UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Licence Mathématiques et Applications

(MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

La sommabilité dans un espace

Réalisé par:

Dairi, Safia

Encadré par:

Bekkali, Mohamed

Soutenu le 07 juin 2017

Devant le jury composé de:

Gmira, Seddik	**FST**
Bekkali, Mohamed	**FST**

Année Universitaire 2016 / 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu, je remercie Dieu, le tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que la patience pour dépasser toutes les difficultés.

En second lieu, je tiens à remercier monsieur M. Bekkali d'avoir supervisé ce travail.

Mes vifs remerciements vont également au membre du jury Monsieur le professeur S. Gmira.

Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DÉDICACE

AU NOM DU DIEU LE CLÉMENT & MISÉRICORDIEUX;
louange à ALLAH *seul le tout Puissant!*

Je dédie ce modeste travail en signe de respect, reconnaissance et de remerciement:

A mes chers parents, pour leurs sacrifices, amour, tendresse, soutien et leurs prières tout au long de mes études,

A mes chers frères et ma chère sœur Fatima, A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

Au plus petits de la famille: Med, Sara, Yassir, Abdou & Zaid,

A ma chère amie Widade,

A tout ceux qui ont participé à l'élaboration de ce modeste travail et tous ceux qui me sont chers.

Merci d'être toujours là pour moi.

CONTENTS

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, nous allons parler **en premier** lieu de la notion du comptage et la problématique qu'on rencontre si on veut passer du fini à l'infini. **En deuxième** lieu, la notion de la série s'impose et de là les séries doubles. **Après**, nous introduisons la notion des familles sommables i.e., la somme d'une famille de nombres indexée par un ensemble infini qui n'est pas forcément $\mathbb{N}$.

CHAPTER 1

ESPACES DE BANACH

La problématique du comptage.

• Tout d'abord comment se pose le problème de l'addition d'un nombre infini de termes?: Quand on additionne deux nombres on obtient un nombre (je veux dire: je peux associer un nombre à cette somme ; 2+3=5. On aurait pu dire c'est 2+3 tout court. Mais on veut savoir si cette opération permet d'associer à la somme de deux quantités une autre quantité qui est un nombre. Dans la suite de cette logique, la somme d'un nombre fini d'éléments est un nombre fini même si l'opération à faire semble pas facile à voir; par exemple trouver la somme de 10^{10} nombre premiers de nombres premiers!) Quand on indexe un nombre fini d'éléments on a tendance à les écrire dans **l'ordre croissant** des indices ce qui soulève une question: Et si on faisait autrement? On aurait pu les écrire dans n'importe quel ordre des indices. Ceci soulève le problème de savoir si la somme d'un nombre fini d'éléments dépend ou pas de leurs ordre dans l'écriture de leur somme? Comme on sait, que l'ordre ne change pas les sommes finies, on a choisi d'écrire la somme suivant l'ordre croissant des indices.

• *Pourquoi écrit-on les sommes dans un ordre croissant d'indices?:* Maintenant, si on passe à l'infini, il y a plusieurs visions de concevoir la somme d'un nombre infini de termes. Une façon de se faire est de prendre la limite des sommes $s_n := x - 1 + \cdots + x_n$. Quand cette limite existe, on la note par $\sum_0^\infty x_k$: C'est l'approche des séries classique.
• *A-t-on besoin de Cauchy tout le temps?:* Dans le cas le plus général, ce n'est pas facile de montrer l'existence d'une limite. De plus, les espaces les plus fréquents sont complets (i.e., toute suite de Cauchy est convergente.)
• *Peut-on ajouter autant qu'on veut de termes?: par exemple peut-on ajouter les poids de toutes les particules de l'univers:* Quand on ajoute la logique de la chose nous dite sa logique....On ne peut additionner qu'un nombre dénombrable d'éléments.

Deux théorème s'imposent dans ce chapitre. On va les aborder avec ces rappels.

Définition 1.0.1.
Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (qui sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\| \,.\, \|$ telle que:
a. $\| x \| \geq 0$, $\forall x \in E$ *et* $\| x \| = 0$ *ssi* $x = 0$;
b. $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| \quad , \forall x, y \in E$;
c. $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E$;

Un espace vectoriel normé (e.v.n.) est un couple $(E, \| \,.\, \|)$. Il s'agit d'un cas particulier (où on peut additionner et multiplier par un scalaire) d'espace métrique muni de la distance:

$$d(x, y) := \| x - y \|, \forall x, y \in E$$

D'autre part, noter que la topologie sur E est la topologie de l'espace métrique (E, d). Par suite on dira qu'une suite $(x_n) \subset E$ converge vers $x \in E$ lorsque $lim_n d(x_n, x) = 0$.

Proposition. 1.0.0.1.
1. $| \, \| x \| - \| y \| \, | \leqslant \| x - y \|, \forall x, y \in E$;
2. Si $x_n \to x$ *alors* $\| x_n \| \to \| x \|$, *lorsque* $n \to \infty$;
3. Si $\alpha_n \to \alpha$, $x_n \to x$, *alors* $\alpha_n x_n \to \alpha x$, *lorsque* $n \to \infty$;
4. $x_n \to x$, $y_n \to y$, *alors* $x_n + y_n \to x + y$, *lorsque* $n \to \infty$;

Preuve: Noter que

$$\| x - y \| \geq \| x \| - \| y \|$$

et

$$\| x - y \| = | - 1| \, \| y - x \| \geq \| x \| - \| y \| \,.$$

D'où la première inégalité. De cette inégalité, le deuxième point est immédiat. Pour le dernier point on utilise l'inégalité triangulaire:

$$\| (x+y)-(x_n+y_n) \| = \| (x-x_n)+(y-y_n) \| \leqslant \| x-x_n \| + \| y-y_n \| .$$

De plus,

$$\| \alpha x-\alpha_n x_n \| \leqslant \| \alpha x-\alpha_n x \| + \| \alpha_n x-\alpha_n x_n \| = |\alpha-\alpha_n| \| x \| + |\alpha_n| \| x-x_n \| .$$

On déduit le dernier point puisque (α_n) est une suite bornée.

Remarque 1.0.2.
Par suite $\| \cdot \|$ est lipschitzienne (donc uniformément continue sur E) et les opérations $(x,y) \mapsto x+y$ et $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ sont continues.

Définition 1.0.3.
Une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est dite de Cauchy si $\lim_{n,m\to\infty} \| x_n-x_m \| = 0$. Un e.v.n. est dit espace de Banach s'il est complet en tant qu'espace métrique, autrement dit, si toute suite de Cauchy converge dans E.

Remarque 1.0.4.
Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente, alors elle est de Cauchy. De plus, si une suite admet une limite, alors la limite est unique car tout espace métrique est séparé.

Proposition. 1.0.0.2.
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans e.v.n E. Alors (x_n) est bornée dans E.

Preuve: Comme (x_n) est de Cauchy, on peut trouver un entier $n_1 \geq 1$ tel que $\| x_n - x_{n_1} \| \leqslant 1$. Alors $\| x \| \leqslant \| x_n - x_{n_1} \| + \| x_{n_1} \| \leqslant 1 + \| x_{n_1} \|$, pour chaque $n \geq n_1$. On déduit que

$$\| x_n \| \leqslant \max \{ \| x_1 \|, \| x_2 \|, ..., \| x_{n_1-1} \|, 1 + \| x_{n_1} \| \}$$

Proposition. 1.0.0.3.
Soit M un sous-espace d'un espace de Banach E. M est un espace de Banach ssi M est un fermé de E.

Preuve: Supposons M fermé et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans M; puisque la norme sur M est la restriction de la norme sur E, la suite est de Cauchy dans E, donc elle convergente vers un $x \in E$. Mais la suite étant dans M et M étant fermé, on déduit que $x \in M$, donc M est complet. L'autre implication se démontre de la même façon.

Définition 1.0.5.
Soit E un e.v.n. On dit que E est séparable s'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ qui est dense dans E.

Les deux théorèmes suivants sont donnés sans preuves.

Theorem. 1.0.0.4 (**Caractérisation**).
Les assertions suivantes sont équivalentes:
1. $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach;
2. Toute série absolument convergente est convergente;
3. Pour toute suite $(x_n)_n$ vérifiant $\|x_n\| \leq c^n$ avec $0 < c < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ est convergente.

Une autre question qui s'impose est la suivante: Quand un espace normé $(E, \|.\|)$ n'est pas complet, peut on le plonger dans un espace de Banach $\tilde{E}$ avec une norme issue de $\|.\|$? la réponse est donnée avec le théorème suivant.

Theorem. 1.0.0.5 (**Plongement dans un Banach**).
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. qui n'est pas complet. Alors E est ***isomorphe*** *et isométrique avec un sous-espace vectoriel* ***dense*** *d'un espace de Banach.*

1.0.1 Exemples d'espaces de Banach

1. $C([0;1];\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme
$$\| x \|_\infty = \sup\{|x(t)|,\ \forall t \in [0,1]\}$$
est un espace de Banach séparable, noté dans la suite $C([0;1])$.

2. $K^d = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ muni des normes
$$\| x \|_p = \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1 \quad \| x \|_\infty = \max\{|x_j|,\ j = 1, ..., d\}$$
sont des espaces de Banach séparables, notés dans la suite l_p^d, $p \in [1, \infty]$.

3. L'espace vectoriel $\left\{(x_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{K} \ : \ \sum_{j\geq 1} |x_j|^p < \infty\right\}$ $(p \in [1, \infty])$ muni de la norme

$$\| x \|_p = \left(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1$$

   est un espace de Banach séparable, noté l_p.

4. L'espace vectoriel $\{(x_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{K} \ \textit{borne}\}$ muni de la norme

$$\| x \|_p = \sup \{|x_j|, \ \forall j \geq 1\}$$

   est un espace de Banach non-séparable, noté l_∞.

5. L'espace vectoriel $\{(x_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{K} \ \textit{convergente}\}$ muni de la norme

$$\| x \|_p = \sup \{|x_j|, \ \forall j \geq 1\}$$

   est un espace de Banach séparable, noté c.

CHAPTER 2

SÉRIES DOUBLES

• La notion d'une série de nombres réels se généralise à d'autres dimensions (c'est à dire à des ensembles partiellement ordonnés comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) ou d'autres qui sont plus subtiles. La plupart des résultats, relatifs aux séries ont leurs équivalents dans les séries multiples moyennant une adaptation du contexte.

• La difficulté est de trouver une définition de la limite qui ne dépendera pas de l'ordre des indices avec lequel on cherche cette limite tout en gardant la croissance des indices. De plus, elle doit être indépendente de n'importe quel choix de sommation tout en gardant la croissance des indices aussi. Changer la position des termes dans les sommes partielles neccéssitent une autre façon de se faire.

Définition 2.0.1.
Une ***suite double*** $(u_{m,n})_{m,n}$ *est la donnée d'une application de* $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$*. La* ***série double*** $\sum u_{m,n}$ *est la donnée de la suite double dont ses termes sont des sommes finies de* $u_{m,n}$.

2.1 Convergence d'une série double

- Soit $(u_{m,n})_{m,n}$ une suite double. on dit que cette suite converge vers le réel l, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, N \in \mathbb{N} \text{ } tel \text{ } que \text{ } [\ (m > M \ \& \ n > N) \Rightarrow (|u_{m,n} - l| < \varepsilon)\ ].$$

- On dit que la série double du terme général $(u_{m,n})$ et de sommes partielles $S_{m,n} := \sum_{i \leq n; j \leq m} u_{i,j}$ converge vers la limite S si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M, N \in \mathbb{N} \text{ } tel \text{ } que \text{ } [\ (m > M \ \& \ n > N) \Rightarrow (|S_{m,n} - S| < \varepsilon)\ ].$$

  Autrement dit, la convergence de la série double est équivaut à la convergence de la suite double des sommes partielles

- On dit que la série double de terme général $(u_{m,n})$ est convergente lorsque les deux conditions suivantes sont réunies:

  1. Pour tout m (fixé), $\sum_n u_{m,n}$ est convergente;
  2. Posant $v_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$, la série du terme général v_m est convergente.

  Dans ce cas on dit que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_m$ est la somme de la série double et l'on note $S = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$.

Remarque 2.1.1. *Une condition nécessaire pour que la série double du terme général* $(u_{m,n})$ *soit convergente est que* $\lim_{(m,n) \longrightarrow +\infty} u_{m,n} = 0$.

2.2 Convergence absolue d'une série double

Définition 2.2.1. *On dit qu'une série double du terme général* $u_{m,n}$ *est absolument convergente si la série double du terme général* $|u_{m,n}|$ *est convergente.*

LEMMA 2.2.2. *La série numérique double $\sum_n u_{m,n}$ est absolument convergente si, et seulement si $\exists K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall N\ \forall M\ \ \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}|u_{m,n}| \leqslant K$. De plus, pour tout bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(k)}$ est absolument convergente et la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ ne dépend pas du choix de σ.*

Preuve: Supposons que $\sum u_{m,n}$ est absolument convergente et que, dans la définition, $(\sigma(k))_k$ est donnée tel que la série $\sum u_{\sigma(k)}$ est absolument convergente.

On peut prendre $K = \sum |u_{\sigma(k)}|$. En effet, si N,M sont donnés, $I = [0, M]\times[0, N]\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ étant fini, il existe L tel que $I \subset \sigma([0, L] \cap \mathbb{N})$. Ainsi,

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}|u_{m,n}| \leq \sum_{k=0}^{L}|u_{\sigma(k)}| \leq K$$

Réciproquement, pour chaque $L \in \mathbb{N}$, il existe $M = N$ tel que tous les $\sigma(k)$ soient dans le carré $[0, N] \times [0, N]$ pour $k = 0, 1, ...L$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{L}|u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}|u_{m,n}| \leq K$$

pour le K donné en hypothèse.

La deuxième affirmation découle de la convergence (commutative) des séries absolument convergentes.

2.3 Critère de Stolz

Définition 2.3.1. *Le critère de Stolz est l'équivalent du critère de Cauchy pour les séries doubles, il peut s'énoncer ainsi:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p,\ q:\ (m > p,\, n > q) \to |\, S_{m+i,n+j} - S_{m,n}| < \varepsilon \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

D'où le résultat suivant: Le critère de Stolz est une condition nécessaire et suffisante de convergence pour les séries doubles.

Corollaire 2.3.2. *Toute série double absolument convergente est convergente*

Theorem. 2.3.0.1 (Fubini)**.** *soit $\sum a_{n,m}$ une série double absolument convergente. Alors, pour chaque n fixé (n=**n**) la série $\sum a_{\boldsymbol{n},m}$ est convergente. De même pour chaque m fixé (m=**m**), la série $\sum a_{n,\boldsymbol{m}}$ est convergente. De plus on a:*

$$\sum_{n=0,m=0}^{+\infty} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m} \right\} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m} \right\}$$

On peut le voir comme un théorème d'invertissement de limites

$$\lim_{N\to+\infty} \lim_{M\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m} = \lim_{M\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m}$$

Preuve: Soit K, majorant toute somme des modules des termes pris dans un rectangle d'indices. soit n fixé, indice d'une ligne (en pensant aux termes d'une série double comme aux éléments d'une matrice doublement infinie) nous avons:

$$\forall N \ \sum_{m=0}^{N} |a_{n,m}| \leqslant \sum_{k=0}^{M} \sum_{m=0}^{M} |a_{k,m}| \leqslant K$$

pour $M = \max(n, m)$.
ce qui prouve que les termes d'une même ligne, sont les termes d'une série absolument convergente. Un raisonnement similaire montre qu'il en va de même pour les colonnes. Soient $l_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}$, $c_m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}$, les sommes dont nous venons de justifier l'existence, puis notons $L_n = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{n,m}|$ et $C_m = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n,m}|$, or $|l_n| \leq L_n$, $|c_n| \leq C_n$. Notons V la somme totale, premier membre de l'identité de Fubini à établir. Dans la majoration

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m} \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{m=0}^{M} a_{n,m} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} |a_{n,m}| \leqslant K$$

nous pouvons passer à la limite en M:

$$\lim_{M\longrightarrow+\infty}\left|\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\right|\leq\sum_{n=0}^{N}\left|\lim_{M\longrightarrow+\infty}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\right|\leqslant\sum_{n=0}^{N}|l_n|\leqslant K$$

ce qui prouve que $\sum l_n$ est absolument convergente.
De manière similaire, l'on a que $\sum c_n$ est aussi absolument convergente.

Chacun des membres de Fubini est ainsi bien défini.
Pour prouver l'égalité à V, commençons par prendre $\varepsilon>0$, considérons N',M' tels que

$$\left|V-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

dès que N, M dépassant N', M' respectivement.
Prenons un $N>N'$ quelconque. Puisque chacune des séries l_n est absolument convergente, nous avons aussi des estimations de restes.
il existe pour chaque $n=0,1,....N$ un M_n tel que si $S\geq M_n$,

$$\left|l_n-\sum_{m=0}^{S}a_{n,m}\right|<\frac{\varepsilon}{2N}$$

Ainsi, en considérant $M^*=\max\{\{M_n/n=0,1,....N\},M'\}$,

$$\forall M\geq M^*,n=0,1,....N\Rightarrow\left|l_n-\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\right|<\frac{\varepsilon}{2N}$$

$$et\ \left|\sum_{n=0}^{N}l_n-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{S}a_{n,m}\right|<\frac{\varepsilon}{2N}$$

Ainsi, pour chaque $\varepsilon>0$, il existe N', M' tels que $\forall N\geq N'$,$M\geq M^*$,

$$\left|V-\sum_{n=0}^{N}l_n\right|\leqslant\left|V-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\right|+\left|\sum_{n=0}^{N}l_n-\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ce qui prouve la première égalité de Fubini, la deuxième est similaire.

Remarque 2.3.3. • *La propriété de Fubini s'appliquera en particulier aux séries doubles convergentes à termes positifs.*

On remarquera donc que si la suite double u_{ij} est positive et si l'une des séries doubles diverge alors l'autre aussi.

• *La propriété de Fubini ne s'applique pas aux séries qui ne sont pas absolument convergentes. En effet, si on pose*

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ i = j \\ \frac{1}{i^2+j^2} & si\ i \neq j \end{cases}$$

on admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Fixant i, montrer que pour $i \neq 0$, on a $v_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = \frac{1}{4i^2}$ *(on remarquera, pour $i \neq 0$, que* $\frac{1}{i^2+j^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{i+j} + \frac{1}{i-j}\right)$*)*

calculer $A = \sum_{i=0}^{+\infty} v_i$*, calculer* $B = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$*, et vérifier que $A \neq B$, Que peut on dire de la série double du terme général $|u_{ij}|$? .*

2.4 Propriétés des séries absolument convergentes

2.4.1 Sommation par paquets

Si la série double du terme général u_{ij} converge absolument alors sa somme ne change pas si on somme les termes par paquets.

La sommation par paquet consiste à choisir une partie $(A_k)_{k\in K}$ de $\mathbb{N}^2$ et à calculer $\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A_k} u_{ij}$

Par exemple:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{2i,2j} + \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{2i+1,2j} + \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{2i,2j+1} + \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{2i+1,2j+1}$$

2.4.2 Changement d'ordre de sommation:

Si la série double du terme général u_{ij} converge absolument alors sa somme ne dépend pas de l'ordre de la sommation de ses termes.

si σ est une permutation de $\mathbb{N}^2$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{\sigma(i,j)}.$$

2.5 Convergence absolue pour les séries indixées sur $\mathbb{Z}$

Définition 2.5.1.
Une série numérique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ est la donnée d'une application $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, dont on se propose d'étudier la convergence.

La série est dite avoir une **somme principale**, si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \{a_{-n} + a_n\}$ est convergente auquel cas sa somme est dite **la valeur principale** de la somme de la série indixée sur $\mathbb{Z}$.
Une série numérique indixée sur $\mathbb{Z}$ est dite **sommable** s'il existe $l \in \mathbb{K}$, tel que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, \text{une partie finie} \, I_\varepsilon \in \mathbb{Z}^{<\omega} \ \text{telle que} \ \left| \sum_{n\in I_\varepsilon} -l \right| < \varepsilon$$

On pose $l := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$. Noter que le terme *sommable* correspond en général à la *convergence commutative.*

Proposition. 2.5.0.1. *Une série numérique indicée par $\mathbb{Z}$ est absolument convergente si et seulement si, il existe K, tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} |a_n| \leqslant K$.*

Dans ces cas, la série $\sum \{a_{-n} + a_n\}$ est convergente et sa somme est la somme de la série indixée sur $\mathbb{Z}$. De plus les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_{-n}$ sont absolument convergentes et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$. il *faut prendre garde de ne pas compter deux fois, le terme a_0.*
• En guise de complément, on peut mentionner que si l'on se donne une application $\lambda : \Gamma \to \mathbb{K}$ on peut la penser comme une sorte de suite généralisée, et tenter de concevoir la somme de tous ses termes. On dira d'une telle suite, que c'est une famille de nombres. On est réduit à donner la définition suivante:

Définition 2.5.2.
La famille $\sum a_\lambda$ *est sommable, s'il existe* $l \in \mathbb{K}$ *tel que pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un ensemble fini* $I_\varepsilon \in \Gamma^{<\omega}$ *tel que:*

$$\left| \sum_{\lambda \in I_\varepsilon} a_\lambda - l \right| < \varepsilon$$

Bien évidement le nombre l *sera dit la somme de cette expression, et l'on posera* $\sum_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda = l$*.*

LEMMA 2.5.3. *soit* $(a_\lambda)_\lambda \in \Gamma$ *une famille de nombres réels positifs ou nuls.* ***Si la famille est sommable, alors seulement un nombre dénombrable de ses membres est non nul****. On est ramenés aux séries absolument convergentes! Il est clair que* $0 \leq l = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in A} a_\lambda : \ A \in \Gamma^{<\omega} \right\}$

Preuve: Supposons la famille sommable, et écrivons $l = \sum_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda$ pour sa somme. Notons pour $\varepsilon > 0$,

$$J_\varepsilon = \{\lambda \in \Gamma : \ a_\lambda > \varepsilon\}$$

et

$$J = \{\lambda \in \Gamma : \ a_\lambda > 0\}.$$

Si I est un ensemble à n éléments contenu dans J_ε, on aura:

$$n\varepsilon \leqslant \sum_{\lambda \in \Gamma} a_\lambda \leqslant l$$

Par suite, $n \leqslant \frac{l}{\varepsilon}$, J_ε ne peut avoir plus de $\frac{l}{\varepsilon}$ éléments. En particulier, c'est un ensemble fini. Or $J = \bigcup_{m=0}^{+\infty} I_{\frac{1}{m}}$, réunion dénombrable d'ensembles finis; par suite, il est dénombrable.

CHAPTER 3

FAMILLES SOMMABLES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

Nous allons généraliser la notion de série en essayant de donner un sens à une expression de le forme $\sum_{i\in I} u_i$ où I est un ensemble infini. Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel normé, I un ensemble infini quelconque (appelé ensemble des indices) et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, indexé par I. Pour chaque partie finie J de I, la somme $\sum_{i\in J} u_i$ a un sens (c'est la somme d'un nombre fini d'éléments de E): Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, cette somme sera simplement notée S_J. On se propose de donner un sens à la somme infinie $(u_i)_{i\in I}$ indépendamment de toute ordination de I. Partons de la définition de la convergence d'une série de vecteurs du terme général u_k dans un espace vectoriel normé E. Ici l'ensemble d'indexation est $\mathbb{N}$. On dit que cette série converge et a pour somme le vecteur S de E, si la suite des sommes partielles $S_n := u_0 + u_1 + ... + u_n$ converge vers S, autrement dit si $\| S_n - S \|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Ceci s'écrit encore:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \ \ \| S_n - S \| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Si on veut généraliser ceci à une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ où I est un ensemble infini quelconque, on se heurte immédiatement à une difficulté, c'est qu'une écriture comme " $\forall i \geq i_0$ ", n'a en général pas de sens si I n'est pas muni d'une relation d'ordre. Essayons de traduire l'idée exprimée par (3.1) sans faire appel à la structure d'ordre de $\mathbb{N}$. On remarque que pour cela que S_n réalise une approximation de S par la somme d'un nombre fini de termes de la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec une erreur $\| S_n - S \|$ inférieure à ε. Cette approximation peut être réalisée par une somme finie indexée par n'importe quel intervalle $K_n := [0, n]$ pourvu que $n \geq n_0$. Pour se débarrasser de la relation d'ordre intervenant dans cette dernière écriture on la reformule en $K_n \supset K_{n_0}$. Réécrivons maintenant (3.1) à l'aide des ensembles emboîtés K_n.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_{n_0} = [0, n_0]\,, \forall K_n \supset K_{n_0}, \left\| \sum_{k\in K_n} -S \right\| < \varepsilon \tag{3.2}$$

Au risque d'insister lourdement, notons que dans l'écriture, " $\forall K_n \supset K_{n_0}$ ", K_n désigne non pas n'importe quelle partie finie de $\mathbb{N}$, mais un ensemble fini de la forme $\{0, 1, 2, ...n\}$. Avons-nous réussi ainsi à expurger (3.1) de la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. En fait non, nous avons seulement réussi à la cacher dans la définition des ensembles K_n d'entiers *consécutifs* entre 0 et n. Si on veut vraiment généraliser à un ensemble d'indexation I quelconque, on est donc condamné à renoncer à cette structure particulière des K_n et à ne retenir que leur finitude. On est ainsi amené à introduire une *nouvelle* notion de convergence pour la série de terme général u_k :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J\ fini \subset \mathbb{N}, \forall K\ fini\ tel\ que\ J \subset K \subset \mathbb{N}, \left\| \sum_{k\in K} u_k \right\| < \varepsilon \tag{3.3}$$

Pourquoi avons-nous pris la précaution de qualifier cette convergence de *nouvelle*?
Parce qu'il est clair que (3.3) implique (3.2) et donc (3.1), rien ne nous permet d'affirmer que la réciproque est vraie. Nous verrons d'ailleurs ci-dessous que cette réciproque est fausse pour les séries qui ne sont pas commutativement convergentes.

Définition 3.0.1 (Famille sommable)**.** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que cette famille est* sommable *s'il existe un élément S de E tel qu'à chaque nombre $\varepsilon > 0$ on puisse associer une partie finie J_ε de I vérifiant*

$$\left\| S - \sum_{i\in J} u_i \right\| < \varepsilon \tag{3.4}$$

pour toute parties finie J de I contenant J_ε. On dit alors que S est la somme *de la famille $(u_i)_{i\in I}$ et on écrit $S = \sum_{i\in I} u_i$.*

La somme d'une famille sommable est unique. En effet, si S et S' satisfont tous les deux la condition (3.4) établie dans la définition (3.0.1) avec la même famille $\{u_i, i \in I\}$ avec l'ensemble fini J_ε " associé " à S' n'a aucune raison d'être le même que pour S nous le noterons plus tard J'_ε. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $K = J \cup J'$ une partie finie de I contenant à la fois J_ε et J'_ε.
donc $\| S - S_k \| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\| S' - S_k \| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Par inégalité triangulaire, $\| S - S' \| \leqslant 2\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ est vraie $\forall \varepsilon > 0$, $\| S - S' \| = 0$ on en déduit que $S = S'$.

Remarque 3.0.2. *Soit E un espace vectoriel normé.*

1. *Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable d'éléments de E, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est bornée.*
2. *La sommabilité d'une famille d'éléments de E est inchangée si la norme est $\| \,.\, \|$ est remplacée par une autre norme équivalente.*
3. *La nature d'une famille (le fait d'être, ou non, sommable) ne change pas si l'on supprime un nombre fini de termes. Autrement dit, si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E et si J est une partie finie de I, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(u_i)_{i\in I\setminus J}$ est sommable, et dans ce cas, on a*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\in I/J} u_i$$

4. *Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E et J une partie de I telle que pour tout $i \notin J$, on ait $u_i = 0$, alors les deux familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_i)_{i\in J}$ sont de même nature. Si elles sont sommables, alors elles ont des sommes égales; autrement dit, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in J} u_i$.*
5. *Pour qu'une famille $(u_k)_{k\in I} = (a_k + ib_k)_{k\in I}$ de nombres complexes soit sommable, il faut et il suffit que les familles $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_k)_{k\in I}$ respectivement constituées par leurs parties réelles et imaginaires, soient sommables.*

Proposition. 3.0.0.1. *(Sommabilitś et combinaison linéaire). Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles dans le même espace vectoriel normé E, ayant même ensemble d'indexation I. Notons S et S' les sommes respectives. Alors pour tous scalaires a et b, la famille $(au_i+bv_i)_{i\in I}$ est sommable dans E, de somme $aS + bS'$.*

Preuve: Il est claire qu'il suffit de traiter les deux cas particuliers de $(u_i + v_i)_{i\in I}$ et $(au_i)_{i\in I}$.

Commençons par le premier. Par hypothèse de la sommabilité de $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, deux parties finies J et J' de I telle que pour tous K, K' finis tels que $J \subset K \subset I$ et $J' \subset K' \subset I$, $\| S - S_K \| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\| S' - S'_{K'} \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ces deux inégalités sont vraies en particulier pour $K = K' = L$ où L n'importe quelle partie finie de I contenant $J \cup J'$. Par l'inégalité triangulaire, on a alors $\| (S + S') - (S_L + S'_L \| < \varepsilon$. Par les propriétés de l'addition dans E et la finitude de L, on a

$$S_L + S'_L = \sum_{i\in L} u_i + \sum_{i\in L} v_i = \sum_{i\in L}(u_i + v_i)$$

On a donc bien vérifié que $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable et sa somme $S + S'$. Il reste à montrer $(au_i)_{i\in I}$ est sommable et de somme aS.
d'après l'hypothèse on a $(u_i)_{i\in I}$ est sommable c'est à dire on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists J$ fini de I telle que pour tout K fini tel que $J \subset K \subset I$, $\| S - S_K \| < \varepsilon$. On pose $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$, pour tout $a \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) :

$$\left\| aS - aS'_K \right\| \leqslant |a| \| S - S_K \| < |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

donc la famille $(au_i)_{i\in I}$ est sommable et a pour somme aS; de plus on a:

$$\sum_{i\in K} au_i = a \sum_{i\in K} u_i$$

Avant de traiter le cas particulier des familles à termes positifs, nous établirons une autre proposition générale, dont la signification est profonde.

Proposition. 3.0.0.2. *Pour qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ soit sommable, il est* nécessaire *que l'ensemble des sommes finies $S_J = \sum_{i\in I} u_i$ (où J désigne une partie finie quelconque de I) soit borné dans E.*

Preuve: Supposons que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit sommable, de somme S, et soit J_1 une partie finie de I vérifiant $\| S_J - S \| \leqslant 1$ pour toute partie finie J de I contenant J_1. Si K est une partie finie quelconque de I, on a $\| S_{K\cup J_1} - S \| \leqslant 1$; et la différence $S_{K\cup J_1} - S$ est la somme des u_i dont l'indice i appartient à J_1/K. On a donc

$$\| S_{K\cup J_1} - S \| \leqslant \sum_{i\in J_1/K} \| u_i \| \leqslant \sum_{i\in J_1} \| u_i \|$$

Posant $M = \sum_{i \in J_1} \| u_i \|$, on a finalement:

$$\| S_K - S \| \leqslant \| S_K - S_{K \cup J_1} \| + \| S_{K \cup J_1} - S \| \leqslant M + 1.$$

d'où

$$\| S_K \| \leqslant \| S \| + M + 1 \ \ \textit{quel que soit } K.$$

Remarque 3.0.3. *Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, l'ensemble I_0 des indices $i \in I$ tels que $u_i \neq 0$ est dénombrable.*

Preuve: Soit $S = \sum_{i \in I} u_i$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit J_n une partie finie de I telle que, pour toute partie finie J de I contenant J_n on ait:

$$\left\| S - \sum_{i \in J} u_i \right\| \leqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout $i \in I/J_n$, on a alors, nécessairement, $\| u_i \| \leqslant \dfrac{1}{n}$. L'ensemble $I_n = \left\{ i \in I / \| u_i \| > \dfrac{1}{n} \right\}$ est contenu dans J_n, donc fini, et l'ensemble $I_0 = \bigcup_{n \geqslant 1} I_n$ est dénombrable.

Si on supprime tous les termes nuls, une famille sommable se réduit donc à une famille dénombrable, *mais cela n'implique aucune ordination privilégiée de cette famille.*

3.1 Familles de nombres positifs

Les familles de nombres positifs sont les plus simples pour leur donner une caractérisation de la sommabilité.

Theorem. 3.1.0.1.
Pour qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres positifs soit sommable il faut et il suffit *que l'ensemble des sommes $S_J = \sum_{i \in I} u_i$ où J désigne une partie finie quelconque de I, soit* majoré. *La somme S de la famille est alors égale à la* borne supérieure *de cet ensemble, soit $S = \sup_J S_J$.*

Preuve: Nous savons déjà que la condition énoncée est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons-la vérifiée, et posons

$$S = \sup_J S_J = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i; \ J \ fini \subset I \right\} < +\infty$$

D'après la définition de la borne supérieure, on a: $S_J \leqslant S$ pour toute partie finie J de I; et pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I vérifiant

$$S - \varepsilon < \sum_{i \in J_\varepsilon} u_i \leqslant S \ \ i.e., \ S_{J_\varepsilon} > S - \varepsilon$$

Les nombres u_i étant positifs, on a ici, $S_J \geqslant S_{J_\varepsilon}$ pur toute partie fine J de I contenant J_ε, d'où $S \geqslant S_J > S - \varepsilon$ et $|S - S_J| < \varepsilon$; en appliquant la définition (3.0.1) on voit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, de somme S.

Remarque 3.1.1. *Il résulte qu'une famille de réels positifs u_i est non sommable si et seulement si le supermum M des sommes S_K pour K partie finie de I vaut $+\infty$. La situation est analogue à celle des séries à termes positifs qui ne peuvent diverger que si la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$. On peut donc toujours donner un sens à l'expression $\sum_{i \in I} u_i$, considérée comme élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$; en posant:*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{K \ fini, K \subset I} S_K = \begin{cases} S \in \mathbb{R}_+ & si \ (u_i)_{i \in I} \ est \ sommable \ de \ somme \ S \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

Cette situation est particulière aux familles à termes positifs et c'est le seul cas où nous donnerons un sens à $\sum_{i \in I} u_i$ sans que la famille soit forcénement sommable.

Du théorème précédant découle un critère de sommation absolue.

Définition 3.1.2 (Sommabilité absolue)**.** *Soit $\sum_{i \in I} u_i$ une famille d'élément E. On dit que cette famille est* absolument sommable *si la famille (à termes positifs) $\sum_{i \in I} \parallel u_i \parallel$ est sommable.*

Theorem. 3.1.0.2. *(Critère de sommabilité absolue). Pour qu'une famille d'éléments de E soit absolument sommable, il faut et il suffit que l'ensemble des sommes:*

$$\sigma_J = \sum_{i \in J} \parallel u_i \parallel$$

où J parcourt l'ensemble des parties finies de I, soit majoré.

COROLLARY 3.1.3. *Toute sous-famille d'une famille absolument sommable est absolument sommable.*

Signalons que dans un Banach, toute sous famille d'une famille sommable est sommable. Il nous reste à étudier la relation entre les notions de familles sommables et famille absolument sommables. Nous le ferons d'abord dans le cadre des familles à termes complexe, auquel on a le résultat simple qui suit.

3.2 Familles de nombres complexes

Proposition. 3.2.0.1. *Pour qu'une famille $(u_k)_{k\in I}$ de nombres réels ou complexes soit* sommable *il faut et il suffit qu'elle soit* absolument sommable[1]

Preuve:

• La condition est suffisante. Posons $u_k = a_k + ib_k$ avec $(a_k, b_k \in \mathbb{R})$. Si la famille $(u_k)_{k\in I}$ est absolument sommable, les inégalités $|a_k| \leqslant |u_k|$ et $|b_k| \leqslant |u_k|$ montrent qu'il en est de même des familles (à termes réels) $(a_k)_{k\in I}$ et $(b_k)_{k\in I}$. Par application du théorème (3.1.0.2) on en déduit que les 4 familles (à termes positifs) $(a_k^+)_{k\in I}$, $(a_k^-)_{k\in I}$, $(b_k^+)_{k\in I}$, $(b_k^-)_{k\in I}$ sont sommables. Donc les familles $(a_k) = (a_k^+ - a_k^-)$ et $(b_k) = (b_k^+ - b_k^-)$ sont sommables, et il en est de même de la famille $(u_k)_{k\in I}$ par application de la définition.

• La condition est nécessaire. Le dernier point de la remarque (3.0.2) nous permet de nous ramener au cas où la famille $(u_k)_{k\in I}$ est à termes réels. Supposons cette famille sommable, et désignons par M un majorant des nombres $|S_J| = |\sum_{k\in J} u_k|$ (J partie finie de I). Pour chaque partie finie J de I, notons J^+ (resp. J^-) l'ensemble des $k \in J$ tel que $u_k \geqslant 0$ (resp. $u_k < 0$), on a alors: $S_J^+ = \sum_{k\in J} u_k^+ \leqslant M$ et $S_J^- = \sum_{k\in J} u_k^- \leqslant M$ d'où $\sum_{k\in J} |u_k| = S_J^+ + |S_J^-| \leqslant 2M$

Les sommes $\sigma_J = \sum_{k\in J} |u_k|$ étant majorées, la famille $(u_k)_{k\in I}$ est absolument sommable.

L'étude d'une famille sommable de nombres complexes $(u_k) = (a_k + ib_k)$ se ramène donc à celle des quatre familles sommables, à termes positifs, a_k^+, a_k^-, b_k^+, b_k^-.

[1]Ce théorème s'étend aux familles sommables dans E de dimension finie, car la sommabilité d'une famille d'éléments de E équivaut à la sommabilité des familles constituées par leurs composantes. Mais ne s'étend pas aux espaces quelconques.

3.3 Propriété d'associativité

Supposons donnée une partition de l'ensemble I en une famille $(u_\lambda)_{\lambda\in L}$; les I_λ sont des parties non vides de I vérifiant $I=\bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$ et $I_\lambda \cap I_\mu = \varnothing$ pour $\lambda \neq \mu$ on a alors le théorème d'associativité suivant.

Theorem. 3.3.0.1. *Dans un espace normé quelconque E, soit $(u_i)_{i\in I}$ une familles sommable, et soit $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ une partition de I. Si chacune des sous-famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ est sommable, et si on pose $S_\lambda=\sum_{i\in I_\lambda} u_i$, alors la famille $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ est sommable, et on a:*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{\lambda\in L} S_\lambda$$

Ce théorème signifie qu'on peut, pour calculer la somme des u_i, remplacer chaque sous-famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ par la somme de ses termes. Preuve: $\forall \varepsilon>0$, $\exists J_\varepsilon$ finie de I telle que $\forall J$ finie de I contenant J_ε, on ait:

$$\left\|\sum_{i\in J} u_i - S\right\| < \varepsilon \tag{3.5}$$

avec $S=\sum_{i\in I} u_i$.
L'ensemble finie J_ε ne peut rencontrer qu'un nombre fini d'ensembles I_λ. Nous désignons par L_ε l'ensemble fini des $\lambda\in L$ tel que $I_\varepsilon \cap J_\varepsilon$ soit non vide.
Soit alors M une partition finie quelconque de L, contenant L_ε, pour chaque $\lambda \in M$, la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I_\lambda}$ entraine l'existence d'une partie finie J_λ de I_λ, contenant $J_\lambda \cap I_\lambda$, et vérifiant

$$\left\|\sum_{i\in J_\lambda} u_i - S_\lambda\right\| < \frac{\varepsilon}{p}$$

où $p=card(M)$.
L'ensemble $J=\bigcup_{\lambda\in M} J_\lambda$ contient alors l'ensemble J_ε, et on a:

$$\left\|\sum_{i\in J} u_i - \sum_{\lambda\in M} S_\lambda\right\| = \left\|\sum_{\lambda\in M}\left(\sum_{i\in J_\lambda} u_i - S_\lambda\right)\right\| \leqslant \sum_{\lambda\in M}\left\|\sum_{i\in J_\lambda} u_i - S_\lambda\right\| \leqslant p\frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

d'où par comparaison avec (3.5):

$$\left\|S - \sum_{\lambda\in M} S_\lambda\right\| \leqslant 2\varepsilon$$

Cette dernière inégalité, vraie pour toute partie finie M de L contenant L_ε, montre que la famille $(S_\lambda)_{\lambda\in I}$ est sommable, de somme S.

3.4 Relation avec les séries

Si l'ensemble des indices I est $\mathbb{N}$, quelles relations y-a-t-il entre la notion de suite sommable $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et de la série convergente?

Remarque 3.4.1. *Soient E un un espace normé et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans E. Il est évident que si la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, alors la série $\sum u_n$ est convergente dans E, et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. La réciproque est en générale fausse: il suffit de prendre $E=\mathbb{R}$, $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente mais la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable. Toutefois, dans le cas des séries de nombres réels positifs, les deux notions coïncident.*

COROLLARY 3.4.2. *Soi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'élément de $\mathbb{R}_+$. les conditions suivantes sont équivalentes.*
- *La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable;*
- *La série $\sum u_n$ est convergente;*
- *La suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée;*
- *L'ensemble $\left\{\sum_{i\in J} u_i;\ J\ fini\ \subset \mathbb{N}\right\}$ est majoré.*

Si ces conditions sont vérifiées, on a l'égalité:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{J\in[N]^{<\omega}} \left(\sum_{i\in J} u_i\right) = \sup_{n\geqslant 0} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

L'intérêt des espaces de Banach est que, dans tels espaces on peut reconnaitre qu'une série (resp. famille) est convergente (resp. est sommable) sans connaitre à l'avance la somme de la série (resp. de la famille).

Theorem. 3.4.0.1. *Pour qu'une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un e.v.n soit* sommable *il faut et il suffit que la série $\sum u_n$ soit* commutativement convergente*; la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est alors égale à la somme de la famille $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

Preuve:

- Pour montrer que la condition est nécessaire, supposons la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable de somme S. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de $\mathbb{N}$ vérifiant $\left\|S - \sum_{i\in J} u_i\right\| < \varepsilon$ pour toute partie finie J contenant J_ε. Désignant par n_ε le plus grand élément de J_ε, la condition $J \supset J_\varepsilon$ sera vérifiée si J contient l'ensemble $\{0, 1, 2, ...n_\varepsilon\}$. Donc l'inégalité $n \geqslant n_\varepsilon$ entraine $\left\|S - \sum_{p=0}^{n} u_p\right\| < \varepsilon$. Cela montre que la série $\sum u_n$ est convergente, et que sa somme est S. Mais la propriété de sommabilité de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante de toute ordre sur cette famille; si donc σ désigne une permutation quelconque de $\mathbb{N}$, la famille $(v_n) = (u_{\sigma(n)})$ est sommable, de même somme S que la famille (u_n). Il on résulte que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente de somme S.

• La condition est suffisante. Si les (u_n) sont des nombres réels ou complexes, cette assertion découle immédiatement des résultats du dernière section du rappel (il est difficile de la démontrer dans le cadre général car une famille sommable n'est pas toujours absolument sommable.)

3.5 Propriétés générales des familles sommables

Définition 3.5.1. *Soit E un un espace normé. On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de E vérifie* le critère de Cauchy *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que pour toute partie $L \subset I$ disjointe de J, an ait $\left\|\sum_{i\in L} u_i\right\| < \varepsilon$.*

Notons que si la famille $(u_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de Cauchy, alors pour toute partie $J \subset I$, la famille $(u_i)_{i\in J}$ vérifie aussi le critère de Cauchy.

Proposition. 3.5.0.1.

• *Toute famille sommable d'un espace vectoriel normé vérifie le critère de Cauchy.*

• *Dans un espace de Banach, toute famille vérifiant le critère de sommabilité de Cauchy est sommable.*

Preuve:

• Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments d'un espace vectoriel normé E. Notons S sa somme. Soient $\varepsilon > 0$ et J une partie fine de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J, on ait $\left\|S - \sum_{i\in K} u_i\right\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si L est une partie finie de I disjointe de J, on a:

$$\left\|\sum_{i\in L} u_i\right\| = \left\|\left(S - \sum_{i\in J} u_i\right) - \left(S - \sum_{i\in L\cup J} u_i\right)\right\| \leqslant \varepsilon$$

• Soient E un espace de Banach et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E vérifiant le critère de sommabilité de Cauchy. Il existe une suite (J_n) de parties finies de I telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute partie finie J de I disjointe de (J_n), on ait

$$\left\| \sum_{i\in J} u_i \right\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $K_n = \bigcup_{k=0}^{n} J_k$ et $S_n = \sum_{i\in K_n} u_i$, pour $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \leqslant m$, on a $\| S_m - S_n \| = \| \sum_{i\in K_m/K_n} \| \leqslant \frac{1}{n+1}$, vu que K_m/K_n est disjoint de J_n.
La suite (S_n) étant de Cauchy, elle converge (puisque E est complet). Soit S sa limite. Pour $m \geq n$, on a $\| S_m - S_n \| \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Faisant tendre m vers l'infini, on obtient $\| S - S_n \| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Si J est une partie finie contenant K_n, on a alors

$$\left\| S - \sum_{i\in J} u_i \right\| = \left\| (S - S_n) + \left(S_n - \sum_{i\in J} u_i \right) \right\| \leqslant \frac{1}{n+1} + \left\| \sum_{i\in J/K_n} u_i \right\| < \frac{2}{n+1}$$

puisque J/K_n est disjoint de J_n.
On en déduit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable de somme S.

Corollaire 3.5.2. *Soient E un espace de Banach et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E. Pour toute partie $J \subset I$. la famille $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.*

Preuve: La famille $(u_i)_{i\in I}$ vérifie le critère de sommabilité de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de I telle que pour toute partie finie L de I disjointe de K, on ait $\left\|\sum_{i\in L} u_i\right\| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour toute partie finie L de J disjointe de $K \cap J$, on a $\| \sum_{i\in L} u_i \| \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, la famille $(u_i)_{i\in J}$ vérifie le critère de sommabilité de Cauchy.

3.5.1 Familles normalement sommables

Définition 3.5.3. *Soient E un espace normé et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'élément de E. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est* normalement sommable *si la famille $(\| u_i \|)_{i\in I}$ est sommable dans* $\mathbb{R}$. *Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit plutôt que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est* absolument sommable.

COROLLARY 3.5.4. *Soient E un espace normé et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'élément de E. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

• *La série* $\sum u_n$ *est normalement convergente.*

•*La famille* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est normalement sommable.*

Theorem. 3.5.1.1. *Dans un espace de Banach. Toute famille* $(u_i)_{i\in I}$ *d'élément de* E *normalement sommable est sommable dans* E. *Dans ce cas, on a l'inégalité*

$$\left\|\sum_{i\in I} u_i\right\| \leqslant \sum_{i\in I} \|u_i\|$$

Preuve: Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'élément de E normalement sommable. Alors la famille $(\| u_i \|)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ vérifie le critère de Cauchy. Par suite, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable dans E. Soit $S = \sum_{i\in I} u_i$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J_ε de I telle que $\left\|S - \sum_{i\in J_\varepsilon} u_i\right\| < \varepsilon$. Donc on a:

$$\|S\| < \varepsilon + \left\|\sum_{i\in J_\varepsilon} u_i\right\| < \varepsilon + \sum_{i\in J_\varepsilon} \|u_i\|$$

On a $\sum_{i\in J_\varepsilon} \| u_i \| < \sum_{i\in I} \| u_i \|$. Donc on a $\| S \| < \varepsilon + \sum_{i\in I} \| u_i \|$. Comme ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que l'on a:

$$\| S \| < \sum_{i\in I} \| u_i \|$$

Remarque 3.5.5.

• *Dans un espace de Banach une famille peut être sommable sans être normalement sommable. En effet, il suffit de prendre* $E = l^2$, *et pour tout* $n \geq 0$, *soit* $a_n = \left(0, ..., 0, \dfrac{1}{n+1}, 0....\right)$, *alors la famille* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable et de somme* $a = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ...\right)$. *On a* $\| a_n \|_2 = \dfrac{1}{n+1}$, *donc la famille* $(\| a_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas sommable.*

• *Dans un espace normé une famille normalement sommable n'est pas nécessairement sommable. En effet, soit le* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des fonctions polynomiales muni de la norme* $\| P \|_\infty = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|$.

Pour tout $n \geq 0$, *soit* $P_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. *Alors on a* $\| P_n \|_\infty = \frac{1}{n!}$, *donc la famille* $(\| P \|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable de somme* e, *mais la série* $\sum P_n$ *n'est même pas convergente dans* E, *donc la famille* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas sommable dans* E.

Le théorème suivant montre une différence importante entre la théorie des séries et celle des familles sommables.

Theorem. 3.5.1.2. *Dans un espace normé de dimension finie, une famille est sommable si et seulement si elle est normalement sommable.*

3.5.2 Commutativité et sommabilité:

Rappelons qu'une permutation d'un ensemble I est une bijection de I sur I. La proposition suivante montre que la notion de sommabilité d'une famille est indépendante de toute notion d'ordre sur les indices.

Proposition. 3.5.2.1. *Soient E un espace normé et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'élément de E. Alors pour toute permutation φ de I la famille $(u_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est sommable et on a $\sum_{i\in I} u_{\varphi(i)} = \sum_{i\in I} u_i$.*

Preuve: Soient $S = \sum_{i\in I} u_i$ et φ une permutation de I. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe une partie finie J_ε de I tel que pour toute partie finie J de I contenant J_ε; on ait $\| S - \sum_{i\in J} u_i \| < \varepsilon$. Soit $J'_\varepsilon = \varphi^{-1}(J_\varepsilon)$, alors J'_ε est une partie finie de I. Pour toute partie finie J' de I contenant J'_ε, on a $J_\varepsilon \subset \varphi(J')$ et $\varphi(J')$ est une partie finie de I. Donc on a $\| S - \sum_{i\in J'} u_{\varphi(i)} \| < \varepsilon$. Par consÉquent, la famille $(u_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est sommable et on a

$$\sum_{i\in I} u_{\varphi(i)} = \sum_{i\in I} u_i.$$

BIBLIOGRAPHY

[1] Jacqueline LELONG-FERRAND et Jean-Marie ARNAUDIES, *Cours de Mathématiques - Tome 2 Analyse*

[2] Nawfal EL HAGE HASSAN, *Topologie générale et espaces normés*

[3] George SKANDALIS, *Topologie et analyse*

[4] https://perso.univ-rennes1.fr/mihai.gradinaru/espaces-normes.pdf

[5] http://math.univ-lille1.fr/ suquet/Polys/Agrint13.pdf

[6] http://gilles.dubois10.free.fr/analyse_reelle/seriesdouble.html