.H. Xue (1994), On convergence and closedness of multivalued martingales. *Trans. Amer. Math. Soc.,* Vol. , n° 2, p. 807–827.

[14] G.A. Edgar and L. Sucheston (1977), Martingales in the limit and amarts, *Proceedings of te Amer. Math. Soc.,* Vol. , n° 2, p. 315–320.