



UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques

(MST)

Equations de Ginzburg-Landau :

Existence et unicité.

Réalisé par: ECHCHERKI ANASS

Encadré par: Pr. EL KHOMSSI MOHAMED

Soutenu le 14 juin 2017

Devant le jury composé de:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| -Pr.EL HILALI ALAOUI AHMED | Faculté des Sciences et Technique Fès |
| -Pr.EL KHOMSSI MOHAMED | Faculté des Sciences et Technique Fès |
| -Pr.EZZAKI FATIMA | Faculté des Sciences et Technique Fès |
| -Pr. HILALI ABDELMAJID | Faculté des Sciences et Technique Fès |
| -Pr. EL AYADI RACHID | Faculté des Sciences et Technique Fès |

Année Universitaire 2016 / 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

☒ B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

Équation de Ginzburg-Landau : Existence et unicité

Echcherki Anass

14 juin 2017

Dédicace et Remerciement

Louange à Dieu qui m'a donné la force, le courage et l'espoir nécessaire pour accomplir ce travail et surmonter l'ensemble des difficultés.

Dédicace à ma mère. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour toi. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être.

Ce mémoire n'aurait pas été réalisé sans le soutien et l'encouragement de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire monsieur Mohammed El Khomssi, professeur à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès, pour m'avoir encadré, je tiens à le remercier pour toute sa disponibilité, sa rigueur scientifique, ses précieux conseils. Il a bien voulu me confier ce travail riche d'intérêt et me guider à chaque étape de sa réalisation. Il m'a toujours réservé le meilleur accueil, malgré ses obligations professionnelles. Je tiens à vous remercier pour vos encouragements inlassables, votre amabilité, votre gentillesse méritent toute admiration. Je saisis cette occasion pour vous exprimer ma profonde gratitude tout en vous témoignant mon respect.

Je tiens à exprimer ma gratitude, mes remerciements aux membres du jury : Prs El Hilali Alaoui Ahmed, Ezzaki Fatima, Hilali Abdelmajid et Rachid El Ayadi pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette recherche en acceptant d'examiner ce travail et qui nous ont honorés par leurs présence. Particulièrement, ils ont contribué à ma formation pendant les deux années de l'étude au master MACS à la FST de Fès.

Je tiens à remercier Ma famille pour m'avoir toujours encouragée dans mes démarches. Mes remerciements chaleureux s'adressent à mes sœurs et mes frères pour leur intérêt à ce que je fais.

Table des matières

Dédicace et Remerciement	1
Preface	5
Notation	7
1 Introduction	10
1.1 Un bref aperçu historique : chemin et synthèse	10
1.1.1 L'effet Meissner dans un supraconducteur - diamagnétisme .	11
1.1.2 Équation et longueur de London : existence de solution . . .	13
1.1.3 La longueur de cohérence	17
1.1.4 Classification des supraconducteurs	17
1.1.5 Détails a propos du vortex	20
1.2 Synthèse et conclusion	21
2 Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau	22
2.1 L'énergie libre et les équations Ginzburg-Landau	22
2.2 Normalisations des equations de Ginzburg-Landau	28
2.3 Cas 2-d : écriture en coordonnés polaire	31
2.4 Invariance de jauge	34
2.5 Les deux longueurs caractéristiques $\xi(T)$ et $\lambda(T)$	35
2.6 Le système G-L évolutif	37
2.6.1 Le système	37
2.6.2 Normalisation mathématique	38
2.6.3 Le fonctionnel de G-L comme fonctionnel de Lyapunov . . .	39
2.6.4 Les différentes types de jauge	41
2.6.5 Estimation de la fonction d'état	44
2.7 Évolution du system de Maxwell à l'extérieur	45
2.7.1 Rappel de système de Maxwell	46

2.7.2	Le modèle de G-L pour la supraconductivité	47
2.7.3	Position du problème	48
2.8	Système de Maxwell à l'extérieur : cas stationnaire	52
2.9	Énergie de surface, classification des supraconducteurs	53
2.9.1	Le signe de σ_{ns} lorsque $\kappa \ll 1$	55
2.9.2	Le signe de σ_{ns} lorsque $\kappa \gg 1$	56
2.9.3	Le cas $\kappa = 1/\sqrt{2}$	57
2.9.4	Conclusion	57
2.10	Différence entre les modèles 2-d et 3-d	58
2.11	Description mathématique des vortex dans \mathbb{R}^2	59
2.12	Remarques bibliographiques	64
3	Système de Ginzburg-Landau : existence et unicité	66
3.1	Existence de solution pour le cas stationnaire	66
3.2	Propriétés de base pour les solutions des équations de Ginzburg-Landau	70
3.3	Remarques bibliographiques	73
	Problèmes ouverts	74
	Conclusion	75
	Bibliographie	79

Table des figures

1.1	Un aimant (ici métallisé) crée autour de lui un champ magnétique qui traverse tout matériau non magnétique comme la pastille noire. Quand la pastille noire devient supraconductrice à basse température, celle-ci expulse le champ magnétique. Cela crée alors une force sur l'aimant et le fait léviter : c'est l'effet Meissner.	12
1.2	Explication de l'effet Meissner	13
1.3	Relation entre les champs magnétiques induits et appliqués pour les supraconducteurs types I et II	19
1.4	Supercurrent et paramètre d'ordre près d'un vortex.	21
2.1	représentation des deux milieux	50

Préface

La théorie de Ginzburg-Landau des transitions de phase de second ordre et ses applications au supraconductivité et au supra-fluidité a été un domaine avec un grand intérêt pour les physiciens théoriciens et il a été étudié continuellement et condensé depuis 1950. Aujourd'hui, il y a une abondance des résultats mathématiques dispersés dans beaucoup des journaux mathématiques. Et pourtant, avant 1992, la plus part des études ont été concentrées sur le comportement asymptotique ou l'analyse linéaire. **Peu des résultats isolés de Berger [3], Jaffe [25] et Taubes [43] qui ont touché en détail l'aspect non-linéaire.**

En 1991, un séminaire de physique donné par Ed Copeland à l'université de Sussex a inspiré beaucoup de chercheurs pour étudier le sujet. Indépendamment à Munich, K.-H. Hoffmann et ses collaborateurs Z. Chen et J. Liang ont commencé à travailler sur le sujet en même temps. Bientôt, il est devenu clair que, à cette époque, les groupes des mathématiciens à Oxford et Virginia Tech avaient déjà étudié le sujet pour un couple d'années. Ils ont inspiré des experts dans les problèmes de transition de phase d'interface et leurs efforts combinés ont établi un cadre mathématique rigoureux pour le système de Ginzburg-Landau.

De retour à Tokyo, en 1993, Matano a parlé à H. Brezis, qui a visité le Japon à l'époque, sur le problème aux limites (dans un café japonais, selon H. Brezis), et qui a conduit au célèbre travail de [17]. Elliott, Matano et Tang ont justifié la structure du vortex 2-d rigoureusement.

À cette époque, de nombreux articles traitant dans ce domaine de la modélisation, de l'analyse asymptotique et de l'analyse numérique étaient déjà apparus. Ce domaine de recherche est de plus en plus actif aujourd'hui avec de nombreux nouveaux résultats présentés à chaque conférence. Cependant, à notre connaissance, la question fondamentale de la relation entre le champ magnétique appliqué et le nombre de vortex reste ouverte. De nombreux physiciens et mathématiciens du monde entier ont effectué divers calculs numériques cherchant à mieux comprendre cette relation. La simulation numérique la plus spectaculaire qui a été vue jusqu'ici

était un film de 3-d de H. Kappa qui possédait les superbes installations informatiques nécessaires dans son laboratoire d'Argonne. Récemment, H.-J. Bauer dans sa thèse de doctorat (de TU Munich) a obtenu des progrès dans le traitement du problème avec moins d'ordinateur Pouvoir en utilisant de nouveaux concepts en informatique scientifique.

Dans cet partie de ce mémoire, nous essayons de recueillir les résultats récents de la recherche dans la théorie G-L complexe avec ou sans applications immédiates à la théorie de la supraconductivité. Le but est de présenter autant de résultats que possible mathématiquement valables sur les différents aspects du système d'équations aux dérivées partielles, et fournir une bonne référence pour les chercheurs qui s'intéressent à l'étude des problèmes mathématiques et physiques dans ce domaine.

Pour réaliser cet objectif, nous incluons une **analyse mathématique rigoureuse** et une analyse asymptotique formelle pour le système de G-L.

Nous commençons par quelques éléments sur le fondement physique et soulignons certaines des faiblesses de la modélisation et des études théoriques des physiciens. Nous traitons alors l'adimensionnement, parfois appelé normalisation, mathématique du système d'une manière systématique et analysons les implications sur divers problèmes aux limites. Après cela, nous abordons la base nécessaire de mathématique et de l'analyse asymptotique formelle du mouvement vortex. Puis nous nous concentrons sur les mathématiques rigoureuses : nous présentons des résultats sur l'existence que nous avons démontré ainsi d'autre résultats trouvé dans la littérature, la régularité et le comportement à long terme des solutions et discutons les résultats rigoureux sur l'emplacement du vortex et la loi du mouvement. De plus, nous examinons diverses manières de dériver des modèles de dimensions supérieures.

Notation

Nous travaillerons dans un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ borné, qui sera généralement supposé connexe et réguliers ou réguliers par morceaux. La frontière de Ω est noté par $\partial\Omega$. Pour un point $x \in \partial\Omega$ nous désignons par $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ou simplement \mathbf{n} la normale extérieure unité de Ω . Lorsque l'espace est de dimension égale 2. $\boldsymbol{\tau}$ est le vecteur tangentiel avec $\partial\Omega$ obtenu par rotation de \mathbf{n} dans le sens inverse des aiguilles pour 90 degrés. Aussi, pour un point quelconque $x \in \Omega$, on définit

$$d(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$$

On définit aussi la boule comme étant

$$B_M(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, \quad \text{dist}(x, y) \leq M\}$$

on la note parfois B_M où $B_M(x)$.

Certains opérateurs apparaissent à plusieurs reprises dans le texte, nous fixons donc les définitions suivantes :

Les opérateurs ∇ et div sont les standards opérateurs gradient et divergence respectivement. En note dans toute la suite **curl** l'opérateur **rot** (rotationnel).

Il a plusieurs définition qui dépend de la dimension de l'espace de départ et l'espace d'arrivée de la fonction :

1. si $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\mathbf{curl}f = \nabla \times f$ avec \times est le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .
2. si $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbf{curl}f = (\partial_2 f, -\partial_1 f)^t$. Dans ce cas particulier la notation $\mathbf{curl} = \nabla^\perp$ est fréquemment utilisé.
3. si $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\mathbf{curl}f = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$. Parfois il est possible de voir **curl** comme un vecteur a 3 composantes $(0, 0, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \nabla \times (f_1, f_2, 0)$.

Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ est noté par :

$$(f, g) = \int_{\Omega} \overline{f(x)}g(x)dx.$$

Nous utiliserons les espaces Sobolev standard $W^{s,p}$. Pour les valeurs entières de s , ils sont données par :

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } |\alpha| \leq s\}$$

Lorsque s est un entier positive, la norme dans $W^{s,p}$ est,

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $W^{s,p}$ est défini par dualité (pour les valeurs négatives de s). Voir, par exemple, [1] pour plus de détail. Dans le cas ou $p = 2$, Nous utiliserons également le symbole standard H^s au lieu de $W^{s,2}$, i.e.,

$$H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega).$$

pour $s \in \mathbb{R}$ non entier, $H^s(\mathbb{R}^n)$ c'est l'espace des $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tels que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \bar{\hat{v}}(\xi) d\xi$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{H^s} = \|u\|_s = \left(\int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ s'appelle l'espace de Sobolev d'ordre s sur \mathbb{R}^n . On note

$$H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n).$$

On écrira H^s au lieu de $H^s(\mathbb{R}^n)$ et L^2 au lieu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et on définit

$$\|u\|_0 = \|u\|_{L^2} = \left(\int |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $s \in \mathbb{R}$ non entier, on note par $C^s(\mathbb{R}^n)$

$$C^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C_b^0 / \exists c > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^s \right\}$$

et on l'appelle l'espace de Hölder d'exposant s

Ces espaces seront parfois combinés avec les suffixes "comp" ou "loc" pour Désigné "support compact" ou "localement".

Les dérivées partiels (par exemple les dérivées partiels de f par rapport à t) peut être noté par l'un des symboles suivants : $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\partial_t f$ ou f_t . en outre, si \mathbf{n} est un vecteur unitaire, on utilise $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \partial_{\mathbf{n}} f = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ pour noté la dérivée de f à la direction \mathbf{n} .

Dans ce mémoire, nous allons noté **les vecteurs en lettres gras**, **les lettres normales pour les fonctions scalaires** et **les lettres italiques pour les fonctions complexes**.

Chapitre 1

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous introduisons un bref historique en ce qui concerne la chronologie et les étapes suivies par Landau au premier temps (fondements), pour la modélisation macroscopique du phénomène de la supraconductivité. Ainsi, la théorie phénoménologique de G-L. Ensuite nous déclarons les questions adressées dans ce mémoire.

1.1 Un bref aperçu historique : chemin et synthèse

Le phénomène de supraconductivité a été découvert par Kamerlingh-Onnes en 1911. Depuis lors, divers efforts ont été faits pour trouver une description mathématique de la supraconductivité. **Au début, la supraconductivité était simplement considérée comme une disparition totale de toute résistance électrique en dessous de la température de transition.**

Au début, les gens n'avaient que des supraconducteurs à température plus basse. Ces supraconducteurs présentent un comportement supraconducteur à des températures très proches du zéro absolu, habituellement entre 0 et 5 K. Ces supraconducteurs sont également appelés supraconducteurs durs ou supraconducteurs de type I. En 1933, W. Meissner et R. Ochsenfeld ont découvert l'effet dit de Meissner : si un champ magnétique non très fort est appliqué à un échantillon de supraconducteur à basse température, le flux magnétique est exclu de l'intérieur du corps supraconducteur. Près de la surface de l'échantillon, cependant, une mince zone de pénétration apparaît. C'est-à-dire que le champ magnétique pénètre dans l'échantillon et ne détruit la supraconductivité que dans une région mince près de la surface.

Peu de temps après, en 1935, H. London et F. London proposèrent une théorie

phénoménologique des propriétés électromagnétiques des supraconducteurs. De nombreux autres scientifiques ont également contribué à l'établissement d'une théorie mathématique cohérente dans les années suivantes. Cependant, le problème commun avec une théorie phénoménologique est qu'il a besoin d'une théorie microscopique pour la rendre valide et cohérente.

En 1957, J. Bardeen, L.N. Cooper et J.R. Schrieffer ont développé la théorie BCS qui est la théorie microscopique **la plus satisfaisante** pour décrire les phénomènes de supraconductivité à basse température. Pour une introduction à la théorie BCS et aux nombreux travaux précédents, nous nous référons à [2] et aux références citées dans cet article. La principale réalisation de la théorie BCS est de présenter un argument convaincant, qui est l'approche champ moyen (la moyenne du comportement d'une grande quantité d'électrons supraconducteurs) peut être utilisé pour décrire la supraconductivité. Elle a donc donné un appui théorique aux théories phénoménologiques telles que celles de London et de Ginzburg-Landau.

La théorie de London est basée sur le système de Maxwell en interprétant l'effet Meissner à travers la frontière des échantillons supraconducteurs de façon appropriée.

En prenant en compte le mouvement microscopique des électrons, Landau et Ginzburg ont développé la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau (appelée théorie G-L dans la suite) de la supraconductivité sur une période de 13 ans (1937-1950). Cette théorie peut être utilisée pour décrire le comportement supraconducteur des types I et II en ajustant les valeurs de certains paramètres impliqués dans le système. Il a également été démontré qu'une certaine relation entre la Théorie de London et la théorie G-L existe. Dans ce qui suit, nous discuterons en détail le fondement de la théorie de London et de la théorie G-L.

Dans le reste de cette section, nous présentons brièvement les différents phénomènes physiques qui accompagnent le comportement de la supraconductivité et on donne une description qualitative de la façon dont divers paramètres sont utilisés pour distinguer les supraconducteurs de type I et de type II.

1.1.1 L'effet Meissner dans un supraconducteur - diamagnétisme

Dans un supraconducteur, deux effets différents permettent de faire léviter un aimant : l'effet Meissner, et le piégeage des vortex. L'effet Meissner va repousser l'aimant du supraconducteur, alors que le piégeage des vortex va maintenir l'aimant à l'endroit où il se trouvait quand le supraconducteur a été refroidi. Autrement dit, l'un repousse, et l'autre piège (sans attirer pour autant). On observe

l'un ou l'autre de ces effets selon la nature du matériau et la force de l'aimant.

Pour voir ça on pose un supraconducteur et un aimant en dessus, le supraconducteur est refroidi avec l'aimant posé dessus, donc en présence d'un champ magnétique. À haute température, le champ magnétique pénètre complètement le matériau et passe à travers. Mais quand le matériau devient supraconducteur, l'aimant se met à léviter. Cet étrange effet vient du fait que dans un supraconducteur, les électrons se réunissent en une onde quantique collective, et le champ magnétique a tendance à « tordre » cette onde, et à créer un déphasage qui est défavorable à l'état supraconducteur. Mais cette onde supraconductrice est rigide, et ne peut pas être tordue, au risque de se briser. Le supraconducteur veut donc se protéger du champ magnétique en l'expulsant de son sein. C'est exactement ce qui se passe lors de l'effet Meissner (voir figure 1.1).

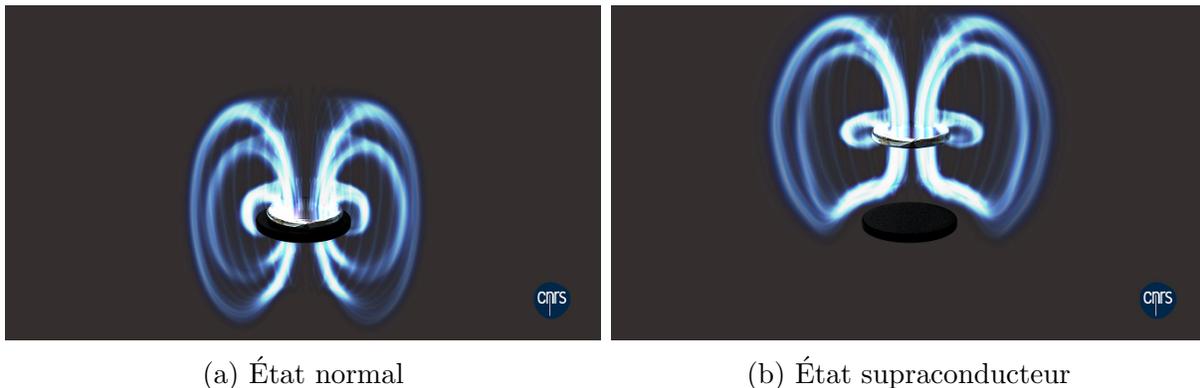


FIGURE 1.1 – Un aimant (ici métallisé) crée autour de lui un champ magnétique qui traverse tout matériau non magnétique comme la pastille noire. Quand la pastille noire devient supraconductrice à basse température, celle-ci expulse le champ magnétique. Cela crée alors une force sur l'aimant et le fait léviter : c'est l'effet Meissner.

Pour permettre cet effet Meissner, quand le matériau devient supraconducteur alors qu'un champ magnétique est présent, des boucles de courants électriques vont apparaître spontanément à la surface de l'échantillon. De tels courants qui tournent en rond créent un champ magnétique, comme dans un électroaimant. Ces courants s'ajustent de façon à exactement compenser à l'intérieur du supraconducteur le champ magnétique appliqué. Le champ magnétique total devient donc nul dans le volume de l'échantillon, et le supraconducteur est ainsi protégé, hormis à la surface de l'échantillon, où les courants se développent. Grâce à ces super-courants, le supraconducteur a pu expulser le champ magnétique. Comme il n'y a pas de résistance électrique dans un supraconducteur, ces courants peuvent exister perpétuellement sans consommer d'énergie.

Quand le champ présent dans l'échantillon est dû à un aimant, le champ magnétique crée par ces super-courants va exercer une force sur cet aimant, et va le repousser. L'aimant va donc se mettre à léviter à une distance qui marque l'équilibre entre la force de répulsion et le poids de l'aimant attiré par la gravité. Certains matériaux ont tendance à expulser le champ magnétique ; ces matériaux

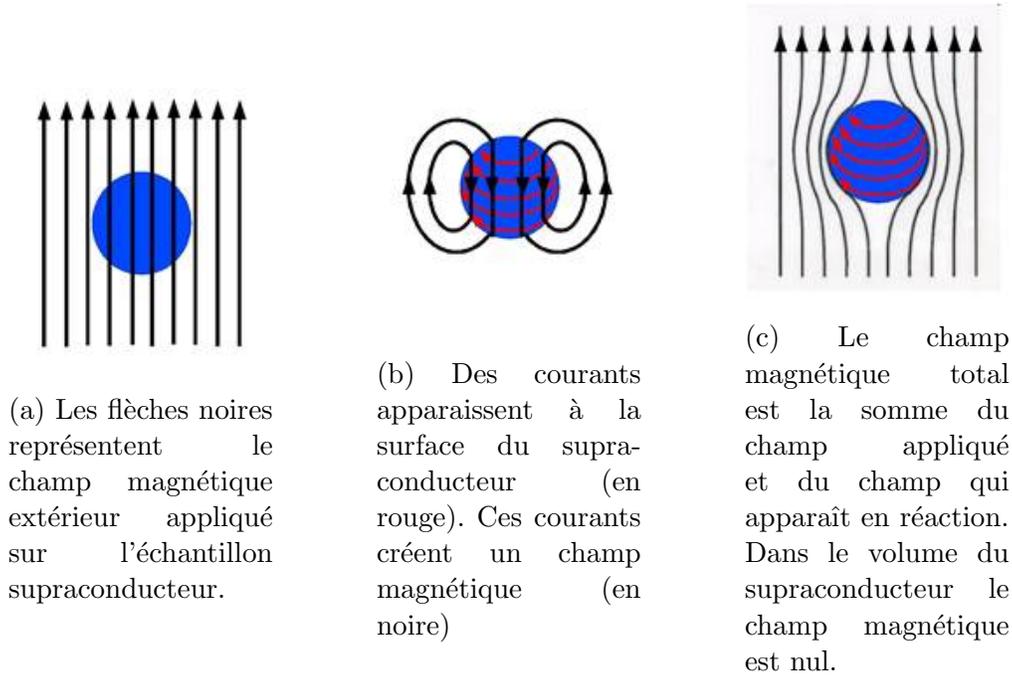


FIGURE 1.2 – Explication de l'effet Meissner

sont appelés « diamagnétiques », mais ces effets sont très faibles. Par exemple, l'eau ou le corps humain sont des matériaux diamagnétiques. Par contre, à cause de l'effet Meissner, le matériau supraconducteur crée des courants qui s'opposent complètement au champ appliqué par l'aimant. Un supraconducteur dans l'état Meissner est donc un diamagnétique parfait.

1.1.2 Équation et longueur de London : existence de solution

Comme nous l'avons souligné avant, la théorie de London a tenté d'utiliser le système Maxwell pour décrire l'effet Meissner à travers la frontière d'un supraconducteur.

On note le supercourant par \mathbf{j}_s et le champ magnétique par \mathbf{h} . Le terme "supercourant" est utilisé parce que le courant est produit sans la présence d'une différence de potentiel (électricité). L'équation de Maxwell dans un supraconducteur $\Omega \in \mathbb{R}^3$

prend la forme :

$$\mathbf{curl}\mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s \quad (1.1)$$

avec \mathbf{h} est le champs magnétique et c est la vitesse de la lumière dans le vide.

L'énergie libre du système est de la forme

$$F = F_s + E_c + E_{mag}$$

où F_s est l'énergie des électrons dans l'état condensé au repos. E_c est l'énergie cinétique associée aux courants permanents :

$$n_s e \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_s(\mathbf{r}) \quad \text{pour tout } \mathbf{r} \in \Omega \quad (1.2)$$

où e est la charge de l'électron, n_s est le nombre d'électrons supraconducteurs par unité de volume et \mathbf{v} est la vitesse des électrons. Si nous supposons que $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ varie très lentement (presque une constante), nous avons

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m n_s |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{r} \stackrel{1.2}{=} \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \lambda_L^2 |\mathbf{curl}\mathbf{h}|^2 d\mathbf{r} \quad (1.3)$$

où m est la masse effective des électrons. λ_L est une quantité homogène à une longueur, appelée longueur de London ou profondeur de pénétration qui est définie par,

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$$

L'énergie magnétique E_{mag} est définie, pour un système homogène, par :

$$E_{mag} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{h}^2}{8\pi} d\mathbf{r} \quad (1.4)$$

Donc l'énergie libre s'écrit,

$$F(\mathbf{h}) \stackrel{1.3}{\stackrel{1.4}{=}} F_s + \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} (\mathbf{h}^2 + \lambda_L^2 |\mathbf{curl}\mathbf{h}|^2) d\mathbf{r} \quad (1.5)$$

Afin de caractériser les minimiseurs de F . Nous savons que si \mathbf{h}_0 est un minimum de F donc on a $F(\mathbf{h}_0) \leq F(\mathbf{h})$ pour tout $\mathbf{h} \in X$.¹ Prendre n'importe quelle fonction $\mathbf{h} \in X$, évidemment $\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h} \in X$ et par suite

$$F(\mathbf{h}_0) \leq F(\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h}) \quad \text{pour tout } \mathbf{h} \in X.$$

1. Un espace régulier

On définit la fonction $I(t) = F(\mathbf{h}_0 + t\mathbf{h})$ on remarque que si \mathbf{h}_0 est un minimum de $F(\mathbf{h})$ alors $t = 0$ est un minimum de $I(t)$ dans \mathbb{R} . Et par conséquent nous devons avoir $I'(0) = 0$.

$$I(t) := F(u + t\mathbf{h}) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} (u + t\mathbf{h})^2 + \lambda_L^2 |\mathbf{curl}(u + t\mathbf{h})|^2 dr$$

cela implique que,

$$\frac{d}{dt} F(u + t\mathbf{h}) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} 2\mathbf{h}(u + t\mathbf{h}) + 2\lambda_L^2 \mathbf{curlcurl}(u + t\mathbf{h})\mathbf{h} dr \quad (1.6)$$

$$\frac{d}{dt} F(u + t\mathbf{h})|_{t=0} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} 2\mathbf{h}(u + \lambda_L^2 \mathbf{curlcurl}u) dr \quad \text{pour tout } \mathbf{h} \in X \quad (1.7)$$

le minimum satisfait $I'(0) = 0$, donc le minimum doit satisfaire l'équation suivante ;

$$\mathbf{h} + \lambda_L^2 \mathbf{curlcurl}\mathbf{h} = 0. \quad (1.8)$$

C'est l'équation de London obtenue par F. et H. London en 1935. Du fait que

$$\mathbf{curlcurl}\mathbf{h} = \mathbf{grad}(\mathit{div}\mathbf{h}) - \Delta\mathbf{h}$$

et $\mathit{div}\mathbf{h} = 0$ (2^eequation de Maxwell, on va voir ça plutôt en détail), on peut écrire (1.8) sous la forme

$$\Delta\mathbf{h} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{h} = 0. \quad (1.9)$$

Pour démontrer l'existence de la solution de (1.9), on aura besoin d'un cadre fonctionnel et la théorie des opérateurs m -dissipative dans les espaces de Hilbert (voir le livre pédagogique [7]).

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , et $Y = L^2(\Omega)$, Y est espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur linéaire B sur Y par ;

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\} \\ Bu = \Delta u \quad \forall u \in D(B) \end{cases}$$

Lemme 1. *L'égalité*

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (1.10)$$

est vrai pour tout $u \in D(B)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$

Démonstration. (1.10) est vérifiée pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Le lemme se conclue par densité du fait que $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$. \square

Proposition 1. *L'opérateur B est m -dissipative à domaine dense, plus précisément, B est autoadjoint et $B \leq 0$ (i.e. $(Bu, u) \leq 0 \quad \forall u \in D(B)$)*

Démonstration. D'abord, $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(B)$, et par suite $D(B)$ est dense dans Y . Soit $u \in D(B)$,

$$\begin{aligned} (Bu, u) &= (\Delta u, u) = \int_{\Omega} u \Delta u \, dx \\ &\stackrel{1.10}{=} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \leq 0 \end{aligned}$$

donc B est m -dissipative. L'application bilinéaire

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda_L^2} uv + \nabla u \cdot \nabla v \right) dx$$

est continue et coercive dans $H_0^1(\Omega)$, en effet

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda_L^2} |uv| + |\nabla u \cdot \nabla v| \right) dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda_L^2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{cauchy-schwarz}) \\ &\leq \frac{C_{\Omega}^2}{\lambda_L^2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \left(1 + \frac{C_{\Omega}^2}{\lambda_L^2}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{avec } C_{\Omega} \text{ est la constante de Poincaré} \end{aligned}$$

donc B est continue. Pour la coercivité on a ;

$$\begin{aligned} b(u, u) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda_L^2} |u|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \\ &\geq \min\left(1, \frac{1}{\lambda_L^2}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Lax-milgram, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\lambda_L^2} uv + \nabla u \cdot \nabla v \right) dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

pour revenir à l'équation (1.9) il suffit de choisir $f \equiv 0$ et on obtient

$$\Delta u - \frac{1}{\lambda_L^2} u = 0.$$

Donc B est m -dissipative. Finalement, pour tout $u, v \in D(B)$, on a, d'après (1.10),

$$(Bu, v) = (u, Bv)$$

d'où B est autoadjoint. □

Les équations de Maxwell $div \mathbf{h} = 0$ et $\mathbf{curl} \mathbf{h} = \mathbf{j}_s$ impose au champs magnétique \mathbf{h} , de l'équation de London, d'être tangent à la surface de l'échantillon, supposons par absurde que \mathbf{h} soit normal à la surface (yOz) d'un échantillon semi infini $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x)e_x$. Alors $div \mathbf{h} = 0$ impose $\mathbf{h}(x) = cte$, ce qui conduit à $\mathbf{curl} \mathbf{h} = 0$ et donc à \mathbf{j}_s et \mathbf{h} tous deux nuls, ce qui est absurde. \mathbf{h} est donc de la forme $\mathbf{h} = h(x)\mathbf{u}$ où \mathbf{u} est un vecteur unitaire du plan yoz et l'équation de London s'écrit à une dimension

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} h(x) = 0$$

et admet pour solution (en utilisant les conditions aux limites les plus naturelles $h(0) = h_0$ et $h(\infty) = 0$)

$$h(x) = h_0 \exp(-x/\lambda_L)$$

On constate que l'équation de London rend bien compte de l'expulsion du champ magnétique par le supraconducteur.

1.1.3 La longueur de cohérence

Dans l'état condensé, la corrélation entre les électrons supraconducteurs est forte. Nous utilisons ξ pour désigner cette corrélation et nous l'appelons longueur de cohérence.

1.1.4 Classification des supraconducteurs

En utilisant la longueur de cohérence ξ et la profondeur de pénétration de London λ_L , nous pouvons classer les supraconducteurs en deux types :

(a) lorsque $\lambda_L \ll \xi$, nous disons que le supraconducteur est un supraconducteur de type I. L'équation de London n'est pas valide dans ce cas, car la région de pénétration est très mince. La relation implique que la corrélation des électrons

est le facteur dominant et l'effet Meissner gère le comportement du matériau en réponse à un champ magnétique extérieur.

La plupart des matériaux de type I sont des métaux purs et des alliages à faible concentration. Ils ont généralement besoin de très basse température (quelques K) pour présenter un comportement supraconducteur. Pour cette raison, ils sont également appelés supraconducteurs à basse température ou supraconducteurs durs.

Pour préparer la discussion sur la supraconductivité de type II, nous décrivons la notion de vortex. Mathématiquement parlant, un vortex est un objet de codimension deux. Par exemple, un point dans le plan, ou une courbe dans l'espace. Ce concept a son origine dans la mécanique des fluides. Un exemple typique de vortex est le vide de la ligne de circulation formé dans l'eau de bain alors qu'il coule dans le drain et autour de laquelle, l'eau circule, dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Cela illustre le concept de vortex et son orientation. Dans le contexte de la supraconductivité, le flux d'électrons supraconducteur correspond au flux d'eau. Lorsqu'un vide est formé, le flux magnétique se remplit dans le même sens que l'air au vortex fluide. Dans le noyau du vortex, il y a une absence d'électrons super conducteurs (c'est-à-dire que le matériau est dans un état normal) Comme dans le vortex fluide, il n'y a pas d'eau. C'est une image idéale. La situation réelle près d'un noyau de vortex est plus compliquée car les quantités varient continuellement. Nous sommes maintenant prêts à discuter des supraconducteurs de type II :

(b) lorsque $\lambda_L \gg \xi$, nous disons que le supraconducteur est un supraconducteur de type II. L'équation de London n'est valable que dans les champs faibles lorsqu'il existe une pénétration magnétique relativement faible à travers la limite de l'échantillon.

La plupart des matériaux de type II sont des composés chimiques d'alliages supraconducteurs à concentration élevée. Le matériau de type II devient supraconducteur à une température relativement élevée (environ 30 K ou plus).

Les supraconducteurs de type II se comportent différemment du matériau de type I. Au lieu de généraliser, nous prenons l'exemple d'un échantillon de cylindre supraconducteur de type II. Lorsqu'il est placé dans un champ magnétique appliqué H parallèle à son axe, il existe trois gammes de valeurs de H intéressantes.

i) Il existe une valeur H_{c1} telle que si $H < H_{c1}$, alors seul un effet Meissner relativement doux est observé sur la limite. La valeur de H_{c1} dépend de la température, de la forme géométrique et d'autres propriétés du matériau concerné. Dans ce

régime, la propriété du supraconducteur peut être décrite par l'équation de London ou une forme particulière de l'équation G-L à introduire plus tard.

ii) Il existe une autre valeur critique $H_{c2} > H_{c1}$ telle que pour $H \in]H_{c1}, H_{c2}[$, le flux magnétique pénètre graduellement dans l'échantillon. Cependant, la propriété supraconductrice n'est pas complètement détruite et par conséquent, le flux magnétique ne peut pas encore complètement pénétrer dans l'échantillon. Dans cette région, la force de flux pénétré est plus petite que celle du champ appliqué. Dans cet état, le flux magnétique partiellement pénétré se rassemble autour d'un certain nombre de vortex super-courants enveloppants de flux quantifiés à l'intérieur du corps. Cet état est souvent appelé l'état mixte ou l'état du vortex.

iii) Pour $H > H_{c2}$, l'échantillon devient complètement normal et le flux magnétique pénètre profondément dans le corps. La valeur de H_{c2} peut être très élevée et sa valeur dépend d'un certain nombre de facteurs, y compris la température et la géométrie.

Enfin, nous soulignons que les valeurs de H_{c1} et H_{c2} dépendent de la situation. C'est-à-dire, même si le matériau est le même, la distribution de la valeur et la direction du champ magnétique appliqué, la température, la forme géométrique de l'échantillon et l'historique de l'échantillon peuvent tous affecter leurs valeurs.

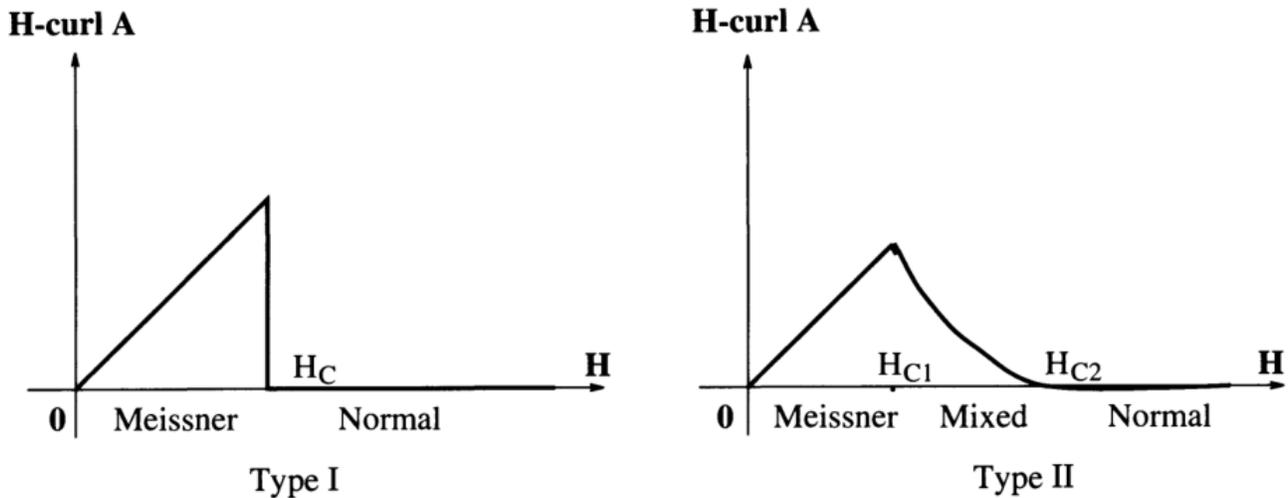


FIGURE 1.3 – Relation entre les champs magnétiques induits et appliqués pour les supraconducteurs types I et II

1.1.5 Détails a propos du vortex

Nous savons déjà que pour un supraconducteur de type II, lorsque $H_{c1} < |H| < H_{c2}$, nous avons l'état mixte ou le vortex et le champ magnétique pénètre graduellement dans le matériau. L'observation physique la plus intéressante est que le champ magnétique pénétré ne se distribue pas uniformément à l'intérieur du supraconducteur. Il se concentre plutôt sur certains objets de co-dimension 2 à l'intérieur de l'échantillon supraconducteur. Les objets de co-dimension deux sont des points si la dimension de l'espace est 2 et des courbes lorsque la dimension de l'espace est trois. Ces objets de co-dimensions deux sont les vortices. Dans les expériences, on observe que les vortices respectent perpendiculairement la limite de l'échantillon supraconducteur.

Autour du noyau d'un vortex, il y a une circulation super-courante. Ce super-courant produit un champ magnétique fort (généralement avec une force beaucoup plus grande que H_{c2}) dans la direction tangentielle du vortex le long du noyau du vortex (ou perpendiculaire au supraconducteur dans lequel le vortex est situé si la dimension spatiale est deux). Donc, près du noyau du vortex, le matériau devient normal plutôt que supraconducteur. Ce champ magnétique induit rayonnera également dans la région environnante et affectera le champ magnétique perpendiculaire à la surface de l'échantillon supraconducteur.

L'intérêt mathématique dans l'étude des modèles mathématiques liés à la supraconductivité réside dans l'étude de la structure des domaines de transition de phases de co-dimension deux. Le mot transition de phase dans ce contexte signifie le passage de la phase normale à la phase supraconductrice ou vice versa.

En dehors de la co-dimension 2 des vortex, une autre quantité est l'orientation. Ceci est déterminé par la direction du super-courant circulant autour du noyau du vortex. Il est facile de comprendre qu'il n'y a que deux possibilités d'orientation. Vu d'une direction fixe à une section transversale perpendiculaire à la courbe du noyau du vortex, le super-courant peut circuler dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. (voir figure 1.4)

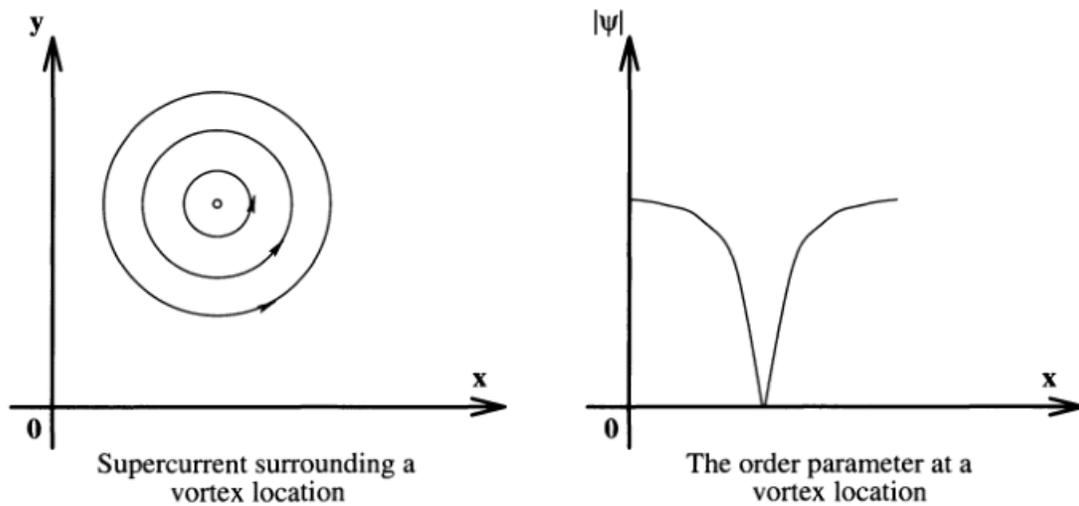


FIGURE 1.4 – Supercurrent et paramètre d'ordre près d'un vortex.

1.2 Synthèse et conclusion

Dans ce rapport, nous rapportons quelques-unes des avancées de recherche les plus récentes sur le modèle de supraconductivité G-L. Nous examinerons les justifications mathématiques des phénomènes mentionnés ci-dessus et de nombreuses autres questions connexes. Nous ne parlerons pas des aspects thermodynamiques de la théorie car nous ne connaissons aucun modèle thermodynamique mathématique satisfaisant. Donc, si la température est impliquée dans nos arguments, elle sera considérée comme une constante donnée dans les circonstances prédéterminées.

Dans ce qui suit, nous allons présenter le système G-L, expliquer l'adimensionnement du système impliquée, étudier certains des concepts de base des problèmes de transition de phases de deuxième ordre et des outils mathématiques pertinents associés pour ouvrir la voie à d'autres études.

Chapitre 2

Théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau

Dans ce chapitre, nous présentons l'objet principal de notre étude, le système G-L. La question clé à ce stade est de montrer comment adimensionner ou normalisé le système à certaines formes familières et discuter comment ça peut aider à classifier les types des supraconducteurs. Nous discutons des approximations mathématiques de certaines conditions que les fondateurs de la théorie G-L considèrent comme importantes pour le modèle pour rester valide. Nous donnons également une brève discussion préliminaire sur l'influence de la normalisations de l'équation lorsque nous envoyons certains paramètres dans le système G-L normalisé à zéro ou à l'infini afin de dériver quelques équations limites. La dérivation de ces limites devient une partie importante de la recherche mathématique récente. Cependant, il est très difficile de trouver une discussion systématique dans la littérature existante sur ces sujets (une discussion sur tout le sujet dans un seul article).

2.1 L'énergie libre et les équations Ginzburg-Landau

En 1937, Landau a proposé une théorie générale des transitions de phase de second ordre basées sur les hypothèses fondamentales suivantes :

- 1 Il existe un paramètre d'ordre complexe ψ qui tend vers zéro au transition.
- 2 Il existe une densité d'énergie libre homogène qui peut être développée en puissance de ψ
- 3 Les coefficients de l'expansion sont des fonctions régulières de la température T .

Suivant ces hypothèses, Landau a écrit l'énergie libre par unité de volume comme suit

$$F = F_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}|\psi|^4 + \dots \quad (2.1)$$

Il a souligné que la température T est un facteur important intervenant dans le processus de transition de phase. Il a affirmé que le modèle est valide lorsque T est proche d'une valeur critique particulière T_0 . Cette température critique T_0 est définie dans le sens suivant : lorsque $T < T_0$ les propriétés supraconductrice apparaît, lorsque $T > T_0$ les propriétés supraconductrice disparaît.

Mathématiquement, cette propriété s'exprime par les expressions suivantes :

$$\alpha(T) \sim (T - T_0)\alpha_1, \quad \beta(T) \sim \beta_0$$

Dans les expressions ci-dessus, α_1 et β_0 sont des constantes positives. Au moment où $T < T_0$, l'énergie libre (2.1) a un minimum absolu pour $|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$. Cela implique que le minimiseur d'énergie ψ ne doit pas être identique à zéro. Évidemment, lorsque $T > T_0$, le minimiseur de l'énergie ψ satisfait $|\psi| = 0$.

Dans le contexte de la supraconductivité, $|\psi|^2$ sera utilisé comme densité de paires d'électrons supraconducteurs. Suite aux discussions ci-dessus, lorsque $T < T_0$, le matériau préfère prendre l'état supraconducteur. En revanche, lorsque $T > T_0$, le matériau préfère prendre l'état normal.

Nous devons souligner que l'expression (2.1) s'applique uniquement lorsque ψ est une constante dans le domaine considéré. Si ψ n'est pas une constante, le terme $|\nabla\psi|^2$ doit être ajouté et une intégration sur le domaine de considération doit être effectuée. Pour considérer l'image complète, l'énergie du champ magnétique devrait également être prise en charge.

En 1950, Ginzburg et Landau ont proposé une extension de l'énergie de Landau pour décrire le supraconducteur en présence d'un champ magnétique. Ils ont proposé que ψ soit pris comme fonction d'onde pour une particule de charge e^* et de masse m^* . Afin d'assurer l'invariance de la jauge, ils ont écrit l'énergie libre comme (c est la vitesse de la lumière, \hbar est la constante de Planck)

$$E(\psi, \mathbf{A}) = F_n + \int_{\Omega} \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - \frac{e^* \mathbf{A}}{c})\psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{curl}\mathbf{A}|^2}{8\pi} \quad (2.2)$$

où \mathbf{A} est le potentiel vecteur qui décrit le champs magnétique \mathbf{h} , i.e.,

$$\mathbf{h} = \mathbf{curl}\mathbf{A}. \quad (2.3)$$

C'est l'énergie de G-L originale pour la supraconductivité en tenant compte de l'effet du champ magnétique.

Il est également possible d'étudier l'énergie de Gibbs, qui tient compte plus explicitement du champ magnétique appliqué. L'énergie de Gibbs a la forme suivante :

$$E(\psi, \mathbf{A}) = F_n + \int_{\Omega} \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| (-i\hbar\nabla - \frac{e^* \mathbf{A}}{c}) \psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{curl} \mathbf{A} - \mathbf{H}|^2}{8\pi} \quad (2.4)$$

Où \mathbf{H} est le champ appliqué de l'extérieur. La différence dans ces deux modèles sera observée lorsque nous essayons de dériver le système des équation aux dérivées partielles avec les conditions aux limites associées. Physiquement, nous croyons que cela concerne la façon de traiter le champ appliqué, total et induit, bien que personne ne précise explicitement la raison.

En fait, nous comprenons maintenant que l'expression énergétique (2.4) n'est pas l'histoire entière. Si nous considérons le problème de la supraconductivité sur un domaine Ω qui n'est pas l'espace entier, nous aurons besoin des équations de Maxwell dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Il peut être prouvé que, selon certaines hypothèses raisonnables, (2.4) est valide lorsque la dimension spatiale est 2. Nous en discuterons plus en détail plus loin. Ici, nous limitons nos discussions temporairement au cas 2-d. Par conséquent, $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, $\mathbf{curl} \mathbf{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ et \mathbf{H} devient une fonction scalaire H .

Simplifiant la fonctionnelle (2.2), l'énergie devient

$$\begin{aligned} E(\psi, \mathbf{A}) &= F_n + \int_{\Omega} \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| -i\hbar \left(\nabla + \frac{e^* \mathbf{A}}{i c \hbar} \right) \psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{curl} \mathbf{A}|^2}{8\pi} \\ &= F_n + \int_{\Omega} \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\nabla - \frac{i e^* \mathbf{A}}{c \hbar} \right) \psi \right|^2 + \frac{|\mathbf{curl} \mathbf{A}|^2}{8\pi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

En prenant la variation, par exemple, de (2.5) par rapport à ψ^* , on trouve

$$\delta E|_{\psi^*} = \int_{\Omega} \left[\alpha \psi \delta \psi^* + \beta |\psi|^2 \psi \delta \psi^* + \frac{\hbar^2}{2m^*} \underbrace{\left(\nabla \psi - \frac{i e^*}{\hbar c} \mathbf{A} \psi \right) \left(\nabla \delta \psi^* + \frac{i e^*}{\hbar c} \mathbf{A} \delta \psi^* \right)}_{(I)} \right] dx \quad (2.6)$$

Explicitons le terme (I) et intégrons le terme contenant $\nabla\delta\psi^*$ par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega}(I)dx &= \int_{\Omega}\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)\nabla\delta\psi^*dx + \int_{\Omega}\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi^*\right)\frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\delta\psi^*dx \\
 &= \oint_{\partial\Omega}\delta\psi^*\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)\cdot\mathbf{n}d\sigma - \int_{\Omega}\nabla\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)\delta\psi^*dx \\
 &\quad + \int_{\Omega}\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi^*\right)\frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\delta\psi^*dx \\
 &= \oint_{\partial\Omega}\delta\psi^*\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)\cdot\mathbf{n}d\sigma - \int_{\Omega}\left(\nabla^2\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\nabla(\mathbf{A}\psi) - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\nabla\psi + \left(\frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi\right)\delta\psi^*dx \\
 &= \oint_{\partial\Omega}\delta\psi^*\left(\nabla\psi - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\psi\right)\cdot\mathbf{n}d\sigma - \int_{\Omega}\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi\delta\psi^*dx
 \end{aligned}$$

En supposant qu'il n'y ait pas de courant passant par la surface du supraconducteur, c'est-à-dire que $\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi$ n'a aucun composant perpendiculaire à $\partial\Omega$ i.e.,

$$\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi\cdot\mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (2.7)$$

on en déduit

$$\int_{\Omega}(I)dx = - \int_{\Omega}\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi\delta\psi^*dx \quad (2.8)$$

Maintenant, nous remontons le résultat (2.8) à l'expression précédente (2.6) on obtient

$$\delta E_{|\psi^*} = \int_{\Omega}\left[\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi\right]\delta\psi^*dx \quad (2.9)$$

La variation correspondante doit être nulle i.e. $\delta E = 0$, et comme $\delta\psi^*$ est une fonction arbitraire dans Ω , on obtient la première équation de Ginzburg-Landau

$$\begin{cases} \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0 & x \in \Omega \\ \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi\cdot\mathbf{n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

que l'on peut l'écrire de la forme la plus connu au littérature

$$\begin{cases} \frac{1}{2m^*}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c}\right)^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 & x \in \Omega \\ \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*\mathbf{A}}{c}\right)\psi\cdot\mathbf{n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

Continuons la dérivation de la deuxième équation de Ginzburg-Landau à partir de (2.5). On utilisons la méthodes faite dans la sous section (1.1.2) :

$$E(\psi, \mathbf{A} + t\mathbf{B}) = F_n + \int_{\Omega}\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}\left|\left(\nabla - \frac{ie^*(\mathbf{A} + t\mathbf{B})}{\hbar c}\right)\psi\right|^2 + \frac{|\mathbf{curl}(\mathbf{A} + t\mathbf{B})|^2}{8\pi} \quad (2.12)$$

où t est nombre réel.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\psi, \mathbf{A} + t\mathbf{B}) &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\mathbf{B}}{4\pi} \mathbf{curl} \mathbf{curl}(\mathbf{A} + t\mathbf{B}) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{-ie^*}{c\hbar} \mathbf{B}\psi \left(\nabla\psi^* + \frac{ie^*}{c\hbar}(\mathbf{A} + t\mathbf{B})\psi^* \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{ie^*}{c\hbar} \mathbf{B}\psi^* \left(\nabla\psi - \frac{ie}{c\hbar}(\mathbf{A} + t\mathbf{B})\psi \right) \right] \right\} \\ \frac{d}{dt}E(\psi, \mathbf{A} + t\mathbf{B})|_{t=0} = 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{B} \left[\frac{1}{4\pi} \mathbf{curl} \mathbf{curl}(\mathbf{A} + \frac{i\hbar e^*}{2m^*c} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*)) + \frac{(e^*)^2}{m^*c^2} |\psi|^2 \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

et ceci pour toute \mathbf{B} décrivant l'espace. Donc le minimum vérifiant l'équation

$$\frac{\mathbf{curl}^2 \mathbf{A}}{4\pi} = \frac{\hbar e^*}{2im^*c} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c^2} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (2.14)$$

Or d'après (1.1) on a

$$\frac{\mathbf{curl}^2 \mathbf{A}}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}_s}{c}$$

Donc la deuxième equation de Ginzburg-Landau est donné par

$$\frac{\mathbf{curl}^2 \mathbf{A}}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}_s}{c} = \frac{\hbar e^*}{2im^*c} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c^2} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (2.15)$$

ici les conditions aux limites sont imposées de l'extérieur, i.e.

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} = H, \quad x \in \partial\Omega \quad (2.16)$$

Où \mathbf{H} est le champ appliqué de l'extérieur.

le système de Ginzburg-Landau s'écrit de la façon suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla - \frac{e^* \mathbf{A}}{c})^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 & x \in \Omega \\ \frac{\mathbf{curl}^2 \mathbf{A}}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}_s}{c} = \frac{\hbar e^*}{2im^*c} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c^2} |\psi|^2 \mathbf{A} & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.17)$$

Avec les conditions aux limites correspondantes

$$\begin{cases} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right) \psi \cdot \mathbf{n} = 0 & x \in \partial\Omega \\ \mathbf{curl} \mathbf{A} = H & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.18)$$

Ces conditions sont pour un échantillon placé dans le vide. Si l'extérieur de l'échantillon de supraconducteur est rempli d'une sorte de conducteur, De Gennes a proposé

d'imposer les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi \cdot \mathbf{n} = -i\eta\psi, & x \in \partial\Omega \\ \mathbf{curl}\mathbf{A} = H, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

où η est une fonction à valeur positives. C'est un problème plus compliqué. L'expression de l'énergie doit également être modifiée de manière correspondante.

Lorsque la dimension de l'espace est 3, l'équation de Maxwell dans le domaine extérieur doit également être prise en compte (voir [8]). Par exemple, lorsque le domaine extérieur est vide, nous devrions utiliser l'énergie

$$E(\psi, \mathbf{A}) = F_n + \int_{\Omega} \left(\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \right) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathbf{curl}\mathbf{A} - \mathbf{H}|^2}{8\pi}$$

Remarque 1. *Il est formellement connu que les vortex ont tendance à respecter perpendiculairement la limite de l'échantillon supraconducteur. Comme les tourbillons sont formés par les noyaux de super-courants circulant, la supercurrence génère un champ magnétique le long de la direction tangentielle du noyau, puis perpendiculairement à la limite de l'échantillon. C'est cette observation qui conduit à penser à utiliser le système Maxwell dans le domaine extérieur.*

Dans ce qui suit, lorsque nous discutons de l'énergie G-L, nous parlons principalement de l'énergie de Gibbs. L'énergie de Gibbs mène à une meilleure compréhension du problème et nous permet d'avoir des formules mathématiques solides. La variation de l'énergie de Gibbs conduit aux system suivant (en utilisons la même méthode utilisé précédemment)

$$\begin{cases} \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 & x \in \Omega \\ \frac{\mathbf{curl}^2\mathbf{A} - \mathbf{curl}\mathbf{H}}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}_s}{c} = \frac{\hbar e^*}{2im^*c} \left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^* \right) - \frac{e^{*2}}{m^*c^2} |\psi|^2\mathbf{A} & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

Avec les conditions aux limites correspondantes

$$\begin{cases} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi \cdot \mathbf{n} = 0 & x \in \partial\Omega \\ \mathbf{curl}\mathbf{A} = H & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

Remarque 2. *Du point de vue mathématique du paramètre d'ordre, les emplacements vortex sont donnés par*

$$\{x \in \Omega, \quad \psi(x) = 0\}$$

2.2 Normalisations des equations de Ginzburg-Landau

Pour l'adimensionnement ou la normalisation du problème, nous prenons le cas 2-d à titre d'exemple. L'ensemble du processus s'étend au cas 3-d automatiquement.

Tout d'abord, spécifions les valeurs de e^* et m^* . Ce sont les valeurs de la Charge électrique et masse des paires Cooper, respectivement. Il a été montré par Gorkov en 1959 que $e^* = 2e$ où e est la charge électronique standard. Il a également montré que la valeur de m^* peut être arbitraire. La convention de physique est alors de le laisser être m (pas $2m$!), La masse d'électrons standard. Le système G-L peut donc être réécrit comme

$$\begin{cases} \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c})^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 & x \in \Omega \\ \frac{\mathbf{curl}h}{4\pi} = \frac{\mathbf{j}_s}{c} = \frac{2\hbar e}{2imc}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{4e^2}{mc^2}|\psi|^2\mathbf{A} & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.22)$$

où selon le choix de l'énergie, $h = \mathbf{curl}\mathbf{A}$ ou $h = \mathbf{curl}\mathbf{A} - H$.

En ce qui concerne les quantités α et β , il existe différentes valeurs qui leur sont attribuées. Gorkov a montré que pour le métal pur, nous avons

$$\alpha = 1.83 \frac{\hbar^2}{2m\xi_0^2} \frac{1}{T_0} \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \beta = 0.35 \frac{1}{N(0)} \left(\frac{\hbar^2}{2m\xi_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_0)^2} \quad (2.23)$$

Où ξ_0 est la longueur de cohérence de l'état fondamental et $N(0)$ est la densité des états au niveau de Fermi¹. Dans la théorie BCS, ils ont des valeurs respectives

$$\alpha = N(0) \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \beta = 0.098 \frac{N(0)}{(k_B T_0)^2} \quad (2.24)$$

Maintenant, nous sommes en mesure de discuter de la normalisation du système G-L. Permettez-nous d'introduire les paramètres physiques suivants :

$$\begin{cases} |\psi_0|^2 = |\alpha|/\beta, \\ H_c = (4\pi|\alpha|^2/\beta)^{1/2}, \\ \lambda = \lambda(T) = (mc^2\beta/16\pi e^2|\alpha|)^{1/2}, \\ \xi = \xi(T) = \hbar/(2m|\alpha|)^{1/2}, \\ \kappa = \lambda/\xi. \end{cases} \quad (2.25)$$

1. Le niveau de Fermi est une caractéristique propre à un système qui traduit la répartition des électrons dans ce système en fonction de la température.

Physiquement, $|\psi_0|^2$ représente la densité d'équilibre, H_c pour le champ critique thermodynamique, λ pour la profondeur de pénétration, ξ pour la longueur de cohérence. Le rapport des deux longueurs caractéristiques $\kappa = \lambda/\xi$ est le paramètre G-L de la substance et est une constante sans dimension.

Proposition 2. *Sur la base d'un choix convenable des données physiques, le système physique de G-L (2.22) peut s'écrire d'une manière mathématiques sous la forme*

$$\begin{cases} \left(\frac{i}{\kappa}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & x \in \Omega \\ \mathbf{curl}h + \frac{i}{2\kappa}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) + |\psi|^2\mathbf{A} = 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.26)$$

Démonstration. Nous présentons maintenant les nouvelles variables suivantes (celles avec prime) :

$$\begin{cases} x = \lambda x' \\ \psi = \psi_0 \psi' \\ \mathbf{A} = \sqrt{2}H_c \lambda \mathbf{A}' \\ H = \sqrt{2}H_c H' \end{cases} \quad (2.27)$$

la première équations de (2.22) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(i\hbar\nabla|_x + \frac{2e\mathbf{A}}{c})^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi &= 0 \\ \frac{1}{2m|\alpha|}(i\hbar\nabla|_x + \frac{2e\mathbf{A}}{c})^2\psi \pm \psi + \frac{\beta}{|\alpha|}|\psi|^2\psi &= 0 \\ \left(i\frac{\hbar}{\sqrt{2m|\alpha|}}\nabla|_x + \frac{2e\mathbf{A}}{c\sqrt{2m|\alpha|}}\right)^2\psi \pm \psi + \frac{\beta}{|\alpha|}|\psi|^2\psi &= 0 \end{aligned}$$

du fait que $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m|\alpha|}}$ on trouve

$$\begin{aligned} \left(i\xi\nabla|_x + \frac{2e\mathbf{A}}{c\sqrt{2m|\alpha|}}\right)^2\psi \pm \psi + \frac{\beta}{|\alpha|}|\psi|^2\psi &= 0 \\ \left(i\frac{\xi}{\lambda}\nabla|_{x'} + \frac{2e\sqrt{2}H_c\lambda\mathbf{A}'}{c\sqrt{2m|\alpha|}}\right)^2\psi_0\psi' \pm \psi_0\psi' + \frac{\beta}{|\alpha|}\frac{|\alpha|}{\beta}|\psi'|^2\psi'\psi_0 &= 0 \end{aligned}$$

c'est à dire que

$$\left(\frac{i}{\kappa} \nabla|_{x'} + \frac{2e\sqrt{2}H_c\lambda\mathbf{A}'}{c\sqrt{2m|\alpha|}} \right)^2 \psi' + (|\psi'|^2 \pm 1)\psi' = 0$$

puisque $\frac{2e\sqrt{2}H_c\lambda}{c\sqrt{2m|\alpha|}} = 1$, on en déduit la première equations de Ginzburg-Landau normalisée (Nous descendons désormais les primes) :

$$\left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right)^2 \psi + (|\psi|^2 \pm 1)\psi = 0 \quad (2.28)$$

Le signe dans $(|\psi|^2 \pm 1)$ est le signe du paramètre α , i.e., est $+1$ si $T > T_c$ et -1 si $T < T_c$. Nous sommes intéressés par le deuxième cas où le phénomène de la supraconductivité apparaît. Nous procédant de la même manière de normalisations pour la deuxième équation nous obtenant les équations G-L non dimensionnelles suivantes

$$\begin{cases} \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right)^2 \psi + (|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & x \in \Omega \\ \mathbf{curl}h + \frac{i}{2\kappa} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.29)$$

Ici encore, h pourrait être $\mathbf{curl}\mathbf{A}$ ou $\mathbf{curl}\mathbf{A} - H$ selon l'énergie que nous utilisons. \square

Les conditions aux limites correspondantes sont

$$\left(\frac{i}{\kappa} \nabla \psi + \mathbf{A}\psi \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{curl}\mathbf{A} = H. \quad (2.30)$$

Il s'agit d'une forme particulière du système normalisé. L'énergie normalisé correspondante est

$$E(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} (|\psi|^2 - 1)^2 + \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + |h|^2 dx. \quad (2.31)$$

En fait, si nous nous réduisons à nouveau pour introduire de nouvelles quantités sans dimension (celles avec prime)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{A}', \quad H = \frac{1}{\kappa} H', \quad \psi = \psi', \quad (2.32)$$

nous obtenons (déposez les primes à nouveau)

$$\begin{cases} (i\nabla + \mathbf{A})^2\psi + \kappa^2(|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & x \in \Omega \\ \mathbf{curl}h + \frac{i}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + |\psi|^2\mathbf{A} = 0. & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.33)$$

Les conditions aux limites correspondantes sont

$$(i\nabla\psi + \mathbf{A}\psi) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{curl}\mathbf{A} = H. \quad (2.34)$$

L'énergie normalisé correspondante est

$$E(\psi, \mathbf{A}) = \int_{\Omega} \kappa^2(|\psi|^2 - 1)^2 + \left| (i\nabla + \mathbf{A})\psi \right|^2 + |h|^2 dx. \quad (2.35)$$

(2.29) et (2.33) sont deux des formes normalisées les plus populaires du système G-L.

Remarque 3. Désormais, nous utilisons principalement les formes normalisées (2.29) et (2.33). Nous ne donnons pas une préférence claire parce que selon les circonstances, un modèle peut être préféré à l'autre.

2.3 Cas 2-d : écriture en coordonnées polaire

Dans cette section nous signalons un cas particulier de l'écriture de système de G-L, ce choix de coordonnée polaire est important lorsque le domaine est une disque. On pose

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.36)$$

leurs dérivées partielles associées sont

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta. \end{cases}$$

nous voulons calculer les deux termes principales $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$ et $\frac{\partial^2\psi}{\partial \theta^2}$.

Par le théorème de dérivation des fonctions composées nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial r} &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \cos \theta \frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.37)$$

En utilisant(2.37), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 &= \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \tag{2.38}
 \end{aligned}$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\
 &= -r \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{2.39}
 \end{aligned}$$

En utilisant(2.39), nous déduisons

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= -r \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 &= -r \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} - r \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) - r \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 &\quad + r \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\
 &= -r \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - r \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 &\quad + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + r \cos \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\
 &= -r \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + r^2 \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Divisons par r^2 et utilisons (2.37) on trouve

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{2.40}$$

Lorsque nous sommons (2.38) et (2.40), on obtient

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \tag{2.41}$$

ce qui conduit à

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.42)$$

Puisque $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, cela implique que pour tout $r \geq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ nous avons $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ si $x > 0$.

Par le théorème de dérivation des fonctions composées nous avons

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

et du fait que

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{cases}$$

on en déduit

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

et du même façon pour $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ nous obtenons

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Si on suppose que le vecteur potentiel $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, le système de Ginzburg-Landau peuvent s'écrire en coordonnées polaire sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} & = i\kappa \left(A_1 \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + A_2 \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right) \\ & \quad + \kappa^2 (|\psi|^2 + \mathbf{A}^2 - 1) \psi \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial r} & = \frac{i}{2\kappa} |\psi|^2 \left(\cos \theta \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + |\psi|^2 \mathbf{A} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial r} & = \frac{i}{2\kappa} |\psi|^2 \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + |\psi|^2 \mathbf{A}. \end{cases}$$

On suppose que $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ où ψ_1 est la partie réelle et ψ_2 est la partie

imaginaire, alors le système peut s'écrire de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \kappa \left(A_1 \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) - A_2 \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \right) \\ \quad + \kappa^2 (|\psi|^2 + \mathbf{A}^2 - 1) \psi_1 \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \kappa \left(A_1 \left(\cos \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) + A_2 \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right) \\ \quad + \kappa^2 (|\psi|^2 + \mathbf{A}^2 - 1) \psi_2 \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_1}{\partial r} = \frac{i}{2\kappa} |\psi|^2 \left(\cos \theta \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + |\psi|^2 \mathbf{A} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial r} = \frac{i}{2\kappa} |\psi|^2 \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + |\psi|^2 \mathbf{A}. \end{array} \right.$$

notons que si $r \rightarrow \infty$ les termes où il y a $1/r$ ou $1/r^2$ peuvent être négliger et on peut avoir des équations approximatives dans le cas à deux dimensions.

maintenant nous allons traiter l'un des remarques la plus pertinente c'est l'invariance de jauge qui nous aidera à démontrer l'existence et l'unicité.

2.4 Invariance de jauge

Lemme 2. *Pour toute fonction régulière donnée θ nous avons*

Dans l'expression énergétique (2.31)

$$E(\psi, \mathbf{A}) = E(\psi \exp(i\kappa\theta), \mathbf{A} + \nabla\theta) \quad (2.43)$$

Et dans la forme énergétique (2.35)

$$E(\psi, \mathbf{A}) = E(\psi \exp(i\theta), \mathbf{A} + \nabla\theta) \quad (2.44)$$

Démonstration. en effet, faisons ça pour la première forme énergétique (2.31), pour la deuxième ça ce fait de la même manière.

$$\begin{aligned}
 E(\psi \exp(i\kappa\theta), \mathbf{A} + \nabla\theta) &= \int_{\Omega} \left\{ (|\psi \exp(i\kappa\theta)|^2 - 1)^2 + \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla\psi \exp(i\kappa\theta) + (\mathbf{A} + \nabla\theta)\psi \exp(i\kappa\theta) \right) \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + |\mathbf{curl}(\mathbf{A} + \nabla\theta)|^2 \right\} dx \\
 &= \int_{\Omega} \left\{ (|\psi|^2 - 1)^2 + \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla\psi e^{i\kappa\theta} - \nabla\theta\psi e^{i\kappa\theta} + \nabla\theta\psi e^{i\kappa\theta} + \mathbf{A}\psi e^{i\kappa\theta} \right) \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + |\mathbf{curl}\mathbf{A} + \underbrace{\mathbf{curl}\nabla\theta}_{=0}|^2 \right\} dx \\
 &= \int_{\Omega} (|\psi|^2 - 1)^2 + \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla\psi + \mathbf{A}\psi \right) e^{i\kappa\theta} \right|^2 + |\mathbf{curl}\mathbf{A}|^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} (|\psi|^2 - 1)^2 + \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla\psi + \mathbf{A}\psi \right) \right|^2 + |\mathbf{curl}\mathbf{A}|^2 dx \\
 &= E(\psi, \mathbf{A}).
 \end{aligned}$$

□

Prenons la forme (2.35) comme exemple. La transformation

$$(\psi, \mathbf{A}) \rightarrow (\psi \exp(i\theta), \mathbf{A} + \nabla\theta) \quad (2.45)$$

s'appelle une transformation de jauge. Le fait que l'énergie est invariable dans la transformation de jauge est appelé invariance de jauge. Cette propriété d'invariance nous aidera à établir l'existence de solutions plus tard.

2.5 Les deux longueurs caractéristiques $\xi(T)$ et $\lambda(T)$

Le système de G-L a deux solutions particulières :

- 1) $\psi \equiv 0$ et $\mathbf{curl}\mathbf{A} = H$ Lorsque H est grand (nous donnerons une confirmation qualitative de ce résultat plus tard). Ici H est le champ appliqué. Cette solution décrit l'état normal.
- 2) $\psi = \psi_0 = \sqrt{|\alpha|/\beta}$ et $\mathbf{A} = 0$ lorsque $H = 0$. C'est l'état supraconducteur pur sans champ appliqué à l'extérieur.

Lorsque le champ appliqué est très faible, ψ va varier lentement, près de ψ_0 . Puisque le champs appliqué est faible, nous pouvons prendre $\mathbf{A} = 0$ et $f = \psi/\psi_0$, alors f satisfait

$$\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e\mathbf{A}}{c} \right)^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi &= 0 \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_0\Delta f + \alpha\psi_0 f + \beta\frac{|\alpha|}{\beta}\psi_0 f^2 f &= 0 \\
-\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|}\Delta f - f + f^3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Cela conduit à la définition de

$$\frac{\hbar^2}{2m|\alpha|} = \xi^2(T)$$

Comme la longueur de cohérence dépendant de la température (d'abord introduit dans (2.25)). Il représente l'échelle de longueur sur laquelle f varie entre 0 et 1.

En une seule dimension l'équation s'écrit de la façon :

$$-\xi^2(T)\frac{d^2 f}{dx^2} - f + f^3 = 0 \tag{2.47}$$

Par hypothèse, le champ ne pénètre pas dans la région où ψ est non nul. Nous pouvons donc utiliser les conditions aux limites naturelle $f(0) = f'(\infty) = 0$ et $f(\infty) = 1$. En multipliant (2.47) par df/dx et en intégrant, on obtient

$$-\xi^2(T)\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - f^2 + \frac{1}{2}f^4 = C$$

Afin de satisfaire la condition limite comme $x \rightarrow \infty$, nous devons prendre la constante pour être égale à $-1/2$. Cela donne

$$\begin{aligned}
\xi^2(T)\left(\frac{df}{dx}\right)^2 &= \frac{1}{2}(1 - f^2)^2 \\
\left(\frac{df}{dx}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\xi(T)}(1 - f^2)\right)^2
\end{aligned}$$

La solution répondant à nos conditions aux limites est

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)}\right). \tag{2.48}$$

En supposant à nouveau que le champ est faible et ψ est presque ψ_0 , nous écrivons $\psi = \psi_0 e^{i\chi}$ et nous avons (par (2.22-2))

$$\mathbf{j}_s = \frac{2e\hbar}{m}\psi_0^2\nabla\chi - \frac{4e^2}{mc}\psi_0^2\mathbf{A} \quad (2.49)$$

car $\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^* = 2i\psi_0^2\nabla\chi$.

Prenant le **curl** de \mathbf{j}_s , on obtient

$$\mathbf{curl}\mathbf{j}_s = -\frac{4e^2}{mc}\psi_0^2\mathbf{h}. \quad (2.50)$$

Ceci équivaut à l'équation de London (1.8) avec la profondeur de pénétration

$$\lambda(T) = \sqrt{mc^2/16\pi e^2\psi_0^2} \quad (2.51)$$

en effet, puisque $\mathbf{curl}\mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s$ alors on obtient $\mathbf{curl}\mathbf{curl}\mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{curl}\mathbf{j}_s$, et d'après (2.50) on déduit l'équation

$$\mathbf{curl}\mathbf{curl}\mathbf{h} + \frac{16\pi e^2\psi_0^2}{mc^2}\mathbf{h} = 0 \quad (2.52)$$

ce qui est équivalent à l'équation de London.

2.6 Le système G-L évolutif

Dans cette section, parce que le problème est 2-d, nous prenons le champ magnétique dans le domaine extérieur comme champ appliqué H . En faisant cela, nous avons implicitement supposé qu'il existe un champs à l'extérieur.

2.6.1 Le système

Le système G-L évolutif a d'abord été obtenu par Gor'kov et Eliashberg en 1968. Nous écrivons simplement les équations sous la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2mD} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie}{\hbar}\phi \right) \psi - |\alpha|\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m} \left(-\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi &= 0, \\ \mathbf{curl}^2\mathbf{A} - \mathbf{curl}\mathbf{H} &= -\frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{1}{c}\mathbf{A}_t + \nabla\phi \right) + \\ &\quad \frac{4\pi}{c} \left[\frac{e\hbar}{im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\psi^*) - \frac{4e^2}{mc}|\psi|^2\mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Par rapport au cas de l'état stationnaire, les constantes nouvellement introduites sont σ , la conductivité de la phase normale; D , la constante de diffusion et la fonction ϕ , le potentiel électrique.

Il est facile de vérifier que pour toute fonction régulière donnée θ , la transformation suivante

$$(\psi, \phi, \mathbf{A}) \rightarrow (\psi \exp(i\theta), \phi - \frac{\hbar}{2e}\theta_t, \mathbf{A} - \frac{\hbar c}{2e}\nabla\theta) \quad (2.54)$$

ne change pas l'équation. Cette transformation est la transformation de la jauge pour le problème de l'évolution.

2.6.2 Normalisation mathématique

Comme dans le cas stationnaire, nous introduisons certains paramètres physiques

$$\begin{aligned} |\psi|_0^2 &= |\alpha|/\beta, & \kappa &= \lambda/\xi, \\ H_c &= \sqrt{4\pi|\alpha|^2/\beta}, & \eta &= 4\pi\sigma D/c^2, \\ \lambda &= \sqrt{mc^2\beta/16\pi e^2|\alpha|^2}, & \tau &= \lambda^2/D, \\ & & \xi &= \hbar/\sqrt{2m|\alpha|}. \end{aligned}$$

et les variables non dimensionnelles

$$\begin{cases} x = \lambda x' \\ t = \tau t' \\ \psi = \psi_0 \psi' \\ \phi = \frac{\sqrt{2}DH_c}{c} \phi' \\ \mathbf{A} = \sqrt{2}H_c \lambda \mathbf{A}' \\ H = \sqrt{2}H_c H' \end{cases} \quad (2.55)$$

nous arrivons au système (on éliminons les primes du nouveau système)

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa}(\psi_t + i\kappa\phi\psi) + \left(\frac{i}{\kappa}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & x \in \Omega \\ \eta(\mathbf{A}_t + \nabla\phi) + \mathbf{curl}^2\mathbf{A} - \mathbf{curl}\mathbf{H} + \frac{i}{2\kappa}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + |\psi|^2\mathbf{A} = 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.56)$$

Les conditions aux limites et les conditions initiales sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{i}{\kappa} \nabla \psi + \mathbf{A} \psi \right) \cdot \mathbf{n} = -i\eta_0 \psi, & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{curl} \mathbf{A} = H, & \text{dans } \Omega \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{A}(x, 0) = \mathbf{A}_0(x) & \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (2.57)$$

ici η_0 , ψ_0 et \mathbf{A}_0 sont des fonctions données.

Si on pose

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{A}', \quad \phi = \frac{1}{\kappa} \phi', \quad H = \frac{1}{\kappa} H', \quad \psi = \psi',$$

nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_t + i\phi\psi + (i\nabla + \mathbf{A})^2 \psi + \kappa(|\psi|^2 - 1)\psi = 0, \\ \eta(\mathbf{A}_t + \nabla\phi) + \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} - \mathbf{curl} \mathbf{H} + \frac{i}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0 \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Les conditions aux limites et les conditions initiales sont

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i\nabla \psi + \mathbf{A} \psi) \cdot \mathbf{n} = -i\eta_0 \psi, & \text{dans } \partial\Omega \times [0, T] \\ \mathbf{curl} \mathbf{A} = H, & \text{dans } \partial\Omega \times [0, T] \\ \psi(x, 0) = \psi_0(x), & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{A}(x, 0) = \mathbf{A}_0(x) & \text{sur } \Omega \end{array} \right. \quad (2.59)$$

ici η_0 , ψ_0 et \mathbf{A}_0 sont des fonctions données.

2.6.3 Le fonctionnel de G-L comme fonctionnel de Lyapunov

Dans ce qui suit, pour avoir une idée fixe pour nos discussions, nous utiliserons la formulation plus simple (2.58) - (2.59), sauf indication contraire.

On constate également que dans une grande partie de la littérature sur la physique, il n'y a pas de $\mathbf{curl} \mathbf{H}$ dans le système évolutif (voir par exemple [21]). La raison est probablement qu'ils considèrent soit le problème sur l'espace toute entier (il n'y a pas d'endroit pour envoyer un champ appliqué alors), soit le cas où \mathbf{H} est une constante, donc $\mathbf{curl} \mathbf{H} = 0$. Cependant, nous avons l'intention de garder $\mathbf{curl} \mathbf{H}$ dans l'équation parce que, comme Nous verrons à partir du prochain théorème, il est un terme mathématiquement raisonnable d'être présent dans les équations pour relier le système évolutif et le système d'équilibre.

Théorème 1. *soit $u = (\psi, \phi, \mathbf{A})$ solution de (2.58) - (2.59), on suppose que \mathbf{H} est indépendant du temps et $\eta_0 = 0$. On définit*

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |(i\nabla + \mathbf{A})\psi|^2 + \frac{1}{4}\kappa^2(|\psi|^2 - 1)^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{curl}\mathbf{A} - \mathbf{H}|^2 dx. \quad (2.60)$$

Nous avons

$$\frac{d}{dt} E(\psi, \mathbf{A}) = - \left(\int_{\Omega} |\psi_t + i\phi\psi|^2 + \eta |\mathbf{A}_t + \nabla\phi|^2 dx \right) \leq 0 \quad (2.61)$$

L'intérêt de ce théorème est que nous pouvons voir que E est décroissante.

Démonstration. Nous introduisons la transformation de la jauge suivante (i.e. $E(\psi, \mathbf{A}) = E(\xi, \mathbf{B})$)

$$\begin{cases} \xi = \psi \exp(i\chi) \\ \mathbf{B} = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \xi = \int_0^t \phi(x, s) ds \end{cases} \quad (2.62)$$

Notant que

$$\begin{cases} \xi_t = (\psi_t + i\phi\psi) \exp(i\chi) \\ \mathbf{B}_t = \mathbf{A}_t + \nabla\phi \\ (i\nabla + \mathbf{B})\xi = ((i\nabla + \mathbf{A})\psi) \exp(i\chi) \end{cases} \quad (2.63)$$

Nous multiplions le conjugué complexe de (2.58-1) par $\psi_t + i\phi\psi$

$$\begin{aligned} (\psi_t + i\phi\psi)(\psi_t^* - i\phi\psi^* + (-i\nabla + \mathbf{A})^2\psi^* + \kappa(|\psi|^2 - 1)\psi^*) &= 0 \\ -|\psi_t + i\phi\psi|^2 &= (\psi_t + i\phi\psi) \left[(-i\nabla + \mathbf{A})^2\psi^* + \kappa(|\psi|^2 - 1)\psi^* \right] \\ &= \xi_t \exp(-i\chi) \left[\kappa^2(|\xi|^2 - 1)\xi^* \exp(-i\chi) + (-i\nabla + \mathbf{A})(-i\nabla + \mathbf{B})\xi^* \exp(i\chi) \right] \\ &= \kappa^2(|\xi|^2 - 1)\xi^*\xi_t + (-i\nabla + \mathbf{A})(-i\nabla + \mathbf{B})\xi^*\xi_t \end{aligned}$$

Nous multiplions maintenant (2.58-2) par $\mathbf{A}_t + \nabla\phi$

$$-\eta |\mathbf{A}_t + \nabla\phi|^2 = (\mathbf{A}_t + \nabla\phi) \left[\mathbf{curl}^2 \mathbf{A} - \mathbf{curl}\mathbf{H} + \frac{i}{2} (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A} \right]$$

sommant les deux résultats nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & - \left(\int_{\Omega} |\psi_t + i\phi\psi|^2 + \eta |\mathbf{A}_t + \nabla\phi|^2 dx \right) \\
 & = \int_{\Omega} \left[\kappa^2 (|\xi|^2 - 1) \xi^* \xi_t + ((i\nabla + \mathbf{B})\xi)_t (-i\nabla + \mathbf{B})\xi^* \right. \\
 & \quad \left. + (\mathbf{curl}\mathbf{B} - \mathbf{H})(\mathbf{curl}\mathbf{B} - \mathbf{H})_t + (\mathbf{curl}\mathbf{B} - \mathbf{H})\mathbf{H}_t \right] dx \\
 & = \frac{dE}{dt}(\xi, \mathbf{B}) + \int_{\Omega} (\mathbf{curl}\mathbf{B} - \mathbf{H})\mathbf{H}_t dx \\
 & = \frac{dE}{dt}(\psi, \mathbf{A}) + \int_{\Omega} (\mathbf{curl}\mathbf{A} - \mathbf{H}) \underbrace{\mathbf{H}_t}_{=0} dx
 \end{aligned}$$

Les termes aux bords ont tous disparu en raison des conditions aux limites. Le théorème est maintenant prouvé. \square

Ce théorème indique que le phénomène de transition de phase décrit par le système G-L dans les conditions spécifiées est d'énergie dissipative, donc le processus est irréversible.

2.6.4 Les différentes types de jauge

Nous avons remarqué que l'énergie G-L (système) est invariable sous la jauge. Cela implique que les problèmes associés ont généralement beaucoup de solutions. Pour avoir une idée fixe de la formulation mathématique, il est donc important de prendre un choix de jauge lors de la discussion d'un problème donné. Comme on peut l'imaginer, il existe de nombreuses façons de fixer une jauge. Cependant, il existe deux choix principaux qui sont particulièrement favorisés par les mathématiciens. Nous ne discutons que du choix pour le problème de l'évolution. Pour le problème de l'état d'équilibre, en ignorant simplement le potentiel électrique ϕ et les dérivés du temps impliqués, nous pouvons faire les mêmes réclamations et donner des preuves similaires. En outre, nous ne donnons que le choix de la jauge dans un schéma normalisé particulier. Les résultats sont similaires dans d'autres schémas adimensionner.

Le premier choix est

Lemme 3. (jauge de Lorentz) Soit $(\psi', \phi', \mathbf{A}')$ solution du système (2.58)-(2.59), nous pouvons choisir une fonction Θ tels que

$$(\psi, \phi, \mathbf{A}) = (\psi' \exp(i\Theta), \phi' - \Theta_t, \mathbf{A}' + \nabla\Theta) \quad (2.64)$$

qui satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{A} + \phi = 0 \\ \int_{\Omega} \phi dx = 0 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Démonstration. Premièrement, on pose

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \phi' dx \\ \phi'' &= \phi' - a \\ \psi'' &= \psi' \exp(i \int_0^t a dt) \\ \mathbf{A}'' &= \mathbf{A}' \end{aligned}$$

Ensuite, nous résolvons le problème standard de l'équation de la chaleur²

$$\begin{aligned} -\Theta'_t + \Delta \Theta' + \operatorname{div} \mathbf{A}'' + \phi'' &= 0 \\ \partial_n \Theta' + \mathbf{A}'' \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned}$$

pour décider Θ' .

Nous prenons $\Theta = \Theta' + \int_0^t a dt$.

Nous aurons pour la première

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} + \phi &= \operatorname{div}(\mathbf{A}' + \nabla \Theta) + \phi \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A}'' + \Delta \Theta + \phi \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A}'' + \Delta(\Theta' + \int_0^t a dt) + \phi \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A}'' + \Delta \Theta' + \phi' - \Theta'_t \\ &= \operatorname{div} \mathbf{A}'' + \Delta \Theta' + \phi'' + a - \Theta'_t - a \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. L'existence de la solution est faite en détail dans le livre [7]

pour la deuxième

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \phi dx &= \int_{\Omega} (\phi' - \Theta_t) dx \\
&= \int_{\Omega} (\phi'' + a - \Theta'_t - a) dx \\
&= \int_{\Omega} (\phi'' - \Theta'_t) dx \\
&= \int_{\Omega} (-\Delta\Theta' - \operatorname{div} \mathbf{A}'') dx \\
&= \int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}}\Theta' + \mathbf{A}'' \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0.
\end{aligned}$$

Pour la troisième

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{A}' + \nabla\Theta) \cdot \mathbf{n} \\
&= (\mathbf{A}'' + \nabla\Theta') \cdot \mathbf{n} \\
&= (\partial_{\mathbf{n}}\Theta' + \mathbf{A}'' \cdot \mathbf{n}) = 0
\end{aligned}$$

d'où (2.64) vérifie (2.65), ce qui conclue la preuve. \square

Le deuxième choix est

Lemme 4. (*jauge de Coulomb*) Soit $(\psi', \phi', \mathbf{A}')$ solution du système (2.58)-(2.59), nous pouvons choisir une fonction Θ tels que

$$(\psi, \phi, \mathbf{A}) = (\psi' \exp(i\Theta), \phi' - \Theta_t, \mathbf{A}' + \nabla\Theta) \quad (2.66)$$

qui satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

Démonstration. De la même manière que la précédente. \square

Dans cet mémoire, nous pouvons utiliser l'un des choix de jauge ci-dessus en fonction de conditions. En fait, nous ajouterons simplement (2.65) ou (2.67) dans notre système sans commenter à nouveau. Les résultats obtenus dans un choix de jauge peuvent être obtenus dans un autre choix de jauge avec une modification technique mineure des épreuves.

2.6.5 Estimation de la fonction d'état

Comme nous avons remarqué que $|\psi|^2$ est une fonction de densité (densité de paires d'électrons supraconductrices), il est souhaitable de montrer que la solution ψ du système (2.58)-(2.59) satisfait l'estimation

$$|\psi|(x, t) \leq 1 \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega, t \geq 0. \quad (2.68)$$

Nous en discutons de nouveau dans le cas évolutif seulement. La discussion pour le cas de l'état stable est similaire.

Proposition 3. *Soit (ψ, ϕ, \mathbf{A}) solution du système (2.58)-(2.59). Supposons que $|\psi_0|(x) \leq 1, \eta \geq 0$, on a (2.68).*

Démonstration. Nous écrivons $\psi = f \exp(i\chi)$ avec $f = |\psi|$, En se substituant à l'équation satisfaite par ψ et en prenant la partie réelle, on obtient l'équation satisfaite par f :

$$\begin{aligned} f_t - \Delta f + |\mathbf{A} - \nabla\chi|^2 f + \kappa(f^2 - 1)f &= 0, \\ \partial_n f &= -\eta_0 f, \\ f(x, 0) &= |\psi_0(x)|. \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'équation par $(f - 1)_+$, les parties positives de $f - 1$, intégrant par parties sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \partial_t ((f - 1)_+)^2 + |\nabla(f - 1)_+|^2 + |\mathbf{A} - \nabla\chi|^2 f (f - 1)_+ \right. \\ \left. + \kappa f (f + 1) ((f - 1)_+)^2 \right) dx + \int_{\partial\Omega} \eta_0 f (f - 1)_+ d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

et du fait que $f \geq 0$, nous avons

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_t ((f - 1)_+)^2 dx \leq 0$$

En utilisant la condition initiale, nous obtenons

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} ((f - 1)_+)^2 dx = 0$$

ce qui implique (2.68) □

2.7 Évolution du system de Maxwell à l'extérieur

En pratique, la super-courant dans un échantillon de supraconducteur produit un champ magnétique (surtout aux endroits où les vortex rencontrent la limite du supraconducteur) et ce champ magnétique induit, associé au champ magnétique appliqué, agira pour influencer le supraconducteur. L'effet de cette action dépend de la forme géométrique de l'échantillon et de la direction et de la répartition de la valeur du champ appliqué. Dans ce contexte, nous considérons le supraconducteur comme une partie intégrante de l'espace entier. Autrement dit, dans le domaine occupé par le supraconducteur, nous utilisons le système G-L pour décrire les propriétés électromagnétiques. Dans le domaine extérieur, au lieu de supposer que le champ magnétique appliqué est donné, nous supposons que le milieu extérieur répond à la situation dans l'échantillon supraconducteur et son comportement électromagnétique correspondant change en conséquence. Dans ce cas, les propriétés électromagnétiques du domaine extérieur sont régies par le système Maxwell.

Nous reconnaissons que la littérature classique de la physique sur la supraconductivité ne donne pas une déclaration claire sur le type de conditions aux limites qui devraient être utilisées. Cette idée d'utiliser le système Maxwell dans le domaine extérieur est d'abord préconisée clairement dans [8] dans un contexte de mathématiques rigoureux. La raison pour laquelle les physiciens sont obscurs sur ce point n'est pas claire. Par exemple, dans [46], pp 304, en dehors de l'établissement de la condition de limite de Neumann pour le paramètre d'ordre, les auteurs ont affirmé : "En général, nous devons également utiliser la condition de limite de l'équation (2.58) pour toute surface libre qui est présente. Dans d'autres référence (par exemple dans [45]), la question a simplement été ignorée. Dans [35], il a été mis comme $\mathbf{curl} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$, la condition limite naturelle issue du principe variationnel.

Comme on peut le voir, les conditions aux limites devraient être imposées pour satisfaire les exigences physiques. Dans ce qui suit, nous prenons l'approche de l'utilisation du système G-L dans le domaine supraconducteur et de l'utilisation du système Maxwell dans le domaine extérieur. A travers la limite de l'échantillon supraconducteur, **nous supposons que le champ magnétique est continu.**

2.7.1 Rappel de système de Maxwell

Soit \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{H} le champ magnétique, ε_0 et μ_0 la constante diélectrique et la perméabilité dans le vide, χ_e soit la constante diélectrique relative, χ_m la perméabilité relative \mathbf{B} l'induction magnétique, \mathbf{D} le déplacement diélectrique, \mathbf{j} la densité de courant, ρ la densité de charge. Pour simplifier la notation, nous présentons les paramètres $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0\chi_e$ et $\mu = \mu_0\chi_m$. Ensuite, dans les unités SI avec c indiquant la vitesse de la lumière, le système Maxwell évolutif peut être résumée comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \\ \mathbf{D} = \tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{curl}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{D}_t, \\ \operatorname{curl}\mathbf{E} = -\mathbf{B}_t, \\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Ici σ est la conductivité, elle est grande pour les conducteurs et petite pour les isolateurs.

Puisque seule l'équation concernant le champ magnétique nous intéresse, nous essayons de trouver l'équation correspondante du système. Tout d'abord, le système Maxwell peut être réduit au système suivant impliquant uniquement un champ électrique et un champ magnétique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\mathbf{E} = (1/\tilde{\varepsilon})\rho, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{curl}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_t, \\ \operatorname{curl}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}_t. \end{array} \right. \quad (2.70)$$

Comme $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, il existe un champ vectoriel \mathbf{A} , unique jusqu'à un gradient ajouté, tel que $\mathbf{H} = \operatorname{curl}\mathbf{A}$. En utilisant \mathbf{A} au lieu de \mathbf{H} en $\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\mu\mathbf{H}_t$, on obtient

$$\operatorname{curl}(\mathbf{E} + \mu\mathbf{A}_t) = 0$$

qui conduit à

$$\mathbf{E} + \nabla\phi + \mu\mathbf{A}_t = 0 \quad (2.71)$$

Pour une fonction scalaire ϕ appelée potentiel électrique. En utilisons l'équation $\mathbf{curl}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_t$ et $\mathbf{H} = \mathbf{curl}\mathbf{A}$, on obtient

$$\mathbf{curl}\mathbf{H} = \mathbf{curl}^2\mathbf{A} = -\sigma(\mu\mathbf{A}_t + \nabla\phi) - \tilde{\varepsilon}(\mu\mathbf{A}_{tt} + \nabla\phi_t). \quad (2.72)$$

Dans la littérature de la physique, nous voyons les arguments d'approximation suivants :

1) Lorsque le conducteur est très pauvre, nous avons approximativement

$$\mathbf{curl}^2\mathbf{A} = -\tilde{\varepsilon}(\mu\mathbf{A}_{tt} + \nabla\phi_t)$$

2) Lorsque le conducteur est très bon, nous avons environ

$$\mathbf{curl}^2\mathbf{A} = -\sigma(\mu\mathbf{A}_t + \nabla\phi)$$

Pour éviter les cas extrêmes, nous utilisons l'équation intermédiaire (2.72) dans le milieu externe au supraconducteur. En utilisant la transformation de non dimensionnalisation introduite dans [9], nous avons

$$\mathbf{curl}^2\mathbf{A} + \nu(\mathbf{A}_{tt} + \nabla\phi_t) + (\mathbf{A}_t + \nabla\phi) = 0. \quad (2.73)$$

Ici ν est une constante sans dimension qui ne dépend que de la propriété du matériau.

2.7.2 Le modèle de G-L pour la supraconductivité

Le modèle de supraconductivité G-L évolutif que nous utilisons est déjà présenté dans la section (2.6).

Le système non normalisé comme dans [9],

$$\begin{cases} \alpha\xi^2\psi_t + \frac{\alpha\xi}{\lambda}i\phi\psi + |\psi|^2\psi - \psi - \left(\xi\nabla - i\frac{\gamma}{\lambda}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0 \\ \lambda^2(\mathbf{A}_t + \nabla\phi + \mathbf{curl}^2\mathbf{A}) + \frac{\xi\lambda}{2\gamma}i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + |\psi|^2\mathbf{A} = 0 \end{cases} \quad (2.74)$$

Ce système semble légèrement plus compliqué que les systèmes adimensionner donnés dans la section (2.6). Cependant, il peut être démontré qu'ils sont équivalents. La raison pour laquelle nous utilisons ce système particulière est que (2.74) a l'avantage de correspondre aux équations de Maxwell que nous avons dérivé et, par conséquent, il y a une homogénéité entre le modèle G-L et le système de Maxwell. En conséquence, nous pouvons intégrer les deux systèmes dans le même contexte.

2.7.3 Position du problème

dans cette section, Ω est le domaine occupé par l'échantillon supraconducteur. B_M une boule dans \mathbb{R}^3 contenant Ω . Nous expliquons la raison de faire ce choix dans la remarque 5 ci-dessous. Notre dernière remarque concerne le choix des conditions aux limites : semblable au cas 2-d, nous imposons $\mathbf{curl} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$ et le choix de la jauge $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur ∂B_M .

À partir de ce paramètre, nous voulons que le système G-L dans Ω décrive les propriétés électromagnétiques supraconductrices. En revanche, nous voulons que le système Maxwell soit en dehors de Ω avec des conditions aux limites correspondantes dans $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} \alpha\xi^2\psi_t + \frac{\alpha\xi}{\lambda}i\phi\psi + |\psi|^2\psi - \psi - \left(\xi\nabla - i\frac{\gamma}{\lambda}\mathbf{A}\right)^2\psi = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \lambda^2(\mathbf{A}_t + \nabla\phi + \mathbf{curl}^2\mathbf{A}) + \frac{\xi\lambda}{2\gamma}i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + |\psi|^2\mathbf{A} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \gamma^2\nu(\mathbf{A}_{tt} + \nabla\phi_t) + \gamma^2(\mathbf{curl}^2\mathbf{A} + \mathbf{A}_t + \nabla\phi) = 0, & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega}, t > 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

Avec le choix de la jauge faite dans le lemme 3, nous fixons

$$\mathit{div} \mathbf{A} + \phi = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in B_M, \quad t > 0 \quad (2.76)$$

sur $\partial\Omega$, nous imposons

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}_0} - i\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0\psi = -\eta_0\psi. \quad \text{dans } \partial\Omega, \quad t > 0 \quad (2.77)$$

Ici \mathbf{n}_0 est le vecteur normal unitaire de Ω sur $\partial\Omega$, η_0 est une fonction régulière non négative.

sur ∂B_M , Nous imposons, en utilisant l'invariance de la jauge et imposant des conditions aux limites naturelles,

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \partial B_M, \quad t > 0 \\ \mathbf{curl} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, & \text{sur } \partial B_M, \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

Les conditions initiales sont données comme

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \\ \mathbf{A}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega} \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega} \end{cases} \quad (2.79)$$

Nous devons souligner que les conditions 3 et 4 dans (2.79) ne sont pas entièrement indépendantes de ce qui se passe dans Ω où la même information n'est pas donnée. En fait, dans ce qui suit nous verrons une description complet du problème, sur $\partial\Omega \times \{0\}$, nous avons besoin des conditions de compatibilité suivantes : (cela vient de (2.75)-(2.76))

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_0(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{A}_0(\mathbf{x}), \\ \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = - \left(- \nabla \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \operatorname{curl}^2 \mathbf{A}_0 \right. \\ \quad \left. + \frac{i\xi}{2\lambda\gamma} (\psi_0^* \nabla \psi_0 - \psi_0 \nabla \psi_0^*) + \frac{1}{\lambda^2} |\psi_0|^2 \mathbf{A}_0 \right) \\ \operatorname{div} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = - \operatorname{div} \left(- \nabla \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \operatorname{curl}^2 \mathbf{A}_0 \right. \\ \quad \left. + \frac{i\xi}{2\lambda\gamma} (\psi_0^* \nabla \psi_0 - \psi_0 \nabla \psi_0^*) + \frac{1}{\lambda^2} |\psi_0|^2 \mathbf{A}_0 \right) \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Le problème consistant en (2.75) - (2.80) plus une condition de continuité sur \mathbf{A} sur $\partial\Omega$ constituera notre problème complet. Pour simplifier la notation, nous définissons toutes les constantes physiques dans (2.75) - (2.80) à 1 qui n'affecteront pas l'argument mathématiques. Toutefois, pour les applications, il est important de remettre à nouveau les constantes et de spécifier leurs valeurs. Le problème simplifié peut se résumer comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_t + i\phi\psi + |\psi|^2\psi - \psi - (\nabla - i\mathbf{A})^2\psi = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{A}_t + \nabla\phi + \operatorname{curl}^2 \mathbf{A} + \frac{i}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{A}_{tt} + \nabla\phi_t + \operatorname{curl}^2 \mathbf{A} + \mathbf{A}_t + \nabla\phi = 0, & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega}, t > 0 \\ \psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \\ \mathbf{A}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega} \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \partial B_M, t > 0 \\ \operatorname{curl} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, & \mathbf{x} \in \partial B_M, t > 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}_0} - i\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0\psi = -\eta_0\psi, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{A} + \phi = 0, & \mathbf{x} \in B_M, t > 0 \end{array} \right. \quad (2.81)$$

Il faut aussi prendre en considération la continuité du champ magnétique $\mathbf{h} = \mathbf{curl}\mathbf{A}$. En effet : on considère le premier milieu, le milieu Ω occupé par le supraconducteur, et le deuxième milieu est $B_M \setminus \overline{\Omega}$. $\partial\Omega$ est la surface qui les séparent.

En d'autres termes, nous avons deux milieux de propriétés différents on les sépare par une interface. Construisons un petit cylindre de section Δa et d'épaisseur d à travers cette surface.

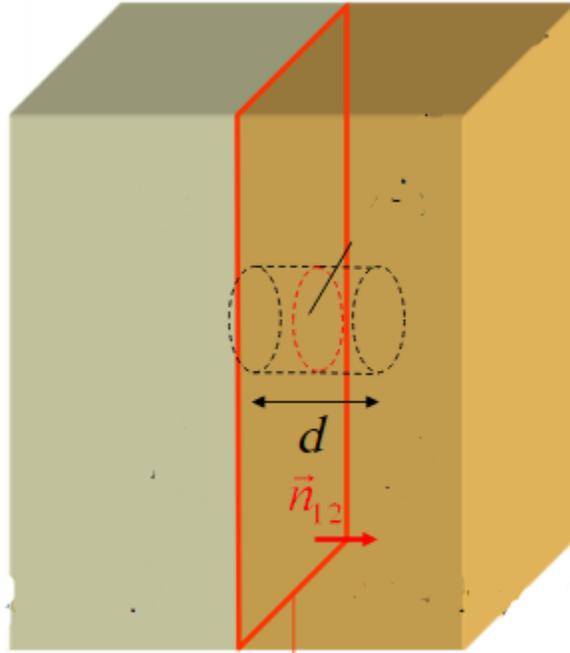


FIGURE 2.1 – représentation des deux milieux

D'après le théorème de Gauss, nous avons

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{h} d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire normal à l'interface. Or nous avons $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1$ dans le milieu 1 et $\mathbf{h} = \mathbf{h}_2$ dans le milieu 2. Donc le théorème de Gauss devient alors

$$(\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \Delta a = 0,$$

du fait que d tend vers 0. Puisque les deux normales sont inversées (i.e. $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$), nous avons $\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 = 0$. On note $[\mathbf{h}] = \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2$, ce qui implique que la composante normale du champ magnétique est continue de part et d'autre de l'interface. Donc sur $\partial\Omega$, nous avons ;

$$[\mathbf{curl}\mathbf{A}] = 0 \tag{2.82}$$

et du fait que le vecteur potentiel est continue à la surface, nous avons de même

$$[\mathbf{A}] = 0 \quad (2.83)$$

Le problème complet peut être résumé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi_t + i\phi\psi + |\psi|^2\psi - \psi - (\nabla - i\mathbf{A})^2\psi = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{A}_t + \nabla\phi + \mathbf{curl}^2\mathbf{A} + \frac{i}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + |\psi|^2\mathbf{A} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{A}_{tt} + \nabla\phi_t + \mathbf{curl}^2\mathbf{A} + \mathbf{A}_t + \nabla\phi = 0, & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega}, t > 0 \\ \psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \\ \mathbf{A}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega} \\ \phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in B_M \setminus \bar{\Omega} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{x} \in \partial B_M, t > 0 \\ \mathbf{curl}\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, & \mathbf{x} \in \partial B_M, t > 0 \\ [\mathbf{curl}\mathbf{A}] = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \\ [\mathbf{A}] = 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}_0} - i\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0\psi = -\eta_0\psi, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0 \\ \mathbf{div}\mathbf{A} + \phi = 0, & \mathbf{x} \in B_M, t > 0 \end{array} \right. \quad (2.84)$$

Remarque 4. Nous notons que toutes les conditions au bords de ψ sont imposées sur $\partial\Omega$, toutes les conditions au bords de \mathbf{A} sont imposé dans B_M . Seules certaines conditions de continuité sur \mathbf{A} sont imposées sur $\partial\Omega$.

Remarque 5. Selon [8], où l'idée explicite d'utiliser l'équation de Maxwell à l'extérieur d'un supraconducteur était d'abord clairement proposée, le paramètre mathématique est le suivant :

Dans le domaine Ω , nous avons le système G-L pour modéliser le supraconducteur.

Dans le domaine extérieur $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, nous avons le système Maxwell pour le champ magnétique.

À travers la frontière du supraconducteur $\partial\Omega$, le potentiel magnétique et le champ magnétique satisfont les conditions de continuité.

Dans notre contexte, cependant, nous avons inséré une couche intermédiaire. C'est-à-dire, dans Ω , nous avons le système G-L pour décrire le comportement de la supraconductivité.

Ensuite, nous avons proposé un domaine plus vaste mais fini (une grande balle) B_M , dans lequel nous avons le système Maxwell décrivant le champ magnétique.

Enfin, nous avons imposé que le champ magnétique soit égal au champ magnétique appliqué en $\mathbb{R}^3 \setminus B_M$.

Si nous nous en tenons à la proposition de [8], le domaine B_M est \mathbb{R}^3 et la condition limite

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \partial B_M, t > 0 \quad (2.85)$$

devrait être remplacé par

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{H} \quad \text{lorsque} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, t > 0. \quad (2.86)$$

2.8 Système de Maxwell à l'extérieur : cas stationnaire

Avec la même notation que dans le cas évolutif, un système de G-L pour la supraconductivité normalisé pour le cas stationnaire est donné par les équations suivantes (nous prenons $B_M = \mathbb{R}^3$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i\nabla + \mathbf{A})^2 \psi + \kappa^2(|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} - \mathbf{curl} \mathbf{H} + \frac{i}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0. & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} = \mathbf{curl} \mathbf{H}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ [\mathbf{curl} \mathbf{A}] = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega \\ [\mathbf{A}] = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega \\ (i\nabla + \mathbf{A})\psi \cdot \mathbf{n}_0 = 0 & \mathbf{x} \in \partial \Omega \\ \mathit{div} \mathbf{A} = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{curl} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{H} \text{ uniformément} & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.87)$$

La convergence uniforme dans (2.87-8) est une hypothèse purement technique.

2.9 Énergie de surface, classification des supraconducteurs

Il est maintenant intéressant de voir comment les phénomènes de supraconductivité de type I et de type II peuvent être classés en utilisant le système G-L. Nous discutons le problème uniquement dans le cas stationnaire.

London a observé que l'exclusion totale du champ (effet Meissner) n'entraînerait pas un état de l'énergie la plus faible, sauf si une énergie de surface existe. Le point clé est d'introduire une énergie de surface σ_{ns} par unité de surface entre la couche supraconductrice et la couche normale dans le cas où l'effet Meissner domine. La grandeur de l'énergie de surface est telle que sa contribution dépasse le gain en énergie magnétique.

Le supraconducteur présentera deux comportements différents par rapport à l'énergie de surface en fonction des valeurs des paramètres dans l'énergie G-L qui nous donne le critère pour distinguer les supraconducteurs de type I et de type II.

Dans la théorie G-L, le concept d'énergie de surface est simplement introduit en résolvant le problème suivant : considérer un échantillon infiniment long qui a les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}\psi &= 0, & h &= H_c, \text{ lorsque } z = -\infty \\ \psi &= \psi_0, & h &= 0, \text{ lorsque } z = +\infty\end{aligned}$$

Le paramètre d'ordre ψ et le champ h résolvant le système G-L varieront progressivement le long de la direction z en passant de la valeur 0 à ψ_0 et de H_c à 0, respectivement. Une région à changement de phase est ainsi produite.

L'énergie de surface est la différence entre l'énergie F_p de la situation ci-dessus (état normale et l'énergie de condensation (supraconductrice parfaite) $\int (-H_c^2/8\pi)dx$.

$$F_p = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m}|(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{h^2}{8\pi} + \frac{H_ch}{4\pi} \right) dz \quad (2.88)$$

Où le dernier terme est un nouveau terme représentant la contribution d'énergie magnétique 1-d en raison de la pénétration du champ. L'énergie de surface par unité de surface est alors définie comme

$$\begin{aligned}\sigma_{ns} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m}|(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{h^2}{8\pi} + \frac{H_ch}{4\pi} - \frac{H_c^2}{8\pi} \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m}|(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{(h - H_c)^2}{8\pi} \right] dz. \quad (2.89)\end{aligned}$$

nous rappelons le système de Ginzburg-Landau normalisé :

$$\begin{cases} \left(\frac{i}{\kappa}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\psi = \psi - |\psi|^2\psi \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} = \mathbf{curl} \mathbf{h} = -\frac{i}{2\kappa}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) - |\psi|^2 \mathbf{A} \\ \mathbf{h} = \mathbf{curl} \mathbf{A} \end{cases} \quad (2.90)$$

nous écrivons $\psi = f \exp(i\chi)$ et $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \frac{1}{\kappa}\nabla\chi$ nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2}\Delta f + |\mathbf{A}_0|^2 f = f - f^3 \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A}_0 = \mathbf{curl} \mathbf{h} = f^2 \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{h} = \mathbf{curl} \mathbf{A}_0 \end{cases} \quad (2.91)$$

nous éliminons \mathbf{A}_0 du système (2.91). Nous obtenons, du fait que $h_z = f^2 \mathbf{A}_0$, les equations suivantes

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2}f_{zz} + \frac{1}{f^3}h_z^2 = f - f^3 \\ f^2 h = -\frac{2}{f}f_z h_z + h_{zz} \end{cases} \quad (2.92)$$

L'énergie de surface prend la forme suivante (en utilisons les variables introduit dans la section 2.2) :

$$\sigma_{ns} = 2\lambda \frac{H_c^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 - f^2)^2 + \frac{1}{f^2}h_z^2 + \frac{1}{\kappa^2}f_z^2 + h^2 - \sqrt{2}h\right) dz \quad (2.93)$$

En utilisant (2.92), nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{ns} &= 2\lambda \frac{H_c^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 - f^4) + \frac{1}{\kappa^2} \frac{d}{dz}(f f_z) + h^2 - \sqrt{2}h\right) dz \\ &= 2\lambda \frac{H_c^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2}h\right) dz \end{aligned} \quad (2.94)$$

Où nous avons utilisé les conditions

$$\begin{aligned} f &= 0 \quad \text{pour } z = -\infty, \\ f_z &= 0, \quad f = 1 \quad \text{pour } z = \infty. \end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant la longueur

$$\delta = 2I\lambda \quad (2.95)$$

où

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2}h \right) dz$$

Donc l'énergie de surface est donnée par :

$$\sigma_{ns} = \delta \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (2.96)$$

Le signe de la valeur de σ_{ns} ou de façon équivalent, le signe de la valeur de I , nous donnera la classification des supraconducteurs.

2.9.1 Le signe de σ_{ns} lorsque $\kappa \ll 1$

Lorsque $\kappa \ll 1$, la profondeur de pénétration est très faible par rapport à la longueur de cohérence ξ . On peut supposer que h est nul dès que f est différent de 0. L'équation (2.92-1) se réduit à

$$\frac{1}{\kappa^2} f_{zz} = f - f^3 \quad (2.97)$$

Cela donne, lorsque $z \geq 0$

$$-\frac{1}{2\kappa^2} f_z^2 = \frac{1}{2} f^2 - \frac{1}{4} f^4 + c \quad (2.98)$$

si nous travaillerons avec les mêmes conditions aux limites qui précèdent, on obtient $c = -1/4$. Par conséquent

$$\frac{1}{\kappa^2} f_z^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2)^2. \quad (2.99)$$

La solution pratique est alors

$$f(z) = \tanh(z\kappa/\sqrt{2}), \quad h = 0. \quad (2.100)$$

Et le calcul de l'intégrale donne

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - f^4) dz = \frac{2\sqrt{2}}{3\kappa} \quad (2.101)$$

Par conséquent, lorsque $\kappa \ll 1$, l'énergie de surface est positive.

2.9.2 Le signe de σ_{ns} lorsque $\kappa \gg 1$

Dans ce cas, nous négligeons le terme $\frac{1}{\kappa^2}f_{zz}$ dans (2.92-1) de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{1}{f^3}h_z^2 &= f - f^3 \\ h_z^2 &= f^4(1 - f^2)\end{aligned}$$

Comme h doit diminuer lorsque z augmente,

$$h_z = -f^2\sqrt{1 - f^2}. \quad (2.102)$$

De (2.92-2), nous obtenons

$$h = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f^2}h_z\right) = -\frac{d}{dz}\sqrt{1 - f^2}. \quad (2.103)$$

Par conséquent

$$\frac{d^2}{dz^2}\sqrt{1 - f^2} = f^2\sqrt{1 - f^2} = \sqrt{1 - f^2} - (\sqrt{1 - f^2})^3 \quad (2.104)$$

ou

$$u_{zz} = u - u^3 \quad (2.105)$$

où $u = \sqrt{1 - f^2}$. Intégrant, nous avons

$$u_z^2 = u^2\left(1 - \frac{u^2}{2}\right) + c \quad (2.106)$$

La constante d'intégration est évidemment 0 (En utilisant la condition au $+\infty$) et puisque du/dz devrait être négatif, nous avons

$$u_z = -u\sqrt{1 - u^2/2}. \quad (2.107)$$

Nous pouvons ensuite évaluer l'intégrale :

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2u^2(1 - u^2/2) - \sqrt{2}u\sqrt{1 - u^2/2}\right) dz \\ &= \int_0^1 (2u\sqrt{1 - u^2/2} - \sqrt{2}) du = -\frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)\end{aligned} \quad (2.108)$$

Ainsi, lorsque $\kappa \gg 1$, l'énergie de surface est négative.

2.9.3 Le cas $\kappa = 1/\sqrt{2}$

Il est facile de voir que pour que l'intégrale de surface

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 - f^4) + h^2 - \sqrt{2}h \right) dz \quad (2.109)$$

soit nulle, nous pouvons définir

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - f^2). \quad (2.110)$$

Dans ce cas, (2.92) prend la forme

$$-\frac{1}{\kappa^2} f_{zz} + \frac{2}{f} f_z^2 = f - f^3, \quad (2.111)$$

$$-f f_{zz} + f_z^2 = \frac{1}{2} f^2 (1 - f^2). \quad (2.112)$$

Ces deux équations sont identiques pour $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Alors $I = 0$ quand $\kappa = 1/\sqrt{2}$. L'implication de $I = 0$ a un effet profond sur le comportement des solutions. Dans [25], une grande partie du livre est consacré à cette affaire et la conclusion est que nous pouvons avoir n'importe quel nombre de vortex, à n'importe où nous voulons qu'ils soient. Ce n'est certainement pas le cas lorsque $\kappa \neq 1/\sqrt{2}$.

2.9.4 Conclusion

Maintenant, il est clair comment classer les supraconducteurs type I et type II à partir des calculs effectués jusqu'à présent. Suivant Abrikosov (1952),

Supraconductivité de type I : $\kappa < 1/\sqrt{2}$, énergie de surface positive.

Supraconductivité de type II : $\kappa > 1/\sqrt{2}$, énergie de surface négative.

Remarque 6. *D'un point de vue mathématique, les approximations faites dans les calculs sont plutôt grossières. Il existe également des points insatisfaisants dans la formulation de l'énergie de surface et la solution des équations. En conséquence, nous ne croyons pas que ce soit une classification vraiment bonne. Nous présentons la théorie ici parce qu'elle est intéressante. En savoir plus sur cette question sera discuté plus tard.*

2.10 Différence entre les modèles 2-d et 3-d

À première vue, il est plutôt évident que nous devrions utiliser le système Maxwell dans le domaine extérieur lorsque la dimension spatiale est 3, aucune exception ne doit être faite lorsque la dimension spatiale est 2. Mais jusqu'à présent, nous avons simplement pris le champ magnétique extérieur comme Le champ magnétique appliqué.

Grâce au résultat suivant, nous prouvons que dans quelques circonstances, le système Maxwell de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ donne $\mathbf{curl} \mathbf{A} = H$. Par conséquent, il est correct de prendre le champ magnétique comme champ magnétique appliqué dans le domaine extérieur dans ces circonstances.

Maintenant, nous spécifions les conditions :

- a) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine simplement connexe avec une frontière régulière .
- b) 1) Ω est un domaine borné ou
- 2) Ω n'est pas borné est la mesure de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ est infinie.

Proposition 4. *Sous a) et b) ci-dessus, soit (ψ, \mathbf{A}) la solution du système G-L à l'état stationnaire 2-d couplé au système Maxwell dans le domaine extérieur*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i\nabla + \mathbf{A})^2 \psi + \kappa^2(|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} - \mathbf{curl} \mathbf{H} + \frac{i}{2}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0. & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} = \mathbf{curl} \mathbf{H}, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \\ [\mathbf{curl} \mathbf{A}] = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega \\ [\mathbf{A}] = 0, & \mathbf{x} \in \partial \Omega \\ (i\nabla + \mathbf{A})\psi \cdot \mathbf{n}_0 = 0 & \mathbf{x} \in \partial \Omega \\ \mathit{div} \mathbf{A} = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{curl} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{H} \text{ uniformément} & \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (2.113)$$

tel que

$$\int_{\Omega} \kappa^2(|\psi|^2 - 1)^2 + \left| (i\nabla + \mathbf{A})\psi \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{curl} \mathbf{A} - H| dx < \infty.$$

Alors, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, nous avons

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} = H$$

Démonstration. Réécrivons l'équation

$$\mathbf{curl}^2 \mathbf{A} = \mathbf{curl} H, \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \quad (2.114)$$

composante par composante, nous avons

$$\partial_2(\mathbf{curl} \mathbf{A} - H) = 0, \quad -\partial_1(\mathbf{curl} \mathbf{A} - H) = 0$$

Cela implique clairement que

$$\mathbf{curl} \mathbf{A} - H = \text{constante}$$

Puisque l'énergie est finie et la mesure de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ est infinie, la constante doit être 0. Ce qui termine la démonstration. \square

Dans le reste de ce mémoire, en discutant des problèmes 2-d, sauf indication contraire, nous supposons que le domaine Ω satisfait les propriétés requises par la Proposition 4.

De même, lorsque nous discutons des systèmes évolutifs 2-d, nous prenons toujours le champ magnétique extérieur statique, de sorte que $\mathbf{curl} \mathbf{A} = H$ dans le domaine extérieur.

Afin de terminer la chapitre sur la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau, nous allons clarifié la notion du vortex et sa description mathématique par une outils très forte de l'analyse fonctionnelle, qui est le degré topologique.

2.11 Description mathématique des vortex dans \mathbb{R}^2

Comme nous l'avons souligné précédemment, une caractéristique majeure du problème est la structure de vortex. Dans les domaines a deux dimension, ce sont des points et des domaines tridimensionnels, ce sont des lignes. Afin de les décrire mathématiquement, nous avons besoin d'outils appropriés.

Nous introduisons la théorie des degrés topologiques dans le but de relier les conditions aux limites au nombre de vortex dans le cas de deux dimension.

Pour une application continue donnée $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $n = 3$ ou 2 , Le degré $d(\phi, \Omega, y)$ est un outil qui décrit le nombre de solutions de l'équation $\phi(x) = y$ pour $x \in \Omega$. Lors de la description des domaines de co-dimension deux, cela n'est efficace que dans les espaces à deux dimensions. Nous nous concentrerons donc sur

le cas 2-d qui nous intéresse. nous signalons qu'il ne donnera pas une description générale de la théorie des degrés topologiques.

Lorsque la dimension de l'espace est deux, nous pouvons voir l'application ϕ de $\Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et par conséquent la quantité $d(\phi, \Omega, y)$ est également appelée l'indice de ϕ autour de y dans le contexte de l'analyse complexe.

Dans ce qui suit, nous utilisons z pour la variable complexe et utilisons $x = (x_1, x_2)$, le vecteur à valeurs réelles formé avec la partie réelle et la partie complexes de z .

Par définition, lorsque l'application est regardé comme une application complexe avec $\partial\Omega$ paramétrée par $s \in [a, b]$, l'indice de ϕ autour de y est donné par,

$$d(\phi, \Omega, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\phi(z(s))}{\phi(z(s)) - y} \quad (2.115)$$

à condition que $y \notin \phi(\partial\Omega)$, ici $z = z(s)$ est la paramétrisation de $\partial\Omega$.

De la théorie de l'analyse complexe et de la définition (2.115), on peut tirer les conclusions suivantes lorsque $y \notin \phi(\partial\Omega)$

1. $d(\phi, \Omega, y)$ est un entier.
2. $d(\phi, \Omega, y)$ dépend seulement de $\phi|_{\partial\Omega}$. Par conséquent, nous pouvons modifier la définition de ϕ dans Ω arbitrairement sans affecter le degré.
3. En utilisant (2.115), on déduit que

$$d(\phi, \Omega, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\phi(z(s))}{\phi(z(s)) - y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d(\phi(z(s)) - y)}{\phi(z(s)) - y}.$$

Donc, on ne perd pas de généralité si nous supposons que $y = 0$ et simplement travailler sur $d(\phi, \Omega, 0)$ dans ce qui suit. Nous pouvons utiliser l'expression $\phi = |\phi|e^{i\theta(z(s))}$ dans la formule de degré

$$d(\phi, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\phi(z(s))}{\phi(z(s))}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
 d(\phi, \Omega, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{e^{i\theta} |\phi|' + i |\phi| \theta' e^{i\theta}}{|\phi| e^{i\theta}} ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{|\phi|'}{|\phi|} + i \theta' ds \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \theta' ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \partial_{\tau} \theta d\Gamma \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \nabla \theta \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*}{|\phi|^2} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma \tag{2.116}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \mathbf{curl} \left(\frac{\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*}{|\phi|^2} \right) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{curl} \phi^* \cdot \nabla \phi - \mathbf{curl} \phi \cdot \nabla \phi^*}{|\phi|^2} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial_1 \phi_1 \partial_2 \phi_2 - \partial_1 \phi_2 \partial_2 \phi_1}{|\phi|^2} dx_1 dx_2 \tag{2.117}
 \end{aligned}$$

donc on en déduit que

$$d(\phi, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\det \nabla(\phi_1, \phi_2)^T}{|\phi|^2} dx_1 dx_2 \tag{2.118}$$

Où ϕ_1 et ϕ_2 sont les parties réelles et complexes de ϕ respectivement. Selon les définitions standard, $\det \nabla \phi$ est un Lagrangien nul de ϕ dans le sens que $\int_{\Omega} \det \nabla \phi$ dépend de $\phi|_{\partial\Omega}$ seulement (voir [41]).(i.e)

$$\int_{\Omega} \det \nabla \phi dx = \int_{\Omega} \det \nabla \psi dx \quad \mathbf{quand} \quad \phi = \psi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{2.119}$$

Le calcul ci-dessus révèle une relation intéressante entre le degré topologique, le Lagrangien nul $\det \nabla \phi$ de ϕ et l'expression $\psi^* \nabla \phi - \phi \nabla \psi^*$ apparue dans nos équations de la supraconductivité dans (2.17) ou (2.53) dans le chapitre 2. Cependant, la quantité $|\psi|^2$ dans le dénominateur de (2.118) est un obstacle à une explication géométrique intuitive de l'intégration de $\det \nabla \phi$. Pour simplifier la question, supposons que

$$\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$$

est une application qui vérifie

$$|\phi(z)| = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \forall z \in \partial\Omega$$

alors nous avons

$$d(\phi, \Omega, 0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\Omega} \det \nabla \phi dx$$

ce qui conduit à

$$\int_{\Omega} \det \nabla \phi dx = d(\phi, \Omega, 0) \pi r^2 = \text{degré} \times \text{aire de l'image} \quad (2.120)$$

C'est un cas particulier de la formule général du changement de variable suivant :

$$\int_{\Omega} f(\phi(x)) \det \nabla \phi dx = \int_{\phi(\Omega)} f(y) d(\phi, \Omega, y) dy$$

Remarque 7. *L'idée que le degré $d(\phi, \Omega, y)$ représente le "nombre" de solutions de*

$$\phi(z) = y, \quad z \in \Omega \quad (2.121)$$

n'est pas tout à fait correct. Par exemple, soit $B(0, 1)$ le disque unité dans le plan complexe de centre 0 et de rayon 1, l'équation

$$\phi(z) = z(z - 0.5)(\bar{z} - 0.5) = 0$$

a trois solutions : $z = 0$, $z = 0.5$, $\bar{z} = 0.5$. Cependant, si nous exprimons $\phi = |z||z - 0.5||\bar{z} - 0.5|e^{i\theta}$ où θ est argument du nombre complexe.

Nous avons

$$\begin{aligned} d(\phi, B(0, 1), 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{d\phi}{\phi} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1. \end{aligned}$$

ce qui contredit l'existence de trois solutions.

Remarque 8. *Dans la définition du degré $d(\phi, \Omega, y)$, nous avons supposé que $y \notin \phi(\partial\Omega)$. Que se passe-t-il si $y \in \phi(\partial\Omega)$? La réponse est; il n'y a pas de réponse, cela dépend de la situation! L'intégrale (2.115) est maintenant singulière et l'exemple suivant montre qu'on peut s'attendre n'importe quoi :*

Soit $\phi : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ tel que $\phi|_{\partial B(0,1)} = (z - 1)^n e^{i\alpha\theta}$, avec α est un nombre réel arbitraire et n est une entier positif très grand, alors par un calcul simple en utilisant (2.115) conduit à

$$d(\phi, \Omega, 0) = \alpha$$

Remarque 9. Ici, nous donnons quelques autres propriétés fréquemment utilisées du degré topologique :

1) soit y_1 et y_2 deux point d'un domaine connexe de $\phi(\Omega) \setminus \phi(\partial\Omega)$, alors

$$d(\phi, \Omega, y_1) = d(\phi, \Omega, y_2)$$

2) soit ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions de Ω vers \mathbb{R}^2 tels que $\phi_1|_{\partial\Omega} = \phi_2|_{\partial\Omega}$, alors $\forall y \in \mathbb{R}^2 \setminus \phi_1(\partial\Omega)$,

$$d(\phi_1, \Omega, y) = d(\phi_2, \Omega, y)$$

Remarque 10. Dans l'exécution des calculs dans (2.115), nous avons utilisé l'identité suivante : soit $\psi = |\psi|e^{i\chi}$

$$\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi = |\psi|^2 \nabla \chi$$

Si on suppose qu'il n'existe pas de champs magnétique, ç-à-d il n'y a pas de vecteur potentiel \mathbf{A} . Donc l'énergie correspondante prend la forme :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} (|u|^2 - 1)^2 dx$$

où u est le paramètre d'ordre noté précédemment par ψ . L'équation d'Euler-Lagrange associée est

$$-\Delta u + (|u|^2 - 1)u = 0. \quad (2.122)$$

Le terme de l'énergie $(|u|^2 - 1)^2$ pousse le paramètre d'ordre de prendre les valeurs dans le cercle unité.

En ce qui concerne les conditions aux limites, une possibilité est de minimiser l'énergie dans tout l'espace $H^1(\Omega)$ sans aucune restriction, donc on peut choisir alors la condition de Neumann associée à (2.122) :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

encore on peut imposer une condition de type Dirichlet

$$u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (2.123)$$

ou dans le cas de dimension deux la condition

$$|u| = 1, \quad \text{Im} \int_{\partial\Omega} u \partial_{\tau} u^* d\Gamma = 2\pi k. \quad (2.124)$$

où u^* est le complexe conjuguée de u , k est un entier fixé au départ. La raison de ce choix va être clarifier dans le paragraphe suivant.

Finalement, nous expliquons comment les conditions aux limites (2.123) et (2.124) imposent des vortex sur la solution de l'équation de G-L (le paramètre d'ordre).

Tout d'abord, si $u|_{\partial\Omega} = g$ et si g admet un indice non nul m autour de 0, alors pour tout solution u de l'équation de G-L avec cette condition aux limites doit avoir le même indice m , et par conséquent $u(z) = 0$ a au moins $|m|$ solutions.

Deuxièmement, la condition (2.124) signifie simplement que l'indice de u autour de 0 est k , Il y a donc encore au moins $|k|$ vortex.

2.12 Remarques bibliographiques

La théorie générale de la supraconductivité de type II et la raison d'être de l'utilisation du système G-L en tant que modèle mathématique ont été largement discutées dans la littérature physique pendant de nombreuses années. Certaines des références intéressantes incluent [20], [35], [45] et [46].

La théorie de G-L a été développée dans [28] et [21] pour des problèmes stationnaire et d'évolution, respectivement. La théorie microscopique de la supraconductivité a été étudié dans [2], donnant une base théorique à l'approche principale du domaine pour développer la théorie G-L.

Dans les premiers temps, la théorie G-L a été développée principalement pour l'échantillon de supraconducteur elle-même avec peu d'attention à l'effet du champ magnétique environnant. La plupart des études ont supposé simplement que l'espace extérieur est dominé par le champ appliqué donné. Au cours des dernières années, il a été constaté que dans la région environnante de l'échantillon supraconducteur, il convient de mettre en place le système Maxwell et de considérer l'ensemble de l'espace physique comme une seule entité. Ce couplage entre le système G-L et le système Maxwell soulève des problèmes mathématiques intéressants qui n'ont pas été observés auparavant. Certaines des questions concernées ont été discutées dans [8].

La normalisations ou le adimensionnement mathématique du système G-L a également reçu une attention considérable. Il a été discuté dans [14], [9] et plus profondément dans [32]. Dans [32], ils ont commencé à examiner les problèmes liés à la taille du domaine et les implications physiques qui pourraient être causées par diverses adimensionnement. Ceci est important surtout lorsque divers paramètres

du système G-L rééchelonné ont été envoyés à zéro ou à l'infini afin d'étudier diverses limites asymptotiques. Il s'agit d'un domaine de recherche très actif au cours des dernières années et de nombreux travaux de mathématiques exceptionnels ont été réalisés. Certaines des œuvres les plus excitantes de cette direction ont été résumées dans [5]. Dans ce mémoire, nous avons eu l'occasion d'examiner la question de la mise à l'échelle systématique et de donner des commentaires plus approfondis sur les implications physiques des diverses approximations.

La théorie des degrés topologiques a été un outil utile pour décrire les problèmes de transition de phases de co-dimension 2 dans les espaces 2-d. Pour un traitement systématique de la théorie des degrés topologiques et de ses applications récentes, les lecteurs doivent se référer à [18] ou [26] et leurs références pour plus de détails.

Chapitre 3

Systeme de Ginzburg-Landau : existence et unicite

Dans ce chapitre, dans un premier temps, nous etablissons certains resultats mathematiques sur le systeme de Ginzburg-Landau stationnaire, comme l'existence des solutions et la structure du vortex decrit par la solution du systeme, et quelques notions sur la relation entre le champs magnetique applique et la solution.

Ensuite nous etablissons l'existence et l'unicite ainsi que le comportement asymptotique de la solution du systeme de Ginzburg-Landau evolutif. Nous prenons le cas lorsque le champs magnetique applique est une fonction donnee. Nous travaillerons principalement dans le cas 2-d, neanmoins, nous allons aussi traiter le cas 3-d pour signaler des difficultes mathematiques qui reste encore ouverte.

Dans tout qui suit, nous supposons que Ω est un domaine bornee connexe regulier de \mathbb{R}^n , avec $n = 2$ ou 3 .

3.1 Existence de solution pour le cas stationnaire

Dans cette section nous discutons l'existence de solution pour le probleme de Ginzburg-Landau. L'idee est de minimiser le fonctionnel d'energie. C'est une resultat inspirer des calculs des variations. L'existence de solution a ete demontrer par une autre methode base sur le theoreme du point fixe dans le travaille [DGP 92] et [CDG 96].

Pour discuter la minimisation, nous allons utiliser la version normalise de l'energie suivante :

$$E(\psi, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 + |\mathbf{curl} \mathbf{A} - H|^2 dx \quad (3.1)$$

avec Ω est un ouvert borné, connexe de \mathbb{R}^2 . nous supposons que $\partial\Omega$ est au moins de C^2 . nous allons aussi utiliser la fonctionnelle

$$F(\psi, \mathbf{A}) = E(\psi, \mathbf{A}) + \int_{\Omega} |\operatorname{div} \mathbf{A}|^2 dx. \quad (3.2)$$

Dans ce modèle, le champs appliqué H est une fonction donnée. Nous aurons besoin des sous espaces de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ suivant :

$$\mathbf{H}_n^1(\Omega) = \{ \mathbf{Q} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega) &= \{ \mathbf{Q} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ &\quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A partir de la discussion de la transformation de jauge, nous savons que pour tout élément $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ est jauge-équivalent à un certain élément $(\xi, \mathbf{Q}) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)$ et dû à la propriété d'invariance de jauge de G-L énergie et nous avons

$$E(\psi, \mathbf{A}) = E(\xi, \mathbf{Q}). \quad (3.5)$$

Cette observation va nous aider dans la démonstration de l'existence de solution.

Théorème 2. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et $H \in L^2(\Omega)$, alors $E(\psi, \mathbf{A})$ a au moins un minimiseur dans $H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)$ en plus nous avons*

$$\min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)} E(\psi, \mathbf{A}) = \min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)} E(\psi, \mathbf{A}) = \min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)} F(\psi, \mathbf{A}). \quad (3.6)$$

Avant de plonger dans la démonstration nous aurons besoin d'un lemme qu'on va l'énoncer sans démonstration, (pour la démonstration voir par exemple le livre de Temam [Te], annexe 1. page 465, ou le livre de G.Duvaut et J-L.Lions [DL] (théorème 6.1, chapitre 7)).

Lemme 5. *Soit Ω est borné, connexe et son frontière est régulière, alors curl définit un isomorphisme de $\mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)$ vers $L^2(\Omega)$.*

En particulier, il existe un constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{A} \in \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)$, nous avons

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\operatorname{curl} \mathbf{A}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.7)$$

Preuve du théorème 2

la première égalité de (3.6) et dû à la propriété de l'invariance de l'énergie.

Pour la seconde égalité, nous utilisons l'invariance de jauge et l'expression de l'énergie, il est facile de voir que

$$\min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)} E(\psi, \mathbf{A}) \leq \min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)} F(\psi, \mathbf{A}) \leq \min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)} E(\psi, \mathbf{A}).$$

Dès lors (3.6) est vérifiée.

Maintenant, nous avons besoin seulement de démontrer l'existence de solution pour

$$\min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)} E(\psi, \mathbf{A}),$$

en utilisant l'argument standard de la théorie des calculs des variations.

Soit $(\psi_m, \mathbf{A}_m) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)$ une suite minimisante (i.e.)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad E(\psi_m, \mathbf{A}_m) \leq E(\psi, \mathbf{A}) \leq E(\psi_m, \mathbf{A}_m) + \varepsilon$$

en d'autre terme :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(\psi_m, \mathbf{A}_m) = \inf_{(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\operatorname{div}, \Omega)} E(\psi, \mathbf{A}) \quad (3.8)$$

Étape 1 $\{(\psi_m, \mathbf{A}_m)\}$ est bornée dans $H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$.

Puisque Ω est borné, donc il existe une constante C telle que

$$E(\psi_m, \mathbf{A}_m) \leq C,$$

du fait que l'énergie et la somme de trois terme positives, nous déduisons que $\| |\psi|^2 - 1 \|_{L^2(\Omega)}^2$, $\| (\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A}_m) \psi_m \|_{L^2(\Omega)}^2$ et $\| \operatorname{curl} \mathbf{A} - H \|_{L^2(\Omega)}$ sont bornées indépendamment de m . Et cependant $\{ \operatorname{curl} \mathbf{A}_m \}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. En utilisant (3.7) on déduit que $\{ \mathbf{A}_m \}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

En utilisant l'égalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$$

et notons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\psi_m|^2 - 1)^2 dx &= \int_{\Omega} (|\psi_m|^4 - 2|\psi_m|^2 + 1) dx \\ &\geq \|\psi_m\|_4^4 - 2\|\psi_m\|_4^2 \sqrt{|\Omega|} \geq \frac{1}{2} \|\psi_m\|_4^4 - 2|\Omega|. \end{aligned}$$

Et par conséquent $\{\psi_m\}$ est borné dans $L^4(\Omega)$, donc dans $L^2(\Omega)$.

Notons que

$$\nabla\psi_m = (\nabla - i\mathbf{A}_m)\psi_m + i\mathbf{A}_m\psi_m,$$

puisque $\{\mathbf{A}_m\}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, cela implique, par le théorème des injections de Sobolev, que $\{\mathbf{A}_m\}$ est bornée dans $\mathbf{L}^4(\Omega)$, ainsi on obtient que $\{\mathbf{A}_m\psi_m\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Donc $\{\nabla\psi_m\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ ce qui donne le résultat attendu $\{\psi_m\}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ de la s'achève l'étape 1.

Étape 2 La limite faible est un minimiseur.

Maintenant on peut extraire une sous suite (encore indicé par m) telles que il existe un couple $(\psi, \mathbf{A}) \in H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ telle que

$$(\psi_m, \mathbf{A}_m) \rightharpoonup (\psi, \mathbf{A}) \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \quad \text{faiblement.}$$

Par conséquent, en utilisant l'injection compacte de Sobolev, nous avons

$$(\psi_m, \mathbf{A}_m) \rightarrow (\psi, \mathbf{A}) \quad \text{dans} \quad L^4(\Omega) \times \mathbf{L}^4(\Omega),$$

cela vient de l'injection compacte

$$H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \times \mathbf{L}^p(\Omega) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

D'autre part, par la convergence forte de $\{\psi_m\}$ dans $L^4(\Omega)$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (|\psi_m|^2 - 1)^2 dx = \int_{\Omega} (|\psi|^2 - 1)^2 dx. \quad (3.9)$$

Par le même argument vu dans le livre [HB], nous avons

$$\liminf_m \int_{\Omega} \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A}_m \right) \psi_m \right|^2 \geq \int_{\Omega} \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \quad (3.10)$$

et de même nous avons

$$\liminf_m \int_{\Omega} |\mathbf{curl} \mathbf{A}_m - H|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\mathbf{curl} \mathbf{A} - H|^2 \quad (3.11)$$

combinons (3.9), (3.10) et (3.11) montre que (ψ, \mathbf{A}) est un minimiseur de (3.1), et cela fini la démonstration du théorème.

Remarque 11. *Puisque le système de Ginzburg-Landau est l'équation d'Euler-Lagrange associé à l'énergie de Ginzburg-Landau. Donc l'existence d'un minimum*

donne aussi l'existence de la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{i}{\kappa}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & x \in \Omega, \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} - \mathbf{curl}H + \frac{i}{2\kappa}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0 & x \in \Omega, \\ \left(\frac{i}{\kappa}\nabla\psi + \mathbf{A}\psi\right) \cdot \mathbf{n} = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

Remarque 12. Grâce à l'équation (3.6) nous avons

$$\min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)} E(\psi, \mathbf{A}) = \min_{H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_n^1(\text{div}, \Omega)} E(\psi, \mathbf{A}), \quad (3.13)$$

on en déduit l'existence aussi d'une solution au système suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{i}{\kappa}\nabla + \mathbf{A}\right)^2\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{curl}^2 \mathbf{A} - \mathbf{curl}H + \frac{i}{2\kappa}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) + |\psi|^2 \mathbf{A} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \left(\frac{i}{\kappa}\nabla\psi + \mathbf{A}\psi\right) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \mathbf{curl}\mathbf{A} = H & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{div}\mathbf{A} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.14)$$

3.2 Propriétés de base pour les solutions des équations de Ginzburg-Landau

Dans cette section, nous prenons le cas 2-d comme exemple. Toutes les propriétés déduites s'étendent au cas 3-d sans altération.

Comme nous l'avons vu, les minimiseurs sont des solutions des équations de Ginzburg-Landau, mais de nombreuses propriétés sont vraies pour les solutions générales de ces équations. La première propriété importante est

Proposition 5. Non-existence de maxima local

Une solution du système G-L (3.14) ne peut pas être un maximum local de

$$E(\psi, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \left(\frac{i}{\kappa}\nabla + \mathbf{A}\right)\psi \right|^2 + \frac{1}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 + |\mathbf{curl}\mathbf{A} - H|^2 dx. \quad (3.15)$$

Démonstration. soit $\psi \in H^1(\Omega)$ fixé, E est une fonctionnelle convexe en \mathbf{A} . En revanche, si (ψ, \mathbf{A}) est une solution des equations de G-L, et si $\nu(s) = E(s\psi, \mathbf{A})$, alors $\nu(s)$ est localement convexe en $s = 1$. Pour vérifier cela, Il nous suffit de vérifier $d^2\nu/ds^2$.

$$\frac{E(s\psi, \mathbf{A})}{ds^2}\Big|_{s=1} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(2 \left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + 6|\psi|^4 - 2|\psi|^2 \right) dx. \quad (3.16)$$

Comme (ψ, \mathbf{A}) est présumée être une solution aux équations de G-L, on peut alors montrer que (en multipliant (3.14-1) par ψ .)

$$\frac{E(s\psi, \mathbf{A})}{ds^2}\Big|_{s=1} = 2 \int_{\Omega} \left(\left| \left(\frac{i}{\kappa} \nabla + \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + |\psi|^4 \right) dx. \geq 0, \quad (3.17)$$

avec égalité ssi $\psi = 0$. Ainsi, (ψ, \mathbf{A}) ne peut pas être un maximum local. \square

Proposition 6. *Si (ψ, \mathbf{A}) est une solution du système G-L (3.14), alors*

$$\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \quad (3.18)$$

Presque partout dans l'ouvert Ω .

Démonstration. 1^{ere} méthode via le principe de maximum.
nous allons appliquer le principe sur

$$u(x) = |\psi(x)|^2.$$

Puisque

$$(i\nabla + \mathbf{A})^2\psi + \kappa^2\psi(|\psi|^2 - 1) = 0,$$

et de manière équivalente nous avons

$$(\nabla - i\mathbf{A})^2\psi = \kappa^2\psi(1 - |\psi|^2).$$

en multipliant l'équation par ψ^* , le complexe conjuguée de ψ , et on prend la partie réelle en tenant compte de

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

nous obtenons

$$-\frac{1}{2}\Delta(|\psi|^2) + |(\nabla - i\mathbf{A})\psi|^2 = \kappa^2|\psi|^2(1 - |\psi|^2) \quad (3.19)$$

cela vient du fait que

$$\Re \left[(\nabla - i\mathbf{A})^2 \psi \cdot \psi^* \right] = -\frac{1}{2} \Delta(|\psi|^2) + |(\nabla - i\mathbf{A})\psi|^2$$

donc u satisfait

$$\frac{1}{2} \Delta u + \kappa^2 u(1 - u) = |(\nabla - i\mathbf{A})\psi|^2$$

de cette equation on obtient le fait que

$$\frac{1}{2} \Delta u + \kappa^2 u(1 - u) \geq 0 \quad (3.20)$$

maintenant si on suppose que u admet un maximum supérieur à 1, alors on obtiendra une contradiction, car si ce maximum est atteint au point $x_0 \in \Omega$, nous avons $\Delta u(x_0) \leq 0$ et $\kappa^2 u(x_0)(1 - u(x_0)) < 0$ ce qui est en contradiction avec (3.20). Donc le maximum est inférieur à 1. Donc

$$\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1,$$

et ainsi la démonstration se termine. \square

Pour la deuxième démonstration nous aurons besoin d'un lemme sur la formulation faible de l'équation (3.14-1).

Lemme 6. *Soit (ψ, \mathbf{A}) une solution de (3.14), alors la formulation faible de l'équation est donné par (pour la démonstration de ce lemme voir l'article [27])*

$$\Re \int_{\Omega} \left[\left(-\frac{i}{\kappa} \nabla \psi - \mathbf{A}\psi \right) \cdot \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla \tilde{\psi}^* + \mathbf{A}\tilde{\psi}^* \right) + (|\psi|^2 - 1)\psi\tilde{\psi}^* \right] = 0, \quad (3.21)$$

pour tout $\tilde{\psi}^* \in H^1(\Omega)$.

Démonstration. On pose $\tilde{\psi} = (|\psi| - 1)_+$ avec $f = \psi/|\psi|$ et $q_+ = \max\{q, 0\}$. On définit l'ensemble Ω^+ par

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega, \quad |\psi|(x) > 1\}$$

nous avons

$$\frac{i}{\kappa} \nabla \tilde{\psi}^* - \mathbf{A}\tilde{\psi}^* = \frac{i}{\kappa} f^* \nabla |\psi| + (|\psi| - 1) \left(\frac{i}{\kappa} \nabla f^* - \mathbf{A}f^* \right)$$

et

$$-\frac{i}{\kappa} \nabla \psi - \mathbf{A}\psi = -\frac{i}{\kappa} f \nabla |\psi| + |\psi| \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla f - \mathbf{A}f \right)$$

et par suite

$$\Re \left\{ \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla \psi - \mathbf{A} \psi \right) \cdot \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla \tilde{\psi}^* + \mathbf{A} \tilde{\psi}^* \right) \right\} = (\nabla |\psi|)^2 + |\psi| (|\psi| - 1) \left| \frac{i}{\kappa} \nabla \psi + \mathbf{A} \psi \right|^2$$

D'après le lemme (3.21) nous savons que

$$\Re \left\{ \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla \psi - \mathbf{A} \psi \right) \cdot \left(-\frac{i}{\kappa} \nabla \tilde{\psi}^* + \mathbf{A} \tilde{\psi}^* \right) + (|\psi|^2 - 1) \psi \tilde{\psi}^* \right\} = 0$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega^+} (\nabla |\psi|)^2 + |\psi| (|\psi| - 1) \left| \frac{i}{\kappa} \nabla \psi + \mathbf{A} \psi \right|^2 + |\psi| (|\psi| + 1) (|\psi| - 1)^2 = 0.$$

Comme l'intégrand est positif, il faut avoir $\text{mes}(\Omega^+) = 0$ et donc, $|\psi| \leq 1$ presque partout. \square

Afin de terminer notre travail, il faut signaler qu'il existe des travaux d'existence et d'unicité pour l'équation de Ginzburg-Landau évolutif, où ils ont démontré des propriétés intéressantes, comme la contrôlabilité de la solution, la régularité du paramètre d'ordre etc .., dans la section qui suit nous allons donner quelques récents articles sur l'existence et l'unicité dans le cas de l'équation en évolution.

3.3 Remarques bibliographiques

Le système évolutif a d'abord été trouvé en [21]. Dans [9], des observations mathématiques par rapport au système Maxwell lié au systèmes de G-L, la théorie de la transition de phase et l'adimensionnement du système ont été réalisées. Ensuite, les résultats l'existence et d'unicité ont été établis dans une série d'article (voir [34], [11] et [33]).

Le comportement à long terme et le fait que l'énergie G-L est une fonctionnelle de Lyapunov a d'abord été établi dans [29] et [32].

Le cas où le système de Maxwell est dans le domaine extérieur a été d'abord donnée dans [30]. nous avons ajouter une modélisation de la continuité dans la frontière.

La principale préoccupation maintenant est qu'il n'y a pas de résultats d'existence de solution du système G-L 3-d lorsque les données initiales sont dans $L^2(\Omega)$.

Problèmes ouverts

1. Incluez la taille du domaine Ω comme paramètre d'étude, par exemple la géométrie de l'échantillon comme cela est fait dans [13].
2. Étude de l'existence et d'unicité pour le modèle en évolution en prenant compte les equations de Maxwell à l'extérieur de l'échantillon.
3. Classifier complètement la solution dans \mathbb{R}^2 de $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ sans aucun hypothèse approximative. Prouver ou réfuter l'existence des solutions conjecturées par Ovchinnikov et Sigal dans [31].
4. Décrire les structures de vortex : Comment les vortex peuvent-ils être organisés ?
5. Étendre les résultats avec le champ magnétique dans la dimension 3. Même s'il y a eu des résultats dans cette direction, beaucoup reste ouvert.
6. le système de Ginzburg-Landau dans les domaines non connexes. Dans un domaine avec des trous, des phénomènes intéressants de nature qualitative différente se produisent, et de nombreux problèmes ouverts subsistent, en raison de la topologie non triviale, le paramètre d'ordre peut avoir un degré topologique non nul sans vortex. Pour une analyse de ces phénomènes, nous nous référons au livre excellent qu'on a trouvé récemment édité par Berger et Rubinstein [4] entièrement consacré au sujet.

Conclusion

Bibliographie

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*, vol. 140. Academic press, 2003.
- [2] BARDEEN, J., COOPER, L. N., AND SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Physical Review* 108, 5 (1957), 1175.
- [3] BERGER, J., AND RUBINSTEIN, J. Bifurcation and phase transitions in nonuniform superconducting rings. *SIAM J. Appl. Math* (1989).
- [4] BERGER, J., AND RUBINSTEIN, J. *Connectivity and superconductivity*, vol. 62. Springer Science & Business Media, 2001.
- [5] BETHUEL, F., BREZIS, H., AND HÉLEIN, F. Vortices, ginzburg-landau, 1994.
- [6] BURDER, C. Derivation of the ginzburg-landau equations.
- [7] CAZENAVE, T., AND HARAUX, A. *An introduction to semilinear evolution equations*, vol. 13. Oxford University Press on Demand, 1998.
- [8] CHAPMAN, S., DU, Q., AND GUNZBURGER, M. A model for variable thickness superconducting thin films. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 47, 3 (1996), 410–431.
- [9] CHAPMAN, S. J., HOWISON, S. D., AND OCKENDON, J. R. Macroscopic models for superconductivity. *Siam Review* 34, 4 (1992), 529–560.
- [10] CHEN, Z., AND HOFFMANN, K.-H. Numerical studies of a non-stationary ginzburg-landau model for superconductivity. *Advances in Mathematical Sciences and Applications* 5 (1995), 363–389.
- [11] CHEN, Z., HOFFMANN, K.-H., AND LIANG, J. On a non-stationary ginzburg-landau superconductivity model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 16, 12 (1993), 855–875.
- [12] DACOROGNA, B. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer, 2015.

- [13] DMITRIEV, A., AND NOLTING, W. On details of the thermodynamical derivation of the ginzburg–landau equation.
- [14] DU, Q., GUNZBURGER, M. D., AND PETERSON, J. S. Analysis and approximation of the ginzburg–landau model of superconductivity. *Siam Review* 34, 1 (1992), 54–81.
- [15] DU, Q., GUNZBURGER, M. D., AND PETERSON, J. S. Computational simulation of type-ii superconductivity including pinning phenomena. *Physical Review B* 51, 22 (1995), 16194.
- [16] DUVANT, G., AND LIONS, J. L. *Inequalities in mechanics and physics*, vol. 219. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] ELLIOTT, C., MATANO, H., AND QI, T. Zeros of a complex ginzburg–landau order parameter with applications to superconductivity. *European Journal of Applied Mathematics* 5, 04 (1994), 431–448.
- [18] FONSECA, I., AND GANGBO, W. Degree theory in analysis and applications, volume 2 of oxford lecture series in mathematics and its applications, 1995.
- [19] FOURNAIS, S., AND HELFFER, B. *Spectral Methods in Surface Superconductivity*. Birkhäuser Basel, 2010.
- [20] GENNES, P. G. D. *Superconductivity Of Metals And Alloys*. Addison-Wesley, 1996.
- [21] GOR’KOV, L., AND ELIASHBERG, G. Generalization of the ginzburg-landau equations for non-stationary problems in the case of alloys with paramagnetic impurities. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* 27 (1968), 328.
- [22] GUSTAFSO, S. *SOME MATHEMATICAL PROBLEMS IN THE GINZBURG-LANDAU THEORY OF SUPERCONDUCTIVIT*. PhD thesis, University of Toronto, 1999.
- [23] HOFFMANN, K.-H., AND TANG, Q. *Ginzburg-Landau phase transition theory and superconductivity*, vol. 134. Birkhäuser, 2012.
- [24] HONG, M.-C. On a problem of bethuel, brezis and hélein concerning the ginzburg-landau functional. *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie I-Mathematique* 320, 6 (1995), 679–684.
- [25] JAFFE, A., AND TAUBES, C. H. Vortices and monopoles.
- [26] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. 1993.

- [27] L. BRONSARD, B. S. The ginzburg-landau equations of superconductivity and the one-phase stefan problem. *Ann. Inst. Henri Poincaré* (1998).
- [28] LANDAU, L. D., AND GINZBURG, V. On the theory of superconductivity. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20 (1950), 1064.
- [29] LIANG, J., AND QI, T. Asymptotic behavior of the solutions of an evolutionary ginzburg-landau superconductivity model. *Journal of mathematical analysis and applications* 195, 1 (1995), 92–107.
- [30] MU, M. A linearized crank-nicolson-galerkin method for the ginzburg-landau model. *SIAM journal on scientific computing* 18, 4 (1997), 1028–1039.
- [31] OVCHINNIKOV, Y. N., AND SIGAL, I. Symmetry-breaking solutions of the ginzburg-landau equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 99, 5 (2004), 1090–1107.
- [32] Q. TANG, S. W. Time dependent ginzburg-landau equations of superconductivity. *Physica D* (1995).
- [33] QI, T. On an evolutionary system of ginzburg-landau equations with fixed total magnetic flux. *Communications in partial differential equations* 20, 1-2 (1995), 1–36.
- [34] QIANG, D. Global existence and uniqueness of solutions of the time-dependent ginzburg-landau model for superconductivity. *Applicable Analysis* (1994).
- [35] SAINT-JAMES, D., SARMA, G., AND THOMAS, E. J. Type ii superconductivity.
- [36] SANDIER, E., AND SERFATY, S. A rigorous derivation of free-boundary problem arising in superconductivity. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (2000).
- [37] SANDIER, E., AND SERFATY, S. *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model*, vol. 70. Springer Science & Business Media, 2008.
- [38] SERFATY, S. *Coulomb Gases and Ginzburg-Landau Vortices*. European Mathematical society, 2015.
- [39] SLASTIKOV, V. *Calculus of variations*. 2014.
- [40] STRZELECKI, P. Asymptotics for the minimization of a ginzburg-landau energy in n dimensions. *COLLOQUIUM MATHEMATICUM* (1996).
- [41] TADEUSZ, I. Jacobian determinants and null lagrangians.

- [42] TAKAC, P. Dynamics of the ginzburg-landau equations of superconductivity. *Functional Analysis* (1997).
- [43] TAUBES, C. H. Arbitrary-n-vortex solutions to the first order ginzburg-landau equations. *Communications in Mathematical Physics* 72, 3 (1980), 277–292.
- [44] TEMAM, R. *Navier-Stokes Equations : Theory and Numerical Analysis*. North Hollonds, 1979.
- [45] THINKHAM, M. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, 1975.
- [46] TILLEY, D. R., AND TILLEY, J. *Superfluidity and superconductivity*. CRC Press, 1990.
- [47] ZHAN, M.-Q. Existence of periodic solutions for ginzburg-landau equations of superconductivity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2000).