UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

**Licence Mathématiques et Applications**

**(MA)**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)**

# Quelques applications des valeurs propres

**Réalisé par: Abdelaziz BOUTSMOUMT**

**Encadré par: Pr. Lahcen OUKHTITE**

**Soutenu le 08/06/2017**

**Devant le jury composé de:**

**-Pr. Mohamed SOBRANI** **Faculté des Sciences et Techniques Fès**

**-Pr. Lahcen OUKHTITE** **Faculté des Sciences et Techniques Fès**

**-Pr. Najib MAHDOU Faculté des Sciences et Techniques Fès**

**-Pr. Rachid EL EYADI Faculté des Sciences et Techniques Fès**

**Année Universitaire 2016 / 2017**

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

# Remerciement

Je tiens à remercier mon encadrant le professeur Lahcen OUKHTITE, pour le temps qu'il m'a consacré durant la préparation de ce rapport, ainsi que les membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail, sans oublier l'aide énorme des personnes travaillants à la bibliothéque de la FST Fès.

# Table des matières


Remerciement . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . i

Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

**1 Préliminaires** **3**

1.1 Vecteurs propres et valeurs propres . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2 Sous-espace propre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.3 Le polynôme caractéristique . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.4 Endomorphismes et matrices diagonalisables . . . . . . . . . . . . . . 8

1.5 Polynôme minimal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

**2 applications** **13**

2.1 Application au théorie des graphes . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

2.2 Application aux formes quadratiques . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.3 Systèmes différentiels linéaires á coefficients constants . . . . . . . . . 23

2.4 Calcul de $A^n$ pour une matrice diagonalisable . . . . . . . . . . . . . 28

# Introduction

En mathèmatiques, et plus particulièrement en algèbre linéaire, le concept de vecteur propre est une notion algébrique s'appliquant à une application linéaire d'un espace dans lui-même. Il correspond à l'étude des axes privilégiés, selon lesquels l'application se comporte comme une dilatation, multipliant les vecteurs par une même constante. Ce rapport de dilatation est appelé valeur propre, les vecteurs auxquels il s'applique s'appellent vecteurs propres, réunis en un espace propre.
Ce concept appartient à l'origine à une branche des mathématiques appelé algèbre linéaire. Son utilisation, cependant, dépasse maintenant de loin ce cadre. Il intervient aussi bien en mathématiques pures qu'appliquées. Il apparaît par exemple en géométrie dans l'étude des formes quadratiques, ou en analyse fonctionnelle. Il permet de résoudre des problèmes appliqués aussi variés que celui des mouvements d'une corde vibrante, la détermination de la structure de l'espace-temps en théorie de la relativité générale, ou l'étude de l'équation de Schrôdinger en mécanique quantique.

Le but fondamental de ce projet est de donner quelques applications concrètes et simples des valeurs propres. Le document est constitué de deux chapitres comme suit:
Le premier chapitre est consacré à un rappel sur les valeurs et les vecteurs propres ainsi que des principales notions qui seront utiles pour la suite.
Le deuxiéme chapitre traîte quatre applications des valeurs propres. Plus précisément, nous avons présenté les applications suivantes:

1) Caractérisation de la $m$-régularité d'un graphe,

2) Quand une forme quadratique est définie positive (négative),

3) La résolution d'un systtème d'équations différentielles linéaires,

4) Le calcul de la puissance d'une matrice diagonalisable.

Chapitre 1

# Préliminaires

## 1.1 Vecteurs propres et valeurs propres

Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie sur un coprs $K$.

**Définition 1.1.** *Un vecteur $x \in E$ est dit un vecteur propre de $f$ si :*

*1) $x \neq 0_E$*

*2) Il existe $\lambda \in K$ tel que $f(x) = \lambda x$.*

*Le scalaire $\lambda$ est appelé valeur propre associée à $x$. On dit aussi que $x$ est un vecteur propre associé à $\lambda$.*

**Exemples** :

• 1 est la seule valeure propre de $Id_E$, tous les vecteurs non nuls de $E$ sont des vecteurs propres associés à 1.

• Soit $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

$$\begin{cases} f(1,1) = (3,3) = 3(1,1) \\ f(2,1) = (4,2) = 2(2,1). \end{cases}$$

$(1, 1)$ est un vecteur propre de $f$ ayant 3 pour valeur propre.

$(2, 1)$ est un vecteur propre de $f$ ayant 2 pour valeur propre.

• Soit $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x, y, z) = (y + z, -x + y - z, x + y + 3z)$.

$$\begin{cases} f(2,1,-1) = 0 = 0(2,1,-1) \\ f(0,1,-1) = (0,2,-2) = 2(0,1,-1). \end{cases}$$

Donc 0 et 1 sont des valeurs propres de $f$.

**Remarques** :

1) Si $x$ est un vecteur propre donné, alors $x$ admet une unique valeur propre.

2) Il existe une infinité de vecteurs propres associés à une valeur propre $\lambda$. En effet, si $f(x) = \lambda x$ avec $0 \neq x \in E$ alors pour tout $\beta \in K^*$ on a $f(\beta x) = \beta f(x) = \beta\lambda x = \lambda(\beta x)$ et on a bien $0 \neq \beta x \in E$.

**Définition 1.2.** *On appelle valeur propre d'une matrice $A \in M_n(K)$, un scalaire $\lambda \in K$ pour lequel il existe $0 \neq X \in M_{(n,1)}(K)$ tel que $AX = \lambda X$.*

*On dit aussi que $X$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$.*

**Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

• 1 est une valeure propre de $A$ associée au vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• 2 est une valeure propre de $A$ associée au vecteur $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En effet on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Proposition 1.1.** *Soient $f \in End_K(E)$ et $\lambda \in K$. Alors*

*$\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective.*

**Preuve**

$\lambda$ est une valeur propre de $f \Longleftrightarrow \exists\, 0 \neq x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$

$$\iff \exists\, 0 \neq x \in E \text{ tel que } (f - \lambda Id_E)(x) = 0$$

$$\iff f - \lambda Id_E \text{ est non injective.} \qquad \blacksquare$$

## 1.2 Sous-espace propre

Soit $f$ un endomorphisme d'un $K$-espace vectoriel $E$ de dimension finie.

**Définition 1.3.** *Si $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors $E_\lambda = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$, appelé le sous-espace propre de $E$ associé à la valeur propre $\lambda$.*

Il est important de remarquer que $E_\lambda = ker(f - \lambda Id_E)$.

**Exemples**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (y + z, -x + y - z, x + y + 3z)$. On a vu que 0 et 2 sont des valeurs propres de $f$. En outre

$E_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{z(2, 1, -1)/z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(2, 1, -1)\}$.

$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 2(x, y, z)\} = \{z(0, 1, -1)/z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(0, 1, -1)\}$.

**Définition 1.4.** *Soit $A \in M_n(K)$. Si $\lambda \in K$ est une valeur propre de $A$ alors $E_\lambda = \{X \in M_{(n,1)}(K)/AX = \lambda X\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{(n,1)}(K)$ appelé le sous-espace propre de $M_{(n,1)}(K)$ associé à la valeur propre $\lambda$.*

**Exemple**

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ on a 1 et 2 sont des valeurs propres de $A$.

$E_1 = \{X \in M_{(3,1)}(\mathbb{R})/AX = X\}$.

Donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ce qui donne que
$$\begin{pmatrix} a+3b \\ b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
par suite $b = c = 0$. Par conséquent
$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} |a \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$E_2 = \{X \in M_{(3,1)}(\mathbb{R})/AX = 2X\}$, donc
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
ce qui implique
$$\begin{pmatrix} a+3b \\ b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}$$
de sorte que $a = b = 0$.

Par conséquent
$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} |c \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Remarques**

1) $\dim_K(E_\lambda) \geq 1$, car $E_\lambda$ contient un vecteur non nul par définition.

2) En général, un endomorphisme $f$ (resp. une matrice $A \in M_n(K)$) peut ne pas avoir de valeur propre dans $K$, et donc pas de vecteur propre dans $E$. Pour être convaincu, il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

## 1.3 Le polynôme caractéristique

Soit $A \in M_n(K)$ et $P$ une matrice inversible de $M_n(K)$.

- $\det(A - XI_n) = \det(PAP^{-1} - XI_n)$.
- $\det(A - XI_n) \in K[X]$.

**Conséquence** Soient $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in End_K(E)$. Si $B_1$ et $B_2$ deux bases de $E$, alors $\det(M_{B_1}(f) - XI_n) = \det(M_{B_2}(f) - XI_n)$.

**Définition 1.5.** *Soit $A \in M_n(K)$ (resp. $f \in End_K(E)$). On appelle polynôme caractéristique de $A$ (resp. de $f$), le polynôme $C_A(X) = det(A - XI_n)$ (resp. $C_f(X) = C_{M_B(f)}(X)$) où $M_B(f)$ est la matrice de $f$ dans une base quelconque $B$ de $E$.*

**Exemples**

1) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors

$C_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+X & 1+3X-X^2 \\ 0 & 2-X & 2-X \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+X & -X^2+3X+1 \\ 2-X & 2-X \end{vmatrix}$

$=(1+X)(2-X) - (2-X)(-X^2+3X+1)$

$=2 - X + 2X - X^2 + 2X^2 - 6X - 2 - X^3 + 3X^2 + X$

$=-X^3 + 4X^2 - 4X$

$=-X(2-X)^2.$

2) Si $A = (a_{ij})$ est diagonale ou triangulaire alors

$$C_A(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X)...(a_{nn} - X).$$

3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (y + z, -x + y - z, x + y + 3z)$.

Si $B$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

alors

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$C_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = -X(2-X)^2.$$

**Proposition 1.2.** *Soit $A \in M_n(K)$ (resp. $f \in End_K(E)$). Alors $\lambda \in K$ est une valeur propre de $A$ (resp. de $f$) si et seulement si $\lambda$ est une racine du polynôme $C_A(X)$ (resp. $C_f(X)$).*

**Application**.

Dans la section 2 on a vu qu'un endomorphisme $f$ (resp. une matrice $A \in M_n(K)$) peut ne pas avoir de valeur propre dans $K$ et on a donné la matrice suivante comme

exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
En effet la calcul du polynôme caractéristique de $A$ donne

$$C_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$$

Comme $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, il en résulte alors que $A$ n'admet pas de valeur propre réelle d'après Proposition 1.2.

## 1.4 Endomorphismes et matrices diagonalisables

**Définition 1.6.** *Soit $f$ est un endomorphisme d'un $K$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $n$. On dit que $f$ est diagonalisable s'il existe une base $B$ de $E$ telle que $M_B(f)$ est diagonale (donc une base $B$ formée de vecteurs propres de $f$).*

**Définition 1.7.** *Une matrice $A \in M_n(K)$ est diagonalisable s'il existe une matrice $P \in M_n(K)$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.*

**Remarque**. $A \in M_n(K)$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de $K^n$ dont $A$ est la matrice associée par rapport à la base canonique soit un endomorphisme diagonalisable.

**Définition 1.8.** *Un polynôme $P(X) \in K[X]$ est dit scindé sur $K$ s'il se décompose en produit de polynômes de premier degré de $K[X]$, c'est-à-dire toutes les racines de $P(X)$ sont dans $K$.*

**Théorème 1.1.** *Soit $f \in End_K(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$), alors $f$ (resp. $A$) est diagonalisable si et seulement si*
*1) le polynôme caractéristique $C_f(X)$ (resp. $C_A(X)$) est scindé sur $K$.*
*2) Pour chaque racine $\lambda_i$ de $C_f(X)$ (resp. de $C_A(X)$) d'ordre $k_i$ on a $dim_K E_{\lambda_i} = k_i$.*

**Corollaire 1.1.** *Soit $f \in End_K(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$). Si $C_f(X)$ (resp. $C_A(X)$) est scindé sur $K$ et a toutes ses racines simples alors $f$ (resp. $A$) est diagonalisable. En effet, dans ce cas $dim_K E_\lambda = 1$ pour toute valeur propre $\lambda$ de $f$ (resp. $A$).*

**Exemple**.

1) Soit $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ telle que $M_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ où $B$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $f$ est-t-il diagonalisable?

$C_f(X) = C_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 1 & -1-X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 1 & 1 \\ 0 & -2-X & 2+X \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&=(-1-X)((-2-X)(-1-X)-2-X)+(4+2X) \\
&=(-1-X)(2X+X^2)+2(2+X) \\
&=X(-1-X)(2+X)+2(2+X) \\
&=(2+X)(2-X^2-X) \\
&=(1-X)(2+X)^2.
\end{aligned}$$

1 est une racine simple de $C_f(X)$ donc $dim_{\mathbb{R}} E_1 = 1$.

Or $-2$ est une racine double de $C_f(X)$, il en résulte alors que $f$ est diagonalisable si et seulement si $dim_{\mathbb{R}} E_{-2} = 1$. $X = (x, y, z) \in E_{-2} \Longleftrightarrow f(X) = -2X \Longleftrightarrow x+y+z = 0$. Par conséquent $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ est une base de $E_{-2}$ et $f$ est alors diagonalisable.

Cherchons une base $C$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_C(f)$ est diagonalisable?

$X = (x, y, z)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 ssi $x = y = z$. Donc $X = x(1, 1, 1)$ et $\{(1, 1, 1)\}$ est une base de $E_1$.

Si on pose $C = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$, alors $C$ est une famille libre et card(C)=3 =$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ donc $C$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En outre $M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. $A$ est-t-il diagonalisable?

Comme $C_A(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 0 & -2 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 5 & 1 & 3-X \end{vmatrix} = -(2+X)(1-X)^2$, il en résulte alors que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = 2$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{y} & = 0 \\ \text{5x+2z} & = 0 \end{cases}$.

Donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ est une base de $E_1$ de sorte que $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = 1$. D'après le théorème 1.1, on conclu alors que $A$ n'est pas diagonalisable.

## 1.5 Polynôme minimal

Soit $f$ un endomorphisme d'un $K$-espace vectoril $E$ de dimension $n$. On défini les puissances de $f$ par : $\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^2 = f \circ f \\ f^{m+1} = f^m \circ f. \end{cases}$

A chaque polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_mX^m \in K[X]$, on peut associer le polynôme d'endomorphisme $P(f) = a_0Id_E + a_1f + ... + a_mf^m$. De plus, si dans une base $B$ de $E$ on a $A = M_B(f)$, alors $M_B(P(f)) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + ... + a_mA^m$.

**Définition 1.9.** *On appelle polynôme annulateur de $f$ tout polynôme $Q(X) \in K[X]$ tel que $Q(f) = 0$ (où $0$ est l'endomorphisme nul de $E$).*

**Notations**

Si $f$ est un endomorphisme de $E$ et $A \in M_n(K)$, alors

- $\mathrm{Ann}(f) = \{Q(X) \in K[X] \,/\, Q(f) = 0\}$
- $\mathrm{Ann}(A) = \{Q(X) \in K[X]/Q(A) = 0_n\}$

Avec $0_n$ est la matrice nulle.

**Remarque**

$\mathrm{Ann}(f)$ n'est pas vide. En effet, si $\dim_K E = n$ alors $\dim_K \mathrm{End}_K(E) = n^2$. Donc les $n^2 + 1$ endomorphismes $\mathrm{Id}_E, f, f^2, ..., f^{n^2}$ sont nécessairement liés. Dès lors, il existe $n^2+1$ scalaires $a_0, a_1, ..., a_{n^2}$ non tous nuls tels que $a_0\mathrm{Id}_E + a_1f + a_2f^2 + ... + a_{n^2}f^{n^2} = 0$ endomorphisme nul de $E$. On pose $Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{n^2}X^{n^2} \in K[X]$. On a $d^oQ(X) \leq n^2$ et $Q(f) = 0$. Par conséquent, $Q(X) \in \mathrm{Ann}(f)$.

**Théorème 1.2.** *Soit $f \in End_K(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$). Alors il existe un unique polynôme unitaire $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$) $\in K[X]$ de degré minimal appartenant à $Ann(f)$ (resp. $Ann(A)$) tel que tout polynôme annulateur de $f$ (resp. de $A$) est multiple de $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$). Autrement dit, si $P(X) \in K[X]$ est tel que $P(f) = 0$ (resp. $P(A) = 0$) alors $\exists D(X) \in K[X]$ tel que $P(X) = D(X)m_f(X)$ (resp. $P(X) = D(X)m_A(X)$).*

**Théorème 1.3.** (**Théorème de Cayley-Hamilton**) *Soit $f \in End_K(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$). Alors le polynôme caractéristique de $f$ (resp. de $A$) est un polynôme annulateur de $f$ (resp. de $A$). Autrement dit, $C_f(f) = 0$ et $C_A(A) = 0$.*

**Corollaire 1.2.** *Soit $f \in End_K(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$). Alors $m_f(X)$ divise $C_f(X)$ et $m_A(X)$ divise $C_A(X)$.*

**Théorème 1.4.** *Soit $f \in End_K(E)$. Si $C_f(X) = (-1)^s(X-\alpha_1)^{n_1}...(X-\alpha_r)^{n_r}$ alors $m_f(X) = (X-\alpha_1)^{m_1}...(X-\alpha_r)^{m_r}$ avec $1 \leq m_i \leq n_i$ pour $1 \leq i \leq r$.*

**Exemples**

1) Soit $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $C_f(X) = (2-X)(X-1)^2 = -(X-2)(X-1)^2$, il en résulte que

$$m_f(X) = (X-2)(X-1) \text{ ou } m_f(X) = (X-2)(X-1)^2.$$

Or $(A-2I_3)(A-I_3) \neq 0$, alors $m_f(X) = (X-2)(X-1)^2 = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $C_A(X) = (1-X)(2+X)^2 = -(X-1)(X+2)^2$. Donc $m_A(X) = (X-1)(X+2)$ ou $m_A(X) = (X-1)(X+2)^2$. Comme

$$(A-I_3)(A+2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il en résulte que $m_A(X) = (X-1)(X+2)$.

**Théorème 1.5.** *Soit* $f \in End_K(E)$ *(resp.* $A \in M_n(K)$*). Alors* $f$ *(resp.* $A$*) est diagonalisable si et seulement si les racines de* $m_f(X)$ *(resp. de* $m_A(X)$*) sont simples et appartiennent toutes à* $K$.

Chapitre 2

# applications

## 2.1 Application au théorie des graphes

**Introduction**.

On peut dire que les premièrs développements majeurs de la théorie des graphes datent du milieu du vingtiéme siècle. Ainsi, un des premiers ouvrages si ce n'est pas le premier, traitant la théorie des graphes "théorie der endlichen und unendlichen graphen" écrit par Konig remonte à 1936. Récemment la théorie des graphes a connu un développement croissant grace à ses applications dans plusieurs domaines. La théorie des graphes fait à présent partie du cursus standard en mathématiques de bon nombre d'universités.

**Définition 2.1.** *Un graphe est un couple $G = (X; U)$ tel que:*

*1) $X$ est un ensemble d'élément appelés sommets (noeuds) du graphe.*

*2) $U$ est une famille d'éléments du produit cartésien $X \times X$ appelés arcs du graphe s'il est orienté, sinon ils sont appelés les arêtes.*

**Exemples**

1) Considérons le garphe suivant:

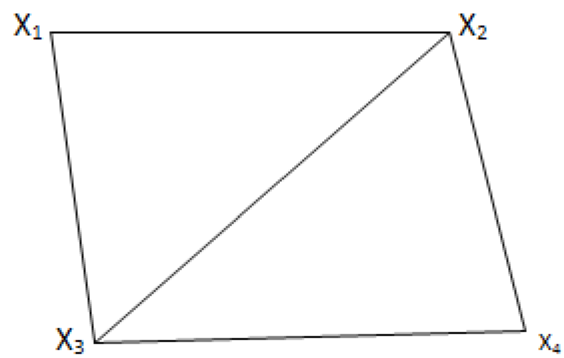


**Figure 1**

L'ensemble des sommets est $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ et l'ensemble des arêtes est $U = \{\{X_1, X_2\}, \{X_1, X_3\}, \{X_3, X_2\}, \{X_3, X_4\}, \{X_2, X_4\}\}$.

2) Pour le graphe suivant :

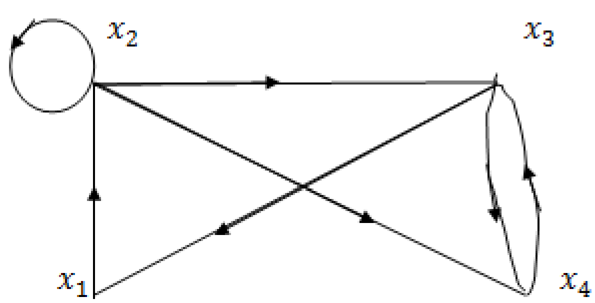


**Figure 2**

L'ensemble des sommets est $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ et l'ensemble des arcs est $U = \{\{X_1, X_2\}, \{X_2, X_3\}, \{X_3, X_4\}, \{X_3, X_1\}, \{X_4, X_3\}, \{X_4, X_3\}, \{X_2, X_2\}\}$.

3) Soit le graphe suivant :

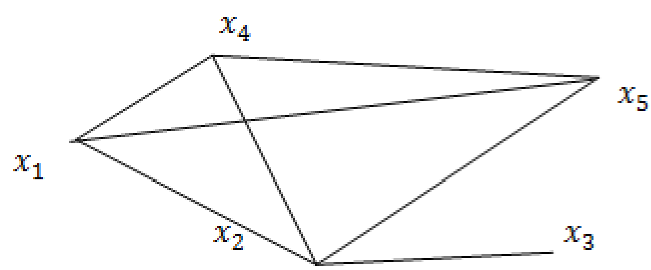


**Figure 3**

L'ensemble des sommets est $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ et l'ensemble des arêtes est $U = \{\{X_1, X_2\}, \{X_1, X_4\}, \{X_1, X_5\}, \{X_2, X_5\}, \{X_2, X_3\}, \{X_4, X_5\}, \{X_4, X_2\}\}$.

**Remarque**

1) le graphe de la figure 1 est non orienté.

2) le graphe de la figure 2 est orienté.

3) le graphe de la figure 3 est non orienté.

Dans la suite on s'intéresse aux graphe non orientés.

**Définition 2.2.** *Chaque graphe possède une matrice avec des* $0, 1$ *appelée matrice adjacente. Plus précisément, si* $\triangle$ *est un graphe avec des sommets* $v_1, v_2, .., v_n$ *alors la matric adjacente associée à* $\triangle$ *est la matrice carrée* $A_\triangle$ *d'ordre* $n$ *telle que :*

$a_{ij} = 1$ *s'il existe un arête entre les sommets* $v_i$ *et* $v_j$

$a_{ij} = 0$ *sinon.*

**Remarque**

La matrice associée à un graphe est nécessairement symétrique c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$.

**Exemples**

1) La matrice adjacente associe au graphe 1 de la figure 1 est

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) La matrice adjacente associée au graphe 2 de la figure 2 est

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) La matrice adjacente associée au graphe 3 de la figure 3 est

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Soit le graphe $\triangle_1$ ayant les sommets $v_1, v_2, v_3$ et les arects $v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3$.

La matrice adjacente associée est:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Soit le graphe $\triangle_2$ dont les sommets sont $v_1, v_2, v_3, v_4$ et les arêtes sont $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4$.

La matrice adjacente associée est:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque**. Le nombre des 1 dans une ligne $i$ et le nombre d'arêtes contenant $v_i$.

**Définition 2.3.** *Le degré d'un sommet $X$ de $G$ est le nombre d'arêtes incidentes à $X$. Il est noté $d_G(X)$.*

**Exemple**

Dans le graphe $\triangle_2$ de l'exemple précédent on a :

$d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 1$, $d(v_4) = 2$

**Remarque.** Le degré du sommet $v_i$ est la somme des éléments de ligne $i$ de la matrice adjacente, c'est-à-dire $d(v_i) = a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in}$.

**Définition 2.4.** *Un graphe $\triangle$ est dit régulier si $d(v_i) = d(v_j)$ pour tout $i, j$ (i.e. tous les sommets ont le même degré).*

*En particulier, le graphe $\triangle$ est m-régulier si $d(v_i) = m$ pour tout $i$.*

**Exemple**

Le graphe $\triangle_1$ est 2-régulier.

Le théoréme suivant caractérise les graphes k-réguliers en utilisant leurs matrices adjacentes.

**Théorème 2.1.** *Un graphe $\triangle$ ayant $n$ sommets est m-régulier si et seulement si $m$ est une valeur propre de la matrice adjacente $A_\triangle$ associée au vecteur propre $1_n$, c'est-à-dire:*

$$A_\triangle \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

*avec* $1_n = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

**Exemples**

1) Considérons le graphe $\triangle_1$ dont la matrice adjacente est

$$A_{\triangle_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compte tenu du fait que

$$A_{\triangle_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

il résulte alors que 2 et une valeur propre de la matrice $A_{\triangle_1}$ associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
D'après le théorème 2.1, on conclu que le graphe $\triangle_1$ est 2-régulier.

2) Considérons le graphe $\triangle_2$ dont la matrice adjacente est

$$A_{\triangle 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$A_{\triangle 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que le graphe $\triangle_2$ n'est pas $m$-régulier pour tout entier naturel $m$.

## 2.2 Application aux formes quadratiques

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fine $n$ et $B = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de $E$.

**Définition 2.5.** *Une forme bilinéaire sur $E$ est une application $b: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
*1) $b(x + x', y) = b(x, y) + b(x', y)$.*
*2) $b(x, y + y') = b(x, y) + b(x, y')$.*
*3) $b(\alpha x, y) = \alpha b(x, y) = b(x, \alpha y)$.*
*Si en plus $b(x, y) = b(y, x)$, alors $b$ est dite une forme bilinéaire symétrique.*

**Exemple**

$$\begin{array}{rcl} b: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array}$$

est une forme bilinéaire.

Si $b$ est une forme bilinéaire sur $E$ et $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in E$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_i e_i$ alors

$$b(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j b(e_i, e_j).$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = (b(e_i, e_j))_{i,j}.$$

On a

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i (\sum_{j=1}^{n} y_j b(e_i, e_j)) = \ {}^t X A Y$$

On en déduit alors que $b(x, y) = \ {}^t X A Y$.

**Définition 2.6.** *La matrice $(b(e_i, e_j))_{i,j}$ est appelée matrice de $b$ relativement à la base $B$. On la note $(b(e_i, e_j))_{i,j} = M(b, B)$.*
*Si $b$ est symétrique alors la matrice de $b$ par rapport à la base $B$ est symétrique.*

**Exemple**

La matrice associée à $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - 3x_1y_3 - x_3y_2$$

relativement à la base canonique $B$ de $\mathbb{R}^3$ est $\quad M(b, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

**Définition 2.7.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Une forme quadratique sur $E$ est une application $\quad q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :*

1) $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) \quad \forall x \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2) *L'application $(x, y) \longmapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est une forme bilinéaire symétrique.*

**Proposition 2.1.** *Une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-e.v $E$ de dimension finie $n$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in E$*

*$q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en $x_1, ..., x_n$, où $B = \{x_1, ..., x_n\}$ est une base quelconque de $E$.*

**Exemple.** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{R}^3$.

$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3$ est une forme quadratique sur $E$.

$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_3$ n'est pas une forme quadratique sur $E$.

**Définition 2.8.** *Soit $q$ une forme quadratique sur $E$. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique $b$ telle que $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$. La forme bilinéaire $b$ est dite* forme polaire *associée à $q$.*

*La matrice de $q$ relativement à une base $B$ de $E$ est définie par $M(q, B) = M(b, B)$.*

Soient $q$ une forme quadratique sur $E$ et $b$ la forme polaire de $q$. Si $B = \{e_1, ..., e_n\}$ est une base de $E$ alors pour tout $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ on a

$$q(x) = {}^tXM(q, B)X \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_iy_j$$

**Exemples**

1) La matrice associée à $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3$ relativement à la base canonique $B$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Pour $E = \mathbb{R}^2$, la matrice associée à $q((x, y)) = x^2 + 2y^2 + 5xy$ par rapport à la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

La forme polaire de $q$ est

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \frac{5}{2}x_1y_2 + \frac{5}{2}x_2y_1.$$

**Définition 2.9.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice symétrique associée à une forme quadratique $Q$ (i.e. $Q(x) = x^T Ax$).*

- *On dit que $Q$ est définie positive si et seulement si $Q(x) > 0$ $\forall x \neq 0$.*
- *On dit que $Q$ est définie négative si et seulement si $Q(x) < 0$ $\forall x \neq 0$.*

*Sinon, on dit que $Q$ est non définie.*

**Proposition 2.2.** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice symétrique associée à une forme quadratique $Q$.*

*Alors $Q$ est définie positive (resp. définie ngative) si et seulement si les valeurs propres associées à $A$ sont positives (resp. négatives) Sinon, on dit que $Q$ est non définie.*

**Exemples d'application**

1) On considère la forme quadratique $Q(x, y) = 5x^2 - 2xy + 3y^2$.

La matrice associée à $Q$ est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de la matrice $A$.

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} 5-x & -1 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 16 = (x-2)^2$$

2 est la seule valeur propre associée à $A$. Comme 2 est positive, la proposition précédente montre que la forme quadratique $Q$ est definie positive .

2)On considère la forme quadratique $Q(x, y) = 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$.

La matrice associée à $Q$ est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de la matrice $A$.

$C_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} =$ $-x[(1-x)^2-1]-[1-x-1]+[1-1+x] = -x[1+x^2-2x-1]+2x = -x[x^2-2x-2] =$ $-x(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$ On a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{3}$ et $\lambda_3 = 1+\sqrt{3}$ sont les valeurs propres associées à $A$ donc $A$ n'est pas définie.

## 2.3 Systèmes différentiels linéaires á coefficients constants

Un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coéfficients constants est une expression:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...... + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...... + a_{2n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ...x_n(t) \end{pmatrix}$ , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$ , $X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ ...x_n'(t) \end{pmatrix}$

Alors, la forme matricielle du système linéaire est donnée par

$$X' = AX \qquad (*).$$

**Exemples**

Soit le système d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coéfficients constants suivants:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = 3x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

l'écriture matricielle du système est:

$$X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

**Théorème 2.2.** *Soit $X_1, X_2, ...., X_k$ un ensemble de vecteur solutions du système homogène*

$$X' = AX$$

*sur un intervalle $I$. Alors la combinaison linéaire $X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k$ où les $c_i$, $i = 1, ..., k$ sont des constantes arbitraires est aussi une solution sur $I$.*

**Définition 2.10.** *Soit $X_1, X_2, ..., X_k$ un ensemble de solutions du système homogène $(*)$ sur un intervalle $I$. Nous disons que l'ensemble est linéairement indépendant sur $I$ s'il existe des constantes $c_1, c_2, ..., c_k$ non toutes nulles telles que $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_kX_k \neq 0$ pour tout $t \in I$.*

Le théorème suivant donne un critère pour vṙifier que des solutions sont linéairement indépendantes.

**Théorème 2.3.** *Soient* $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, .., X_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ *$n$ solutions du système homogène $(*)$ sur un intervalle $I$. Alors l'ensemble des vecteurs solutions est linéairement indépendant sur $I$ si et seulement si le wronskien*

$$W(X_1, X_2, ..., X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & . & x_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

*pour tout $t \in I$.*

**Définition 2.11.** *Un ensemble $X_1, X_2, ...., X_n$ de $n$ vecteurs solutions linéairement indépendants du système homogène $(*)$ sur un intervalle $I$ est appelé ensemble fondamental des solutions.*

**Théorème 2.4.** *Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un ensemble fondamental de solutions du systèmes homogène $(*)$ sur un intervalle $I$. Alors la solution générale du système sur l'intervalle est $X = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_nX_n$ où $c_i, i = 1, 2, .., n$ sont des constantes arbitraires.*

Dans la suite on s'intéresse au cas d'un système $X' = AX$ avec une matrice $A$ ayant des valeures propres réelles distinctes.

Quand une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ possède $n$ valeurs propres réelles distinctes

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ alors l'ensemble des vecteur propres indépendants $K_1, K_2, ....K_n$ existe et

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t},\ X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, ...., X_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

est un ensemble fondamental de solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 2.5.** *Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, $n$ valeurs propres distinctes réelles de la matrice $A$ du système homogène (*) et soient $K_1, K_2, ..., K_n$ les vecteurs propres correspondants. Alors la solution générale de $(*)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par*

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + ... + c_n K_n e^{\lambda_n t}.$$

**Exemple d'application**

Considérons le système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

• Etape 1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ 4x - 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donc la matrice associée au système est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Cherchons les valeurs propres de $A$

$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5).$

Donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$.

• Etape 2

Cette étape consiste à trouver les vecteurs propres.

Pour notre première valeur propre $\lambda_1 = 1$, on a :

$E_1 = \{X \in M_{(2,1)}(\mathbb{R})/AX = X\}$.

Donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ce qui donne que

$$\begin{pmatrix} 3a-4b \\ 4a-7b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

par suite $a = 2b$.

Par conséquent

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} | b \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la deuxième valeur propre $\lambda_2 = -5$, on à :

$$E_{-5} = \{X \in M_{(2,1)}(\mathbb{R})/AX = -5X\},$$

donc

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} 3a-4b \\ 4a-7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a \\ -5b \end{pmatrix}$$

de sorte que $b = 2a$.

Par conséquent

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ 2b \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R} \right\} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

• Etape 3

La solution de l'équation est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 e^t + c_2 e^{-5t} \\ c_1 e^t + 2c_2 e^{-5t} \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\begin{cases} x = 2c_1e^t + c_2e^{-5t} \\ y = c_1e^t + 2c_2e^{-5t} \end{cases}$$

D'aprés la condition initiale $x(0) = y(0) = 1$, on trouve les constantes $c_1$ et $c_2$ :

$$1 = 2c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 - 2c_1$$

$$1 = c_1 + 2c_2 \Rightarrow 1 = c_1 + 2 - 4c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = 1/3$$

$$\Rightarrow c_2 = 1 - 2c_1 \Rightarrow c_2 = 1 - 2/3$$

$\Longrightarrow c_1 = c_2 = 1/3.$

Donc si on remplace les constantes $c_1$ et $c_2$ par leurs valeures on obtient la solution

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-5t} \\ y(t) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-5t} \end{cases}$$

## 2.4 Calcul de $A^n$ pour une matrice diagonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Alors il existe une matrice carrée d'ordre $n$ inversible $P$ telle que $PAP^{-1} = D$ où $D$ est une matrice diagonale des valeurs propres de $A$ c'est-à-dire

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le calcul de $A^n$ est simple puisque on a

$$A^n = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix} P$$

**Exemple**

On se propose de calculer $A^n$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Considérons $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire ayant $A$ pour matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$,(i.e. $f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$ et $M_B(f) = A$.

$$C_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x-1 & 1+x & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 2 & -x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)(x^2 - x - 2)$$

$$= -(x+1)^2(x-2)$$

donc $A$ admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.

$X = (x, y, z) \in E_{-1} \Longleftrightarrow f(x, y, z) = -(x, y, z) \Longleftrightarrow x + y + z = 0$

donc $X = (x, y, -x-y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$

$E_{-1} = vect\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ de sorte que $\dim E_{-1} = 2$ et $B_1 = \{v_1, v_2\}$ base de $E_{-1}$.

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

$X = (x, y, z) \in E_2 \Longleftrightarrow f(x, y, z) = 2(x, y, z)$
$\begin{cases} y + z = 2x \\ x + z = 2y \\ x + y = z \end{cases}$
$\Longrightarrow y - x = 2(x - y) \Longrightarrow x = y = z$

donc $X = (x, x, x) = x = (1, 1, 1)$ ainsi $E_2 = vect\{(1, 1, 1)\}$ et $B_2 = \{v_3\}$ base de $E_2$. D'où $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$A = M_B(f) = P_{BC} M_C(f) P_{BC}^{-1} = PDP^{-1} \text{ où } P = P_{BC}$$

on a

$$P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminons $P^{-1} = P_{CB}$ :

$\begin{cases} v_1 = e_1 - e_3 \\ v_2 = e_2 - e_3 \\ v_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + e_3 \\ e_2 = v_2 + e_3 \\ e_3 = v_3 - v_1 - e_3 - v_2 - e_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e_1 = v_1 + \frac{1}{3}(-v_1 - v_2 + v_3) \\ e_2 = v_2 + \frac{1}{3}(-v_1 - v_2 + v_3) \\ e_3 = \frac{1}{3}(-v_1 - v_2 + v_3) \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 \\ e_2 = -\frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}(v_2) + \frac{1}{3}v_3 \\ e_3 = \frac{1}{3}(v_3 - v_1 - v_2) \end{cases}$

donc

$$P_{BC}^{-1} = P_{CB} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $A^n$ est donnée par

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

# Bibliographie

[1] L. Pujo-Menjouet, *Introduction aux équations différentielles et aux dérivées partielles* (http://math.univ-lyon1.fr/ pujo/coursintro-edo-edp.pdf)

[2] L. Oukhtite, *Cours d'algèbre 1*, FST Errachidia 2012.

[3] A. El hilali Alaoui, *Introduction à la recherche opérationnelle*, FST Fès 2009.

[4] J.C.FOURNIER, Théorie des graphes et applications, LAVOISIER, 2006.

[5] M.C.CHATARD-MOULIN,J.EZQUERRD,D.FREDON,A.SALINIER Algèbre linéaire, ISBN, 1996.