UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Département de Mathématiques

License mathématiques et applications

Mémoire de fin d'étude

Sous le thème :

Notions topologiques et applications

Réalisé par | **Encadré par**

Bouzekri, Achraf | **Bekkali, Mohamed**

Présenté devant :

Professeur Gmira, Seddik
Professeur Alami, Mustapha

Remerciements

Je tiens à remercier mon encadrant le professeur Mohamed Bekkali, pour le temps qu'il m'a consacré durant la préparation de ce rapport, ainsi que les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail, sans oublier l'aide énorme des personnes travaillant à la bibliothèque de la FST.

Table des matières

Remerciements **1**

1 Ensembles topologiques classiques **5**
1.1 Espaces métriques 5
1.1.1 Boules 5
1.1.2 Distance induite 5
1.1.3 Espaces normés 6
1.1.4 Ouverts dans un espace métrique 7
1.1.5 Topologie associée à une distance 8

2 Différentes topologies **10**
2.1 À travers les ouverts 10
2.2 À travers les fermés 10
2.3 À travers l'Adhérence 11
2.4 À travers l'intérieur 11
2.5 À travers les voisinages 11
2.6 À travers une base de topologie 12
2.7 À travers une base de topologie en un point x 12
2.8 À travers une sous-base de topologie 12
2.9 À travers une sous-base de topologie en x 13

3 Caractéristiques d'un espace topologique **14**
3.1 Adhérence 14
3.2 Intérieur 14
3.3 Frontière 14
3.4 Espaces séparés 18
3.5 Parties denses, espaces séparables 18
3.6 Topologie induite 18

4 Application :Problème de Kuratowski **20**

5 Continuité **25**
5.1 Applications continues et propriétés 25
5.2 Applications uniformément continues 26

5.3 Homéomorphismes 27

6 Espaces compacts **28**

6.1 Définitions 28

6.1.1 Parties compactes 28

6.1.2 Compacité des espaces métriques 29

6.2 Compacts et continuité 30

7 Espaces connexes **31**

7.0.1 Définitions 31

7.0.2 Parties connexes 32

7.0.3 Exemples 33

7.1 Connexes par arcs 33

Introduction

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle, dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental,aussi bien en Analyse Fonctionnelle, qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique. Elle avait pour but de traiter des problèmes, où n'intervenaient pas les notions usuelles de distance.

L'évolutions des idées a montré que les notions fondamentales étaient celles de voisinage et de continuité. Mais en même temps, le développement de l'analyse fonctionnelle, a permis de généraliser la notion géométrique primitive d'espace, et introduire des espaces de fonctions. Tout cela a conduit à la notion générale d'espace abstrait.

Chapitre 1

Ensembles topologiques classiques

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E, toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}+$ vérifiant :*

1. $(\forall\ x,y \in E)\ d(x,y)=d(y,x)$
2. $(\forall\ x,y \in E)\ d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
3. $(\forall\ x,y,z \in E)\ d(x,z)\leq\ d(x,y)+d(y,z)$

Si d est une distance sur E, le couple (E,d) est appelé espace métrique.

1.1.1 Boules

Définition 1.1.2 *Soit (E,d) un espace métrique. Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, la boule ouverte (resp.fermée) de centre a et de rayon r est l'ensemble :*

$$B(a,r) = \{x \in E,\ \ d(x,a) < r\ \ (resp.\ \ d(x,a) \leq r)\}$$

1.1.2 Distance induite

Définition 1.1.3 *Si d est une distance sur un ensemble E et A une partie non vide de E, la restriction de* **d** *à $A\times A$ est une distance sur A. On l'appelle distance induite sur A. Le couple (A,d) est, à son tour, un espace métrique, on l'appelle sous-espace métrique de (E,d).*

Exemple 1.1.1

1. *La valeur absolue* $(x,y) \longrightarrow |x-y|$ *est évidemment une distance sur* $\mathbb{R}$. *On l'appelle distance usuelle. Pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *et tout* $r > 0$*, la boule ouverte* $B(a,r)$ *est l'intervalle ouvert* $]a-r, a+r[$.

2. *Soit* E *un ensemble quelconque.*

$$L'application \;\; d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur E, appelée distance discrète. Ses boules sont soit des singletons, soit égales à E tout entier. Nous verrons, par exemple, que quand E est égal à $\mathbb{Z}$.
la distance usuelle et la distance discrete définissent une même structure topologique.

3. *L'application* $(x,y) \to |arctan(x) - arctan(y)|$ *est une distance sur l'ensemble* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
la boule ouverte $B(0,\pi/2)$ *est égale à* $\mathbb{R}$*, et la boule fermée* $\overline{B}(0,\pi/2)$*est égale à l'espace tout entier* $\overline{\mathbb{R}}$*,ainsi la boule ouverte* $B(+\infty, 2\pi)$ *est égale elle aussi à* $\overline{\mathbb{R}}$.

1.1.3 Espaces normés

Une intéressante classe d'espaces métriques est la classe des espaces normés.
En effet, Étant donné un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur E, si :

1. $(\forall x \in E)$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$, $N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$
3. $(\forall x, y \in E)$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
Dans ce cas, on dit que (E, N) est un espace normé.

Exemple 1.1.2 1. *Sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *; les applications suivantes sont des normes.*

- $x = (x_1, , , , , x_n) \to \|x\| = \max_{i=1,..,n} |x_i|$
- $x \longrightarrow \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $x \longrightarrow \|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

Plus généralement pour tout réel $p \geq 1$*, l'application :*

$$x \longrightarrow \|x\|_p = (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. *Soit X un espace métrique. Sur l'espace $\mathcal{C}_b(X, K)$ des applications continues bornées sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'application :*

$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)|$$

est une norme, appelée norme de la convergence uniforme.

1.1.4 Ouverts dans un espace métrique

Dans $\mathbb{R}$, on définit les ouverts à partir des intervalles ouverts , dans les espaces métriques on définit les ouverts à partir des boules ouvertes. Soit (E, d) un espace métrique :

Définition 1.1.4 *Un sous-ensemble O de E est dit ouvert de E, si O est vide, ou bien si pour tout $x \in O$, il existe une boule ouverte de centre x qui soit incluse dans O. En termes précis, O est un ouvert de E si :*

$$\begin{cases} O = \varnothing \quad \text{ou bien} \\ \forall x \in O, \exists r > 0, B(x, r) \subset O. \end{cases}$$

La famille des boules ouvertes engendre les ouverts de E. En effet, on a :

Proposition 1.1.3 *Toute boule ouverte est un ouvert et les ouverts de E sont les réunions de boules ouvertes.*

Preuve

- Soit (E, d) un espace métrique et $B(x, r)$ une boule ouverte de E. Pour tout $y \in B(x, r)$, il vient que la boule ouverte de centre y et de rayon $\rho = r - d(x, y)$ est incluse dans $B(x, r)$. Donc $B(x, r)$ est un ouvert de E.
- Soit O un ouvert non vide de E. D'après la définition d'un ouvert, pour tout $x \in O$, il existe un rayon $r_x > 0$, tel que la boule $B(x, r_x)$ soit incluse dans O. Ainsi O est réunion des boules ouvertes $B(x, r_x)$,$x \in O$.
  Inversement, Si $(B(x_\alpha, r_\alpha))_{\alpha \in I}$ est une famille de boules ouvertes de E, la réunion $\bigcup\limits_{\alpha \in I} B(x_\alpha, r_\alpha)$ est un ouvert de E.

  En effet, si x est un élément de cette réunion, il existe un indice $\alpha \in I$ tel que x soit dans la boule $B(x_\alpha, r_\alpha)$, et comme cette dernière est un ouvert, elle contient une boule ouverte B de centre x. la boule B est ainsi incluse dans $\bigcup\limits_{\alpha \in I} B(x_\alpha, r_\alpha)$; d'où le résultat.

Voici trois propriétés fondamentales, vérifiées par les ouverts.

Proposition 1.1.4 *Soit (E,d) un espace métrique, ou topologique.*

1. *Les deux parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.*
2. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Preuve

1. *Évident*
2. *Même raisonnement utilisé pour démontrer la proposition (1.1.2)*
3. *Soit $O_1, O_2, ..., O_n$ des ouverts de E. Si leur intersection $\bigcap\limits_{1\leq k\leq n} O_k$ est vide, alors c'est un ouvert. Sinon, pour tout x élément de cette intersection et pour tout $k \in \{1, 2, ...n\}$, il existe un rayon $\rho_k > 0$ tel que la boule $B(x, \rho_k)$ soit incluse dans l'ouvert O_k et par conséquent la boule de centre x et de rayon $\rho = \min\limits_{1\leq k\leq n} \rho_k$ est incluse dans $\bigcap\limits_{1\leq k\leq n} O_k$.*

1.1.5 Topologie associée à une distance

Soit d une distance sur un ensemble E. On appelle topologie associée à d, et on note $\mathcal{T}_d$, la partie de $\mathcal{P}(E)$ formée de tous les ouverts de E relativement à d.

$$\mathcal{T}_d = \{O \subset E,\ O \ ouvert.\}$$

D'après la proposition 1.1.3, $\mathcal{T}_d$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie :

T_1 : Les deux parties $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{T}_d$.
T_2 : Une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{T}_d$ est un élément de $\mathcal{T}_d$.
T_3 : Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}_d$ est un élément de $\mathcal{T}_d$.

Exemple 1.1.5

- *Dans un ensemble non vide E, la topologie associée à la distance discrète est égale à $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire que toute partie de E est un ouvert relativement à cette distance.*
  En effet, pour toute partie A non vide de E.
  si $x \in A$ alors $B(x, 1) = \{x\} \subset A$, i.e., $B(x, 1) \cap A = \{x\}$, donc x est isolé dans$A$ avec la topologie induite. donc A est une partie discrète.

- *Dans* $\mathbb{Z}$, *la topologie associée à la distance usuelle est* $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
  En effet, si A *est une partie non vide de* $\mathbb{Z}$ *et* $m \in A$.
  on a $B(m, 1) = \{x \in \mathbb{Z}, |x - m| < 1\} = \{m\} \subset A$.

Chapitre 2

Différentes topologies

Soit E un ensemble quelconque, on veut définir une topologie sur E, *i.e.*, déterminer les parties ouvertes de E.
Pour cela, il existe différente manières pour se faire :

2.1 À travers les ouverts

Ici on précise explicitement tous les ouverts de E.
Soit $\mathcal{O} \in \mathcal{P}(E)$ on dit que $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique si et seulement si :

- E , $\emptyset \in \mathcal{O}$.
- G_1, $G_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{O}$.
- $(G_\alpha)_\alpha \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \in \mathcal{O}$.

Chaque élément de $\mathcal{O}$ est appelé ouvert de E.

2.2 À travers les fermés

Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ telle que :

- E , $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- F_1, $F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_1 \in \mathcal{F}$.
- $(F_\alpha)_\alpha \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha \in \mathcal{F}$.

Chaque membre de $\mathcal{F}$ est appelé **fermé**, Ainsi les ouverts sont exactement le complémentaire des fermés de E. *i.e*, $\mathcal{O}$ ouvert si et seulement si $\mathcal{O} = \complement^F$; $F \in \mathcal{F}$

2.3 À travers l'Adhérence

Soit $Adh : \mathcal{P}(E) \Rightarrow \mathcal{P}(E)$ telle que :

- $Adh(\emptyset) = \emptyset$.
- $A \subseteq Adh(A)$
- $A \subset B \Rightarrow Adh(A) \subseteq Adh(B)$.
- $Adh(A \cup B) = Adh(A) \cup Adh(B)$.

Noter que F est fermé si et seulement si $F = Adh(F)$. De cette manière on définie une topologie sur E dont chaque fermé est exactement égale à son adhérence.

2.4 À travers l'intérieur

Soit $int : \mathcal{P}(E) \Rightarrow \mathcal{P}(E)$ tel que :

- $int(\emptyset) = \emptyset$.
- $int(A) \subseteq A$
- $A \subset B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B)$.
- $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$.

Noter que O est ouvert si et seulement si $O = int(O)$. De cette manière on définie une topologie sur E dont chaque ouvert est exactement égale à son intérieur.

2.5 À travers les voisinages

Ici la situation est un peu différente, au lieu de définir les ouverts de E, on définit une topologie au voisinage de chaque point de E.
Plus précisément, pour chaque point $x \in E$, on définit une famille $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$ telle que :

- $E \in V(x)$.
- $U \in \mathcal{V}(x)$, et $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.
- $U, V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{V}(x)$
- $\forall U \in \mathcal{V}(x)\ \exists W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $(\forall y \in W \Rightarrow U \in \mathcal{V}(y))$.

On dit que O est un ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points. *i.e*; O ouvert de E si et seulement si $(\forall\ y \in O \Rightarrow O \in \mathcal{V}(y))$.

Inversement, ayant une topologie sur E, on peut définir la notion de *voisinage* par :

$$x \in V,\ V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow\ \exists\ O\ ouvert,\ x \in O\ et\ O \subseteq V.$$

Fréquemment, on a la tendance de définir une topologie par la génération, comme dans différents autres sujets mathématiques (espace vectoriel ...).

2.6 À travers une base de topologie

Une collection d'ouverts $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ est dite base pour une topologie si :

- $E = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ ($i.e$; $\forall\ x \in E\ \exists\ B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$)
- Pour chaque B_1,$B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}; B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Inversement, soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.
On dit que $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie $(E, \mathcal{O})$ si et seulement si :

$$\forall\ O\ ouvert\ ,\ O = \bigcup_{G_\alpha\ \in\ \mathcal{B}} G_\alpha$$

C'est équivalent à dire que $\forall x \in O, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq \mathcal{B}$.

2.7 À travers une base de topologie en un point x

Pour un x fixé dans E, soit $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{O}$.on dit que $\mathcal{B}_x$ est une base de topologie en un point x si :

1$\diamond$ pour $H \in \mathcal{B}_x$ $\ on\ a\ x \in H.$

2$\diamond$ $x \in G \in \mathcal{O} \Rightarrow\ \exists H \in \mathcal{B}_x\ \ tel\ que\ H \subseteq G.$

2.8 À travers une sous-base de topologie

soit $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(x)$, la différence entre une base et une sous-base de topologie est que dans une sous-base, la condition 2 qui concerne la base de topologie n'est forcément vérifiée.

$\mathcal{T}$ est une sous-base de topologie $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}$ (base de topologie) tel que :

$$\forall G \in \mathcal{B}\ \ G = \bigcap_{fini} \{G_i;\ G_i \in \mathcal{T}\}$$

Autrement dit si $\mathcal{T}$ est une sous-base de topologie
on pose $\mathcal{B} = \{G;\ G = \bigcap\limits_{fini} G_i \quad avec\ G_i \in \mathcal{T}\}$, alors $\mathcal{B}$ est une base de topologie.

2.9 À travers une sous-base de topologie en x

On fixe x dans E, Soit $\mathcal{T}_x \subseteq \mathcal{P}(E)$.

$\mathcal{T}_x$ est dite une sous-base de topologie en x, si il existe une base de topologie $\mathcal{B}_x$ en x tel que $\forall G \in \mathcal{B}_x \quad G = \bigcap\limits_{fini} \{G_i \quad , G_i \in \mathcal{T}_x\}$.
Autrement dit $\quad \mathcal{B}_x = \{G, G = \bigcap\limits_{fini} G_i,\ G_i \in \mathcal{T}_x\}$.

Chapitre 3

Caractéristiques d'un espace topologique

3.1 Adhérence

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E.
On appelle adhérence de A, et on note $\overline{A}$, l'intersection de tous les fermés contenant A. C'est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) qui contient A. Les points de $\overline{A}$ sont dits points adhérents à A, ils sont caractérisés par :

$$x \in \overline{A} \; \Leftrightarrow \; \forall V \; \in \mathcal{V}(x), \; V \cap A \neq \; \emptyset$$

3.2 Intérieur

On appelle intérieur de A, et on note $\mathring{A}$, la réunion de tous les ouverts contenus dans A.
C'est le plus grand ouvert contenu dans A. Les points de $\mathring{A}$ sont dits points intérieurs à A, ils sont caractérisés par :

$$x \in \; \mathring{A} \; \Leftrightarrow \; A \in \; \mathcal{V}(x) \; \Leftrightarrow \; \exists \, O \in \; \mathcal{T} \; , x \in \; O \; \subseteq \; A.$$

3.3 Frontière

La frontière de A, qu'on note $Fr(A)$, est le complémentaire de $\mathring{A}$ dans $\overline{A}$. C'est un fermé de E.

$$Fr(A) = \overline{A} \; \setminus \mathring{A}$$

Propriété 3.3.1 *Ces propriétés sont générales, on va les donner dans le cas de* $\mathbb{R}$ *avec sa topologie usuelle.*
Fixons $A \subseteq \mathbb{R}$. *On a alors :*

1 $A \subseteq B \ \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$ *et* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

2 $\overset{\circ}{(\mathbb{R} \backslash A)} = \mathbb{R} \backslash \overline{A}$ *et* $\overline{(\mathbb{R} \backslash A)} = \mathbb{R} \backslash \overset{\circ}{A}$

3 $\overset{\circ}{A}$ *est ouvert et* $\overline{A}$ *est fermé*

4 A *est fermé si et seulement si* $\overline{A} = A$

5 A *est ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{A} = A$

6 $\overline{A} = \bigcap \{F : F \supseteq A, F = \overline{F}\}$

7 $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{O : O \subseteq A, O = \overset{\circ}{O}\}$

8 $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9 $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$ — $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ *et* $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \overset{\circ}{\cup} B$

10 $\overline{A} = A \cup Fr(A)$

11 $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_{\varphi(n)}) \subseteq A, \ lim(x_{\varphi(n)}) = x$

Preuve

On peut remplacer l'ensembles des voisinages de x : $\mathcal{V}(x)$ dans $\mathbb{R}$, sans restreindre la géneralité, par :$(I_{\epsilon,x} :=]x - \epsilon, x + \epsilon[)_{\varepsilon > 0}$.
Par suite, on ne parlera que des voisinages de x de la forme $I_{\epsilon,x}$.
Aussi aura-t-on :

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists \alpha > 0 \ I_{\alpha,x} \subseteq A$$

1)

• Soit $A \subseteq B$ et $x \in adh(A)$. Il s'ensuite alors que $I_{\epsilon,x} \cap A \neq \varnothing$ et donc $I_{\epsilon,x} \cap B \neq \varnothing$. Par suite $x \in adh(B)$. Ce qui montre que $adh(A) \subseteq adh(B)$.

• Soit $A \subseteq B$ et supposons que $x \in int(A)$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $I_{\alpha,x} \subseteq A$. Donc, $I_{\alpha,x} \subseteq B$. Par suite $x \in int(B)$. Ce qui montre que $int(A) \subseteq int(B)$.

2)
• Soit $x \in int(\mathbb{R} \backslash A)$. Alors, $\exists \alpha, I_{\alpha,x} \subseteq (\mathbb{R} \backslash A)$. Par suite, $I_{\alpha,x} \cap A = \varnothing$.
Donc, $x \notin adh(A)$ i.e., $x \in (\mathbb{R} \backslash adh(A))$. Ce qui montre $int(\mathbb{R} \backslash A) \subseteq (\mathbb{R} \backslash adh(A))$.

• Soit $x \in (\mathbb{R} \backslash adh(A))$. Donc, $x \notin adh(A)$. i.e., $\exists \epsilon, I_{\epsilon,x} \cap A = \varnothing$. Par suite, $I_{\epsilon,x} \subseteq (\mathbb{R} \backslash A)$. Par 1. $int(I_{\epsilon,x}) = I_{\epsilon,x} \subseteq int(\mathbb{R} \backslash A)$. Il s'ensuit alors que $x \in int(\mathbb{R}\backslash A)$.

• Soit $x \in adh(\mathbb{R}\backslash A)$. Donc, $I_{\epsilon,x} \cap (\mathbb{R}\backslash A) \neq \varnothing$ i. e., $I_{\epsilon,x} \not\subseteq A$ et par suite $x \notin int(A)$. Ce qui montre que $x \in (\mathbb{R}\backslash int(A))$.

• Soit $x \in (\mathbb{R}\backslash int(A))$. Donc, $x \notin int(A)$ i. e., $\forall \alpha, I_{\alpha,x} \not\subset A$. Donc, $I_{\alpha,x} \cap (\mathbb{R}\backslash A) \neq \varnothing$. Ce qui montre que $x \in adh(\mathbb{R}\backslash A)$.

3)
• Soit $x \in int(A)$. Si $int(A) = \varnothing$, il est alors ouvert. Sinon, il existe α tel que $I_{\alpha,x} \subseteq A$. Donc, $int(I_{\alpha,x}) = I_{\alpha,x} \subseteq int(A)$. Par suite $int(A)$ est ouvert.

• Soit $x \in \mathbb{R}\backslash adh(A)$. Donc, $x \in (\mathbb{R}\backslash adh(A)) = int(\mathbb{R}\backslash(A))$ (Par 2.). Il s'ensuit alors que $I_{\alpha,x} \subseteq int(\mathbb{R}\backslash(A))$. Donc, $I_{\alpha,x} \subseteq \mathbb{R}\backslash adh(A)$. Ceci montre que $(\mathbb{R}\backslash adh(A)$ est ouvert. Donc, $adh(A)$ est fermé.

4)
• Par 3) la droite IMPLIQUE la gauche.

• Supposons que A soit fermé. soit $x \notin A$. Il existe α $I_{\alpha,x} \subseteq \mathbb{R}\backslash A$. Donc, $int(I_{\alpha,x}) = I_{\alpha,x} \subseteq int(\mathbb{R}\backslash A)(= (\mathbb{R}\backslash adh(A))$ (Par 2.). Donc, $x \notin A \longrightarrow x \notin adh(A)$ et comme $A \subseteq adh(A)$. Ceci montre que $adh(A) = A$.

5)
• Par 3. la droite IMPLIQUE la gauche.

• Supposons que A soit ouverte et $x \in A$. Par définition, il existe α $I_{\alpha,x} \subseteq A$. Donc, $int(I_{\alpha,x}) = I_{\alpha,x} \subseteq int(A)$. Par suite, $A \subseteq int(A)$ et comme $int(A) \subseteq A$, ceci montre que $int(A) = A$.

6)
• $A \subseteq F \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{F} = F \Rightarrow \overline{A} \subseteq \bigcap_{F \supseteq A, F ferme} F$ et comme $A \subseteq \overline{A}$ (qui est fermé) ; il s'ensuit alors que $\overline{A} \subseteq \bigcap F \subseteq \overline{A}$. Donc $\overline{A}$ le plus petit fermé $\supseteq A$.

7)
• Soit O ouvert. Donc, $O \subseteq A \Rightarrow int(\bigcup O) \subseteq \overset{\circ}{A} \Rightarrow \bigcup O \subseteq \overset{\circ}{A}$ car l'union quelconque des ouverts est un ouvert. Comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert $\overset{\circ}{A} \subseteq \bigcup O \subseteq \overset{\circ}{A}$. $\overset{\circ}{A}$ le plus grand ouvert $\subseteq A$.

8)
• On a $A \cap B \subseteq A, B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Mais le contre-exemple suivant

montre que cette inclusion peut être stricte :

$$A =]0,1[,\ B =]1,2[\quad A \cap B = \varnothing,\ \overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$$

• Aussi a-t-on $A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$; et $A \subseteq \overline{A},\ B \subseteq \overline{B} \Rightarrow A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Maintenant, comme $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé on a alors : $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ i.e., $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

9)

• D'une part on a $A \cap B \subseteq A, B \Rightarrow int(A \cap B) \subseteq \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}$ et d'autre part $\overset{\circ}{A} \subseteq A \quad \overset{\circ}{B} \subseteq B$. Par suite $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq A \cap B$, mais comme $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est ouvert $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq int(A \cap B)$ i.e., $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = int(A \cap B)$.

• Comme $A, B \subseteq A \cup B$, il s'ensuit que $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$. En fait on n'a pas l'égalité. En effet,
Soient $A =]0,1[\cup \{2\}$, $B = [1,3[$. On a $int(A) =]0,1[$, $int(B) =]1,3[$ $int(A) \cup int(B) =]0,3[\setminus \{1\}$. $A \cup B =]0,1[\cup \{2\} \cup [1,3[=]0,3[$. $int(A \cup B) =]0,3[$.

10)

• $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$ ou $x \notin A$. Donc $I_{\epsilon,x} \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \varnothing$ ou $I_{\epsilon,x} \cap A \neq \varnothing$. Par suite $x \in Fr(A)$. Donc, $\overline{A} \subseteq A \cup Fr(A)$.

• Soit $x \in A \cup Fr(A)$. Si $x \in A$, il sera aussi dans $\overline{A}$. Maintenant si $x \in Fr(A)$, $\forall \epsilon,\ I_{\epsilon,x} \cap A \neq$. Dans tous les cas $x \in \overline{A}$. Par suite, $\overline{A} = A \cup Fr(A)$.

11)

• Soit $x \in \overline{A}$. Par suite, $I_{\{\frac{1}{n},x\}} \cap A \neq \varnothing$. Construire une sous-suite extraite $x_{\varphi(n)} \in A$ telle que $|x_{\varphi(n)} - x| < \frac{1}{n}$, pour tout n. Par conséquent,

$$\lim_n x_{\varphi(n)} = x$$

3.4 Espaces séparés

Un espace topologique E est dit séparé si pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, avec $x \neq y$, il existe un voisinage V de x et un voisinage U de y, tels que :

$$V \cap U \neq \emptyset$$

La notion d'espace séparé est très utile en topologie, il assure, en particulier, l'unicité de la limite d'une suite quand elle existe. Les espaces topologiques non séparés sont, souvent, des espaces topologiques pauvres en nombre d'ouverts et dépourvus d'intérêt, c'est le cas, par exemple, d'un ensemble lorsque il est muni de la topologie grossière.

Proposition 3.4.1 *Les espaces métriques sont des espaces topologiques séparés.*

Remarque 3.4.2 *Dans un espace topologique séparé E, tous les singletons sont fermés, et plus généralement, toute partie de cardinal finie est fermée.*

3.5 Parties denses, espaces séparables

Soit E un espace topologique. Une partie D de E est dite dense si son adhérence est égale à E, *i.e.*, :$\overline{D} = E$.
Exemple, $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5.1 *Soit E un espace topologique. Une partie D de E est dense, si et seulement si, son intersection avec chaque ouvert de E est non vide.*
Si E est un espace métrique, alors D est dense, si et seulement si, son intersection avec chaque boule ouverte est non vide.

Remarque 3.5.2 *Les espaces topologiques qui possèdent une partie à la fois dense et dénombrable,s'appellent* **espaces sparables**.

3.6 Topologie induite

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E. La partie de $\mathcal{P}(A)$ définie par :

$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A;\ O \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur A. On l'appelle topologie induite sur A. Le couple $(A, \mathcal{T}_A)$ est, à son tour, un espace topologique, appelé sous-espace topologique de $(E, \mathcal{T})$, ses ouverts sont les traces des ouverts de E sur A, de même ses fermés (resp. ses voisinages) sont les traces des fermés (resp. des voisinages) de E sur A :

- Ω est un ouvert de A ssi il existe un ouvert O de E tel que $\omega = O \cap A$.
- G est un fermé de A ssi il existe un fermé F de E tel que $G = F \cap A$.
- U est un voisinage de $a \in A$ dans A, ssi il existe un voisinage V de a dans E tel que $U = V \cap A$.

L'adhérence d'une partie B, relativement à A, est égale à la trace de l'adhérence de B, relativement à E, sur A. Lorsque l'espace E est séparé, le sous-espace A est aussi séparé, en particulier, lorsque la topologie de E est associée à une distance d, celle de A est associée à la distance induite par d sur A.

Chapitre 4

Application :Problème de Kuratowski

Problème 4.0.1 [1]

Soit $(S, \mathcal{T})$ *un espace topologique.*

Soit $A \subseteq S$*,deux joueurs* (1) *et* (2) *appliquent des successives opérations de complémentaire relative à* S*,d'adhérence,et d'intérieur sur* A*. l'un de ces joueurs perd le jeu, lorsqu'il ne peut pas rajouter une opération,en ayant une nouvelle partie différente de celles qui la précèdent.*

Ce jeu est-il infini ?

Théorème 4.0.1 *soit* A *une partie arbitraire d'un espace topologique* $(S, \mathcal{T})$*. le nombre de différentes parties obtenues en appliquant d'une manière successive, l'une des opération : intérieur, adhérence et complémentaire dans chaque itération, sur* A *est fini, et au plus égale à* 14.

Preuve :

• On note par c l'opération qui concerne le complémentaire de A relativement à S : $c(A) = S \setminus A$.
•On note par a l'opération qui concerne l'adhérence de A dans $(S, \mathcal{T})$: $a(A) = \overline{A}$.
•On désigne par i l'opération intérieur de A, qu'on la note $i(A) = \overset{\circ}{A}$ et qui vérifie : $\overset{\circ}{A} = \mathbf{cac}$.

C'est a dire, l'intérieur de A est égale à complémentaire de l'adhérence du complémentaire de A.
On se restreint sur deux opérations, l'adherence et le complémentaire, car l'intérieur s'écrit en fonction de ces deux dernières.

Note : Les parenthèses seront supprimées pour simplifier l'écriture.
Par exemple $cac = c(a(c(A)))$.
On sait que :

1• $c(c(A)) = A$

2• $a(a(A)) = a(A) = a = \overline{A}$

Soit s une série finie des éléments de $\{a, c\}$.
Par des successives applications de 1 et 2,il est possible d'éliminer tous les instances successive de c et a en s. donc réduire s en une de ces 4 formes :
$a)$: $caca \dots c$
$b)$: $acac \dots c$
$c)$: $caca \dots a$
$d)$: $acac \dots a$

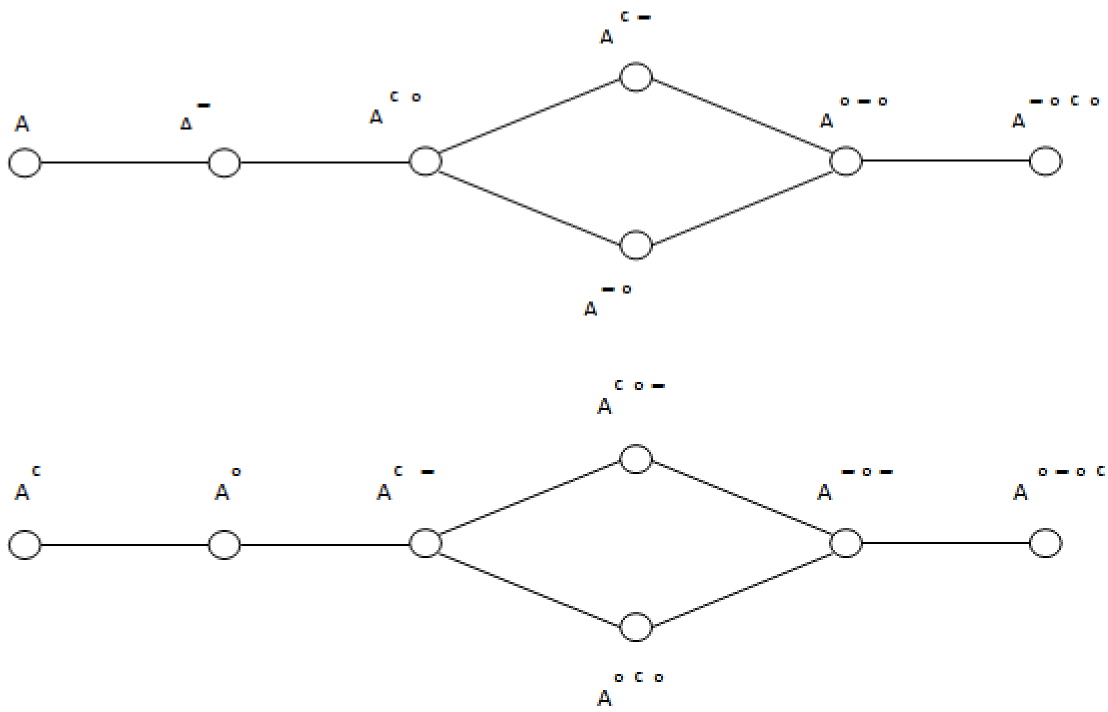
On a l'adhérence du complémentaire de l'adhérence de A, c'est à dire : **aca** est un **fermé régulier**.

Rppel : on dit A est un fermé régulier si et seulement si A égale à l'adhérence de son intérieur.
Ainsi **aca** est un **fermé regulier** car **acacaca=aca**.
Cela est établit en utilisant la remarque suivante :

Remarque 4.0.2 *soit A un ouvert d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$*
on a : $\overline{A} = \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$

Donc lorsqu'on ajoute **a** à **cacacac** ou **acacac**, on génère une chaine qui contient **acacaca** qui se réduit immédiatement à **aca**

Donc les différentes parties possibles de **S** qui peuvent être obtenus à partir de **A** en applicant les opérations **c** et **a** sont générées par ces cas :



$-$: désigne l'adhérence de A.
c : désigne le complémentaire de A.
$\circ$: désigne l'intérieur de A.

les cas sont :

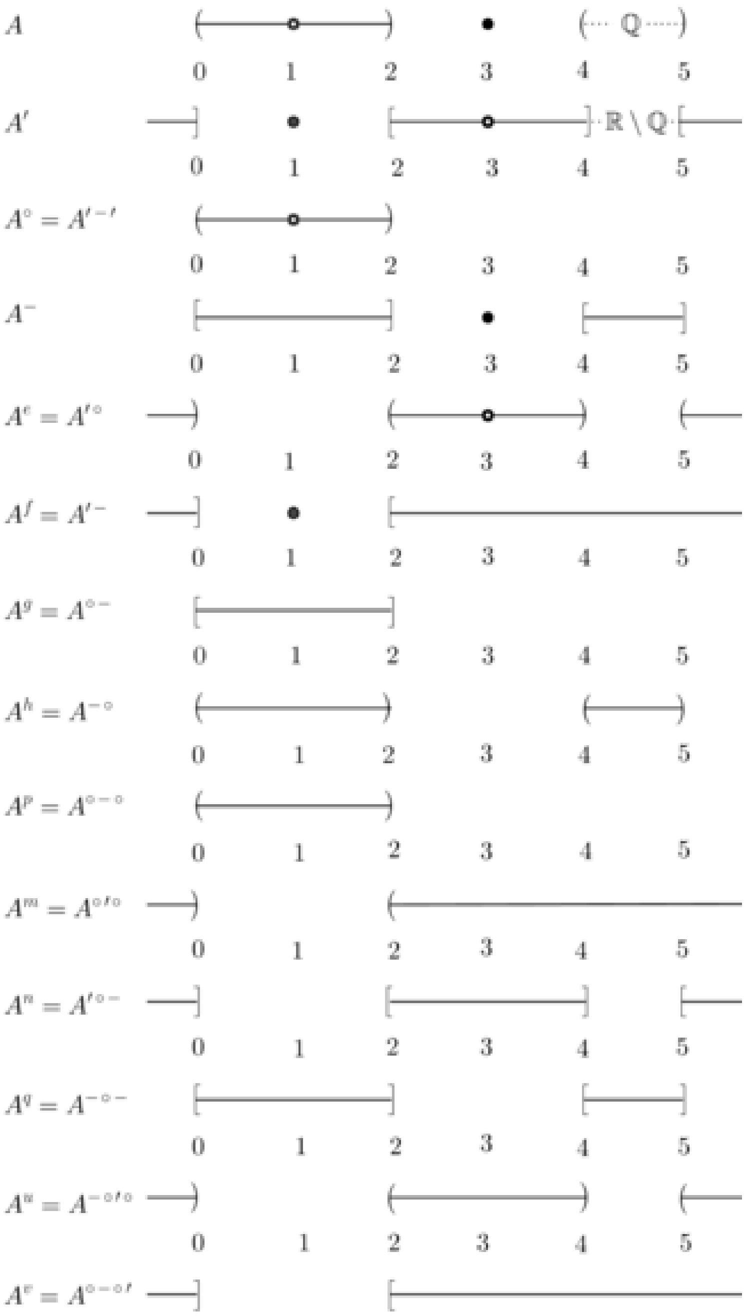
1- A
2- c
3- ca
4- cac
5- $caca$
6- $cacac$
7- $cacaca$
8- $cacacac$ ici L'ajout d'une opération, donnera l'un des cas précédents.
9- a
10 -ac
11 -aca
12 -$acac$
13 -$acaca$

14 -*acacac* ici L'ajout d'une opération, donnera l'un des cas précédents.

En totale il y a 14 parties différentes.

Exemple 4.0.3

Soit $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle,et* $A \subseteq \mathbb{R}$
voici un cas où le nombre maximal des itération est 14 :


A
$\mathbb{Q}$
A'
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$A^\circ = A'^{-\prime}$
A^-
$A^e = A'^\circ$
$A^f = A'^-$
$A^g = A^{\circ -}$
$A^h = A^{-\circ}$
$A^p = A^{\circ-\circ}$
$A^m = A^{\circ\prime\circ}$
$A^n = A'^{\circ -}$
$A^q = A^{-\circ-}$
$A^u = A^{-\circ\prime\circ}$
$A^v = A^{\circ-\circ\prime}$
0 1 2 3 4 5

Chapitre 5

Continuité

5.1 Applications continues et propriétés

Commençons d'abord par définir la limite d'une application en un point.

Définition 5.1.1 *Soit E et F deux espaces topologiques et f une application de E dans F :*
1. *On dit que f est continue en un point $a \in E$, si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

bien précisément, si :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists V \in \mathcal{V}(a);\ f^{-1}(W) = V$$

i.e., l'image réciproque par f de tout ouvert (resp.fermé) de F est un ouvert (resp.fermé) de E.
2. *On dit que f est continue sur E, si f est continue en tout point de E.*

Cas particuliers :
1. Toute application constante de E dans F est continue.
En effet, pour tout ouvert U de F, l'ensemble $f^{-1}(U)$ est égale à E ou est égale à $\emptyset$; dans les deux cas c'est un ouvert.

2. Lorsque l'espace de départ E est muni de la topologie discrète, toutes les applications de E dans F sont continues. De même, lorsque l'espace d'arrivée F est muni de la topologie grossière, toute les applications de E dans F sont continues.

3. Dans le cas où un ensemble E est muni de deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$,

l'identité $x \longrightarrow x$ est continue de $(E,\mathcal{T})$ dans $(E,\mathcal{T}^{'})$, si et seulement si, la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}^{'}$, c'est-à-dire, si et seulement si, $\mathcal{T}^{'} \subset \mathcal{T}$. En particulier, lorsque $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{'}$, il y a toujours continuité.

4. Soit$(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie de E. L'application i du sous-espace $(A,\mathcal{T}_A)$ dans $(E,\mathcal{T})$ définie par $i(x) = x$, s'appelle injection canonique de A, elle est continue par définition de $\mathcal{T}_A$.

Proposition 5.1.1 *Soit E et F deux espaces topologiques et f une application continue de E dans F. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers un point l, alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.*

Preuve Soit $U \in \mathcal{V}(f(l))$. L'application f est continue au point l, donc il existe un voisinage V de l tel que $f(V) \subset U$; et comme l est limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un entier $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in V$. Pour tout $n \geq N$, le terme $f(x_n)$ appartient donc à U, ce qui prouve que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(l)$.

5.2 Applications uniformément continues

Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques.

Définition 5.2.1 *:*
Une application $f : (E,d) \longrightarrow (F,\delta)$ est dite uniformément continue sur E, si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists r > 0;\ \forall x, y \in E,\ d(x,y) < r \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Une telle application est évidemment continue, mais une application continue n'est pas toujours uniformément continue.
Voici une classe importante d'applications uniformément continues :

Définition 5.2.2 *:*
Soit k un réel positif. Une application $f : (E,d) \longrightarrow (F,\delta)$ est dite lipschitzienne de rapport k si :

$$\forall x, y \in E,\ \delta(f(x), f(y)) < k.d(x,y)$$

Lorsque $0 < k < 1$, on dit que f est contractante.
Comme pour la continuité, voici une caractérisation de la continuité uniforme par les suites :

Proposition 5.2.1 *Une application $f : (E,d) \longrightarrow (F,\delta)$ est uniformément continue, si et seulement si, pour tout couple de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} d(a_n,b_n) = 0$, la limite de $\delta(f(a_n), f(b_n))$ est égale elle aussi à 0.*

5.3 Homéomorphismes

Soit E et F deux espaces topologiques.

Définition 5.3.1 *:*
Une application f de E dans F est dite homomorphisme, si elle est bijective continue, et si sa réciproque f^{-1} est aussi continue.
S'il existe un homéomorphisme entre E et F, on dit que E et F sont homéomorphes.

L'image d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue n'est pas toujours un ouvert (resp. un fermé).
une application $f : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme, si et seulement si, f est bijective,continue et L'image d'un ouvert (resp. d'un fermé) par f et un ouvert (resp. d'un fermé).

Exemple 5.3.1 *:*
1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est homéomorphe à toute droite du plan $\mathbb{R}^2$.*
En effet, pour toute droite D d'équation $y = ax + b$, l'application $x \longrightarrow (x, ax + b)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans D.
2. *Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, l'espace $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à la surface $S = \{f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y)\}$ lorsque celle-ci est muni de sa topologie induite.*

Propriété 5.3.1 *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$.*
si f est continue, alors son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|x \in E\}$ est homémorphe à E.

Preuve La fonction $g : x \longrightarrow (x, f(x))$ est continue et bijective de E sur Γ_f, Sa réciproque $g^{-1} : (x, f(x)) \longrightarrow x$ est continue. Ainsi, g est un homéomorphisme de E sur Γ_f .

Exemple 5.3.2 *les ensembles :*
$G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|y = x^2\}$
$G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|y = x^3\}$
$G_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|y = \sin x\}$ *sont tous homéomorphes à $\mathbb{R}$ et deux à deux.*

Chapitre 6

Espaces compacts

Étant donné un ensemble quelconque E,une famille $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de parties de E est dite recouvrement de E, si $E = \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$. Dans ce cas, si une partie $J \subset I$ vérifie $E = \bigcup\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$, on dit que le recouvrement $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ est extrait du recouvrement $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$, et si en plus cette partie J est fini, on dit que le recouvrement $(A_\alpha)_{\alpha\in J}$ est fini. Dans le cas où E est un espace topologique, si tous les $(A)_\alpha$,$\alpha \in I$, sont des ouverts de E,on dit que $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement ouvert de E.

6.1 Définitions

Définition 6.1.1 *Un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et s'il vérifie la condition suivante, dite condition de Borel-Lebesgue :"de tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini".*

Proposition 6.1.1 *Un espace topologique séparé E est compact, si et seulement si, de toute famille de fermés de E dont l'intersection est vide, on peut extraire une sous-famille finie dont l'intersection est encore vide.*

Corollaire 6.1.2 *Dans un espace compact, l'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides, est non vide.*

Preuve En effet, si cette intersection est vide, d'après la proposition précédente, il va exister une sous-famille finie, dont l'intersection est encore vide, mais ceci est impossible car cette sous-famille est décroissante et son intersection est égale à l'un de ses éléments.

6.1.1 Parties compactes

Dans un espace topologique E, une partie K est dite compacte, si quand on la munit de sa topologie induite, c'est un espace compact.

Les ouverts de la toplogie induite sur K étant les traces sur K des ouverts de E, donc pour que K soit compacte, il faut et il suffit que K soit séparée et que pour toute famille $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'ouverts de E qui vérifie $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} O_\alpha$,il existe une partie J fini, incluse dans I, telle que $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in J} O_\alpha$.

6.1.2 Compacité des espaces métriques

Définition 6.1.2 *Un espace métrique (E, d) est dit compact si de toute suite de E on peut extraire une suite convergente dans E.*
Un partie K de E est un compact de E si le sous-espace métrique (K, d) est compact.

Exemple 6.1.3 *:*
i. Tout intervalle de la forme $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$. Cela résulte du théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit : "De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente".
ii. L'espace métrique $\mathbb{R}$ n'est pas compact. Par exemple, la suite définie par $x_n = n$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.4 *Si K est un compact d'un espace métrique E, alors K est un fermé borné de E.*

Preuve Soit K un compact de E. Montrons que K est borné, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $d(x, y) \leq M$ pour tout x et y dans K. Sinon, il existe, pour tout $n \in N$, x_n et y_n dans K tels que $d(x_n, y_n) > n$. La suite (x_n, y_n) est une suite de $K \times K$ qui est compact, elle admet donc une sous-suite$(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément (x, y) de $K \times K$ et on a :

$$d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) > \phi(n) \geq n.$$

Comme l'application $(x, y) \longrightarrow d(x, y)$ est continue, par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $d(x, y) = +\infty$, ce qui est absurde.
Montrons que K est un fermé de E. Soit (x_n) une suite de K qui converge vers $x \in E$. On doit prouver que x est dans K.
Puisque K est compact, on sait qu'on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un élément y de K. Mais puisque (x_n) converge vers x, la sous-suite $(x_{\phi(n)})$ doit converger vers x, c'est-à-dire $x = y \in K$.

Proposition 6.1.5 *Si K est un fermé d'un espace métrique compact de E. Alors K est un compact.*

Preuve Soit (x_n) une suite d'éléments de K. Comme E est compact, (x_n) admet une sous-suite qui converge vers $x \in E$. Mais K est fermé dans E, donc x appartient à K.

6.2 Compacts et continuité

On se sert souvent de la continuité pour montrer qu'un espace topologique est compact.

Proposition 6.2.1 *Si f est une application continue d'un espace compact E dans un espace séparé F, alors le sous-espace $f(E)$ est compact.*

Preuve Soit f une application continue d'un espace compact E dans un espace séparé F. Montrons que le sous-espace $f(E)$ est compact. Puisque F est séparé, le sous-espace $f(E)$ est aussi séparé, il reste à montrer qu'il vérifie la condition de Borel-lebegue.
Soit donc $(O_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'ouverts de F qui vérifie $f(E) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} O_\alpha$. Cette inclusion implique que $E = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(O_\alpha)$, et comme f est continue, la famille $(f^{-1}O_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement ouvert de E. Par suite, il vient de la compacité de E qu'il existe une partie finie J de I telle que $E = \bigcup\limits_{\alpha\in J} f^{-1}(O_\alpha)$. Si on compose par f, il vient, enfin que :

$$f(E) = \bigcup_{\alpha\in J} f(f^{-1}O_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha\in J} (O_\alpha)$$

.

Corollaire 6.2.2 *Toute bijection continue entre deux espaces compacts est un homéomorphisme.*

Preuve Soit E et F deux espaces compacts et f une bijection continue de E dans F. Montrer que f^{-1} est continue revient à montrer que f est fermée. Soit A un fermé de E,donc A est un compact, et son image $f(A)$ est aussi un compact, en particulier, c'est un fermé de F.

Chapitre 7

Espaces connexes

Intuitivement, un non connexe est quand on le jette, il se casse en plusieurs morceaux.
Un espace non connexe est un espace formé de deux ou de plusieurs morceaux nettement éloignés les uns des autres. On peut penser, par exemple, au territoire d'un pays formé de plusieurs îles.

7.0.1 Définitions

Définition 7.0.1 *Un espace topologique E est dit connexe s'il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 de E, tels que :*

$$O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset, O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \cup O_2 = E.$$

Un espace non connexe est donc un espace topologique qui peut être partitionné en deux ouverts non vides.
Par passage au complémentaire on a aussi :

Proposition 7.0.1 *Un espace topologique E est connexe,si et seulement si, il n'existe pasdeux fermés F_1 et F_2 de E tels que :*

$$F_1 \neq \emptyset, F_2 \neq \emptyset, F_1 \cap F_2 = \emptyset, F_1 \cup F_2 = E.$$

Voici une autre caractérisation des espaces connexes :

Proposition 7.0.2 *Un espace topologique E est connexe, si et seulement si, les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont E et $\emptyset$.*

Proposition 7.0.3 *L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.*

Preuve Soit E un espace connexe, F un espace topologique et f une application continue de E dans F. Montrons que le sous-espace $f(E)$ est connexe. Supposons le contraire : il existe deux ouvert A et B de F tels que $A \cap f(E) \neq \emptyset$, $B \cap f(E) \neq \emptyset$, $A \cap B \cap f(E) \neq \emptyset$ et $f(E) \subset A \cup B$. De cela il vient que $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ et $E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Or les deus parties $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont ouvertes dans E car f est continue, donc E n'est pas connexe, ce qui est absurde.$\square$

Exemple 7.0.4 *Si f est une application continue d'un espace connexe E vers un espace topologique F, alors son graphe $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$ est un connexe de l'espace produit $E \times F$. En effet, Γ est l'image du connexe E par l'application continue $x \longrightarrow (x, f(x))$.*

Dans $\mathbb{R}$, la paire $\{0, 1\}$ n'est pas connexe, car elle est réunion de ses deux fermés disjoints $\{0\}$ et $\{1\}$. Les seules connexes de $\{0, 1\}$ sont $\{0\}$ et $\{1\}$, donc si E est un espace topologique connexe et f une application continue de E dans $\{0, 1\}$, alors f est nécessairement constante.

Proposition 7.0.5 *Un espace topologique E est connexe, si et seulement si, toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Preuve L'implication directe est claire.Supposons que toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ est constante. Si E n'est pas connexe, il existerait deux ouverts A et B non vides, disjoints, dont la réunion est égale à E, et par suite l'application f de E dans $\{0, 1\}$ définie par : $f(x) = 0$ si $x \in A$, $f(x) = 1$ si $x \in B$, serait continue mais non constante. Ce qui est absurde.

7.0.2 Parties connexes

Une partie C d'un espace topologique E est dite connexe si, quand on la muni de sa topologie induite, c'est un espace connexe , c'est-à-dire, s'il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que :
$O_1 \cap C \neq \emptyset$, $O_2 \cap C \neq \emptyset$, $O_1 \cap O_2 \cap C = \emptyset$, $C \subset O_1 \cup O_2$.
L'adhérence d'un espace connexe est connexe ; plus exactement on a :

Proposition 7.0.6 *Si C est une partie connexe d'un espace topologique E, alors toute partie A de E vérifiant $C \subset A \subset \overline{C}$ est connexe.*

Preuve Remarquons d'abord que si un ouvert rencontre l'adhérence d'une partie X, alors il rencontre nécessairement X.
Supposons que A n'est pas connexe. Il existe deux ouverts O_1 et O_2 tels que $O_1 \cap A \neq \emptyset$, $O_2 \cap A \neq \emptyset$, $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$ et $A \subset O_1 \cup O_2$.
On a $C \subset A \subset \overline{C}$, donc d'une part,$O_1 \cap C \neq \emptyset$, $O_2 \cap C \neq \emptyset$, $O_1 \cap O_2 \cap C = \emptyset$ et $C \subset O_1 \cup O_2$, ce qui contredit le fait que C est connexe.

7.0.3 Exemples

1– Dans un espace topologique, tout singleton est un connexe.
2– Un espace topologique discret (c'est-à-dire muni de sa toplogie discrete) ne peut pas être connexe sauf s'il est réduit à un point. En particulier les deux ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas connexes.
3– L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.
En effet, $\mathbb{Q}$ est la réunion de ses deux ouverts non vides et disjoints

$$\mathbb{Q}\cap]-\infty,\sqrt{2}[,\ et\ \mathbb{Q}\cap]\sqrt{2},+\infty[.$$

4– Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
En effet, soit C un connexe de $\mathbb{R}$. Si C n'est pas un intervalle, il existerait deux points a et b de C, il existerait un point $d \notin C$, tels que $a < d < b$. Par suite, le connexe C serait réunion de ses deux ouverts non vides et disjoints $]-\infty,d[\cap C$ et $]d,+\infty[\cap C$. Ce qui est absurde.

5– Dans $\mathbb{R}$, le sous-espace $E = [0,1[\cup]1,2] \cup [3,+\infty[$ n'est pas connexe, car, par exemple, il est réunion de ses deux ouverts non vides et disjoints $]-\infty,1[\cap E$ et $]1,+\infty[\cap E$. Les composantes connexes de E sont les trois morceaux : $[0,1[,]1,2]$ et $[3,+\infty[$.

6– L'espace $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $\mathbb{R}^*-$ et $\mathbb{R}^*+$.
7– Dans $\mathbb{R}^2$, le sous-espace $E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \times [0,1]$ n'est pas connexe, car par exemple, il est réunion de ses deux ouverts non vides et disjoints $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < \frac{3}{4}\} \cap E$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > \frac{3}{4}\} \cap E$.
Les composantes connexes de E sont les segments $\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$.

7.1 Connexes par arcs

Soit E un espace topologique.

Définition 7.1.1 *On dit que E est connexe par arcs, si pour chaque couple (a,b) de points de E, il existe une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ dans E telle que :*

$$\gamma(0) = a\ et\ \gamma(1) = b$$

Exemple 7.1.1

- *Dans un espace topologique, les singletons sont des connexes par arcs.*
- *Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes par arcs.*

Proposition 7.1.2 *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Preuve Soit E un espace connexe par arcs. Si E n'est pas connexe, il existerait une application continue f de E dans $\{0,1\}$ qui n'est pas constante, i.e., Il existe deux point distincts a et b de E tels que $f(a)=0$ et $f(b)=1$. Or E est connexe par arcs, il existe donc un arc continu γ de $[0,1]$ dans E tel que $\gamma(0)=a \; et \; \gamma(1)=b$.
Par conséquent,l'application $\gamma \circ f$ est une application continue et non constante du connexe $[0,1]$ dans $\{0,1\}$, ce qui contredit le fait que l'intervalle $[0,1]$ est connexe.$\square$

Il existe des espaces connexes qui ne sont pas connexes par arcs. Voici un exemple :
Soit Γ la courbe définie par :

$$\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x}), x \in]0,1]\}$$

C'est un connexe , donc d'après la proposition 7.0.6 son adhérence :

$$\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\} \times [-1,1]$$

est elle aussi connexe. Mais puisque la fonction :$x \longrightarrow \sin(\frac{1}{x})$ est discontinue au point 0, les points du segment $\{0\} \times [-1,1]$ ne peuvent pas être connectés par des arcs continus, aux points de Γ, donc $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.

Bibliographie

[1] *Kuratowski's Closure-Complement Problem*,
url :http ://www.proofwiki.org/wiki/Kuratowski's-closure-complement-problem
Visité le 02/05/2016.

[2] E.Ramis, C.deschamps, J.Odoux *cours de mathématiques spéciales* Topologie et éléments d'analyse.

[3] P.Charpentier *Topologie générale*.