



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES



**Licence Mathématiques et Applications
(MA)**

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

**Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques
(LST)**

**Modélisation du réseau de transport
urbain par les réseaux de Petri et
l'algèbre des diïdes**

Réalisé par: Mlle AMRI Meryem

Encadré par: Pr. ELHILALI ALAOUI Ahmed

Soutenu le 08 juin 2017

Devant le jury composé de:

- **Pr. ELHILALI ALAOUI Ahmed** Faculté des sciences et techniques de Fès
- **Pr. EL KHOMSSI Mohammed** Faculté des sciences et techniques de Fès
- **Pr. HILALI Abdelmajid** Faculté des sciences et techniques de Fès
- **Pr. KADRI Nasser** Faculté des sciences et techniques de Fès

Année Universitaire 2016 / 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier infiniment mon encadrant monsieur **ELHILALI ALAOUI Ahmed**, pour sa grande disponibilité et ses encouragements tout au long de ce travail.

Je remercie également le Pr. **KADRI Nasser**, Pr. **HILALI Abdelmajid** et Pr. **EL KHOMSSI Mohammed** d'avoir accepté d'évaluer et de juger ce travail.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Mes remerciements vont particulièrement à mes parents qui n'ont jamais cessé de me soutenir.

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail

A mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A toute ma famille, à mes chères sœurs, pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A tous mes amis pour les beaux jours et moments que nous avons passé.

Table des matières

Introduction générale	7
-----------------------------	---

Chapitre 1 : Etat de l'art sur les réseaux de transport urbain

1. Introduction	9
2. Présentation des systèmes de transport et du processus de planification	9
2.1. Les systèmes de transport	10
2.2. Processus de planification	11
3. Configuration d'un réseau de transport urbain	12
3.1. Configuration physique	12
3.2. Configuration horaire	15
4. Exploitation d'un réseau de transport urbain.....	17
5. Offre de service	19
6. Régulation d'un réseau de transport urbain.....	19
6.1. Définition	19
6.2. L'objectif de la régulation	20
7. Coût de transport	21
8. Conclusion	23

Chapitre 2 : Modélisation des réseaux du transport urbain par les réseaux de Petri

1. Problématique	24
2. L'objectif de la modélisation	25
3. Etat de l'art sur la modélisation des réseaux de transport	25
3.1. Introduction	25
3.2. Modélisation par les réseaux de Petri	26
3.2.1. Définition du réseau de Petri.....	26
3.2.2. Représentation du réseau de Petri	28
3.2.3. Modélisation de transport urbain par les réseaux de Petri	30
4. Conclusion	33

Chapitre 3 : Modélisation d'un système de transport public par l'algèbre (max, plus)

1. Introduction	34
2. Description du système de transport public étudié.....	35
3. Etude du système dans le cas de synchronisation des bus.....	37
3.1. Modélisation par un graphe d'événements temporisés (GET).....	37
3.1.1. Premier modèle par les réseaux de Petri.....	37
3.1.2. Modèle graphe d'événements temporisés.....	41
3.2. Représentation d'état dans l'algèbre (max, plus).....	43
3.2.1. Algèbre des dioïdes	43
3.2.1.1. Dioïdes : Définition et exemples.....	43
3.2.1.2. Structure ordonnée dans un dioïde.....	45
3.2.1.3. Résolution d'équations dans les dioïdes.....	47
3.2.2. Représentation d'état	48

4. Conclusion	53
Conclusion générale	54
Bibliographie	55

Sommaire des figures

Figure 1.1 : Les structures des lignes	14
Figure 1.2 : structure d'un réseau	15
Figure 1.3 : Construction et évaluation du Tableau de Marche	18
Figure 1.4 : Etapes du processus de régulation	21
Figure 2.1 : Le RdP d'une correspondance	32
Figure 3.1 : Un réseau de bus composé de n lignes et $n-1$ arrêts de correspondance	36
Figure 3.2 : La structure physique de deux lignes L_i et L_{i+1} et de la station $Sc_{i,i+1}$	36
Figure 3.3 : Modèle RdP du système considéré	40
Figure 3.4 : Le modèle GET représentant les deux lignes L_i et L_{i+1} : cas d'attente des bus	42
Figure 3.5 : Le modèle GET des deux lignes L_i et L_{i+1}	50

Introduction générale

Les transports en commun sont devenus de nos jours incontournables. Malgré une légère prédominance dans notre pays des véhicules (VP), ce mode de transport reste le plus privilégié dans les grandes et moyennes agglomérations. De ce fait, l'arrêt même momentané des transports en commun perturbe fortement les usagers et les privent d'accéder à leur destination.

Dès le début de leur création, les compagnies de transport urbain ont cherché à gérer au mieux les incidents qui affectent le réseau de transport urbain.

De nos jours, un grand nombre de personnes sont amenés à se déplacer quotidiennement en utilisant les réseaux de transport urbain. L'arrêt même provisoire des transports (grève ou autre événement) perturbe les usagers. La qualité des transports est un élément essentiel de la compétitivité.

Parmi les systèmes de transport public dont l'importance ne cesse d'évoluer, nous considérons les réseaux de bus. Dans ces réseaux plusieurs problématiques peuvent être envisagées. Nous nous intéressons dans ce mémoire aux points suivants :

- l'évaluation des performances des réseaux notamment les horaires de passage des bus aux différents arrêts, les temps de parcours des trajets et les temps d'attentes des passagers effectuant une ou plusieurs correspondances tout au long de leur trajet.

- l'amélioration de la qualité des services offerts aux usagers. Nous proposons des planifications d'horaire pour les bus permettant, d'une part, de minimiser les temps d'attente excessifs des passagers aux points d'échange du réseau, d'autre part, d'optimiser les ressources matérielles en termes de nombre de véhicules nécessaires pour assurer toutes les correspondances dans des tolérances d'attente prédéfinies.

Ces problématiques s'inscrivent dans le cadre de la gestion des correspondances aux points d'échange de passagers dans les réseaux de bus. Elles concernent les actions de mobilité des voyageurs qui changent de bus une ou plusieurs fois durant leurs déplacements.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à un état de l'art sur les réseaux de transport urbain collectif.

Le deuxième chapitre parle de la modélisation d'un transport urbain par les réseaux de petri.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la modélisation d'un système de transport public par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus). Le cas de fonctionnement étudié dans ce travail est le fonctionnement dit synchronisé pour lequel les véhicules attendent aux points d'échange de voyageurs.

Chapitre 1 : Etat de l'art sur les réseaux de transport urbain

1. Introduction

Le développement progressif du trafic urbain incite les grandes villes à donner priorité aux transports publics. Le transport urbain est généralement confondu avec la terminologie de transports en commun. Il traite en réalité aussi le transport individuel comme la voiture ou le vélo. Autrement dit, le transport urbain concerne les divers moyens de transport qui sont propres à une ville ou un milieu urbain.

Ce chapitre est dédié à la présentation des systèmes de transport urbain et au processus de planification suivi par la description de la configuration d'un tel réseau. On abordera dans les sections suivantes, l'exploitation et l'offre de service dans un réseau de transport urbain. Enfin, une conclusion termine ce chapitre.

2. Présentation des systèmes de transport et du processus de planification

Le système de transport urbain se situe à la jonction d'un système de localisation de l'habitat et des activités et d'un système complexe de pratiques et de relations sociales. Il permet d'irriguer la ville en répondant à ses transformations.

La partie suivante décrit les différentes catégories de transport.

2.1. Les systèmes de transport

Les systèmes de transport en commun sont classés en plusieurs catégories :

- Les systèmes de transport non guidés
- Les systèmes de transport guidés tels que le tramway et le métro
- Les systèmes hybrides

Le réseau d'autobus est le système de transport non guidé le plus répandu. L'avantage du bus est de pouvoir contrôler son itinéraire. L'absence d'une infrastructure dédiée induit un coût d'exploitation peu important et permet de desservir des zones à faible densité de population. Les principaux inconvénients des systèmes de transport non guidés sont leur grande instabilité face à un événement instantané, leur totale dépendance vis-à-vis de la circulation routière, et leur gestion du personnel qui est lourde et difficile. Les inconvénients de ce mode de transport ont conduit les exploitations des grandes agglomérations à l'utiliser en complément d'autres systèmes guidés.

La principale caractéristique des systèmes de transport guidés est qu'ils sont exploités en sites propres. Par conséquent, ils ne sont pas totalement dépendants de la circulation. À la différence du métro qui dispose réellement d'un site propre, le tramway est plus ou moins dépendant de la circulation du fait qu'il emprunte généralement les voies routières.

Le tableau suivant synthétise les différents modes présentés précédemment, en mettant l'accent sur les avantages et les inconvénients de chacun d'eux.

Mode de transport	Avantages	Inconvénients
Non guidés (bus)	- Souplesse dans le choix d'itinéraire - Absence d'infrastructure dédiée - Coût d'exploitation peu important	- Instabilité face à un événement instantané - Totale dépendance vis-à-vis de la circulation - Gestion du personnel lourde et difficile
Guidés (tramway, métro, train)	- Une exploitation en site propre - Une limitation stricte des mouvements autorisés	- Dimensions réduites des réseaux - Des structures de lignes simples - Fréquence d'exploitation élevée - Comportement des usagers, ceux-ci arrivent aléatoirement en station

Tableau : Comparaison des modes de transport : Guidé et Non guidés

2.2. Processus de planification

Le processus de planification est effectué en général une fois par an et ne s'appuie que sur des prévisions de la demande et des durées des trajets entre les différents arrêts du réseau. L'objectif du processus de planification est d'établir une offre prévisionnelle de transport qui s'ajusterait à la demande. La configuration initiale des lignes du réseau ainsi que leur fréquence sont fixées comme données d'entrée. Les durées des trajets entre les différents points du réseau sont aussi considérées connues. A partir de ces données des tableaux

horaires sont établis et en résultent des courses qui correspondent aux temps et lieux d'arrivées et de départs des véhicules.

Le résultat de la planification se présente sous la forme de listes de service pour les différents intervenants dans l'exploitation, et aussi pour le Tableau de Marche théorique (TM). Ces TM représentent les différents horaires de passage des véhicules aux arrêts du réseau.

Pour estimer les flux des voyageurs, des enquêtes sont menées auprès des usagers et des systèmes de comptage sont placés au niveau des véhicules et des arrêts. Ces enquêtes et ses systèmes de comptage sont placés au niveau des véhicules et des arrêts. Ces enquêtes et ses systèmes de comptage permettent de modéliser les déplacements à travers des matrices origine-destination.

Il existe d'autres approches de planification du transport qui s'appuient sur des modèles stochastiques de la demande et sur les principes de files d'attente pour estimer les durées des attentes des voyageurs aux arrêts.

3. Configuration d'un réseau de transport urbain

Afin de décrire les éléments nécessaires à l'exploitation d'un réseau de transport urbain, on présente maintenant les constituants d'un tel réseau de transport.

3.1. Configuration physique

Un réseau de transport urbain est constitué, physiquement, d'un ensemble de lignes. Une ligne contient plusieurs arrêts. Parmi ces arrêts, on distingue quatre types.

- **Les arrêts simples** : sont caractérisés par des horaires de départ et d'arrivée des véhicules
- **Les arrêts de régulation** : sont caractérisés, en plus des arrêts simples, par la localisation des véhicules et la possibilité de commander les actions de régulation
- **Les arrêts terminus** : sont caractérisés, en plus des arrêts de régulation, par des véhicules vidés des clients
- **Les arrêts nœud de correspondances** : un arrêt de correspondance est un endroit d'échange de voyageurs entre deux modes de transport à une date donnée. Donc une correspondance est par définition spatio-temporelle.

Sur une ligne, on trouve au moins deux arrêts terminus. Lorsqu'une ligne comporte plus que deux arrêts terminus, elle est dite à antennes. Les structures de ligne X ou Y forment des antennes. Certains arrêts de ligne offrent la possibilité de commander des demi-tours et la possibilité de garer des véhicules.

La structure d'une ligne peut être plus au moins complexe, la figure suivante présente quelques exemples de structure de ligne.

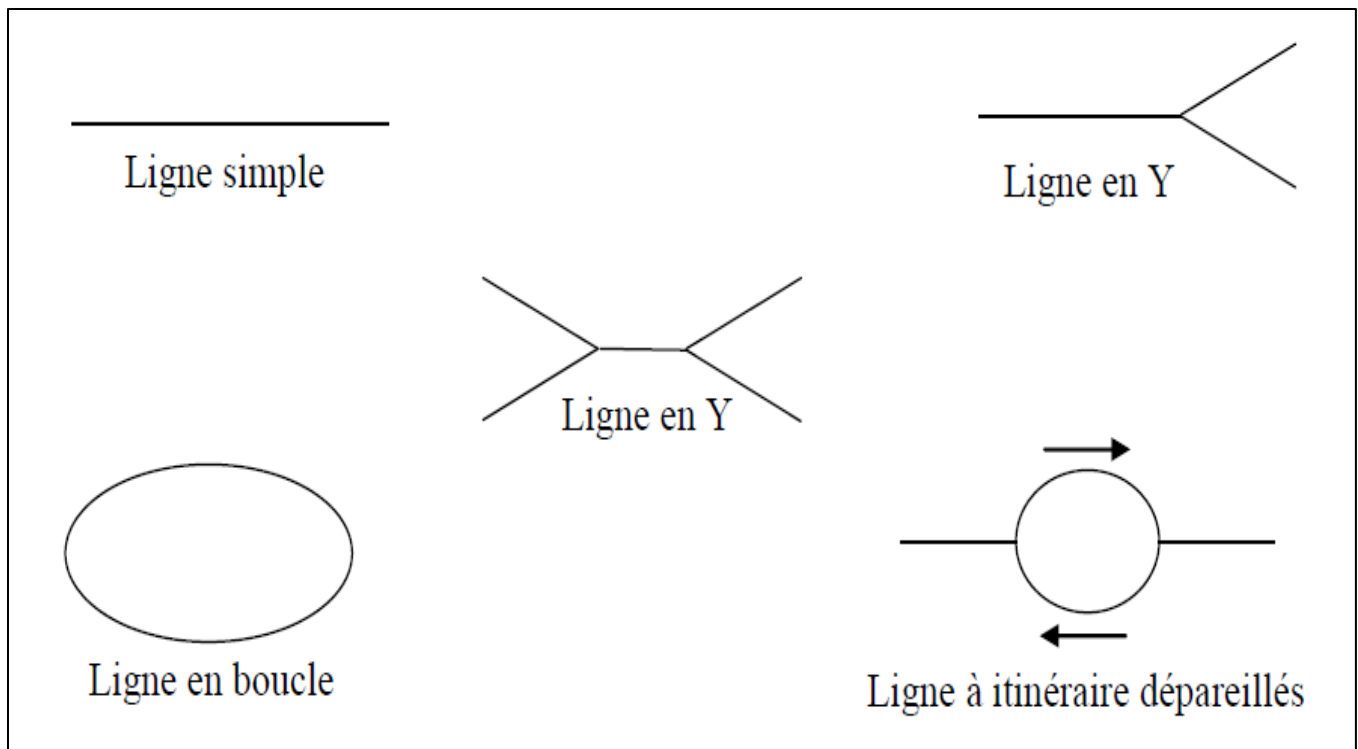


Figure 1.1 : Les structures des lignes

Logiquement, une ligne contient plusieurs itinéraires, des itinéraires commerciaux et des itinéraires spéciaux (par exemple : chercher des élevés d'école, ou chercher des travailleurs à la sortie d'une usine) qui appartiennent respectivement, aux lignes commerciales et aux lignes spéciales.

Un réseau par contre est composé de lignes. On peut regrouper ces lignes en plusieurs groupes de lignes selon les besoins. Chaque ligne est composée d'itinéraire. Un itinéraire est une liaison composite, de même qu'un tronc commun. Ce dernier peut être commun à plusieurs itinéraires. La figure 1.2 présente la structure d'un réseau de transport bus selon un formalisme entité association.

Dans un réseau de transport urbain, on trouve deux types de dépôts :

- Dépôt d'exploitation : assure la préparation et le contrôle d'un service sur une ligne.

- Dépôt de remisage : assure l'affectation des conducteurs, l'entretien des véhicules et le remisage proprement dit qui permet d'acheminer un véhicule du dépôt à l'itinéraire commercial et réciproquement.

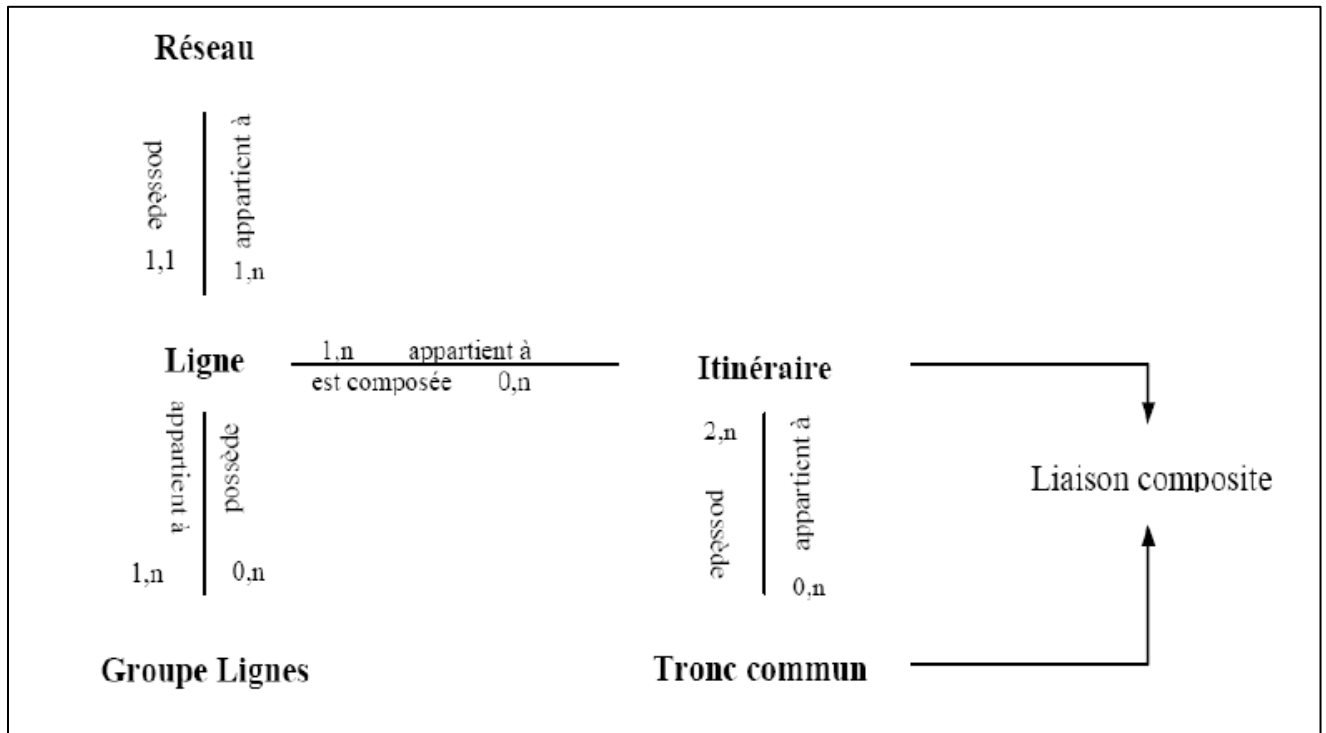


Figure 1.2 : structure d'un réseau

3.2. Configuration horaire

Le respect des horaires, la régularité de passage des véhicules, la qualité de déplacement conditionnent la qualité du service rendu aux usagers des réseaux de transport urbain.

Afin de pouvoir définir l'offre d'une ligne, une représentation graphique de l'ensemble des parcours au cours d'une journée est nécessaire. Cette opération, appelée graphicaire, définit l'heure de passage des véhicules aux arrêts, la vitesse, les temps de battements, le nombre de véhicules nécessaires

et le nombre d'heure de conduite nécessaire pour la satisfaction de la demande sur la ligne.

Lorsque les données sont définies, il faut répartir les heures de travail à effectuer par les conducteurs en tenant compte de la législation du travail, des conventions locales qui président à la définition du temps travaillé au cours d'une journée, des types d'organisation du travail (services coupés, nombre de jours travaillés par série,...), Cette opération est dite habillage des services. L'habillage est un exercice fondamental pour le fonctionnement de toute l'entreprise de transport urbain, puisqu'elle détermine les plannings de travail des conducteurs d'une part, et doit veiller à minimiser les coûts et ainsi construire une solution acceptable pour l'entreprise d'une autre part.

Il est assez difficile d'obtenir une solution optimale d'habillage. Plusieurs semaines sont parfois nécessaires pour effectuer manuellement l'habillage, et si l'offre de service (le graphichage) est modifiée au cours d'une période, il faut réaliser un nouvel habillage. En outre, il faut réaliser plusieurs habillages d'un même graphichage afin de permettre un choix entre plusieurs solutions acceptables.

Lorsque le réseau est défini, le résultat doit être communiqué, pour chaque type de période (scolaires, vacances,) et de jour, à l'extérieur, par l'édition de documents horaires (affiches aux arrêts,), mais également à l'intérieur, pour le graphiqueur qui doit pouvoir juger de son travail, pour le conducteur, qui doit recevoir une description détaillée du service, pour le contrôleur, qui doit connaître le nombre de véhicules nécessaires à l'exploitation, leurs dates de sortie et leurs types.

La conception de l'horaire d'une ligne est une tâche assez complexe qui nécessite la définition de tous les itinéraires de la ligne. Le travail manuel peut

être assez lourd ; puisque la vitesse varie en cours de la journée (heures de pointes ou creuses) et que l'offre change suivant le type de la journée (jour férié,), la période de l'année (vacances scolaires, saison,...), des conditions météorologiques et des contraintes d'exploitation (nombre de véhicules, ...). Afin de pouvoir définir l'offre d'une ligne, une représentation graphique de l'ensemble des parcours au cours d'une journée est donc nécessaire.

4. Exploitation d'un réseau de transport urbain

Dans l'ensemble des réseaux de transport urbain, l'exploitation d'une ligne se décompose en deux phases distinctes (figure) :

- Une phase de conception et d'élaboration du programme de production concrétisé par le plan théorique appelé Tableau de Marche (TM) de base. Ce TM est défini pour une période donnée tout au long d'une journée d'exploitation donnée.
- Une phase d'adaptation du programme de production (TM) aux conditions réelles d'exploitation concrétisées par le TM commande qui est perpétuellement actualisé.

Les données issues de l'exploitation en temps réel (phase d'adaptation) viennent alimenter en permanence le TM (phase de conception) et sont ainsi susceptible de se traduire par les modifications du TM de base.

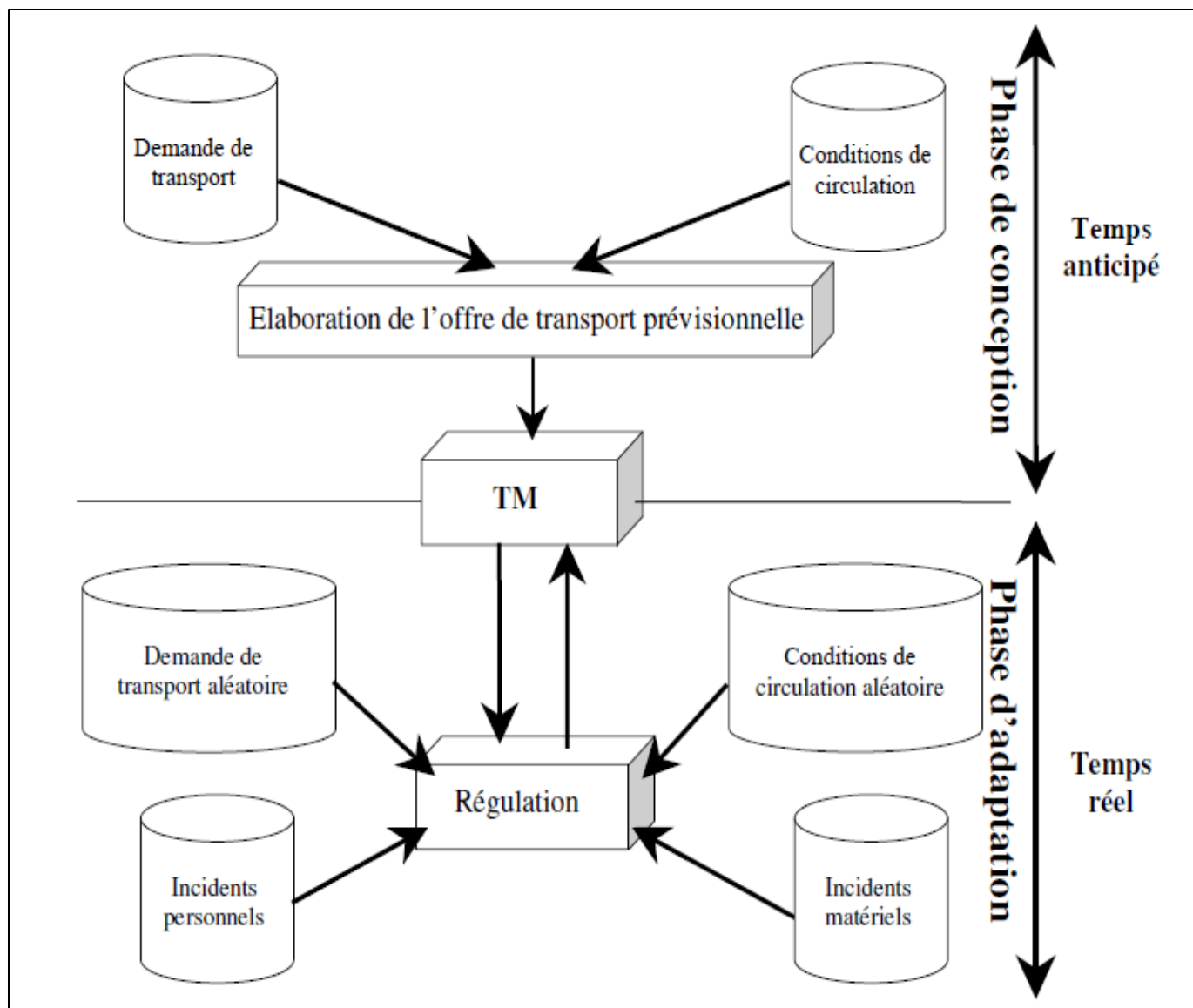


Figure 1.3 : Construction et évaluation du Tableau de Marche

✓ Définition : (Tableau de Marche)

Le tableau de marche (TM) est le résultat d'une optimisation de l'offre de service en fonction des objectifs et en respectant les contraintes d'exploitation.

Cette optimisation étant réalisée en temps anticipé, elle nécessite la formulation d'hypothèses sur les conditions de circulation et la demande de transport. Ces deux facteurs sont des phénomènes complexes de nature aléatoire. C'est pourquoi le TM ne peut définir les modalités du fonctionnement optimal de la ligne que pour des conditions moyennes

d'exploitation, dès que l'on s'écarte de ces conditions moyennes, il devient nécessaire de réguler pour faire face à la dégradation de la qualité du service.

5. Offre de service

L'offre de service sur une ligne est composée de courses reliant un terminus de départ à un terminus d'arrivée et desservant des arrêts selon un horaire.

Une course est une mission effectuée par un véhicule :

- Entre deux terminus extrêmes (course pleine).
- Entre un terminus extrême et un arrêt (course partielle).
- Sans desserte des arrêts entre l'arrêt de départ et l'arrêt d'arrivée (course HLP : haut le pied).
- L'emprunt des itinéraires spéciaux (course spéciale).

Sur une ligne donnée, on trouve plusieurs types de courses selon les arrêts desservis, l'itinéraire emprunté ou les consignes d'exploitation. La révolution sur une ligne est constituée d'une course retour avec l'emprunt du même itinéraire.

6. Régulation d'un réseau de transport urbain

6.1. Définition

La régulation est définie comme étant l'ensemble des mesures permettant de respecter non plus le Tableau de Marche (TM) en tant que table d'horaires, mais de respecter les règles de gestion qui ont amené à la définition de celui-ci.

La régulation est considérée comme étant un ensemble de méthodes permettant de se rapprocher au plus près du TM initial, malgré les perturbations.

En général, la régulation d'un réseau de transport urbain peut être considérée comme un ensemble de mesures ou de méthodes (action de régulation) qui essayent de remettre de l'ordre dans un réseau perturbé afin de se rapprocher de ce qui a été annoncé aux voyageurs.

6.2. L'objectif de la régulation

L'objectif de la régulation consiste à minimiser l'écart entre la valeur mesurée et celle déterminée en mode de fonctionnement non perturbé, et cela en ce qui concerne la position et la vitesse. La figure 1.4 représente les étapes essentielles du processus de régulation.

Le processus de régulation contient différentes tâches allant de la détection de la perturbation jusqu'à la prise de décision. Ces tâches sont regroupées en deux phases : phase de diagnostic et phase de décision.

- Phase de diagnostic : consiste à détecter et analyser les perturbations afin d'évaluer leur gravité. Cette phase se base sur les données fournies par le Système d'Aide à l'Exploitation qui représente un support de surveillance du réseau de transport urbain car il fournit les informations représentant l'état du réseau en temps réel et les compare avec les informations théoriques du TM.
- Phase de décision : est entamée par le régulateur quand il doit choisir les mesures appropriées de régulation en tenant compte des contraintes d'exploitation, de la nature des perturbations, ainsi que des critères qui conviennent aux objectifs d'exploitation.

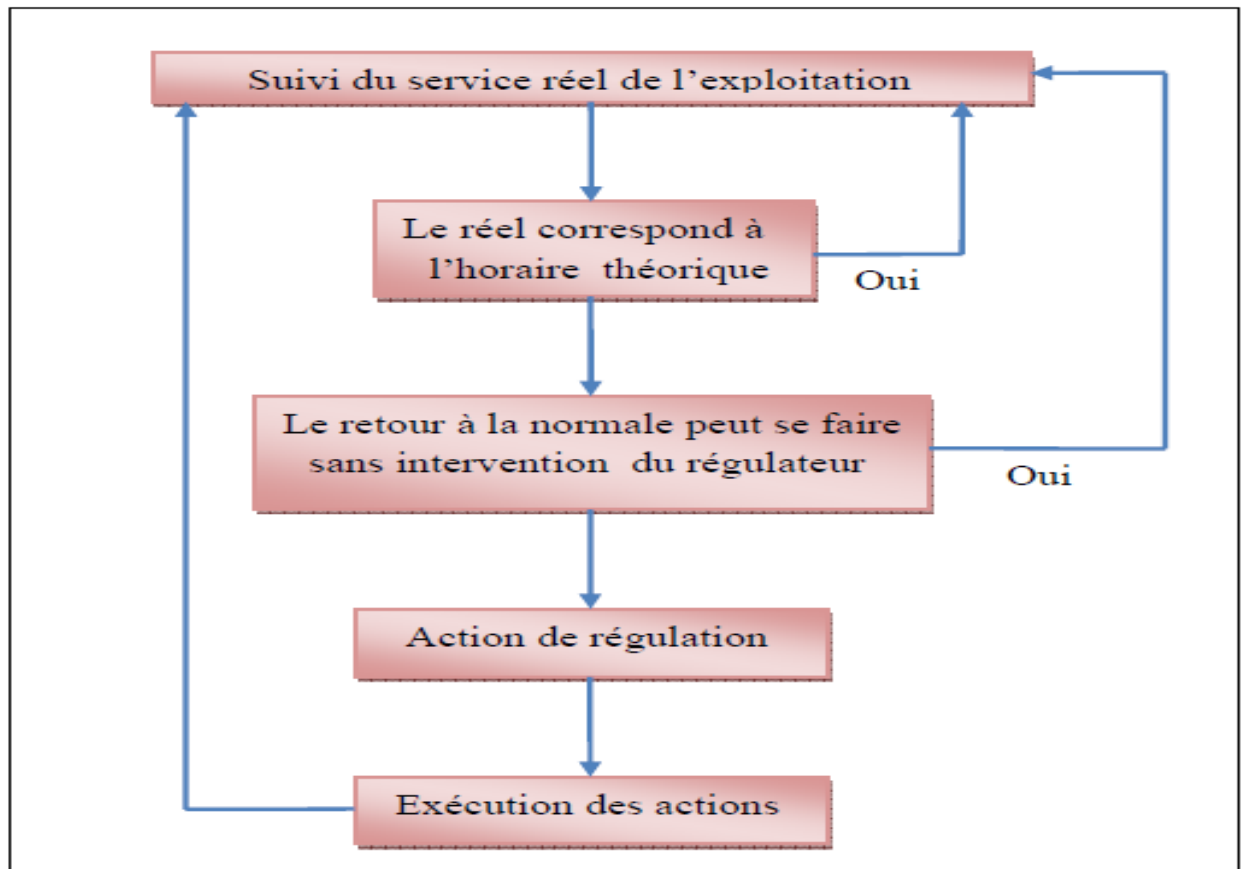


Figure 1.4 : Etapes du processus de régulation

7. Coût de transport

Le coût de transport est une notion en partie abstraite (pour ce qui concerne par exemple l'internalisation des coûts socio-environnementaux ou les coûts pris en charge par la collectivité). Il varie selon les pays, époques et le mode de transport. L'analyser nécessite de le décomposer en plusieurs variables :

- **Coût direct** : le coût est la mesure, de la dépense associée à un événement ou une action de nature économique, il est exprimé généralement sous forme d'un prix ou d'une valeur monétaire. Le coût direct dans le domaine de transport signifie le prix du ticket, de l'abonnement aux transports urbains. Il varie selon le mode de transport utilisé.

- **Coût d'investissement, de planification d'entretien** : c'est une part importante du coût caché des infrastructures de transport, de leur entretien et de leur fonctionnement. Par exemple, le réseau de transport urbain en site propre nécessitent un plan de financement lourd pour l'infrastructure et l'exploitation (des projets sont souvent retardés par les difficultés d'investissement).

En effet, dans le cas d'infrastructures lourdes (tramway, métro, train, ...), l'investissement est également lourd, par contre dans le cas des bus, la voirie a aussi un coût, mais son investissement et son entretien sont proportionnellement moins coûteux, mais ces coûts augmentent rapidement avec l'étalement urbain et en zone d'habitat dispersé.

- **Coût en temps** : depuis l'apparition de l'automobile, le temps moyen passe dans les transports (véhicule en particulier) tend à augmenter. C'est aussi un aspect important. La fluidité de la circulation est d'ailleurs un des facteurs de ce coût. La gestion de la voirie et des flux de circulation en cas d'embouteillages est une tâche très importante.
- **Coût humain environnemental** : la marche à pied et le vélo sont des facteurs reconnus de bonne santé de l'individu, par l'exercice physique qu'il procure. Inversement, le véhicule est associé à un manque d'exercice physique. Le transport urbain génère aussi des blessures, des handicaps, et morts accidentelles sans oublier les nuisances sonores et la pollution chimique de l'environnement qui ne sont pas négligeables.

8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté en premier lieu les systèmes de transport et le processus de planification. Un réseau de transport a une configuration physique définissant les itinéraires et les stations et une configuration horaire. Dans un deuxième lieu nous avons parlé de l'exploitation et l'offre de service d'un réseau de transport urbain. Ensuite nous avons présenté la régulation d'un transport urbain, sa définition et l'objectif de la régulation. Finalement, nous avons parlé un peu du coût de transport.

CHAPITRE 2 : Modélisation d'un réseau du transport urbain par les réseaux de Petri

1. Problématique

Les transports urbains font partie intégrante de l'espace urbain, de manière parfois excessive. La ville est une entité à la fois économique et résidentielle, c'est un environnement dans lequel vit une très large part de la population et qui utilise le moyen de transport urbain, d'où la nécessité d'une bonne gestion des flux des voyageurs dans l'espace urbain.

Le transport urbain dépend de la densité démographique, géographique et de la distribution des voyageurs dans l'espace urbain, ce qui implique que les réseaux de transport urbain formant des systèmes ouverts, distribués, leur observation, estimation, et évaluation sont des tâches assez difficiles.

Dans le but d'analyser ces réseaux, d'anticiper les évolutions de fréquentation ou encore de prévoir la mise en place de nouvelles infrastructures, les sociétés de transport urbain qui visent avant tout à satisfaire la demande de leurs clientèles ont régulièrement recours à des modélisations pour surveiller, analyser, faire des prévisions afin faire face à plusieurs événements qui peuvent arriver notamment au domaine économique ces prévisions sont fondées sur l'observation des comportements de déplacement des bus. Ces derniers peuvent être obtenus grâce à la simulation du fonctionnement du réseau de transport urbain qui nécessite l'élaboration d'un modèle approprié.

Pour une meilleure compréhension des paramètres qui déterminent le bon fonctionnement du système de transport, la modélisation reste un moyen très efficace. En effet, un modèle offre une meilleure connaissance qui nous permet avant tout, de voir l'évolution du système et **analyser** son fonctionnement, et par la suite, il nous aide à faire des prévisions pour le réseau.

2. L'objectif de la modélisation

L'objectif de la modélisation des réseaux de transport urbain est d'obtenir une représentation utilisable et simplifiée afin de pouvoir l'exploiter. Les déplacements dans un réseau de transport urbain sont des trajectoires parcourus entre des contextes localisés d'activités sociales, ils sont de plus en plus complexes et difficile à contrôler, car cela dépend de plusieurs contraintes. La modélisation des déplacements urbains apporte une aide pour l'élaboration des politiques appropriées en termes de planification et de programmation. Pour répondre à ces impératifs, nous proposons dans cette étude une modélisation mathématique pour un réseau de transport urbain monomodal, qui se compose d'un ensemble de lignes d'exploitation. Pour chaque ligne est affecté un certain nombre de véhicules qui circulent selon les fréquences de passage fixes suivant la configuration du réseau. Le modèle proposé est sous forme d'un système d'équations, il permet de simuler le fonctionnement du réseau.

3. Etat de l'art sur la modélisation d'un réseau de transport urbain

3.1. Introduction

La modélisation reste un moyen très efficace pour représenter la réalité, elle permet de commander, d'analyser et éventuellement d'améliorer les performances des systèmes. En effet, la modélisation s'est vite imposée et devenue indispensable dans toutes les disciplines : automatique, mécanique, économique, etc. Dans le domaine des réseaux de transport urbain, la modélisation est une tâche complexe qui nécessite l'élaboration de modèles appropriés pour assurer la satisfaction de la clientèle, à savoir, proposer un service de transport urbain en tenant compte des contraintes de fonctionnement telles que le respect des horaires théoriques, la garantie des correspondances, la réduction des temps d'attente, etc. Ceci a conduit naturellement les chercheurs à s'intéresser à ce problème et à proposer des modèles adéquats.

À travers ce chapitre, nous présentons la modélisation d'un réseau de transport urbain.

- L'objectif de la modélisation des réseaux de transport urbain est d'obtenir une représentation utilisable et une description parfaite afin de pouvoir l'exploiter. Plusieurs approches de modélisation des réseaux de transport ont été proposées. Parmi les modélisations il y a la modélisation par les réseaux de petri qu'on va étudier dans ce chapitre.

3.2. Modélisation par les réseaux de Petri

3.2.1. Définition du réseau de Petri

Un réseau de Petri (aussi connu comme un réseau de Place/Transition ou réseau de P/T) est un modèle mathématique servant à représenter divers

systèmes travaillant sur des variables discrètes. Les réseaux de Petri sont apparus en 1962, dans la thèse de doctorat de Carl Adam Petri. Les réseaux de Petri sont des outils graphiques et mathématiques permettant de modéliser et de vérifier le comportement dynamique des systèmes à événements discrets comme les systèmes de télécommunications, les réseaux de transport. Les réseaux de Petri représentent un outil de modélisation des systèmes à événement discret. D'après Castelain E. et Mesghouni Khaled, ces derniers ont été exploités pour modéliser un réseau de transport urbain puisqu'ils permettent de modéliser facilement le comportement parallèle et asynchrone des différents moyens de transport et la synchronisation entre les bus, trains, tramways et métros.

Les réseaux de Petri (RdP) permettent de construire des modèles graphiques de systèmes logiques. Ils constituent un outil riche en termes de propriétés et de résultats analytiques. Par rapport à d'autres modèles, leur principal avantage est de proposer une modélisation graphique simple, et qui permet de plus, l'utilisation d'une algèbre mathématique (algèbre linéaire usuelle ou algèbre des dioïdes) pour l'analyse du système étudié. On constate alors qu'ils forment un outil puissant qui permet d'utiliser des techniques algébriques qui dépendent peu du modèle sous-jacent avec des considérations plus structurelles pour établir certains résultats.

Les réseaux de Petri constituent un formalisme bien adapté à la modélisation de systèmes discrets qui permet d'inclure de façon naturelle leurs modes de fonctionnement.

Plusieurs classes de réseaux de Petri ont été utilisées pour la description du comportement des systèmes de transport. Nous rappelons ici la description de

ce formalisme graphique et ses quelques définitions ainsi que son principe de fonctionnement.

Rappel

- ✓ **Définition d'un graphe** : On appelle un graphe un couple $G=(X, U)$ avec :
 - X : un ensemble d'éléments appelés sommets du graphe
 - U : une famille d'éléments appelés arcs du graphe
- ✓ **Définition d'un graphe biparti** : si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y, de sorte que toutes les arcs du graphe reliant un sommet dans X à un sommet dans Y.

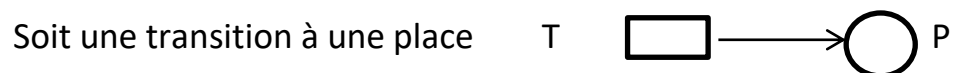
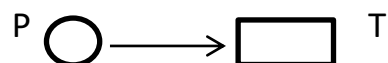
3.2.2. Représentation du réseau de Petri

Un réseau de Petri se représente par un graphe $G= (PUT, U)$ biparti orienté reliant des *places* et des *transitions* (les sommets). Deux places ne peuvent pas être reliées entre elles, ni deux transitions.

→ Les places sont représentées par un cercle  P

→ Les transitions sont représentées par un rectangle  T

→ U : l'ensemble des arcs ; un arc relie soit une place à une transition



- Un réseau de Petri c'est un quadruplet $R = \langle P, T, Pre, Post \rangle$ où :

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est l'ensemble fini des places

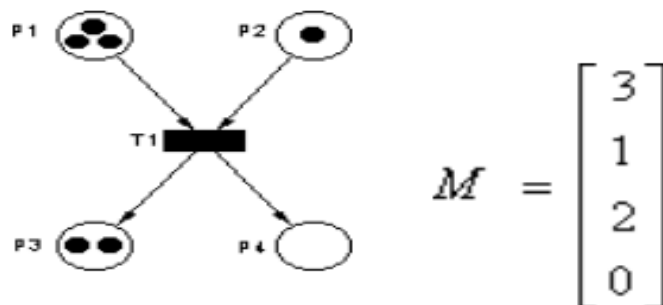
$T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ est l'ensemble fini des transitions

$Pre : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$ est l'application places précédentes

$Post : P \times T \longrightarrow \mathbb{N}$ est l'application places suivantes

→ Le marquage du réseau est une fonction $M : P \longrightarrow \mathbb{N}$. $M(P_i)$ qui signifie le nombre de marques (ou jetons) contenus dans la place P_i représentant généralement des ressources disponibles.

Marquage : Chaque place contient un nombre entier positif ou nul de marques ou jetons. Le marquage M définit l'état du système décrit par le réseau à un instant donné. C'est un vecteur colonne de dimension le nombre de places dans le réseau. Le i ème élément du vecteur correspond au nombre de jetons contenus dans la place P_i . Par exemple :



→ Les entrées d'une transition sont les places desquelles part une flèche pointée vers cette transition, et les sorties d'une transition sont les places pointées par une flèche ayant pour origine cette transition.

→ Un réseau de petri évolue lorsqu'on exécute une transition : des jetons sont pris dans les places d'entrée de cette transition et envoyés dans les places de sortie de cette transition suivant certaines règles. Le tir ou le franchissement

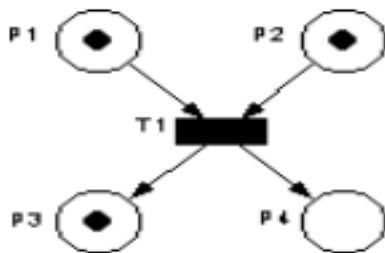
d'une transition est une opération indivisible qui est déterminée par la présence de jetons dans les places d'entrée. Une transition T_i est franchissable si et seulement si $\forall P_j \in P : M(P_j) \geq \text{Pre}(P_j, T_i)$. Après le tir de la transition T_i , le marquage M' obtenu est défini par :

$$\forall P_j \in P, M'(P_j) = M(P_j) - \text{Pre}(P_j, T_i) + \text{Post}(P_j, T_i)$$

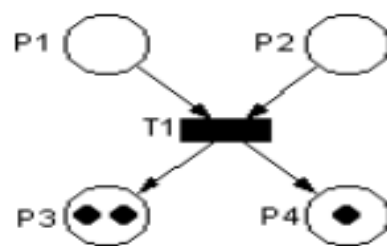
Le franchissement consiste à retirer un jeton de chacune des places d'entrée et à rajouter un jeton à chacune des places de sortie de la même transition.

Exemple : Franchissement d'une transition

Avant franchissement :



Après franchissement :



Le franchissement de T1 consiste à enlever un jeton de P1 et un jeton de P2 et à rajouter un jeton dans P3 et un jeton dans P4.

3.2.3. Modélisation d'un transport urbain par les réseaux de Petri

D'après [1] , pour modéliser précisément à la fois la ligne de transport et ses passagers, les réseaux de petri ordinaires tels qu'ils ont été définis précédemment ne sont pas suffisants. Un modèle constitue des RdP Stochastiques, Temporisés à Prédicats/Transitions a été proposé dans la thèse de Castelain E et Mesghouni Khaled, où un jeton modélise un ensemble de personnes qui ont le même comportement à un instant donné. Ces personnes

peuvent être au même arrêt en train d'attendre le même bus. Le bus n'est pas réellement modélisé, mais c'est l'ensemble de passagers à l'intérieur qui est représenté par un n-uplet (ou vecteur). Ce n-uplet caractérise l'état de cet ensemble de personnes : [numéro de ligne, numéro de service, capacité du bus, nombre actuel de passagers].

Dans cette modélisation proposée par Castelain E et Mesghouni Khaled, les transitions du RdP sont temporisées. Un nombre positif représentant la durée de l'activité associée à la transition est affecté à chaque transition. Le temps mis par un bus entre deux arrêts successifs et le temps d'arrêt d'un bus à son arrêt sont bien connus puisqu'ils dépendent du tableau de marche de la ligne. Toutes ces temporisations sont déterministes et ajoutées sur le RdP pour représenter la durée des trajets, les seules données temporelles non-déterministes proviennent des arrivées stochastiques des gens aux arrêts et stations.

Une des hypothèses principales de leur modèle. Est de ne considérer que des flux stationnaires de passagers. Cela signifie que l'horizon d'étude (la semaine ou la journée) peut être partagée en périodes temporelles disjointes. A chaque période (heures de pointes, heures creuses) correspond un flux régulier d'utilisateurs. Les fréquences d'arrivée à chaque arrêt de bus, les itinéraires des utilisateurs, les taux d'échanges entre les lignes aux nœuds de correspondance sont donnés par l'exploitant du réseau qui est censé les connaître.

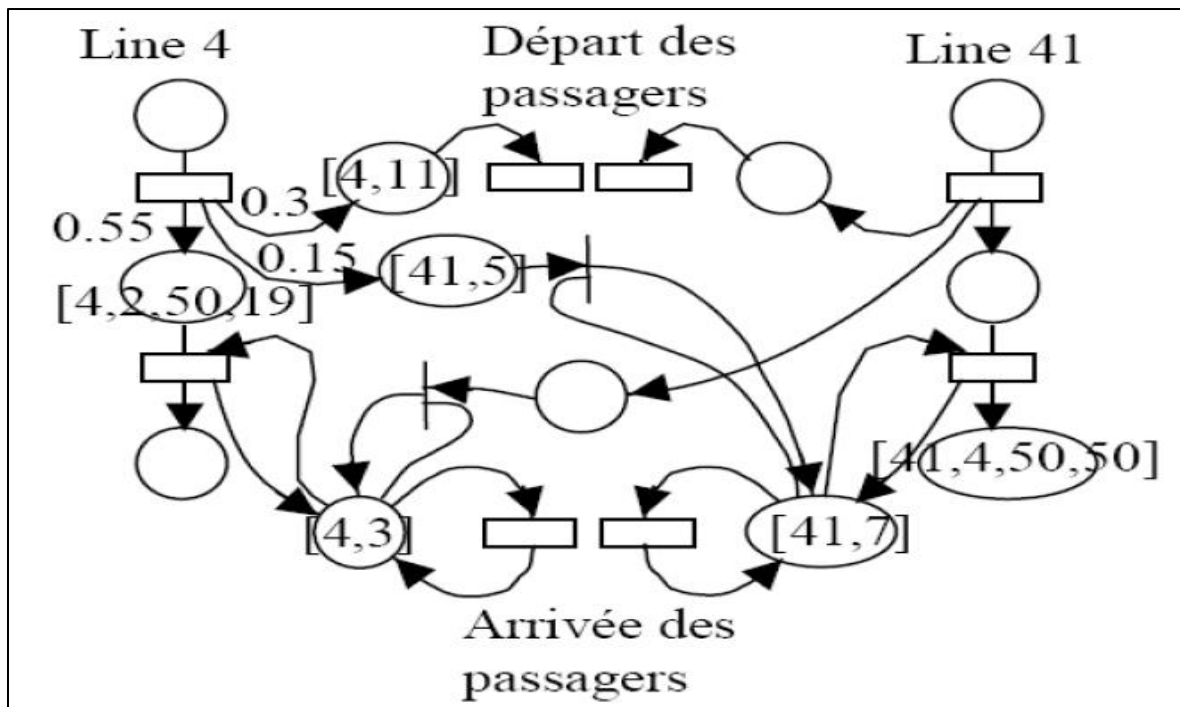


Figure 2.1 : Le RdP d'une correspondance

La figure 2.1 représente les échanges de passagers entre deux bus qui se croisent à un arrêt de correspondance. Le second bus de la ligne 4 vient juste d'arriver avec 35 passagers. 55% des passagers (soient 19 personnes) restent dans le bus, 30% des passagers (soient 11 personnes) quittent l'arrêt et 15% des passagers (soient 5 personnes) veulent prendre un bus de la ligne 41. Il y a 3 personnes qui attendent un autobus de la ligne 4 et qui rejoindront les 19 personnes qui sont restées dans le bus. Sur l'autre ligne, le 4ieme bus de la ligne 41 vient juste de quitter l'arrêt de bus. Il est plein avec 50 passagers et 7 personnes n'ont pas pu monter dans le bus. Ils vont donc attendre le prochain bus de la ligne 41 et seront bientôt rejoint les 5 personnes qui ont quitté l'autobus de la ligne 4.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art sur la modélisation d'un réseau de transport urbain, à savoir la modélisation par les réseaux de petri, nous avons présenté un réseau de petri d'une correspondance qui représente les échanges de passagers entre deux bus qui se croisent à un arrêt de correspondance.

Chapitre 3 : Modélisation d'un système de transport public par les réseaux de petri et l'algèbre (max-plus)

1. Introduction

Dans le domaine du transport urbain Nait Sidi Moh [1] a présenté un modèle basé sur les RdP pour la gestion des correspondances où les transitions représentent les arrêts (stations) de bus et les places représentent les déplacements inter-stations. Les temps d'attente sont calculés selon un modèle mathématique basé sur l'algèbre max-plus.

D'après la thèse de Nait Sidi Moh [1] les deux cas de fonctionnement possibles d'un réseau de bus au niveau des arrêts de correspondance où des échanges de passagers sont susceptibles de se produire : le premier cas est celui où les bus concernés par ce type d'échange doivent «s'attendre» au(x) point(s) considéré(s). Cependant ce cas de figure arrive assez rarement sur des réseaux de bus, compte tenu de la fréquence relativement importante des passages de véhicules. Cette situation est observée plus souvent pour les réseaux de chemin de fer, où les passages de train sont plus espacés dans le temps. Nait Sidi Moh a montré dans sa thèse comment modéliser cette problématique, qui a par ailleurs déjà été étudiée, par un graphe d'événements temporisé et un système d'équations stationnaires dans l'algèbre (max, plus), et ce à condition que certaines hypothèses soient vérifiées. Le deuxième cas de fonctionnement étudié relève de ce que nous appellerons la non-synchronisation des bus (les bus ne s'attendent pas aux stations de correspondance). La contrainte d'attente précédente ainsi que certaines hypothèses sont alors relaxées, ce qui nous conduit à un modèle graphique

dans lequel des conflits structurels apparaissent et à une représentation d'état dans l'algèbre (max, plus) non-stationnaire.

2. Description du système de transport public étudié

Nous considérons un STP composé de n lignes de bus (avec $n \geq 2$) (figure 2.1). Chacune est desservie par un nombre fixé de bus qui réalisent un circuit et passent au même endroit avec une fréquence donnée (fonction du temps de parcours du circuit et de la demande de transport). Dans cette partie, nous nous limitons au cas où chaque ligne L_i ($1 \leq i \leq n$) est desservie par un unique bus B_i qui se trouve initialement à sa station de départ. Certaines lignes sont connectées entre elles par des arrêts de correspondance qui permettent aux passagers de changer de ligne selon leurs destinations. Le réseau considéré est composé de $n-1$ arrêts de correspondance. Chaque ligne L_i ($2 \leq i \leq n-1$) est représentée par sa station de départ Sd_i , deux stations de correspondance (notées resp. $Sc_{i-1,i}$, et $Sc_{i,i+1}$, communes resp. avec les lignes L_{i-1} et L_{i+1}), et une station d'arrivée notée Sa_i . La ligne L_1 (resp. L_n) a une seule station de correspondance commune avec la ligne L_2 (resp. avec L_{n-1}). Pour ce réseau, nous ne considérons que les arrêts que nous venons de définir ; les autres arrêts simples ne sont pas explicités ici (ils sont agrégés dans les déplacements des bus entre les arrêts définis). La course d'un bus B_i s'effectue dans le sens suivant $Sd_i \rightarrow Sc_{i-1,i} \rightarrow Sc_{i,i+1} \rightarrow Sa_i \rightarrow Sd_i$. Le temps de déplacement des bus entre chaque couple d'arrêts successifs du réseau est connu. Il intègre les temps de montée et descente de passagers dans les bus. Dans cette partie nous nous intéressons au fonctionnement périodique des bus du réseau : chaque bus B_i passe à un arrêt toutes les λ_i unités du temps. λ_i est appelée période de la ligne L_i . C'est le temps nécessaire à B_i pour effectuer une

course. Enfin le réseau étudié est muni d'une planification d'horaires initiale : la première date de départ (depuis Sd_i) de chaque bus B_i au cours d'une journée est connue.

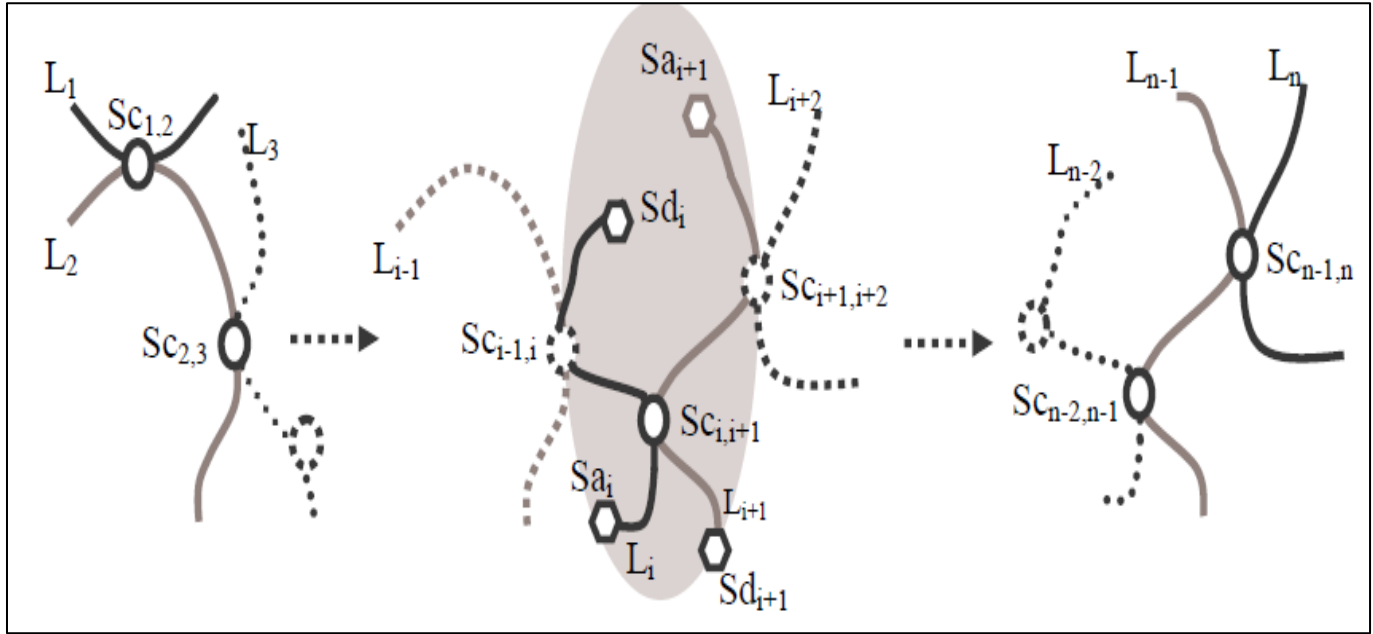


Figure 3.1 : Un réseau de bus composé de n lignes et $n-1$ arrêts de correspondance.

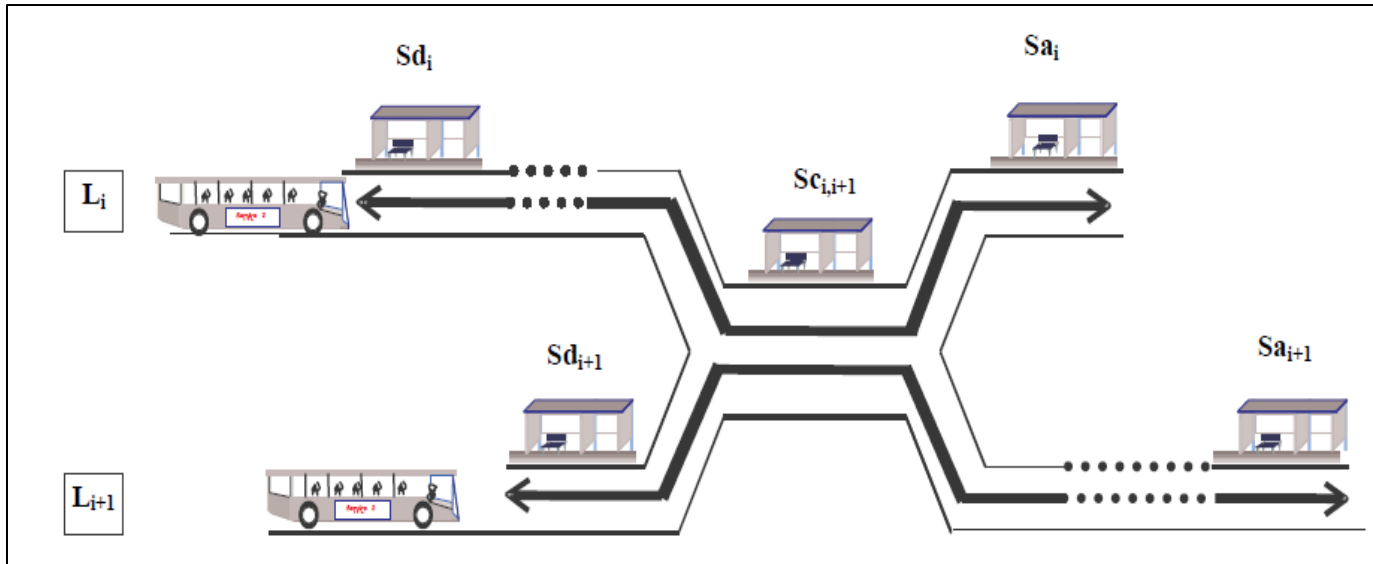


Figure 3.2 : La structure physique de deux lignes L_i et L_{i+1} et de la station $SC_{i,i+1}$.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la gestion des correspondances des passagers effectuant un aller simple sur le réseau au cours d'une période donnée (exemple : un jour de la semaine) en empruntant un bus à un arrêt d'une ligne L_i ($1 \leq i \leq n-1$) pour se rendre à un arrêt destination d'une autre ligne L_j ($1 \leq j \leq n$) avec $i < j$. L'étude des trajets de retour s'effectue de la même façon. Dans cette partie, nous évaluons les temps d'attente des passagers aux différentes stations de correspondance $Sc_{i,i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$), dans le cas de fonctionnement du réseau : synchronisé. La figure 2.2 présente la structure physique d'une portion du réseau plus particulièrement étudiée et pouvant être considérée comme « générique » du réseau global. Elle est composée de deux lignes L_i et L_{i+1} (partie grisée de la figure 2.1), et fait notamment apparaître leur station de correspondance commune $Sc_{i,i+1}$. Les voyageurs peuvent ainsi emprunter un bus à la station de départ Sd_i (resp. Sd_{i+1}) soit pour se rendre à la station d'arrivée Sa_i (resp. Sa_{i+1}) en se déplaçant sur une seule ligne, soit pour se rendre à la station Sa_{i+1} (resp. Sa_i) en utilisant les deux lignes et en changeant de bus à la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$.

3. Étude du système dans le cas de synchronisation des bus

3.1. Modélisation par un graphe d'événements temporisés

3.1.1. Premier modèle réseau de Petri

- **Définition :** Un réseau de Petri est un graphe biparti fait de deux types de sommets : *places* (représentées par des cercles) et *transitions* (représentées par des barres). Des *arcs* orientés relient certaines places à certaines transitions, ou certaines transitions à certaines places (figure suivante). A

chaque arc on associe un *poids* (entier positif). On associe 1 par défaut aux arcs sur lesquels il ne figure aucun poids. Dans un RdP, le nombre de places (resp. de transitions) est fini, et non nul. Chaque place, peut contenir un ou plusieurs *jetons* (représentés par des points) qui modélisent la dynamique du système.

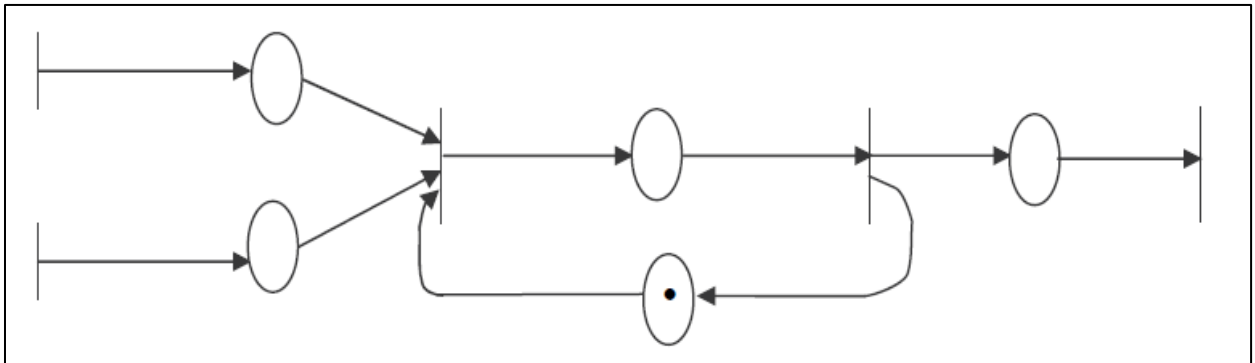


Figure : Exemple de réseau de Petri

Nous utilisons le formalisme RdP pour modéliser le réseau de bus de la figure 2.1 comme nous l'avons évoqué en introduction de cette partie, l'attente des bus aux arrêts de correspondance est un phénomène peu courant, comparé à d'autres systèmes de transport public. Toutefois, la synchronisation des bus peut malgré tout être imposée par les exploitants en certains points d'échange jugés critiques, et à des périodes particulières (heures de pointe par exemple). Nous considérons donc ici un fonctionnement synchronisé du réseau: les bus de chaque couple de lignes s'attendent à leur arrêt de correspondance commun pour permettre aux passagers de changer de ligne. Après l'échange de passagers, chaque bus poursuit son trajet vers d'autres arrêts. Nous définissons alors les éléments suivants du modèle RdP :

- les transitions sont assimilées aux arrêts du réseau ;
- les places et les arcs associés représentent :
 - soit l'autorisation de début d'une course pour un bus ;

- soit le trajet d'un bus entre deux arrêts non obligatoirement successifs du réseau ;

- soit l'attente de passagers à une station de correspondance. Pour distinguer ces places des autres places du modèle, nous les représentons, ainsi que les arcs associés, par des traits épais ;

- les jetons représentent de la même façon :

- soit un ordre de commencement d'une course pour un bus depuis son arrêt de départ ;

- soit un bus en circulation sur une ligne, dans le cas où le jeton se trouve dans une place qui modélise le déplacement d'un bus ;

- soit un lot de passagers en attente dans le cas où le jeton se trouve dans une place associée à l'attente de passagers ;

- les temporisations associées aux places du modèle représentent les temps de déplacement des bus entre les arrêts du réseau. Les temporisations associées aux places qui représentent l'attente de passagers sont nulles : en effet, d'une part les temps de montée et de descente de passagers dans les véhicules sont contenus dans le temps de déplacement des bus ; d'autre part nous négligeons ici le temps de déplacement (à pied) des passagers entre les deux bus concernés par l'échange. Enfin les temporisations des places représentant une autorisation de début de course sont également nulles : en effet, une telle autorisation est immédiatement effective.

En tenant compte des éléments donnés ci-dessus, et en supposant que les poids associés aux arcs du modèle RdP sont égaux à 1, le graphe de la figure 2.3 modélise les deux lignes L_i et L_{i+1} de la figure 2.2 (partie grisée de la figure 2.1).

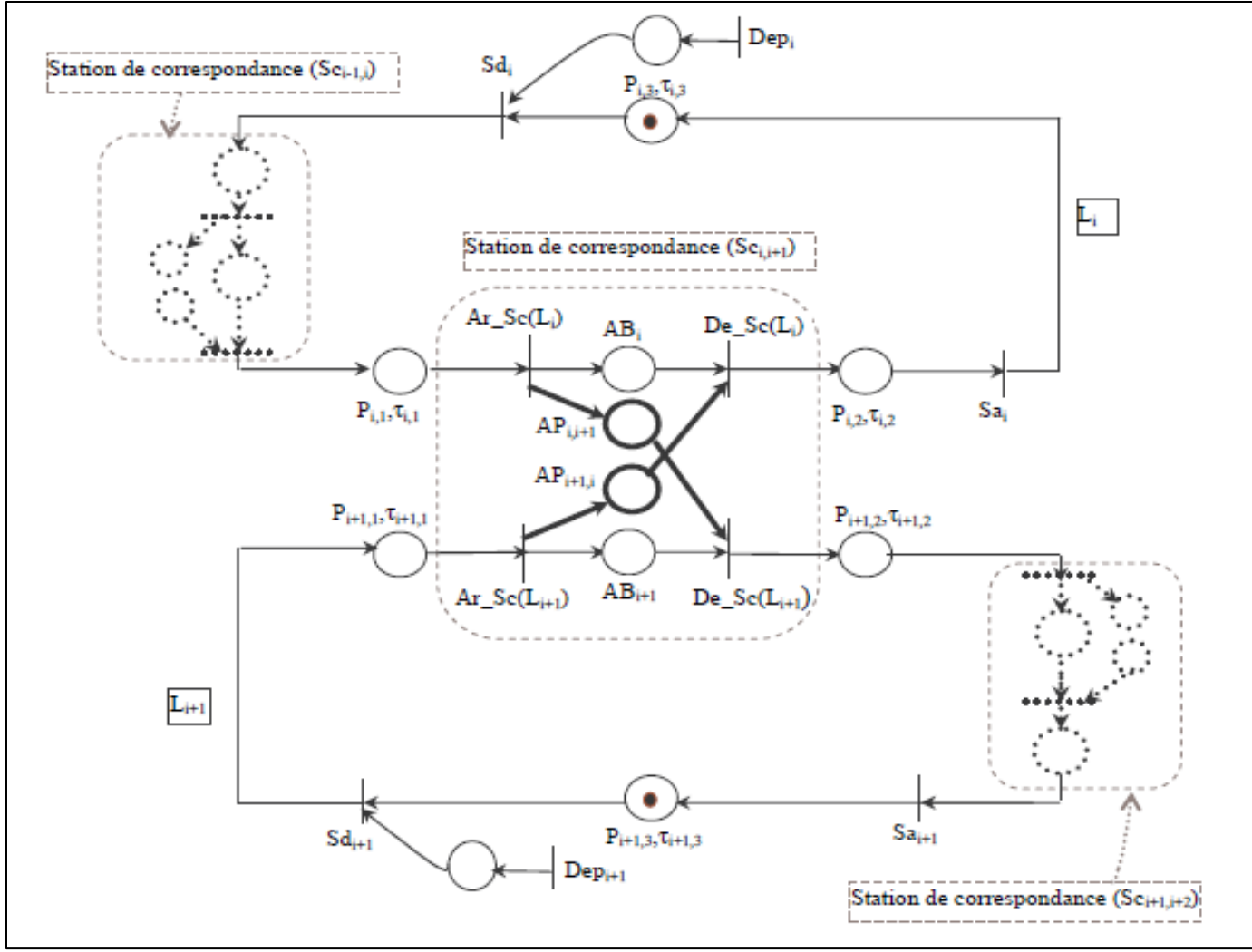


Figure 3.3 : Modèle RdP du système considéré.

Le reste du réseau se comporte comme ces deux lignes. Le modèle obtenu est composé de deux circuits. Chacun représente une ligne L_j ($j \in \{i, i+1\}$) de la façon suivante :

- la ligne L_j est représentée par le circuit $(Sd_j, P_{j,1}, Ar_Sc(L_j), AB_j, De_Sc(L_j), P_{j,2}, Sa_j, P_{j,3}, Sd_j)$. Les transitions $Ar_Sc(L_j)$ et $De_Sc(L_j)$ ainsi que la place AB_j modélisent la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$, où $Ar_Sc(L_j)$ (resp. $De_Sc(L_j)$) représente l'arrivée (resp. le départ) du bus B_j en $Sc_{i,i+1}$ (resp. de $Sc_{i,i+1}$) ; la place AB_j représente l'attente du bus B_j en $Sc_{i,i+1}$ pour effectuer la correspondance. Les places $P_{j,1}, P_{j,2}$, et $P_{j,3}$, (resp. les temporisations $\tau_{j,1}$, $\tau_{j,2}$, et $\tau_{j,3}$) modélisent les trajets (resp. les temps de

déplacement) entre les stations Sd_j et $Sc_{i,i+1}$, $Sc_{i,i+1}$ et Sa_j et enfin entre Sa_j et Sd_j . Le jeton se trouvant initialement dans la place $P_{j,3}$ représente le bus B_j .

La période λ_j est donnée par : $\lambda_j = \tau_{j,1} + \tau_{j,2} + \tau_{j,3}$;

- À chaque transition Sd_j on associe une transition Dep_j et une place (de temporisation nulle) modélisant l'entrée de la ligne à partir de laquelle il est possible de commander cette ligne en imposant des dates de départ des bus pour effectuer une course ;
- la correspondance entre les deux lignes est représentée par la connexion entre les deux circuits du modèle. Cette connexion est composée des places $Ap_{i,i+1}$ et $Ap_{i+1,i}$, qui représentent les attentes des passagers pour effectuer la correspondance, et des arcs orientés suivant le déplacement de ces passagers (de la ligne L_i vers L_{i+1} et de la ligne L_{i+1} vers L_i).

3.1.2. Modèle graphe d'événements temporisés

Les graphes d'événements temporisés (GET) sont considérés comme une relative nouveauté dans le contexte de la modélisation des STP. Dans ce cadre, une étude a été faite pour l'étude d'un réseau de trains. Un modèle mathématique (max, plus) linéaire est déduit à partir du modèle GET décrivant le comportement du réseau. Cette étude est limitée au cas où les trains s'attendent systématiquement aux stations de correspondance pour effectuer les échanges de passagers.

Dans le même contexte, et afin d'évaluer les performances d'un réseau de bus, notamment les dates de passage des véhicules aux différents arrêts du réseau et les temps de correspondance des usagers, nous étudions le système donné dans la figure 2.2 en utilisant les GET et l'algèbre (max, plus).

Dans le cas d'un réseau synchronisé (les bus doivent s'attendre), nous ne considérons toujours que la partie du réseau représentée par les deux lignes L_i et L_{i+1} de la figure 2.2. De plus nous nous intéressons ici uniquement à la gestion des correspondances des passagers sur un itinéraire donné : par exemple, les passagers venant de la station de départ Sd_i et se rendant à la station d'arrivée Sa_{i+1} . Le modèle GET associé est donné par la figure 2.4. C'est une version simplifiée du modèle précédent (figure 2.3) dans le sens où l'échange de passagers de la ligne L_{i+1} vers la ligne L_i n'est pas représenté. La synchronisation désigne ici l'obligation d'attente du bus B_{i+1} pour assurer les correspondances. Pour ce nouveau modèle, la transition qui représente la station de correspondance $Sc_{i,i+1}$ est notée $Sc(L_j)$ pour la ligne L_j (avec $j \in \{i, i+1\}$) ; elle regroupe les éléments $Ar_Sc(L_j)$, AB_j et $De_Sc(L_j)$ donnés dans le modèle de la figure 2.3. Comme pour le modèle précédent et bien que nous ne considérons l'échange de passagers que dans un seul sens à la station de correspondance, le modèle graphique de la figure 2.4 fonctionne avec l'hypothèse d'alternance des bus en $Sc_{i,i+1}$.

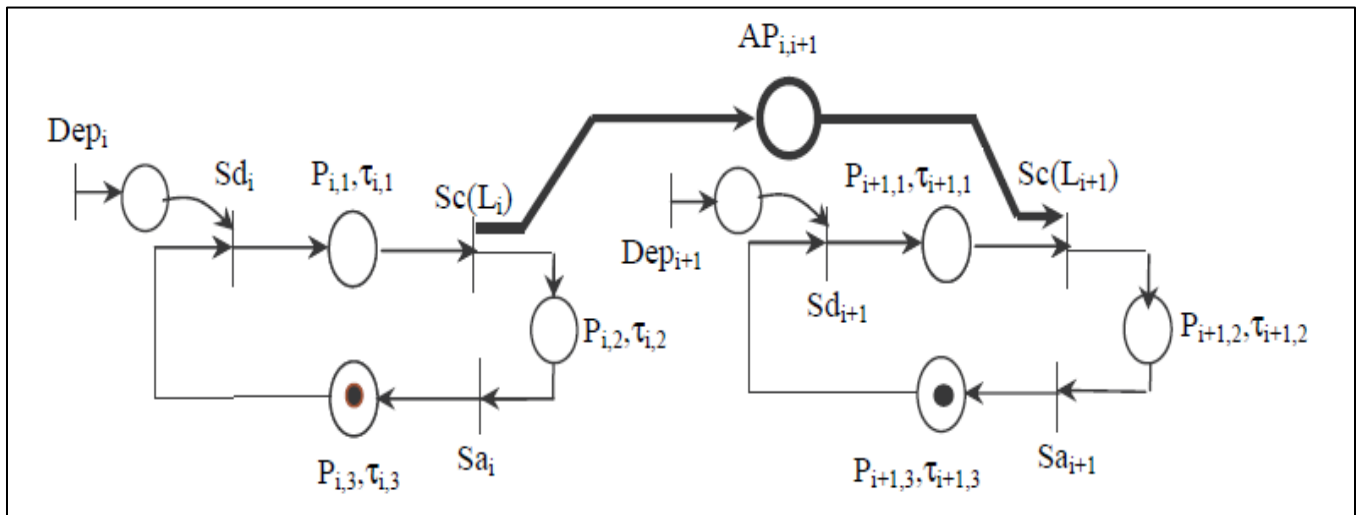


Figure 3.4 : Le modèle GET représentant les deux lignes L_i et L_{i+1} : cas d'attente des bus.

3.2. Représentation d'état dans l'algèbre (max, plus)

3.2.1. Algèbre des dioïdes

Avoir un modèle théorique linéaire dans une structure algébrique non usuelle (algèbre des dioïdes par exemple) contre un modèle non forcément linéaire dans l'algèbre usuelle est certainement un atout, encore faut-il que cela s'accompagne d'une puissance de modélisation raisonnable. Les modèles (max, plus) ou (min, plus) linéaires réalisent ce compromis pour certains systèmes complexes. Il a été justifié à plusieurs reprises que la théorie des dioïdes est une théorie riche en propriétés pour l'étude et l'analyse des SDED ainsi que l'évaluation de leurs performances. Notre but ici est d'utiliser cette théorie ainsi que ses techniques de calcul et d'analyse pour représenter et étudier le comportement d'un système de transport public par une représentation d'état dans l'algèbre des dioïdes.

3.2.1.1. Dioïdes: Définition et exemples

- i. **Définition** : On appelle un dioïde un ensemble D muni de deux lois internes, une première loi notée additivement " $\oplus$ " et une deuxième notée multiplicativement " $\otimes$ ", telles que, pour tout a, b et c dans D on a
- la loi $\oplus$ est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
 - la loi $\oplus$ est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
 - la loi $\oplus$ est idempotente : $a \oplus a = a$;

- la loi $\oplus$ admet un élément neutre noté “ ε ” et appelé *zéro* :
 $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$;
- la loi $\otimes$ est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
- la loi $\otimes$ admet un élément neutre noté “ e ” et appelé *identité* :
 $a \otimes e = e \otimes a = a$;
- la loi $\otimes$ est distributive par rapport à la loi $\oplus$:
 $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$, idem pour la multiplication à droite ;
- l’élément “ ε ” est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;
- pour tout élément $a \in D$, et $n \in \mathbb{N}$ nous avons : $a^n = a \otimes a \otimes \dots \otimes a$,
(n fois).

S’il n’existe aucun risque d’ambiguïté, le signe multiplicatif $\otimes$ sera parfois omis comme dans l’algèbre classique, et nous écrivons ab (ou $a.b$) au lieu de $a \otimes b$.

ii. **Exemples** : Nous citons, quelques exemples de dioïde:

- L’ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de deux opérations “max” (notée $\oplus$) et l’addition usuelle “+” (notée $\otimes$) est un dioïde commutatif. Les éléments neutres pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ sont respectivement : $-\infty = \varepsilon$ et $0 = e$ ($1 \oplus \varepsilon = 1$, $2 \otimes e = 2$). Ce dioïde noté IR_{max} est appelé traditionnellement “algèbre (max, plus)”.

Exemple : $(x \oplus y) \oplus z = \max(\max(x, y), z) = \max(x, \max(y, z))$

$$x + \max(y, z) = \max(x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

- L’ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, muni de “min” (notée $\oplus$) et de l’addition usuelle est un dioïde isomorphe au dioïde IR_{max} , ($1 \oplus 2 = 1$, $e \oplus +\infty = e$). Il est noté IR_{min} et appelé “algèbre (min, plus)”, l’élément $+\infty$ est noté T .

Alors on a : $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +) = IR_{max}$ et $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) = IR_{min}$.

3.2.1.2. Structure ordonnée dans un dioïde

La nature de la loi additive $\oplus$ permet de définir une relation d'ordre naturel dans un dioïde, nous donnons sa définition ci-dessous.

i. Relation d'ordre dans un dioïde

Une relation R sur un ensemble S est une relation d'ordre si les trois axiomes suivant sont vérifiés $\forall x, y, z \in S$:

- R est réflexive : $x R x$
- R est transitive : si $x R y$ et $y R z$, alors $x R z$
- R est antisymétrique : si $x R y$ et $y R x$, alors $x = y$.

➤ **Définition 1 :** Dans un dioïde $(D, \oplus, \otimes)$, une relation d'ordre naturel notée " $\leq$ " est définie par : $a \leq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$.

Pour le dioïde IR_{max} , cette relation correspond à la relation d'ordre dans l'algèbre usuelle ($1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \oplus 2 = 2$). Dans le dioïde IR_{min} , l'ordre " $\leq$ " défini par : $2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \oplus 2 = 1$ est le dual de l'ordre naturel défini dans IR_{max} .

A partir de la compatibilité de cette relation avec la structure des dioïdes et avec les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ nous pouvons déduire la proposition suivante :

➤ **Proposition :** Soit un dioïde commutatif $(D, \oplus, \otimes)$. La relation d'ordre $\leq$ vérifie les implications suivantes :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in D \quad a \leq b &\implies \forall c \in D, a \oplus c \leq b \oplus c ; \\ a \leq b &\implies \forall c \in D, a \otimes c \leq b \otimes c. \end{aligned}$$

Comme dans l'algèbre usuelle, plusieurs notions sont définies dans la théorie des dioïdes. Nous pouvons parler, par exemple, d'un dioïde complet,

d'une borne inférieure et d'une borne supérieure d'un dioïde, des treillis, applications, etc.

ii. Dioïde complet

Un dioïde $(D, \oplus, \otimes)$ est dit *complet* si toute somme infinie d'éléments de D est définie, et si la loi $\otimes$ est distributive (à gauche et à droite) par rapport à la loi $\oplus$ et cette distributivité s'étend aux sommes infinies. C'est-à-dire pour tout $a \in D$ et pour tout

$S \subset D$, nous avons :

- $\bigoplus_{x \in S} x \in D$;
- $(\bigoplus_{x \in S} x) \otimes a = \bigoplus_{x \in S} (x \otimes a)$ et $a \otimes (\bigoplus_{x \in S} x) = \bigoplus_{x \in S} (a \otimes x)$.

En rajoutant l'élément $+\infty$ aux ensembles IR_{max} , Z_{max} , IN_{max} on obtient des dioïdes complets.

iii. Dioïde matriciel

Un dioïde matriciel $(D^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le dioïde scalaire D . La somme et le produit de deux matrices ou d'une matrice avec un scalaire sont définies par :

Pour $A, B \in D^{n \times n}$ et pour $a \in D$:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} ;$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} ;$$

$$a \otimes (A_{ij}) = (a \otimes A_{ij}).$$

Exemple : Soit A, B deux matrices dans l'algèbre $(\max, +)$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On a
$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max(3,2) & \max(7,0) \\ \max(2,3) & \max(4,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Et
$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(3+2, 7+3) & \max(3+0, 7+1) \\ \max(2+2, 4+3) & \max(2+0, 4+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Les éléments neutres pour les deux lois $\oplus$ et $\otimes$ dans un dioïde matriciel $D^{n \times n}$ sont respectivement : la matrice nulle composée exclusivement de ε et notée aussi e , et la matrice identité notée E et composée de e sur la diagonale, de e partout ailleurs. D'une façon générale, la somme et le produit des matrices (non forcément carrées) dans un dioïde matriciel sont bien définis à condition qu'ils soient compatibles, à savoir :

$$\begin{aligned} \forall A \in D^{n \times m}, B \in D^{n \times m}; \quad & (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}; \\ \forall A \in D^{n \times m}, B \in D^{m \times p}; \quad & (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^m A_{ik} \otimes B_{kj}. \end{aligned}$$

Il est évident que cette structure obéit bien aux axiomes des dioïdes. En revanche, on observe que le dioïde matriciel associé à un dioïde scalaire commutatif n'est pas en général commutatif.

3.2.1.3. Résolution d'équations dans les dioïdes

Dans le cas de la résolution d'un système linéaire matriciel de type $y = A \otimes x \oplus B$, il s'avère nécessaire de calculer la *quasi-inverse* de la matrice A . C'est une matrice connue dans l'algèbre des dioïdes sous le nom "*étoile de Kleene*" et notée A^* .

- **Définition 2 :** Dans un dioïde complet D , l'application étoile de Kleene définie sur D , et notée K est donnée par :

$$K : D \rightarrow D$$

$$x \mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^{\otimes k}.$$

La dérivée de l'étoile de Kleene est une application donnée par :

$$P : D \rightarrow D$$

$$x \mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^{\otimes k}.$$

Les applications K et P sont croissantes et sont liées par la relation suivante :

$$X^* = e \oplus X^+.$$

3.2.2. Représentation d'état

Afin de faciliter la représentation des éléments du modèle graphique, et ensuite la description de ce dernier sous forme d'équations mathématiques, nous affectons aux transitions et aux places de la figure 2.4 des notations que nous explicitons dans le tableau suivant. Ceci nous permet d'obtenir le modèle GET de la figure 2.5. Dans celui-ci, chaque arrêt Sa_j ($j \in \{i, i+1\}$) est "agrégé" dans le trajet $Sc(L_j) \rightarrow Sd_j$; de même le temps de déplacement du bus B_j sur ce trajet est τ_j au lieu de $\tau_{j,2} + \tau_{j,3}$. Cette agrégation s'explique par le fait que nous nous intéressons dans cette étude uniquement aux stations de correspondance et aux stations de départ des deux lignes.

Eléments de réseau pour la ligne L_j avec $j \in \{i, i+1\}$	Correspondances dans le GET
Dep_j	u_j
Sd_j	$x_{j,1}$
$Sc(L_j)$	$x_{j,2}$
$AP_{i,i+1}$	P_i
$P_{j,1}$	$P_{j,1}$
$P_{j,2}, Sa_j$ et $P_{j,3}$	$P_{j,2}$

Tableau : Correspondance entre les éléments du réseau de bus et ceux du GET.

Pour le modèle GET de la figure 2.5, à chaque transition x nous associons une variable d'état $x(k)$, appelée dateur, qui représente la date du k ème franchissement de cette transition.

L'évolution au cours du temps des différents franchissements des transitions se traduit analytiquement dans l'algèbre usuelle par le système d'équations linéaires (1), sachant que chaque transition validée est franchie immédiatement. Dans ce système, on considère l'opérateur "max" habituel comme un opérateur d'assemblage de deux grandeurs (produits dans un système de production, bus-passagers dans un système de transport, etc.). Cet assemblage peut être effectué uniquement au moment où la grandeur qui arrive au plus tard au lieu d'assemblage est disponible, c'est à dire à la date qui correspond au maximum des dates de disponibilité de deux grandeurs. De même, la notion d'*addition* de deux ou plusieurs grandeurs correspond à l'opérateur "+" usuel. Les deux opérateurs (max et +) sont propres aux cas discrets, où on s'intéresse à la date d'occurrence des événements.

En définissant les variables d'état associées à la station de correspondance des deux lignes et ainsi que les dateurs associés à ces variables, il est temps d'exprimer les critères à évaluer, à savoir les dates de passage des bus aux

arrêts considérés et le temps de correspondance. Compte tenu de l'hypothèse émise précédemment sur l'alternance des bus des deux lignes, la kème correspondance est assurée par le kème passage du bus B_{i+1} à l'arrêt $Sc_{i,i+1}$. Ce bus récupère alors uniquement les passagers descendant du bus B_i passant également à ce niveau pour la kème fois. Nous notons donc par $T_{i,i+1}(k, k)$ le kème temps de correspondance en $Sc_{i,i+1}$. Ce temps s'exprime en effectuant la différence des dates d'arrivée (et/ou de départ) à l'arrêt $Sc_{i,i+1}$ des bus B_i et B_{i+1} , soit des dates de franchissement des transitions $X_{i,2}$ et $X_{i+1,2}$. Les critères à évaluer sont donc les suivants :

$X_{i,1}(k)$, $X_{i,2}(k)$, $X_{i+1,1}(k)$ et $X_{i+1,2}(k)$, pour tout $k \geq 1$;

$T_{i,i+1}(K, k) = X_{i+1,2}(k) - X_{i,2}(k)$, pour tout $k \geq 1$.

A partir des éléments du tableau, nous obtenons le modèle graphique suivant :

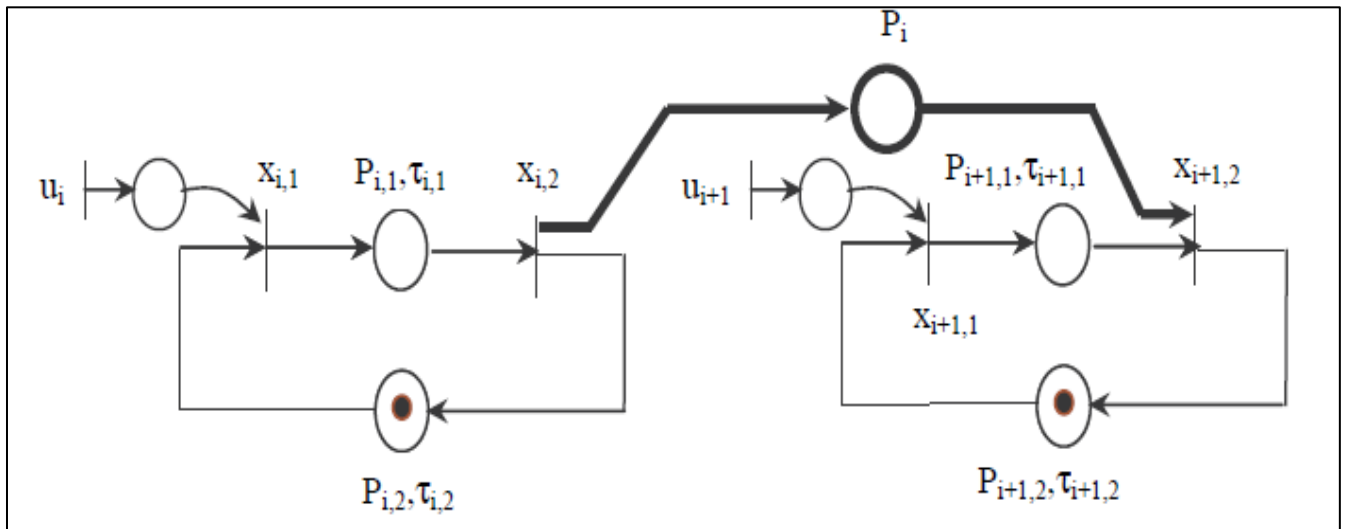


Figure 3.5 : Le modèle GET des deux lignes Li et Li+1.

$$\forall K > 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{i,1}(k) = \max [\tau_{i,2} + X_{i,2}(k-1), u_i(k)] \\ X_{i,2}(k) = \tau_{i,1} + X_{i,1}(k) \\ X_{i+1,1}(k) = \max [\tau_{i+1,2} + X_{i+1,2}(k-1), u_{i+1}(k)] \\ X_{i+1,2}(k) = \max [\tau_{i+1,1} + X_{i+1,1}(k), X_{i,2}(k)] \end{array} \right. \quad (1)$$

En utilisant les notations des dioïdes, nous traduisons ensuite le système (1) sous forme d'un système d'équations (max, plus) linéaires stationnaires. Nous obtenons ainsi :

$$\forall K > 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{i,1}(k) = \tau_{i,2} \otimes X_{i,2}(k-1) \oplus u_i(k) \\ X_{i,2}(k) = \tau_{i,1} \otimes X_{i,1}(k) \\ X_{i+1,1}(k) = \tau_{i+1,2} \otimes X_{i+1,2}(k-1) \oplus u_{i+1}(k) \\ X_{i+1,2}(k) = \tau_{i+1,1} \otimes X_{i+1,1}(k) \oplus X_{i,2}(k) \end{array} \right. \quad (2)$$

Nous définissons le vecteur d'état

$X(k) = [X_{i,1}(k), X_{i,2}(k), X_{i+1,1}(k), X_{i+1,2}(k)]^T$ dont les composantes sont les variables internes du système, et le vecteur d'entrée

$U(k) = [U_i(k), U_{i+1}(k)]^T$. La représentation matricielle du système (2) est alors donnée sous forme de l'équation implicite

$$\forall K > 1 \quad X(k) = A_0 \otimes X(k) \oplus A_1 \otimes X(k-1) \oplus B \otimes U(k). \quad (3)$$

A_0 et A_1 représentent les matrices caractéristiques du système, et sont à coefficients constants dans le dioïde IR_{max} (ces coefficients représentent les données du système), avec :

$$A_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \tau_{i+1,1} & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'effet des conditions initiales sur la réponse du système, c'est pourquoi nous considérons, dans ce qui suit, le système à entrer nulle : $\forall K > 1, U(K) = [\varepsilon, \varepsilon]^T$. Sous cette hypothèse, l'équation implicite (3) peut être transformée en une équation de récurrence explicite en calculant l'étoile de Kleene A_0^* (définition 2). La plus petite solution de (3) est alors donnée sous forme de l'équation récurrente d'ordre 1 (4).

$$\begin{aligned} \forall K > 1, \quad X(k) &= A_0^* \otimes A_1 \otimes X(k-1) \\ &= A \otimes X(k-1). \end{aligned} \quad (4)$$

Avec :

$$A_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \tau_{i,1} & e & \tau_{i+1,1} & e \end{bmatrix}, \text{ et } A = A_0^* \otimes A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \tau_{i,2} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i,1} & \tau_{i,2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{i+1,2} \\ \varepsilon & \tau_{i,1} & \tau_{i,2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{i+1,1} & \tau_{i+1,2} & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation d'un système de transport public par les réseaux de petri le système de transport étudié est composé de deux lignes de bus, et nous avons étudié la représentation d'état dans l'algèbre (max, plus).

Conclusion générale

La modélisation de l'évolution du système de transport représente un moyen très efficace et permet une meilleure compréhension des paramètres des systèmes des réseaux. En effet, cette modélisation tient aussi une place importante du fait qu'elle permet de donner une représentation simplifiée du monde réel et permet ainsi une meilleure compréhension du système étudié.

L'objectif de la modélisation consiste à décrire de façon simple les parties du système que l'on veut analyser. Le processus de la modélisation consiste à décomposer le système à étudier en plusieurs sous-systèmes dans le but est de simplifier son analyse.

Un nombre significatif de recherches a été consacré à l'étude des systèmes de transport urbain. Nous rappelons dans ce mémoire un état de l'art sur la modélisation de réseau de transport urbain et nous présentons la modélisation par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus). L'objectif principal de leur étude est de répondre aux exigences de qualité des services de transport en commun. Il consiste à assurer une meilleure gestion des correspondances en minimisant les temps d'attente de passagers.

Le fonctionnement des bus au niveau des arrêts de correspondance présenté dans ce mémoire est le cas où les bus attendent pour échanger les passagers aux arrêts de correspondance. Pour modéliser ce système, nous utilisons un graphe d'événements temporisés et un modèle (max, plus) linéaire stationnaire.

Bibliographie

- [1] BELAYACHI Naima, " Etude et modélisation du fonctionnement d'un réseau de transport modèle (RTM)". Université d'Oran, 2012.
- [2] Ahmed Nait-Sidi-Moh, " Contribution à la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes à événements discrets par les réseaux de Petri et l'algèbre (max, plus) : Application aux systèmes de transport". Mathématiques. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, 2003.
- [3] Saleh ZIDI, " Système d'aide à la régulation et la reconfiguration des réseaux de transport multimodal". Université des sciences et technologies de Lille, 2007.
- [4] TEBANI Karima, " Commande des systèmes à événements discrets à temps critiques, application aux systèmes de commande en réseau". Faculté du génie électrique et informatique.