UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématique et Applications au Calcul Scientifique (MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Autour de certaines extensions d'anneaux commutatifs

♦ *Réalisé par : Sanae MOUSSAOUI*

♦ *Encadré par : Pr. MAHDOU Najib*

Soutenu le 13 Juin 2017

Devant le jury composé de :

♦ Anisse OUADGHIRI	Faculté des Sciences et Technique Fès	Président
♦ Chahrazade BAKKARI	Faculté des Sciences Meknès	Examinateur
♦ Abdellah MAMOUNI	Faculté des Sciences et Techniques Errachidia	Examinateur
♦ Najib MAHDOU	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant
♦ Lahcen OUKHTITE	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
♦ Aziza RAHMOUNI HASSANI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur

Année Universitaire 2016/ 2017

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS
B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE FES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Pour l'obtention du diplôme de
MASTER MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS AUX CALCULS SCIENTIFIQUES

Equipe de recherche : Algèbre Commutative et Aspect Homologique

Présenté par
Sanae MOUSSAOUI
sous la direction du Pr. **NAJIB MAHDOU**

Thème :

Autour de certaines extensions d'anneaux commutatifs

soutenu le 13 juin 2017
Devant le Jury :

Anisse OUADGHIRI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Président
Chahrazade BAKKARI	Faculté des Sciences Meknès	Examinateur
Abdellah MAMOUNI	Faculté des Sciences et Techniques Errachidia	Examinateur
Najib MAHDOU	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Encadrant
Lahcen OUKHTITE	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur
Aziza RAHMOUNI HASSANI	Faculté des Sciences et Techniques Fès	Examinateur

DÉDICACES

À mes chers parents Mounia BAHADI et Hamid MOUSSAOUI

Aucun mot ne pourrait exprimer tout mon amour et toute ma gratitude. Merci pour vos sacrifices le long des années d'étude.
Merci pour votre présence rassurante et pour tout l'amour que vous procurez à notre petite famille.
Merci pour vos guides dans les moments les plus obscures et délicats.
Merci de vos conseils et vos orientations dans la bonne voie du travail et de l'honneur.
Merci de votre droiture, de votre conscience et de votre amour pour notre familles, attitudes qui me servent d'exemple dans la vie.
En témoignage des profonds liens qui nous unissent, veuillez chers parents dans ce travail l'expression de mon grand amour, mon fort attachement et ma profonde reconnaissance.
Que le BON DIEU vous prête bonne santé et longue vie afin que je puisse vous combler à mon tour.
Je vous aime très fort.

À ma chère sœur Omayma et mes chers frères Moussa et Ziad

Vous êtes ma source d'énergie. Que DIEU vous prête bonne santé et longue vie.
Je vous aime beaucoup.

À ma chère tante Naïma MOUSSAOUI et mon cher oncle Hamid TALBIOUI

Qui ont toujours été là pour moi, avec leurs précieux conseils. Qu'ils trouvent sur ce travail, toute ma reconnaissance et tout mon grand respect envers eux.
Je vous aime beaucoup.

À mes grands-parents

Qui n'ont jamais cessés de prier le BON DIEU pour qu'il m'aide.
Je vous aime beaucoup.

À la mémoire de mes oncles Abderrahmen MOUSSAOUI et Brahim BAHADI et ma tante Fatima REBBANI que DIEU ait leurs âmes dans sa sainte miséricorde.

À ma grande famille et mes amis

Pour leur soutien moral et leurs encouragements valorisants, je leur dédie ce travail avec mes remerciements chaleureux, ma gratitude et tous mes sentiments de reconnaissance.
Je les aime beaucoup.

À mon Professeur Abdellah MAMOUNI

Je vous dédie ce mémoire en réponse à vos orientations précieuses, vos encouragements, votre aide permanent depuis mes études à la FST ERRACHIDIA jusqu'à ce jour. vous trouverez dans ce travail, toute ma gratitude et tout mon respect.

À tous les membres de l'équipe de recherche Algèbre Commutative et Aspect Homologique de la faculté des sciences et techniques de Fès

Najib MAHDOU, Lahcen OUKHTITE, Aziza RAHMOUNI HASSANI , Fatima CHENIOUR, Hakima MOUANIS, Chahrazade BAKKARI,.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je voudrais exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance à tout ceux qui ont contribué de prêt ou de loin à sa réalisation :

Je voudrais, en premier lieu, exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant, Professeur NAJIB MAHDOU, qui, grâce à ses orientations précieuses, ses encouragements valorisants, sa direction compétente de ce mémoire, son soutien dans les moments d'incertitude et sa disponibilité inconditionnelle ; , j'ai pu réaliser ce travail et s'initier à la recherche.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude et tout mon sentiment de reconnaissance aux professeurs Anisse OUADGHIRI, Chahrazade BAKKARI, Abdellah MAMOUNI, Lahcen OUKHTITE et Aziza RAHMOUNI HASSANI pour l'honneur qu'ils me font d'accepter d'être membres de jury de ce mémoire.

Je voudrais aussi adresser mes chaleureux remerciements au Professeur Ahmed ELHILALI ALALOUI coordonnateur du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

j' adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à tous mes professeurs du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques.

J' exprime ma gratitude à tous mes collègues du cycle Master Mathématiques et Applications aux calculs scientifiques pour leur soutien amical durant ces deux années d'étude.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Ce mémoire a pour but d'étudier le transfert de certaines propriétés aux extensions d'un anneau commutatif unitaire, à savoir l'anneau extension triviale et le produit fibré. Ainsi, ce mémoire est constitué de cinq chapitres et des perspectives de recherche :

Le premier chapitre :

Dans ce chapitre, on rappelle certaines définitions et propriétés concernant les modules et les anneaux classiques.
Les résultats sont exposés sans démonstration mais avec des références précises.

Le deuxième chapitre :

Ce chapitre est consacré aux extensions d'anneaux et divisé en trois parties :

Dans la première partie, on traite une partie de l'article de D. D. Anderson et Michael Winders intitulé **"Idealization of a module"**, dans laquelle ils ont étudié les idéaux (premiers, maximaux, radicaux) ainsi que les éléments inversibles, idempotents, diviseurs de zéro, nilpotents et les parties multiplicatives de $A \propto E$ à partir de ceux de A.

Dans la deuxième partie, nous abordons une partie de l'article de Sarah Glaz nommé **"Commutative coherent rings"** concernant le produit fibré d'anneaux, dans laquelle on donne la forme des idéaux premiers et maximaux en utilisant la topologie de Zariski ainsi que le transfert de quelque résultats à ce fameux anneau.

Pour la dernière partie, nous présentons la nouvelle construction d'extension d'anneaux introduite par Marco d'Anna et Marco Fontana en 2007 appelée la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal ainsi qu'une généralisation de cette construction appelée l'amalgamation d'anneaux introduite par Marco d'Anna, Carmelo Antonio Finocchiaro, et Marco Fontana en 2009.

Le troisième chapitre :

Il s'agit d'un article de S. El Baghdadi, A. Jhilal, et Najib Mahdou intitulé **"On FF-rings"**, dans lequel ils étudient la classe des anneaux dans lesquels chaque idéal plat est de type fini ainsi que la stabilité de cette propriété dans la localisation et l'image homomorphique, et son transfert aux divers constructions d'anneaux tels que le produit direct, le produit fibré et l'extension triviale.

Le quatrième chapitre :

Au quatrième chapitre, nous abordons l'article de Najib Mahdou et A. Mimouni nommé **"Well-centered overrings of a commutative ring in pullbacks and trivial extensions**, dans lequel ils étudient le transfert de la propriété **bien-centré** à l'extension triviale et à la construction $D + M$ en déterminant tout d'abord les sur-anneaux de ces extensions à l'aide de ceux de l'anneau lui même.

Le cinquième chapitre :

Il s'agit d'un article de surveille par D. D. Anderson en 2010, dans lequel il donne une grande partie des propriétés et caractérisations des idéaux, modules et anneau de multiplication. Nous avons donné aussi quelques exemples concernant cette notion dans l'extension triviale et le produit fibré.

Perspectives :

Ainsi, pour terminer ce mémoire, nous allons présenter quelques perspectives de ces notions, que nous désirons aborder prochainement.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASES

1.1 Anneaux classiques

Anneaux des fractions

Définitions **1.1.1**
Soit R un anneau.

1. *On dit que R est local s'il admet un seul idéal maximal $\mathcal{M}$ et on le note $(R, \mathcal{M})$.*
2. *On dit que R est semi-local s'il admet un nombre fini d'idéaux maximaux.*

Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A (i.e. $S \subseteq A$, $1 \in S$, $0 \notin S$ et $\forall a, b \in S\ ab \in S$). On définit une relation d'équivalence de $A \times S$ par :

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow (as' - a's)t = 0 \text{ pour un certain } t \in S.$$

On note a/s la classe d'équivalence de (a, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de de ces fraction noté $S^{-1}A$, on définit l'addition et la multiplication par :

$$(a/s) + (a'/s') = (as' + sa')/(ss')$$

et

$$(a/s) \times (a'/s') = (aa')/(ss').$$

***Définition* 1.1.1**
$S^{-1}A$ muni de l'addition et de la multiplication définies au dessus est un anneau commutatif unitaire d'élément nul $0/1$ et d'élément unité $1/1$ appelé anneau des fractions de A par rapport à S.

***Définitions* 1.1.2**
Soit R un anneau commutatif.

1. *Si R est intègre et $S = R \setminus \{0\}$ alors $S^{-1}R$ est le corps des fractions de R, noté $qf(R)$.*
2. *Si R n'est pas intègre et S l'ensemble des éléments réguliers de R (non diviseurs de zéro) alors $S^{-1}R$ est appelé l'anneau total des quotients de R, noté $T(R)$.*

▶ ***Localisation*** Soit P un idéal premier de R. On a $S = R \setminus P$ est une partie multiplicative de R. Dans ce cas $S^{-1}R$ noté R_P est un anneau local appelé la localisation de R en P.

Anneaux Noethériens

***Proposition* 1.1.1 ([39], Théorème 7.1.1)**
Soit R un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Tout ensemble non vide d'idéaux de R admet un élément maximal.*
2. *Toute suite croissante d'idéaux de R est stationnaire.*
3. *Tout idéal de R est de type fini.*

***Définition* 1.1.2**
On dit qu'un anneau R est Noethérien s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 1.1.1.

***Proposition* 1.1.2 ([39], Proposition 7.1.9)**
Soient R un anneau Noethérien et $\Phi : R \to S$ un morphisme d'anneaux surjectif. Alors S est Noethérien.

***Corollaire* 1.1.1 ([39], Corollaire 7.1.11)**
Soient $R \subseteq S$ une extension d'anneaux, où R est Noethérien et S est un R-module de type fini, alors S est Noethérien.

***Théorème* 1.1.1 ([39], Théorème 7.1.13)**
Soient R un anneau Noethérien et X une indéterminée sur R. Alors $R[X]$ est Noethérien.

***Corollaire* 1.1.2 ([39], Corollaire 7.1.15)**
Soient A un anneau Noethérien et $X_1, \cdots, X_n$ des indéterminées sur R. Alors $R[X_1, \cdots, Xn]$ est Noethérien.

Anneaux de Bézout

***Définition* 1.1.3**
Un anneau R est dit de Bézout si tout idéal de type fini de R est principal.

Anneau réduit

***Définition* 1.1.4**
Un anneau R est dit réduit si R n'admet pas d'éléments nilpotents autre que zéro, c'est à dire que si $x^n = 0$ pour un certain entier naturel non nul n et $x \in R$, alors $x = 0$.

La propriété “réduit”est stable par localisation :

***Théorème* 1.1.2**
Soient R un anneau réduit et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}R$ est réduit.

***Corollaire* 1.1.3**
Soient R un anneau et K son anneau total des fractions. Alors, R est réduit si et seulement si K est réduit.

Preuve
Le sens direct découle du théorème précédent. Inversement, soit $x \in R$ tel que $x^n = 0$ pour un certain entier positif n. On a alors $x^n/1 = 0/1$ ce qui donne $x = 0$ puisque $K = S^{-1}R$ est réduit et S est l'ensemble des éléments réguliers de R. D'où R est réduit.

La propriété "réduit" est une propriété locale :

***Théorème* 1.1.3**
Soit R un anneau. Alors R est réduit si et seulement si R_P est réduit pour tout idéal premier P de R.

Comme les domaines sont naturellement réduits et les localisés des anneaux réguliers au sens de Van Neumann sont des corps, on obtient le corollaire suivant :

***Corollaire* 1.1.4**
Soit R un anneau. Alors :

1. *Si R est localement domaine, alors R est réduit.*
2. *Si R est régulier au sens de Van Neumann, alors R est réduit.*

Domaine de valuation

***Définitions* 1.1.3**
Soit R un anneau. Alors :

1. *R est dit anneau de valuation si pour tout $a, b \in R$, on a :*
   $a \in Rb$ ou $b \in Ra$.
2. *On dit que R est un domaine de valuation si c'est un anneau de valuation intègre.*

***Théorème* 1.1.4 ([40], Théorème 4.5.2)**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *R est un domaine de valuation.*
2. *Pour tout $a, b \in R$, on a $Ra \subseteq Rb$ ou $Rb \subseteq Ra$.*
3. *Pour tout $x \in K$ on a $x \in R$ ou $x^{-1} \in R$.*

***Proposition* 1.1.3 ([40], Proposition 4.5.4)**
Soient R un domaine de valuation et K son corps des fractions. Alors on a :

1. *Tout domaine S tel que $R \subseteq S \subseteq K$ est un domaine de valuation.*
2. *R est un anneau local.*

***Corollaire* 1.1.5 ([40], Corollaire 4.5.5)**
Soient R un domaine de valuation et S une partie multiplicative de R. Alors $S^{-1}R$ est un domaine de valuation.

Domaine de Mori

***Définition* 1.1.5**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions. Un idéal fractionnaire de R est un sous-ensemble I de K possédant les propriétés suivantes :

1. *I est un sous R-module de K.*
2. *Il existe $a \in R - \{0\}$ tel que $aI \subset R$.*

***Définition* 1.1.6**
Soient R un anneau commutatif et $T(R)$ l'anneau total des quotients de R. Soient I et J deux idéaux fractionnaires non nuls de R.
Nous définissons l'idéal fractionnaire $(I : J)$, appelé le transporteur de J dans I par : $(I : J) = \{x \in T(R) | xJ \subset I\}$.

Nous notons :
– $(R : I)$ par I^{-1}.

– $(I^{-1})^{-1}$ par I_v (appelé la v-fermeture de I).

***Définition* 1.1.7**
Soit I un idéal fractionnaire non nul de R, alors :

1. *I est dit inversible si $II^{-1} = R$.*

2. *I est dit divisoriel ou un v-idéal si $I_v = I$.*

***Définition* 1.1.8**
Un domaine de Mori, est un domaine satisfaisant la condition des chaines ascendantes pour les idéaux divisoriels.

Domaine de Pseudo-valuation

***Définition* 1.1.9**
Un domaine R est appelé domaine de pseudo-valuation si, chaque fois un idéal premier P contient le produit xy de deux éléments du corps des quotients K de R alors $x \in P$ ou $y \in P$.

Remarque
Il est déjà montrer qu'un domaine de pseudo-valuation qui n'est pas un domaine de valuation est un domaine local (R, M) tel que $V = M^{-1}$ est le sur-anneau de valuation associé à R.

Domaine de Krull

***Définition* 1.1.10**
Soit R un domaine et soit P l'ensemble de tous les idéaux premiers de R de hauteur 1 , i.e, l'ensemble de tous les idéaux premiers qui ne contiens aucun idéal propre premier non nul. Alors R est un anneau de Krull si :

– *$R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète pour tout $\mathfrak{p} \in P$,*
– *R est l'intersection de ces anneaux de valuation discrète (considérée comme un sous anneau du corps des quotients de R.*
– *Tout élément non nul de R est contenu dans un nombre fini d'idéaux premiers de hauteur 1.*

Algèbre sur un anneau

***Définition* 1.1.11**
Une algèbre sur un anneau commutatif R est une structure algébrique qui se définit comme suit : $(E, R, +, ., \times)$ *est une algèbre sur R, ou une R-algèbre, si :*

– $(E, +, .)$ *est un module sur R ;*
– *La loi de composition interne* $\times$*, de* $E \times E$ *dans* E*, est bilinéaire.*

Remarque
Dans le cas où R est un corps, on aura $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur R ;

Extension intégrale

***Définition* 1.1.12**
Un élément x d'un anneau commutatif R est appelé ***entier sur*** *S, un sous anneau de R, s'il existe* $n \geq 1$ *et* $y_j \in S$ *tels que* $x^n + y_{n-1}x^{n-1} + ... + y_1x + y_0 = 0$*. C'est à dire que, x est une racine d'un polynôme sur R.*

Remarque
Si tout élément de R est entier sur S, alors on dit que R est intégral sur S, ou bien R est une extension intégrale de S. Si S, R sont des corps, alors les deux notions "entier sur" et "extension intégrale" sont précisément "algébrique sur" et "extension algébrique".

***Définitions* 1.1.4**
Soient A un anneau et B une A-algèbre (i.e. il existe un morphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow B$*).*

1. *La sous A-algèbre* A' *de B des éléments de B entiers sur A est appelée* ***la fermeture intégrale de*** *A* ***dans*** *B (c'est-à-dire* A' *est un sous-anneau de B stable par la multiplication par A). Si* A' *est égal à l'image canonique de A dans B (l'image par* φ*), on dit que A est* ***intégralement fermé dans*** *B.*

2. *Si A est intègre, sa fermeture intégrale dans son corps des fractions est appelée* ***la clôture intégrale de*** *A.*

3. *Si A est égal à sa clôture intégrale, on dit que A* ***est intégralement clos****.*

1.2 Résultats sur les modules

Module libre

***Définition* 1.2.1**
Un R-module E est dit libre s'il est somme directe de copies de R. Si $Ra_i \cong R$ et $E = \oplus_{i \in I} Ra_i$ où I est un ensemble d'indexation, l'ensemble $\{a_i / i \in I\}$ est appelé alors une base de E.
Un module libre est dit de rang n s'il admet une base de cardinal n.

***Théorème* 1.2.1 ([43], Corollaire 3.7)**
Soient R un anneau et E un R-module libre de rang n. Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$ engendre E, alors c'est une base de E.

Rappel

1. Une suite de R-modules et d'homomorphismes

$$\cdots M_{i-1} \xrightarrow{U_{i-1}} M_i \xrightarrow{U_i} M_{i+1} \xrightarrow{U_{i+1}} \cdots$$

   est dite suite exacte en M_i si $Ker(u_i) = Im(u_{i-1})$. Cette suite est dite exacte si elle est exacte en chaque M_i.

2. Une suite exacte courte est une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0;$$

   c'est à dire que u est injectif, v est surjectif, et $Im(u) = Ker(v)$.

3. Une présentation d'un module M (de longueur 1) est une suite exacte :
$$L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
   où L_0 et L_1 sont des modules libres. Notamment, tout module admet une présentation.

4. Un module M est dit de présentation finie s'il existe une suite exacte de R-modules
$$L_0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$
   avec L_0 et L_1 sont libres de base finie.

***Théorème* 1.2.2 ([39], Théorème 5.1.14)**

1. *Tout module de présentation finie est de type finie.*
2. *Un module est de présentation finie si et seulement si il est isomorphe au quotient d'un module libre de base finie par un sous-module de type fini.*

***Théorème* 1.2.3 ([39], Théorème 5.1.15)**
Soit M un R-module de type fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. M est de présentation finie.

ii. Pour tout suite exacte : $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$, si B est de type fini alors A est de type fini.

Module projectif

***Théorème* 1.2.4 ([27], Théorème 3.11, 3.14)**
Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. Pour tout diagramme de modules :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] & & \\ B \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la ligne est exacte (i.e. g est surjectif), il existe $\alpha \in Hom(P, B)$ tel que le diagramme est commutatif; c'est à dire $go\alpha = f$.

ii. Toute suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ est scindée (c'est à dire $B \cong A \oplus P$).

iii. P est un facteur directe d'un module libre.

iv. Le foncteur $Hom(P, .)$ est exact (i.e. pour tout suite exacte $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, la suite $Hom(P, A) \longrightarrow Hom(P, B) \longrightarrow Hom(P, C) \longrightarrow 0$ est exacte).

***Définition* 1.2.2**
On dit qu'un module P est projectif s'il vérifie les conditions équivalentes du Théorème 1.2.4.

***Théorème* 1.2.5 ([43], p. 90)**
Soit R un anneau intègre. Alors tout idéal projectif de R est de type fini.

***Définition* 1.2.3**
Soient R un anneau intègre, I un idéal de R et $I^{-1} = (R : I) = \{x \in Frac(R)/xI \subseteq R\}$. L'idéal I est dit inversible si $II^{-1} = R$.

***Théorème* 1.2.6 ([39], Théorème 5.2.11)**
Soit I un idéal de R. Alors on a :

1. *$II^{-1} \subseteq R$.*
2. *Supposons que l'anneau R est intègre. Alors I est projectif si et seulement si I est inversible.*

Module plat

***Définition* 1.2.4**
Un R-module E est dit plat si le foncteur $E \otimes_R$ est exacte ; c'est à dire, pour toute suite exacte de R-module $0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N$, la suite

$$0 \longrightarrow E \otimes_R M \xrightarrow{Id_E \otimes u} E \otimes_R N$$

est exacte.

***Corollaire* 1.2.1**
Soient R un anneau intègre et K son corps des fractions. Alors K est un R-module plat.

***Théorème* 1.2.7 ([43], Corollaire 3.58)**
Soit P un module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. P est projectif de type fini ;

ii. P est plat de présentation finie.

▶ ***Localisation*** On peut d'une manière analogue appliquer la construction de $S^{-1}R$, où R est un anneau, à un R-module M pour obtenir le module des fractions $S^{-1}M$. Soient M un R-module et S une partie multiplicative de R. On définit une relation d'équivalence de $M \times S$ par :

$$(m, s) \sim (m', s') \Leftrightarrow (ms' - m's)t = 0 \text{ pour un certain } t \in S.$$

On note m/s la classe d'équivalence de (m, s) qu'on appelle fraction. Sur l'ensemble de ces fractions noté $S^{-1}M$, on définit l'addition et la modulation par :

$$(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/(ss')$$

et

$$(a/t)(m/s) = (am)/(st).$$

où $a/t \in S^{-1}R$. $S^{-1}M$ devient ainsi un $S^{-1}R$-module (et aussi un R-module).
Pour $S = R \setminus P$ où P est un idéal premier de R, on note $S^{-1}M$ par M_P.

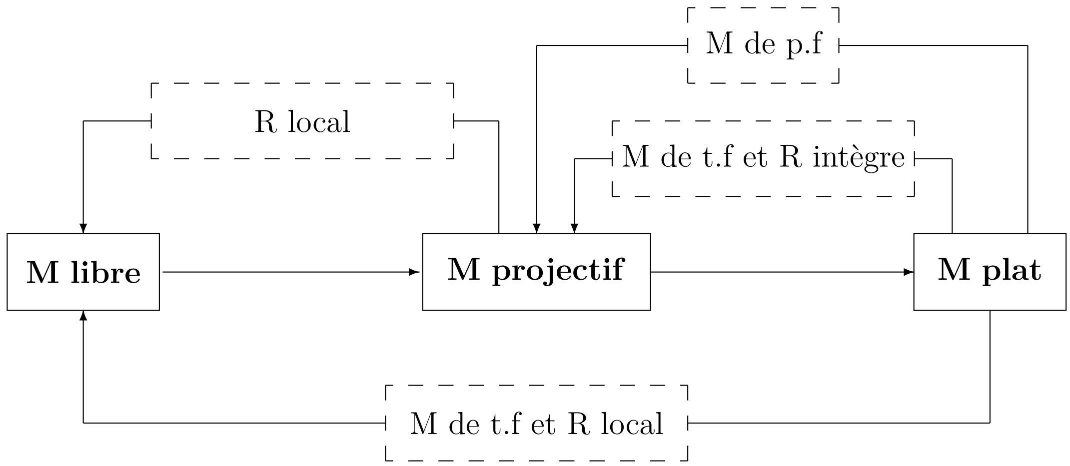
***Théorème* 1.2.8 ([39], Théorème 6.2.1)**
Soient S une partie multiplicative de R et M un R-module. Alors :

1. *Si M est un R-module de type fini, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de type fini.*
2. *Si M est un R-module libre, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module libre.*
3. *Si M est un R-module de présentation finie, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module de présentation finie.*

4. Si M est un R-module projectif, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module projectif.

5. Si M est un R-module plat, alors $S^{-1}M$ est un $S^{-1}R$-module plat.

RELATIONS ENTRE MODULE lIBRE, PROJECTIF ET PLAT



Clé :
- Les flèches continues sont des implications.
- Les flèches coupées par des rectangles pointillés sont des implications sous les conditions placées dans ces rectangles.
- p.f désigne présentation finie, et t.f désigne type fini.

CHAPITRE 2

EXTENSIONS D'ANNEAUX

2.1 *Extension triviale*

`D.D. Anderson, M. Winders; Idealization of a module. J. Commut. Algebra 1(1):3-56, 2009.`

***Définition* 2.1.1**
Soient A un anneau, E un A-module et $R := A \propto E$ l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par : $(a, e)(b, f) = (ab, af + be)$. R est dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale, de A par E.

Notons qu'avec un contre exemple, S. Kabbaj et N. Mahdou ont montré que [29, Théorème 25.1.(1)] n'est pas toujours vraie ; autrement dit, qu'un idéal quelconque de R n'est pas forcément de la forme $I \propto E$ où I est un idéal de A ; à savoir que pour tout idéal I de A, $I \propto E$ est un idéal de R (voir [31, Exemple 2.5]). Un travail considérable de cette notion se trouve dans le livre de S.Glaz [23] et le livre de Huckaba (où R est appelé idéalisation de E par A) [31].

2.1.1 *Idéaux et éléments distingués de* $R \propto M$

Tout au long de cette section, R est un anneau commutatif unitaire et M un R-module. On détermine les idéaux maximaux, premiers et les idéaux radicaux de $R \propto M$, Ainsi que les éléments unités, idempotents, diviseurs de zéros, et nilpotents de $R \propto M$. On commence par le résultat suivant.

***Théorème* 2.1.1**
Soient R un anneau, I un idéal de R, M un R-module et N un sous module de M. Alors $I \propto N$ est un idéal de $R \propto M$ si et seulement si $IM \subseteq N$. Lorsque $I \propto N$ est un idéal, M/N est un R/I-module et $(R \propto M)/(I \propto N) \cong (R/I) \propto (M/N)$. En particulier, $(R \propto M)/(0 \propto N) \cong R \propto (M/N)$ d'où $(R \propto M)/(0 \propto M) \cong R$. Donc les idéaux de $R \propto M$ contenant $0 \propto M$ sont de la forme $J \propto M$ où J est un idéal de R.

Preuve
Si $I \propto N$ est un idéal, $(R \propto M)(I \propto N) = I \propto (IM + N)$ ce qui donne $IM \subseteq N$. Inversement, si $IM \subseteq N$, M/N est un R/I-module et l'application $f : R \propto M \to (R/I) \propto (M/N)$ définie par $f((r, m)) = (r + I, m + N)$ est un épimorphisme avec $Ker f = I \propto N$. Donc $I \propto N$ est un idéal de $R \propto M$ et $(R \propto M)/(I \propto N) \cong (R/I) \propto (M/N)$.

Remarque
Un idéal quelconque de $R \propto M$ n'est pas forcement de la forme $I \propto M$ où I est un idéal de R, sachant que pour tout idéal I de R, $I \propto M$ est un idéal de $R \propto M$.

***Théorème* 2.1.2**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module.

1. *Les idéaux maximaux de $R \propto M$ sont de la forme $\mathcal{M} \propto M$ où $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de R. Le radical de Jacobson de $R \propto M$ est $J(R \propto M) = J(R) \propto M$.*
2. *Les idéaux premiers de $R \propto M$ sont de la forme $P \propto M$ où P est un idéal premier de R.*
3. *Les idéaux radicaux de $R \propto M$ sont de la forme $I \propto M$ où I est idéal radical de R ($I = \sqrt{I}$). Si J est un idéal de $R \propto M$, alors $\sqrt{J} = \sqrt{I} \propto M$ où $I = \{r \in R \mid (r, b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$ est un idéal de R.*

En particulier, si I est un idéal de R et N un sous-module de M, alors $\sqrt{I \propto N} = \sqrt{I} \propto M$. Par conséquent $Nilp(R \propto M) = Nilp(R) \propto M$.

Preuve
Soit A un idéal radical de $R \propto M$. Alors, $(0 \propto M)^2 = 0 \subseteq A$ par conséquent $0 \propto M \subseteq A$. D'après le Théorème 2.1.1 $A = I \propto M$ pour un certain idéal I de R. De plus $(R \propto M)/(I \propto M) \cong (R/I)$ donne que I est un idéal radical (respectivement idéal premier, idéal maximal) si et seulement si $I \propto M$ l'est. On a $J(R \propto M) = \cap\{\mathcal{M} \propto M \mid \mathcal{M}$ est un idéal maximal de R$\} = (\cap\{\mathcal{M} \mid \mathcal{M}$ est un idéal maximal de R$\}) \propto M = J(R) \propto M$ d'où les résultats de 1. et 2..
3. Soit J un idéal de $R \propto M$. Alors $\sqrt{J} = K \propto M$ pour un certain idéal radical K de R. Soit $I = \{r \in R \mid (r, b) \in J$ pour un certain $b \in M\}$, il est claire que I est un idéal

de R. Soit $x \in \sqrt{I}$, alors pour un certain entier n on a $x^n \in I$; d'où $(x^n, b) \in J$. Alors $(x^n, b) \in \sqrt{J} = K \propto M$ ($J \subseteq \sqrt{J}$), par conséquent $x^n \in K$, d'où $x \in K$ puisque K est un idéal radical de R. D'où $\sqrt{I} \propto M \subseteq K \propto M = \sqrt{J}$. Pour l'inclusion inverse, soit $x \in K$. Alors $(x, 0) \in \sqrt{J}$; donc pour un certain entier n on a $(x^n, 0) \in J$, ce qui implique que $x^n \in I$ et par conséquent $x \in \sqrt{I}$.D'où $K \propto M \subseteq \sqrt{I} \propto M$. les résultats restants sont immédiats.

Remarques

1. Soient M un R-module et $\{m_\alpha\} \subseteq M$. Il est claire que $\langle\{m_\alpha\}\rangle = M$ si et seulement si $\langle\{(0, m_\alpha)\}\rangle = 0 \propto M$. Donc, M est de type fini si et seulement si $0 \propto M$ est un idéal de type fini. Si I est un idéal de R, $I(R \propto M) = I \propto IM$. Ainsi, si I est de type fini, $I \propto IM$ l'est aussi. En tout cas, $I \propto IM$ peut être de type fini sans que IM le soit.

2. Posons $A = R \propto M$. Soient n un entier positif, U un sous module de R^n et N un sous module de M^n tels que $UM \subseteq N$; alors $U \propto N$ est un sous module du A-module libre de type fini A^n qui s'identifie à $R^n \propto M^n$.

***Théorème* 2.1.3**

Soient R un anneau commutatif et M un R-module. Alors les unités de $R \propto M$ sont $U(R \propto M) = U(R) \propto M$, et les éléments idempotents de $R \propto M$ sont $Idem(R \propto M) = Idem(R) \propto 0$.

Preuve

Supposons que $(r, m) \in U(R \propto M)$. Donc il existe (s, n) avec $(r, m)(s, n) = (1, 0)$. Par conséquent $rs = 1$, donc $r \in U(R)$. Inversement, supposons que $r \in R$ est une unité, implique qu'il existe $s \in R$ tel que $rs = 1$. Alors $(r, 0)(s, 0) = (1, 0)$ donc $(r, 0)$ est une unité. Pour tout $m \in M$, $(0, m)$ est nilpotent et par conséquent $(r, m) = (r, 0) + (0, m)$ est une unité.

Certainement, si $e \in R$ est idempotent, $(e, 0)$ est idempotent. Inversement, supposons que $(r, m) \in R \propto M$ est idempotent. Alors $(r, m) = (r, m)^2 = (r^2, 2rm)$. Donc $r = r^2$ est idempotent. De plus, $m = 2rm$, donc $rm = 2r^2m = 2rm$ et par conséquent $rm = 0$ d'où $m = 2rm = 0$.

Maintenant on va déterminer les diviseurs de zéro de $R \propto M$.

***Théorème* 2.1.4**

Soient R un anneau commutatif et M un R-module. Alors $Z(R \propto M) = \{(r, m) \mid r \in (Z(R) \cup Z(M)),\ m \in M\}$. Par conséquent $S \propto M$, où $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$, est l'ensemble des éléments réguliers (non diviseurs de zéro) de $R \propto M$.

Preuve
Soit $r \in (Z(R) \cup Z(M))$. Si $r \in Z(R)$, il existe $s \in R$ non nul tel que $rs = 0$, donc $(r, 0)(s, 0) = (0, 0)$ et par conséquent $(r, 0) \in Z(R \propto M)$. Si $r \in Z(M)$, il existe $n \in M$ non nul tel que $rn = 0$, donc $(r, 0)(0, n) = (0, 0)$ et par conséquent $(r, 0) \in Z(R \propto M)$. On a, pour tout $m \in M$, $(0, m) \in Nilp(R \propto M)$, donc $(r, m) = (r, 0) + (0, m) \in Z(R \propto M)$ (puisque $Z(R \propto M)$ est l'union d'idéaux premier et $nil(R \propto M)$ est contenu dans tout idéal premier). Inversement, supposons que $(r, m) \in Z(R \propto M)$. Alors $(0, 0) = (r, m)(s, n)$ pour un certain $(s, n) \neq (0, 0)$. Si $s \neq 0$, alors $rs = 0$ et donc $r \in Z(R)$, et si $s = 0$, alors $n \neq 0$ et $rn = 0$, donc $r \in Z(M)$. Dans les deux cas $r \in (Z(R) \cup Z(M))$.

2.1.2 *Constructions d'anneaux et propriétés de* $R \propto M$

▶ ***Localisation***

***Théorème* 2.1.5**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module.

1. *Soient S une partie multiplicative de R, et N un sous-module de M. Alors $(R \propto M)_{S \propto N}$ est isomorphe à $R_S \propto M_S$. Dans le cas où $N = 0$, l'isomorphisme est simplement $(r, m)/(s, 0) \to (r/s, m/s)$.*
2. *Soit P un idéal premier de R. Alors $(R \propto M)_{P \propto M} \cong R_P \propto M_P$.*
3. *L'anneau total des quotients $T(R \propto M)$ de $R \propto M$ est isomorphe à $R_S \propto M_S$ où $S = R - (Z(R) \cup Z(M))$.*

Preuve

1. L'application $f : (R \propto M)_{S \propto N} \to R_S \propto M_S$ définie par
$f((r, m)/(s, n)) = (r/s, (sm - rn)/s^2)$ est l'isomorphisme désiré. (Pour comprendre pourquoi cette application est définie ainsi, il suffit de voir que $(r, m)/(s, n) = (s, -n)(r, m)/(s, -n)/(s, n) = (sr, sm - rn)/(s^2, 0)$).
2. Découle de 1. avec $S = R - P$ et $N = M$.
3. Si $S = R-(Z(R) \cup Z(M))$, $S \propto M$ est l'ensemble des éléments réguliers de $R \propto M$, (théorème 2.1.4). Donc L'anneau total des quotients de $R \propto M$ est $(R \propto M)_{S \propto M}$. Le résultat est induit de 1..

***Théorème* 2.1.6**
Soient R_1 et R_2 deux anneaux commutatifs, et soit M_i un R_i-module, $i = 1, 2$. Alors $(R_1 \times R_2) \propto (M_1 \times M_2) \cong (R_1 \propto M_1) \times (R_2 \propto M_2)$.

Preuve
Il est facile de vérifier que l'application $((r_1, r_2), (m_1, m_2)) \to ((r_1, m_1), (r_2, m_2))$ est un

isomorphisme.
► Le théorème suivant permet de déterminer quand $R \propto M$ est Noethérien.

***Théorème* 2.1.7**
Soient R un anneau commutatif et M un R-module. Alors $R \propto M$ est Noethérien, si et seulement si R est Noethérien, et M de type fini.

Preuve
Supposons que $R \propto M$ est Noethérien. Alors R est Noethérien (car R est une image de $R \propto M$ par un homomorphisme). Et on a $0 \propto M$ est un idéal de type fini de $R \propto M$ puisque $R \propto M$ est Noethérien. Remarquons que $(0, m_1), \cdots, (0, m_n)$ est une famille génératrice de $0 \propto M$ si et seulement si $m_1, \cdots, m_n$ est une famille génératrice de M. Par conséquent M est un R-module de type fini.
Inversement, supposons que R est Noethérien et M est de type fini. Les idéaux premiers de $R \propto M$ sont de la forme $P \propto M$, qui sont de type fini, d'où $R \propto M$ est Noethérien.

2.2 *Produit fibré*

`S. Glaz; Commutative coherent rings, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1371 (1989). P. J. Cahen; Couples d'anneaux partageant un idéal, Arch. Math. Vol. 51, 505-514 (1988).`

Introduction Dans ce chapitre, on étudie certaines propriétés de la construction du carré cartésien dit aussi produit fibré.
On commence avec des anneaux R, S, T et W et un carré commutatif d'homomorphismes d'anneaux.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_1"] & S \arrow[d, "j_2"] \\ T \arrow[r, "i_2"] & W \end{tikzcd}$$

On suppose que i_1 et i_2 sont injectifs et que j_1 et j_2 sont surjectifs. Dans ce cas on peut faire les identifications suivantes : $W \cong T \otimes S$; $Q = Ker(j_1) \cong Ker(j_2)$; ce qui fait que Q est un idéal commun de R et S et on exprime cela en disant que Q est un idéal de R qui satisfait $QS = Q$; $T \cong R/Q$ et $W \cong S/QS \cong S/Q$. Avec ces identifications notre carré cartésien assume l'apparence suivante :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_1"] & S \arrow[d, "j_2"] \\ R/Q \arrow[r, "i_2"] & S/Q \end{tikzcd}$$

Cette construction s'appelle produit fibré ou pullback ou encore, on dit que (R, S) est un couple d'anneaux partageant un idéal Q.
La forme décrite au-dessus du carré cartésien sera appelée la forme générale".

***Exemple* 2.2.1**
Soient T un anneau et M un idéal de T. Notons par π la surjection canonique $\pi : T \longrightarrow T/M$. Soit D un sous anneau de T/M. Alors, $R := \pi^{-1}(D)$ est un sous anneau de T et M est un idéal commun de R et T, tel que $D = R/M$. R est le produit fibré associé au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R := \pi^{-1}(D) & \stackrel{\pi/R}{\longrightarrow} & D = R/M \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ T & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & T/M \end{array}$$

Où i et j sont les injections canoniques.
En particulier, pour la construction $D + M$, lorsque l'anneau T est de la forme $K + M$, où K est un corps, M est un idéal maximal de T, R devient de la forme $D + M$.

On commence par quelques notations.

Notations

Soit A un anneau. On note par :

Max(A) :={L'ensemble des idéaux maximaux de A},

Spec(A) :={L'ensemble des idéaux premiers de A},

Nilp(A) :={L'ensemble des éléments nilpotents de A},

J(A) :=$\cap Max(A)$= *le radicale de Jacobson de A.*

On considère *Spec(A)* muni de la topologie de Zariski, i.e. la topologie dont les fermés sont les parties de *Spec(A)* de la forme $V(J)= \{I \in Spec(A) \mid J \subseteq I\}$ pour tout idéal J de A.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On note par $f^* : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$, la fonction canonique continue associée à f définie par $f^*(P) = f^{-1}(P)$, pour tout $P \in$ *Spec(B)*.

Puisque dans tout ce travail, on ne traite que le cas des anneaux commutatifs unitaires, on a la définition suivante :

***Définition* 2.2.1**

Soient $\alpha : A \longrightarrow C$ et $\beta : B \longrightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, alors le sous-anneau $D := \alpha \times_c \beta = \{(a, b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ de $A \times B$ s'appelle le produit fibré de α et β.

On commence a rassembler quelques propriétés pour que le produit fibré soit un anneau réduit.

***Proposition* 2.2.1**

1. *Si $D(:= \alpha \times_c \beta)$ est réduit, alors :*
$$Nilp(A) \cap Ker(\alpha) = \{0\} \text{ et } Nilp(B) \cap Ker(\beta) = \{0\}.$$
2. *Si au moins une des assertions suivantes est vérifiée*
   (a) *A est réduit et $Nilp(B) \cap Ker(\beta) = \{0\}$,*
   (b) *B est réduit et $Nilp(A) \cap Ker(\alpha) = \{0\}$,*

   alors D est réduit.

Preuve

1. Supposons que D est réduit. Par symétrie, il suffit de montrer que $Nilp(A) \cap Ker(\alpha) = \{0\}$. Si $a \in Nilp(A) \cap Ker(\alpha)$, alors $(a, 0)$ est un élément nilpotent de D, et ainsi $a = 0$ (puisque D est réduit.

2. De la symétrie des conditions (a) et (b), il suffit de montrer que si (a) est vérifiée alors D est réduit. Soit (a, b) un élément nilpotent de D. Alors $a = 0$ puisque $a \in Nilp(A)$ et A est réduit. Ainsi on a $(a, b) = (0, b) \in Nilp(D)$, par conséquent $b \in Nilp(B) \cap Ker(\beta)$.

Remarque

Soit $p_A : D \longrightarrow A$ la surjection canonique. $p_A(D)$ est muni de la structure de D-module

induite par p_A.
Clairement $Ker(p_A) = \{0\} \times Ker(\beta)$, et ainsi on a la suite exacte de D-modules

$$0 \longrightarrow Ker(\beta) \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p_A} p_A(D) \longrightarrow 0;$$

où $i : x \longrightarrow (0, x)$ pour tout $x \in Ker(\beta)$.
Les D-sous-modules de $p_A(D)$ sont exactement les idéaux de l'anneau $p_A(D)$.

Maintenant, on va voir quand l'anneau produit fibré est Noethérien.

***Proposition* 2.2.2**
Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. $D(:= \alpha \times_c \beta)$ *est un anneau Noethérien.*

ii. $Ker(\beta)$ *est un* D*-module Noethérien (avec la structure de* D*-module induite par* p_B*) et* $p_A(D)$ *est un anneau Noethérien.*

Le résultat suivant dû à M. Fontana, donne une description complète des idéaux premiers du produit fibré.

***Théorème* 2.2.1**
Soient $X = Spec(A)$, $Y = Spec(B)$, $Z = Spec(C)$, *et* $W = Spec(D)$. *On suppose que* β *est surjectif. Alors on a :*

1. *Si* $P \in W \setminus V(Ker(p_A))$. *Alors il existe un unique idéal premier* Q *de* B *tel que* $p_B^{-1}(Q) = P$. *De plus,* $Q \in Y \setminus V(Ker(\beta))$ *et* $D_P \cong B_Q$, *sous l'homomorphisme canonique induit par* p_B.
2. *L'homomorphisme continu est fermé de* X *vers* W. *Ainsi* X *est homéomorphe à son image* $V(Ker(p_A))$ *sous* p_A^*.
3. *La restriction de l'homomorphisme continue* p_B^* *à* $Y \setminus V(Ker(\beta))$ *est un homéomorphisme de* $Y \setminus V(Ker(\beta))$ *à* $W \setminus V(Ker(p_A))$ *(en particulier, c'est un isomorphisme des parties partiellement ordonnées).*

En particulier, les idéaux premiers de D sont du type $p_A^{-1}(J)$ ou $p_B^{-1}(Q)$, où J est n'importe quel idéal premier de A et Q un idéal premier de B, tel que $Q \nsupseteq Ker(\beta)$.
Un résultat sur les idéaux maximaux du produit fibré.

***Corollaire* 2.2.1**
On suppose que β *est surjectif. Soit* P *un idéal premier de* $D(:= \alpha \times_c \beta)$. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Supposons que* P *contient* $Ker(p_A)$. *Soit* J *le seul idéal premier de* A *tel que* $P = p_A^*(J)$ *(Théorème 2.2.1(2)). Alors,* P *est un idéal maximal de* D *si et seulement si* J *est un idéal maximal de* A.

2. *Supposons que P contient $Ker(p_A)$. Soit Q le seul idéal premier de B ($Q \notin V(Ker(\beta))$) tel que $P = p_B^*(Q)$ (Théorème 2.2.1(1)). Alors, P est un idéal maximal de D si et seulement si Q est un idéal maximal de B.*

Preuve
L'assertion 1. est une conséquence du fait que p_A^* est une injection fermée.
2. Supposons que Q est un idéal maximal de B qui ne contient pas $Ker(\beta)$, et soit I un idéal de D tel que $P = p_B^*(Q) \subsetneq I$. Ainsi, on peut trouver un élément $(a, b) \in I \setminus P$, où $a \in A$, $b \in B$ et $\alpha(a) = \beta(b)$. Du choix de (a, b), on a $b \notin Q$; ainsi il existe $k_1 \in B$ et $q_1 \in Q$ tels que $k_1 b + q_1 = 1$, dû au fait que Q est maximal. De plus, puisque $Q \not\supseteq Ker(\beta)$, on peut prendre un élément $x \in Ker(\beta) \setminus Q$ et encore une fois du fait que Q est maximal, on peut trouver $k_2 \in B$ et $q_2 \in Q$ tels que $k_2 x + q_2 = 1$. Donc, on a $kbx + q = 1$, pour certains $k \in B$ et $q \in Q$, ainsi $(1, q) \in P \subset I$. Et puisque $(0, kx) \in D$ on a $(0, kbx) = (0, kx)(a, b) \in I$, et finalement $(0, kbx) + (1, q) = (1, 1) \in I$. Cela prouve que P est un idéal maximal de D.
Inversement, supposons que P est un idéal maximal de D qui ne contient pas $Ker(p_A)$, et soit Q l'unique idéal premier de B tel que $P = p_B^*(Q)$ (Théorème 2.2.1(1)). Si Q n'est pas un idéal maximal de B, on peut trouver un idéal premier Q' de B tel que $Q \subset Q'$. Puisque $p_B^*(Q')$ est un idéal propre de D qui contient l'idéal maximal P, on a $P = p_B^*(Q')$. Contradiction puisque $Q \neq Q'$.

***Corollaire* 2.2.2**
On suppose que β est surjectif. Alors $D(:= \alpha \times_c \beta)$ est un anneau local si et seulement si A est un anneau local et $Ker(\beta) \subseteq J(B)$. En particulier, si A et B sont deux anneaux locaux alors D est un anneau local. De plus, si D est un anneau local et M est le seul idéal maximal de A, alors $\{p_A^{-1}(M)\} = Max(D)$.

Preuve
Il suffit d'appliquer le Corollaire 2.2.1.

2.2.1 *Couples d'anneaux partageant un idéal*

Dans toute cette partie, (A, B) désigne un couple propre d'anneaux ($A \neq B$), tel que A soit inclus dans B et ayant un idéal I commun non trivial ($I \neq (0)$).
De façon générale, pour définir un couple d'anneaux (A, B) partageant un idéal I, il suffit de se donner un anneau B, un idéal I de B et un sous anneau D du quotient B/I : on définit l'anneau A comme l'ensemble des éléments de B dont la classe modulo I est dans D. On dira alors que A est **l'anneau de la construction** B, I, D ; dans ces conditions,

D est isomorphe au quotient A/I et on a un carré cartésien,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ D \arrow[r] & B/I \end{tikzcd}$$

Dans l'étude du couple (A, B) on peut noter, avant toute chose, un résultat tout à fait immédiat.

***Proposition* 2.2.3**
Pour toute partie multiplicative S de A, le couple $(S^{-1}A, S^{-1}B)$ partage l'idéal $S^{-1}I$; en outre, si S rencontre l'idéal I, alors les localisés $S^{-1}A$ et $S^{-1}B$ sont égaux.
En particulier, si B est intègre, alors A et B ont même corps des fractions.

2.2.2 *Propriétés de A*

***Lemme* 2.2.1**
Le A-module B est engendré par une famille d'éléments (x_i) si et seulement si le A/I-module B/I est engendré par la famille $(\overline{x}_i)$ de leurs classes modulo I.

Preuve
C'est trivial, il en résulte que B est un A-module de type fini si et seulement si B/I est un A/I-module de type fini, d'où la proposition.

***Proposition* 2.2.4**
Pour que l'anneau A soit Noethérien il suffit que B soit Noethérien et que le quotient B/I soit un A/I-module de type fini, si B est un A-module fidèle (i.e. l'annulateur de B est l'idéal nul) alors ces conditions sont en outre nécessaires.

Preuve
Les conditions sont suffisantes d'après un résultat de Paul Eakin [18], puisqu'alors B est Noethérien, contient A et est un A-module de type fini ; si B est un A-module fidèle et si $x \in I$, $x \neq 0$, alors Bx est un A-module isomorphe à B contenu dans I, et donc, si A est Noethérien, alors B est un A-module de type fini et en conclusion un anneau Noethérien.
On tire immédiatement :

***Corollaire* 2.2.3**
Si B est un anneau intègre et si I est un idéal maximal de B, alors A est Noethérien si et seulement si B est Noethérien, A/I est un corps et B/I est une extension finie de A/I.

L'exemple suivant montre que A peut-être Noethérien sans que B ne le soit :

***Exemple* 2.2.2**
Soit $B = k[(x_i)]$ le quotient d'un anneau de polynômes $k[(X_i)]$, en une infinité d'indéterminées sur un anneau k, par l'idéal engendré par tous les produits X_iX_j pour $i \neq j$; soit $I = \langle x_0 \rangle$ l'idéal engendré par une indéterminée et $D = k$ (clairement un sous-anneau de B/I), alors l'anneau A de la construction B, I, D est isomorphe à l'anneau des polynômes $k[X_0]$, il est donc Noethérien (resp. intègre) si k est Noethérien (resp. intègre), alors que B ne l'est manifestement pas.

***Lemme* 2.2.2**
Soit $x \in B$; alors x est entier sur A si et seulement si la classe $\overline{x}$ de x dans B/I est un élément entier sur A/I.

Si A et B sont intègres, on tire alors facilement du fait qu'ils ont le même corps des fractions la proposition suivante.

***Proposition* 2.2.5**
Si B est un anneau intégralement clos, alors pour que A soit intégralement clos il faut et il suffit que A/I soit intégralement fermé dans B/I.

Notons *J(R)* le radical de Jacobson d'un anneau R, on a :

***Lemme* 2.2.3**
L'idéal I est inclus dans J(B) si et seulement s'il est inclus dans J(A).

Preuve
Soit $i \in I$, si z est un inverse de $1 + i$ dans B, alors $z \equiv 1 \pmod{I}$, donc $z \in A$. Inversement, si $1 + i$ est inversible dans A il l'est à fortiori dans B.

***Proposition* 2.2.6**
L'anneau A est local si et seulement si A/I est local et I est inclus dans J(B).

Preuve
Cela résulte facilement du Lemme 2.2.3.

2.3 *Extension amalgamé*

2.3.1 *La duplication amalgamée d'un anneau le long d'un module*

M. D'Anna et M. Fontana; An amalgamated duplication of a ring along an ideal: the basic properties, J. Algebra Appl. **6**(3) (2007), 443-459.

***Définition* 2.3.1**
soient R un anneau et E un sous-module de l'anneau total des fractions noté $Q(R)$ tel que $E.E \subset E$. on appelle **La duplication amalgamée d'un anneau R le long d'un sous-R-module** E *, noté $R \bowtie E$, le sous anneau de $R \times Q(R)$ défini par :*

$$R \bowtie E := \{(r, r+e)/r \in R \text{ et } e \in E\}.$$

Remarques

1. Lorsque $E^2 = 0$, la duplication amalgamée $R \bowtie E$ coïncide avec l'extension triviale définie précédemment $R \propto E$.
2. Une des différences principales entre l'extension triviale $R \propto E$ et la duplication amalgamée $R \bowtie E$ est que $R \propto E$ n'est jamais réduit tandis que $R \bowtie E$ peut être un anneau réduit et il est toujours réduit lorsque R est un domaine.
3. Si $E = I$ avec I idéal de R, l'anneau $R \bowtie I$ est un sous-anneau de $R \times R$, appelé la duplication amalgamée d'un anneau R le long d'un idéal I.

***Corollaire* 2.3.1 ([9], corollaire 2.9)**
Soient R un anneau et E un R-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *R et $R + E$ sont Noethériens ;*
2. *$R \times R + E$ est Noethérien ;*
3. *$R \bowtie E$ est Noethérien.*

2.3.2 *L'amalgamation d'anneaux*

M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana; Amalgamated algebras along an ideal, Comm Algebra and Aplications, Walter De Gruyter (2009), 241-252.

***Définition* 2.3.2**
Soient A et B deux anneaux , J un idéal de B et soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. On appelle **L'amalgamation de A et B suivant J et respectant f**, *le sous-anneau de $A \times B$:*

$$A \bowtie^f J := \{(a, f(a) + j) \mid a \in A, j \in J\}.$$

Cette nouvelle construction est une généralisation de la duplication amalgamée d'un anneau le long d'un idéal et a eu ses origines par M. D'anna, C. Finacchiaro et M. Fontana en 2009. En effet, il suffit de prendre $B = A$, $f{=}Id_A$, et $J = I$.

***Exemple* 2.3.1**
Soient $A \subset B$ deux anneaux et $X := \{X_1, X_2, ...X_n\}$ des indéterminées sur B.
On a $A + XB[X] := \{h \in B[X]/h(0) \in A\}$ est un sous anneau de B. Soient $J = XB[X]$ un idéal de $B[X]$, et $\sigma : A \hookrightarrow B[X]$ l'injection canonique. Alors on a :

$$A \bowtie^\sigma J \cong A + XB[X].$$

Remarque
$\Gamma(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ est un sous-anneau de $A \bowtie^f J$.

***Proposition* 2.3.1 ([7], proposition 5.1)**
Soient $P_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ et $P_B : A \bowtie^f J \longrightarrow B$ les projections naturelles de $A \bowtie^f J$ ($\subset A \times B$) respectivement dans A et dans B . $P_A(A \bowtie^f J) = A$ et $P_B(A \bowtie^f J) = f(A) + J$(car P_A et P_B sont surjectives).
Étant donné que :
$\ker(P_A) = \{0\} \times J$ *et* $\ker(P_B) = f^{-1}\{J\} \times 0$ *nous avons alors les isomorphismes suivants :*

$$\frac{A \bowtie^f J}{\{0\} \times J} \cong A \text{ et } \frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}\{J\} \times \{0\}} \cong f(A) + J$$

Maintenant, nous allons caractériser les idéaux premiers et maximaux de $A \bowtie^f J$.
Notation
on note par :
Spec($A \bowtie^f J$) :={L'ensemble des idéaux premiers de $A \bowtie^f J$}.

***Proposition* 2.3.2 ([8], proposition 2.6)**
Soient X :=Spec(A) , Y :=Spec(B), W :=Spec($A \bowtie^f J$) et $J_0 := \{0\} \times J \subset A \bowtie^f J$.
$\forall P \in X$ et $Q \in Y$ considérons :

$$P'^f := P \bowtie^f J := \{(p, f(p) + j)/p \in P \text{ et } j \in J\}.$$

$$\overline{Q}^f := \{(a, f(a) + j)/a \in A, j \in J \text{ et } f(a) + j \in Q\}.$$

Les assertions suivantes sont vérifiées :

1. *Les idéaux premiers de $A \bowtie^f J$ sont sous la forme :*
   $P'^f \cup \overline{Q}^f$ pour $P \in X$ et $Q \in Y \backslash V(J)$.

2. *Soit $P \in Spec(A)$ alors P'^f est un idéal maximal de $A \bowtie^f J$ si et seulement si P est un idéal maximal de A.*
3. *Soit Q un idéal maximal de B ne contenant pas J. Alors $\overline{Q}^f$ est un idéal maximal de $A \bowtie^f J$.*
   En particulier, on a :
   $Max(A \bowtie^f J) = \{P'^f / P \in Max(A)\} \cup \{\overline{Q}^f / Q \in Max(B) \setminus V(J)\}$

CHAPITRE 3

SUR LES FF-ANNEAUX

`S. El Baghdadi, A. Jhilal, and N. Mahdou; On FF-rings, J. Pure and Appl. Algebra 216 (2012) 71-76.`

3.1 *Extensions et produits directs des FF-anneaux*

***Définition* 3.1.1**
Un anneau R est appelé un FF-anneau si chaque idéal plat est de type fini. En particulier, les anneaux Noethérien sont des FF-anneau. Aussi, chaque anneau local (R, M) avec $M^2 = 0$ est un FF-anneau par [44, Lemme 2.1].

Rappel

1. Dans un anneau local (R, M) si un idéal I est plat alors $I = MI$ ou bien I est principal.
2. Un idéal I est appelé idéal d'annulation si chaque fois que $IA = IB$ où A et B sont des idéaux de R, alors $A = B$. Les idéaux principaux réguliers et les idéaux inversibles sont des idéaux d'annulation.

***Proposition* 3.1.1**
Dans un anneau commutatif Un idéal est fidèlement plat si et seulement s'il s'agit d'un idéal d'annulation.

Preuve
Soit I un idéal fidèlement plat d'un anneau R, et soit N un idéal maximal de R. Alors, IR_N est R_N-fidèlement plat. Par le résultat cité ci-dessus, IR_N est un idéal principal. Par platitude, l'idéal IR_N est régulier. Il s'ensuit que I est localement principal régulier. Par conséquent, I est un idéal d'annulation [5, Théorème]. Réciproquement, soit I un idéal d'annulation d'un anneau R. C'est clair que $I \neq IM$ pour chaque idéal maximal M. Par [5, Théorème], I est un idéal localement principal régulier. Donc I est localement plat, et donc un idéal plat. Donc, I est un idéal fidèlement plat de R.

Remarque
Nous pouvons définir la FF-propriété faible sur un anneau R où on a chaque idéal fidèlement plat de R est de type fini. Cela équivaut à la finitude des idéaux d'annulation (Proposition 3.1.1). Dans un anneau intègre, cela équivaut à l'inversibilité des idéaux d'annulation. Cependant, cette forme faible de la FF-propriété n'est pas équivalente à la FF-propriété, car tout anneau local a la FF-propriété faible.
En général, on connaît peu d'exemples non triviaux (par exemple non-Noethérien) des FF-anneaux, dans la classe des domaines intègres, nous avons les exemples suivants. Notez que dans ces exemples, la platitude est équivalente à l'annulation.

***Exemple* 3.1.1**
Dans un anneau intègre, un idéal de type fini est plat si et seulement s'il est projectif. D'autre part, Un idéal est projectif si et seulement s'il est inversible, et donc de type fini. Ainsi, un FF-domaine est un domaine dans lequel chaque idéal plat est inversible. Dans [48, Corollaire 4] , l'auteur a montré que les idéaux plats dans un domaine de Mori sont inversibles. Donc, les domaines de Mori sont des FF-domaines. En particulier, le domaine de Krull est FF-domaine.

Remarque
Rappelons qu'un $A(0)$-anneau est un anneau sur lequel les modules plats de types finis sont projectifs. Il est bien connu que les anneaux semi locaux et les anneaux intègres sont des $A(0)$-anneaux. Par [29, p.4], un anneau R est un $A(0)$-anneau si et seulement si pour chaque I idéal de R, R/I est R-plat implique I est de type fini. En conséquence, un FF-anneau est un $A(0)$-anneau. Pour voir cela, soit I un idéal d'un FF-anneau R tel que R/I est R-plat. C'est clair que I est R-plat, et donc I est de type fini par la FF-propriété. Ainsi, chaque idéal plat dans un FF-anneau est projectif.

***Proposition* 3.1.2**
Soit $R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneau où S est un R-module Fidèlement plat. Si S est un FF-anneau, alors R l'est aussi.

Preuve
Soit I un idéal plat de R. Alors, $I \otimes_R S \cong IS$ est un idéal plat de S, donc $I \otimes_R S$ est un S-module de type fini puisque S est un FF-anneau. Alors, I est un idéal de type fini de R puisque S est un R-module fidèlement plat. Ainsi, R est un FF-anneau.

Nous combinons cette proposition avec [44, Théorème 4.1] pour obtenir le Corollaire suivant.

***Corollaire* 3.1.1**
Soient D un domaine et X une indéterminé sur D. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *D est un FF-anneau.*
2. *$D[X]$ est un FF-anneau.*
3. *$D[[X]]$ est un FF-anneau.*

***Corollaire* 3.1.2**
Soit D un domain et soit R une D-algèbre fidèlement plat de type fini. Alors D est un FF-anneau si et seulement si R est un FF-anneau.

Preuve
Puisque R est de type fini et plat sur le domaine D, alors il est projective. Le résultat découle de [44, Corollaire 5.2] et Proposition 3.1.2.

Remarques

1. Une algèbre fidèlement plat sur un FF-anneau peut ne pas être un FF-anneau. Considérons un domaine de valuation de la forme $V = K + M$ (K est un corps et M l'idéal maximal) qui n'est pas un DV-anneau de dimension de Krull 1. Alors V est un K-espace vectoriel (libre sur K) mais n'est pas un FF-anneau (cf. Corollaire 3.2.2).
2. Les extensions simples d'un anneau D sont une classe importante des D-algèbres. Supposons que D est un FF-domaine, la question est quand ces algèbres sont des FF-anneaux ? Soit $R = D[\alpha]$, une D-algèbre simple. Si α est transcendantal sur D, alors R est un FF-anneau comme nous avons vu dans la Corollaire 3.1.1. Cependant, si α est algébrique sur D, R peut ne pas être un FF-anneau, voir l'exemple 3.2.2.

Une classe importante des FF-anneaux sont les anneaux dans lesquels chaque idéal plat est principal. Par le résultat sur les idéaux plats, les FF-anneaux locaux font partie de cette classe. En utilisant [44, Lemme 2.1], dans certain cas il est facile de vérifier quand un anneau local a la FF-propriété. La question qui se pose est :

Est ce qu'un anneau localement FF-anneau est un FF-anneau ? La réponse est négative par l'exemple suivant :

***Exemple* 3.1.2**
Soit R un anneau régulier au sens de Van Neumann qui n'est pas noethérien [14, Exemple 2.7]. Alors :

1. *R n'est pas un FF-anneau.*
2. *R_M est un FF-anneau pour chaque idéal maximal M de R (car R_M est un corps).*

Néanmoins, si l'anneau a la propriété de caractère fini, nous obtenons une réponse positive (i.e, localement FF-anneaux sont des FF-anneaux). Rappelons qu'un anneau R est de caractère fini si tous les éléments non nuls non inversible de R ne sont contenus que dans un nombre fini d'idéaux maximaux. Les anneaux semi-locaux sont de caractère fini.

***Théorème* 3.1.1**
Un anneau localement FF-anneau de caractère fini est un FF-anneau. En particulier, si R est un domaine, toute intersection finie de FF-domaines locaux de la forme $\cap_P R_P$, où P est un idéal premier, est un FF-domaine.

Preuve
Soit R un anneau. Supposons que R soit localement FF-anneau de caractère fini. Soit I un idéal plat non nul de R. Soient $0 \neq x \in I$ et X l'ensemble fini d'idéaux maximaux contenant x. Soit $N \in X$. Puisque IR_N est R_N-plat, alors $IR_N = x_N R_N$ pour certain $x_N \in I$. Soit J sous idéal de I de type fini généré par x et les x_N. On peut facilement vérifier que $IR_M = JR_M$ pour tout idéal maximal M. Par conséquent, $I = J$ est un idéal de type fini. Pour le cas particulier, on applique le premier résultat. Soit $\{R_P\}_P$ un ensemble fini des FF-domaines locaux, et Soit $T = \cap_P R_P$. C'est bien connu que $\{PR_P \cap T\}_P$ est l'ensemble des idéaux maximaux de T et $T_{PR_P \cap T} = R_P$ pour tout P.

Remarque
Dans certains cas particuliers, la propriété de caractère fini dans les hypothèses du Théorème 3.1.1 est nécessaire. Rappelons qu'un domaine est presque de Dedekind s'il est localement DV-anneau de dimension de Krull 1. En particulier, un domaine presque de Dedekind est de Prüfer et localement FF-domaine. Puisque dans un domaine de Prüfer chaque idéal est plat, un domaine presque de Dedekind est un FF-domaine si et seulement s'il est de Dedekind. D'autre part, c'est bien connu qu'un domaine presque de Dedekind est de Dedekind si et seulement s'il est de caractère fini.

On fini cette section par un résultat établissant le transfert de la FF-propriété au produit direct fini des anneaux.

***Théorème* 3.1.2**
Le produit direct fini des anneaux, $R := \prod_{i=1}^{n} R_i$ est un FF-anneau si et seulement si chaque R_i est un FF-anneau.

Preuve
Nous utilisons l'induction sur n, il suffit de prouver l'affirmation pour $n = 2$. Soient R_1 et R_2 deux anneaux. Notons que I est un idéal de $R_1 \times R_2$ si et seulement si $I = I_1 \times I_2$ pour certains idéaux I_1, I_2 de R_1 et R_2, respectivement. D'autre part, I est plat (resp, de type fini) si et seulement si I_i est R_i-plat (resp, de type fini), pour i = 1, 2 (cf. [33, Lemme 2.18] et [37, Lemme 2.5.(1)]).

3.2 *La FF-propriété dans le produit fibré et l'extension trivial*

Nous commençons par l'étude de la FF-propriété dans les constructions $D + M$. Nous adoptons les hypothèses et les notations suivantes : T est un anneau de la forme $T = K + M$, où K est un corps et M est un idéal maximal non nul de T, D est un sous anneau de K tel que $qf(D) = K$ et $R = D + M$. Ensuite, $T = S^{-1}R$ avec $S = D - \{0\}$, et R est un D-module fidèlement plat. Pour le dernier cas, notons que $M = MK = M \otimes_D K$ est un K-module et isomorphe à une somme directe de copies de K, donc un D-module plat. Il s'ensuit que $R = D + M$ est un D-module plat. C'est clair qu'aucun idéal propre de D ne peut exploser en R. Ainsi, R est un D-module fidèlement plat.

***Proposition* 3.2.1**
Soient T et R définis comme précédent. Si R est un FF-anneau, alors D l'est aussi.

Preuve
Cela provient de la Proposition 3.1.2.

Maintenant on donne un exemple qui montre que l'inverse de la Proposition 3.2.1. n'est pas vrai en général.

***Exemple* 3.2.1**
Soit $T = \mathbb{Q}[[X]] = \mathbb{Q} + XT$ l'anneau des séries formelle sur $\mathbb{Q}$ et Soit $R = \mathbb{Z}_{(2)} + XT$. Alors :

1. *$\mathbb{Z}_{(2)}$ est un FF-anneau puisqu'il est Noethérien.*
2. *R n'est pas un FF-anneau puisque R est un domaine de Prüfer qui n'est pas Noethérien [24, Appendix 2].*

Mais si T est un FF-anneau et pour tout idéal plat J de R le D-module J/MJ est de type fini, alors R est un FF-anneau comme indiqué dans le résultat suivant.

***Théorème* 3.2.1**
Soient T et R définis comme précédent tel que T est un FF-anneau. Alors, R est un FF-anneau si et seulement si pour tout idéal plat J de R, J/JM est un D-module de type fini.

Pour prouver ce théorème on ait besoin du lemme suivant.

***Lemme* 3.2.1 ([26, Théorème 5.1.1])**
Soit $\Phi : R \longrightarrow S$ un homomorphisme injectif d'anneaux satisfaisant le fait qu'il existe un idéal M de R tel que $MS = M$. Alors, un R-module E est de type fini si et seulement si $E \otimes_R S$ est de type fini comme S-module et E/ME est R/M-module de type fini.

Preuve du Théorème:
Soit J idéal plat de R, alors $J \otimes_R T \cong JT$ est un idéal plat de T. Donc, $J \otimes_R T$ est un T-module de type fini car T est un FF-anneau. Par le Lemme 3.2.1, J est un idéal de type fini de R.

Dans le cas des anneaux intègres nous obtenons des résultats intéressant sur la FF-propriété pour les constructions $D + M$.

***Lemme* 3.2.2**
Soient $T = K + M$ un domaine, où K est un corps et M un idéal maximal de T. Soit D un sous anneau de K et soit $R = D + M$. Si R est un FF-anneau alors D est un corps.

Preuve
Soit $0 \neq d \in D$ et $0 \neq m \in M$. Notons que puisque d est inversible dans T, on a $\frac{m}{d^n} \in R$ pour tout entier n. Considérons la chaine ascendante $\{\frac{m}{d^n}R\}_{n \geq 0}$. Donc $I = \cup_n \frac{m}{d^n}R$ est un idéal plat de R, comme limite directe d'idéaux principaux dans un domaine. Par la FF-propriété, l'idéal I est de type fini, et par conséquent il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\frac{m}{d^n}R = \frac{m}{d^{n+1}}R$. Donc $dR = R$, alors $dD = D$. Donc d est inversible dans D. Ainsi D est un corps.

***Théorème* 3.2.2**
Soient $T = K + M$ un domaine, où K est un corps et M est un idéal maximal de T. Soient D un sous anneau de K et $R = D + M$. supposons que T est un FF-domaine. Alors R est un FF-domaine si et seulement si D est un corps.

Preuve
Pour le sens direct on utilise le Lemme 3.2.2. Inversement, supposons que D est un corps,

donc M est un idéal maximal de R. Soit I un idéal plat de R. Alors $I \otimes_R T$ est T-plat. Soit $0 \neq m \in M$, nous avons $I \otimes_R T \cong I \otimes_R mT \cong mIT \cong IT$. D'où nous obtenons l'isomorphisme de T-modules $I \otimes_R T \cong IT$. Donc IT est T-plat. Puisque T est un FF-domaine, $IT = JT$ pour certain sous idéal J de type fini de I. D'autre part, IR_M est plat dans R_M. Par [44, Lemme 2.1], IR_M doit être principal. Sinon, alors $IR_M = MIR_M$. Donc $IT_M = MIT_M$, ce qui est impossible par le lemme de Nakayama. Soit $x \in I$ tel que $IR_M = xR_M$. Posons $F = J + xR$. On peut facilement vérifier que $IR_M = FR_M$ et $IT = FT$. Maintenant, soit P un idéal maximal de R tel que $P \neq M$. Puisque M est un idéal maximal de R, P Et M sont incomparables. Donc, il existe Q un idéal maximal de T tel que $Q \cap R = P$ et $R_P = T_Q$ [22, p.335]. Nous avons $IR_P = IT_Q = FT_Q = FR_P$. Ainsi $I = F$ localement. Par conséquent, $I = F$. Par conséquent, R est un FF-domaine.

Si (T, M) est local, le théorème ci-dessus peut être amélioré.

***Corollaire* 3.2.1**
Supposons que (T, M) est un domaine local. Alors R est un FF-domaine si et seulement si D est un corps et T est un FF-domaine.

Preuve
Nous devons seulement montrer que si R est un FF-domaine, alors T l'est aussi. Soit I un idéal propre plat de T. Notons que I est aussi un idéal de R. Supposons que I n'est pas principal dans T. Alors $I = MI$. Nous avons ensuite montrer que I est R-plat. Pour cela, nous utilisons un critère sur la platitude due à Jensen [32]. Soit A, B deux idéaux fractionnaires de R. Alors $IA \cap IB = (IM)A \cap (IM)B = I(MA \cap MB) \subseteq I(A \cap B)$, la deuxième égalité est assurée car I est T-plat. L'inclusion $I(A \cap B) \subseteq IA \cap IB$ est claire. Par conséquent $I(A \cap B) = IA \cap IB$. Donc I est R-plat, et donc de type fini. Mais $I = IM$, ce qui est impossible par le lemme de Nakayama. Ainsi I est un idéal principal de T.

Comme conséquence, pour la structure classique $D + M$, i.e., $T = V = K + M$ est un domaine de valuation et $R = D + M$, on a :

***Corollaire* 3.2.2**
R est un FF-domaine si et seulement si D est un corps et V est un DV-anneau de dimension de Krull 1.

Preuve
Remarquons que dans un domaine de valuation tout idéal est plat, alors un domaine de valuation est un FF-domaine si et seulement s'il est un DV-anneau de dimension de Krull 1.

***Exemple* 3.2.2**
Une extension simple sur un FF-anneau n'est pas nécessairement un FF-anneau. Soit $V = k(t) + M$ un DV-anneau de dimension de Krull 1 (ex, $V = k(t)[X]_{(X)}$), où k est un corps, t une indéterminée sur k, et M l'idéal maximal de V. Soit $R = k + M$. Par le corollaire 3.2.2, R est un FF-anneau, mais l'extension simple $R[t] = k[t] + M$ n'est pas un FF-anneau car $k[t]$ n'est pas un corps. Notons que l'extension $R \subseteq R[t]$ est algébrique puisque $Mt \subseteq R$.
Un autre produit fibré intéressant est la construction $D + XS^{-1}D[X]$ voir [16].

***Proposition* 3.2.2**
Soient $R = D + XS^{-1}D[X]$, où S est une partie multiplicative de $D \setminus \{0\}$ et X une indéterminée sur le domaine D. Alors R est un FF-anneau si et seulement si D est un FF-anneau et $S^{-1}D = D$.

Preuve
Supposons que R est un FF-anneau. Soit $s \in S$ et considérons la chaine ascendante d'idéaux principaux (plat) $\{\frac{X}{s^n}R\}_{n\geq 0}$. Alors $\cup_n \frac{X}{s^n}R$ est un idéal plat de R, donc il est nécessairement de type fini. Ainsi, il existe un entier n tel que $\frac{X}{s^n}R = \frac{X}{s^{n+1}}R$, soit alors $sR = R$. Donc s est inversible dans D. Par conséquent $S^{-1}D = D$. La proposition est maintenant une conséquence du Corollaire 3.1.1.

Comme application du Théorème 3.2.1, on a le résultat suivant qui examine le transfère de la FF-propriété à l'extension triviale de la forme $R := D \propto E$, où D est un domaine et E est un $K(:= qf(D))$-espace vectoriel. L'anneau $R := D \propto E$ peut être défini comme un produit fibré d'anneaux, comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R := D \propto E & \longrightarrow & D =: R/(0 \propto E) \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ T := K \propto E & \xrightarrow{\pi} & K := T/(0 \propto E) \end{array}$$

***Théorème* 3.2.3**
Soient D un domaine, $K := qf(D)$, et E un K-espace vectoriel. Soit $R := D \propto E$ l'extension triviale de D par E. Alors R est un FF-anneau si et seulement si D l'est aussi.

Pour prouver ce théorème, on ait besoin du lemme suivant.

***Lemme* 3.2.3**
Soit $T := K \propto E$ l'extension triviale du corps K par un K-espace vectoriel E. Alors il n'existe aucun idéal propre plat de T.

Preuve
Soit $J := 0 \propto E'$ un idéal propre de R, où $E'(\subseteq E)$ est un K-espace vectoriel. On

montre que J n'est pas plat. Sinon, soit $\{f_i\}_{i\in I}$ une base du K-espace vectoriel E' et on considère l'application $R^{(I)} \xrightarrow{u} J$ définie par $u((a_i, e_i)_{i\in I}) = (0, \sum_{i\in I} a_i f_i)$. C'est clair que, $Ker(u) = (0 \propto E)^{(I)}$.
Par conséquent, par [1, Théorème 3.55], on obtient

$$(0 \propto E)^{(I)} = (0 \propto E)^{(I)} \cap (0 \propto E)R^{(I)} = (0 \propto E)(0 \propto E)^{(I)} = 0,$$

contradiction. Ainsi, J n'est pas plat et ce qui achève la preuve.

Preuve du Théorème:
Si R est un FF-anneau, alors D est un FF-anneau par la Proposition 3.2.1. Inversement, supposons que D est un FF-anneau et soit J un idéal non nul plat de R. Posons $T := K \propto E$ qui est un R-module plat puisque $T = S^{-1}R$, où $S = D - \{0\}$. Donc, $JT(= J \otimes_R T)$ est un idéal non nul plat de T. Par le Lemme 3.2.3, $JT = T = K \propto E$. Donc, il existe $(a, e) \in J$ tel que $a \neq 0$ ce qui implique que $J = I \propto E$ pour certain idéal non nul I de D. On montre que I est un idéal plat de D. En effet, par [15, Proposition 4.1.1], pour tout D-module N, $Tor_1^D(I, N \otimes_D R) = Tor_1^R(I \otimes_D R, N \otimes_D R) = 0$. D'autre part, N est un facteur direct de $N \otimes_D R$ puisque D est un facteur direct de R. Donc, $Tor_1^D(I, N) = 0$ pour tout D-module N. Cela veut dire que I est un idéal plat de D. Donc, I est un idéal de type fini de D car D est un FF-anneau.
Finalement $J/(0 \propto E)J \cong I$ est un D-module de type fini, et par le Lemme 3.2.3, $T := K \propto E$ est un FF-anneau.

Maintenant, On va donner des nouveaux exemples de FF-anneaux non intègre et qui ne sont pas Noethériens.

***Exemple* 3.2.3**
Soient $\mathbb{Z}$ l'anneau des entier relatifs, $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels et $R := \mathbb{Z} \propto \mathbb{Q}[X]$ l'extension triviale de $\mathbb{Z}$ par l'anneau des polynômes $Q[X]$. Alors :

1. *R est un FF-anneau.*
2. *R n'est pas cohérent par [34, Théorème 2.8 (1)]. En particulier R n'est pas Noethérien.*

Maintenant, nous étudions le transfert de la FF-propriété vers l'anneau extension triviale de la forme $R := A \propto E$, où (A, M) est un anneau local et $ME = 0$.

***Théorème* 3.2.4**
Soit (A, M) un FF-anneau local et soit $R := A \propto E$ l'extension triviale de A par un A-module E où $ME = 0$. Alors R est un FF-anneau.

Preuve
Soit J un idéal plat de R. Par [44, Lemme 2.1], on peut supposer que $J(M \propto E) = J$.

Alors $J = J(M \propto E) \subseteq (M \propto E)(M \propto E) = M^2 \propto 0$. Par conséquent $J = I \propto 0$ pour certain idéal I de A. On a $J \otimes_R A \cong J \otimes_R R/(0 \propto E) \cong J/J(0 \propto E) \cong I \propto O/(I \propto 0)(0 \propto E) = I \propto 0$.
Donc, I est un idéal plat de A puisque J est un idéal plat de R. Ainsi, I est un idéal de type fini de A car A est un FF-anneau. Donc, J est un idéal de type fini de R, ce qui est impossible par le lemme de Nakayama.

Comme corollaire immédiat de ce théorème, nous avons le résultat suivant.

***Corollaire* 3.2.3**
Soient (A, M) un anneau local Noethérien et $R := A \propto E$ l'extension triviale de A par un A-module E, où $ME = 0$. Alors R est un FF-anneau.

Le théorème ci-dessus nous permet de construire d'autres classes des FF-anneaux qui ne sont pas des anneaux Noethériens.

***Exemple* 3.2.4**
Soient (A, M) un anneau local Noethérien et $R = A \propto (A/M)^\infty$ l'extension triviale de A par le A-module $(A/M)^\infty$. Alors :

1. *R est un FF-anneau (Corollaire 3.2.3)*
2. *R n'est pas cohérent ([38, Théorème 2.1]). En particulier, R n'est pas Noethérien.*

CHAPITRE 4

LE SUR-ANNEAU BIEN-CENTRÉ D'UN ANNEAU COMMUTATIF DANS LE PRODUIT FIBRÉ ET L'EXTENSION TRIVIALE

`N. Mahdou and A. Mimouni; Well-centered overrings of a commutative ring in pullbacks and trivial extensions, Rocky Mountain J. Math, Vol 42 (2012).`

4.1 *Introduction*

Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau commutatif unitaire et $Tot(R)$ son anneau total des quotients (dans le cas où R est un domaine, on note par L son corps des quotients). Un élément régulier est un élément qui n'est pas un diviseur de zero et un idéal régulier est un idéal qui contient un élément régulier. Par un idéal intègre I, on désigne un idéal I tel que $I \subseteq R$ et par un idéal fractionnaire, on désigne un sous R-module E non nul de $Tot(R)$ tel que $dE \subseteq R$ pour un élément régulier d de R. Finalement par un sur-anneau, on désigne un anneau T tel que $R \subseteq T \subseteq Tot(R)$.

***Définition* 4.1.1**
Soient R un domaine et T un sur-anneau de R. On dit que T est bien-centré sur R si pour tout $b \in T$, il existe un élément inversible $u \in T$ tel que $ub = a \in R$. Ainsi T est

bien-centré sur R si et seulement si tout élément de T est associé en T à un élément de R si et seulement si tout idéal principal de T est généré par un élément de R.

4.2 La propriété bien-centré dans le produit fibré

Dans toute la suite, nous adoptons les hypothèses et les notations suivantes : T est un anneau de la forme $T = K + M$, où K est un corps et M est un idéal maximal non nul de T, D est un sous anneau de K tel que $R = D + M$.

***Théorème* 4.2.1**
Soient T et R définis comme précédent. Alors :

1. *Si T est local, alors T est bien-centré sur R.*
2. *Si tout sur-anneau intermédiaire S entre R et T est bien-centré sur R, alors K est algébrique sur D. De plus, si T est local et $D = k$ est un corps, alors tout anneau intermédiaire entre R et T est bien-centré sur R si et seulement si K est algébrique sur k.*

Preuve

1. Soit $b \in T$. Si $b \in M$, c'est fini. Si $b \notin M$, alors b est inversible dans T et dans ce cas il suffit de prendre $a = 1$, donc $bT = aT = T$.

2. Supposons que tout sur-anneau S de R tel que $R \subseteq S \subseteq T$ est bien-centré sur R. Soit $\lambda \in K \setminus D$ et soit $x \in T$ tel que $\phi(x) = \lambda$. Posons $S = \phi^{-1}(k[\lambda])$, où $k = qf(D)$. Alors S est bien-centré sur R et donc il existe $y \in R$ tel que $xS = yS$. Puisque $\lambda \neq 0$, $x \notin M$ et donc $y \notin M$. Mais $xy^{-1} \in U(S)$ implique que $xy^{-1}z = 1$ pour certain $z \in S$, et donc $xz = y$. Par conséquent $\lambda\phi(z) = \phi(y) \in D \setminus \{0\}$. Donc $(\lambda\phi(z))^{-1} \in k$ et donc $\lambda^{-1} = (\lambda\phi(z))^{-1}\phi(z) \in k[\lambda]$. Ainsi λ est algébrique sur k.
   Finalement supposons que T est local, $D = k$ est un corps et K est algébrique sur k. Alors tout anneau intermédiaire S entre R et T est de la forme $S = \phi^{-1}(F)$ pour certain corps intermédiaire F entre k et K. Mais puisque T est local, alors S l'est aussi et par la partie **(1)**, S est bien-centré sur R.

L'exemple suivant montre que si T n'est pas local ou bien si T n'est pas de la forme $T = K + M$, alors T n'est pas nécessairement bien-centré sur R.

***Exemple* 4.2.1**
Soient $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels et X une indéterminée sur $\mathbb{Q}$. Posons $T = \mathbb{Q}[X]$, $M = (X^2+2)T$ et $K = T/M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, et soit R le produit fibré découlant du diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T = \mathbb{Q}[X] & \xrightarrow{\phi} & K = T/M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \end{array}$$

On montre que T n'est pas bien-centré sur R. Autrement, il existe $f \in R$ tel que $fT = XT$. Par conséquent Xf^{-1} est inversible dans T et donc $Xf^{-1} = a$ pour certain élément non nul $a \in \mathbb{Q}$. Alors $f = aX$ et donc $a\sqrt{2} = \phi(aX) = \phi(f) \in \mathbb{Q}$, contradiction.

Dans [30, Exemple 3.24], Heinzer et Roitman montre qu'un sur-anneau bien-centré d'un domaine de Mori n'est pas, en général, un domaine de Mori. Notre prochain résultat montre que dans le contexte des $PVDs$ (les domaines de pseudo-valuation) la propriété de Mori est conservée par la propriété de bien-centré.

***Corollaire* 4.2.1**
Soient R un PVD, V son sur-anneau de valuation associé et M son idéal maximal.

1. *Chaque sur-anneau de R est bien-centré sur R si et seulement si V/M est algébrique sur R/M.*

2. *Si R est de Mori, alors chaque sur-anneau bien-centré de R est de Mori.*

Preuve
La Proposition 2.6 de [4] caractérise les PVDs en terme des produits fibrés. La proposition précitée indique que R est un PVD si et seulement si $R = \phi^{-1}(k)$ pour un sous corps k de $K = V/M$, où V est le sur-anneau de valuation associé à R, M son idéal maximal et ϕ l'homomorphisme canonique de V vers K.

1. Suit immédiatement du Théorème 4.2.1 et le fait que chaque sur-anneau S de R contient V est de la forme $S = V_P$ pour certain idéal premier P de R (car chaque sur-anneau de R est comparable à V, [11, Théorème 2.1]).

2. Supposons que R est un domaine de Mori et soit T un sur-anneau bien-centré de R. Puisque V est un DV-anneau et T est comparable à V, on peut supposer que $T \subsetneq V$. Alors $T = \phi^{-1}(B)$ pour certain domaine B satisfaisant $k \subseteq B \subseteq K$. En vertu de [23, Théorème 4.18], il suffit de montrer que B est un corps. Soit $\lambda \in B \backslash \{0\}$ et soit $x \in T$ tels que $\phi(x) = \lambda$. Puisque T est bien-centré sur R, il existe $y \in R$ tel que $xT = yT$. Puisque $\lambda \neq 0$, $x \notin M$ et donc $y \notin M$. Mais $xy^{-1} \in U(T)$ implique que $xy^{-1}z = 1$ pour certain $z \in T$, et donc $xz = y$. Par conséquent $\lambda\phi(z) = \phi(y) \in k \setminus \{0\}$. Donc $(\lambda\phi(z))^{-1} \in k$ et ainsi $\lambda^{-1} = (\lambda\phi(z))^{-1}\phi(z) \in B$. Par conséquent B est un corps.

Remarques

1. Soient R un PVD, V son sur-anneau de valuation associé, M son idéal maximal, $K = V/M$ et $k = R/M$ et supposons que K est algébrique sur k. Par le Corollaire 4.2.1, chaque sur-anneau de R est bien-centré sur R. La Noethérianité de R dépend maintenant de V, i.e, R est Noethérien si et seulement si V est Noethérien (d'une manière équivalente V est un DVR) ([23, Théorème 4.12]). Cela nous conduit à construire des familles des anneaux intègres R telles que tout sur-anneau de R est bien-centré sur R dans les deux cas Noethérien et non-Noethérien. Par exemple, soient $\mathbb{Q}$ le corps des nombres rationnels et X et Y des indéterminées sur $\mathbb{Q}$. Posons $V_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[[X]] = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) + M_1$, $V_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})[[X]] + Y\mathbb{Q}(\sqrt{2})((X))[[Y]] = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) + M_2$, où $M_1 = XV_1$ et $M_2 = XV_2$. Maintenant posons $R_1 = \mathbb{Q} + M_1$ et $R_2 = \mathbb{Q} + M_2$. C'est clair que R_1 et R_2 sont des PVD avec les sur-anneaux de valuation associés V_1 et V_2 respectivement. Aussi par [11, Théorème 2.1(m)] (ou [23, Théorème 4.12]), R_1 est Noethérien et R_2 n'est pas Noethérien, et chaque sur-anneau de R_i, $i = 1, 2$ est bien-centré sur R_i par le Corollaire 4.2.1.
2. Pour un PVD R, si $dimR = 1$, aucun propre sur-anneau de R (i.e. $R \subsetneqq T \subsetneqq qf(R)$) peut être un localisé (à un idéal premier) de R car les seuls idéaux premiers de R sont (0) et son idéal maximal M. Cependant, si $dimR \geq 2$, alors les sur-anneaux de R sont les localisés de R aux idéaux premiers ($R_P = V_P$) ou de la forme $\phi^{-1}(F)$, où F est un anneau tel que $k \subseteq F \subseteq K$ (puisque chaque sur-anneau de R est comparable à V par inclusion) et si K est algébrique sur k, tout anneau intermédiaire F entre k et K est un corps.

4.3 *La propriété bien-centré dans l'anneau extension triviale*

Nous étendons la définition de Heinzer-Roitman à un anneau commutatif arbitraire de la manière suivante :

***Définition* 4.3.1**
Soient R un anneau commutatif unitaire et T un sur-anneau de R. On dit que T est bien-centré sur R si pour chaque $b \in T$, il existe un élément inversible $u \in T$ tel que $ub = a \in R$.

Dans cette section, nous étudions le transfert de la propriété de bien-centrée entre un anneau et ses extensions triviales. Pour cela, nous commençons par donner une description complète de la forme des sur-anneaux de l'extension triviale.

***Théorème* 4.3.1**
Soient A un anneau, $T(A)$ son anneau total des quotients, E un $T(A)$-module, $R := A \propto$

E et S un anneau. alors S est un sur-anneau de R si et seulement si il existe un sur-anneau B de A tel que $S = B \propto E$.

Preuve
Soit B un sur-anneau de A et on posons $S := B \propto E$. Notre but est de montrer que S est un sur-anneau de R, i.e, $S \subseteq Tot(R)$.
Soit $(b, e) \in S$ où $b \in B$ et $e \in E$. Alors, $b = a/s$ où $a \in A$ et s est un élément régulier de A puisque $B \subseteq Tot(A)$. Donc, $(s, 0)(b, e) = (sb, se) = (a, se) \in R$ et il reste à montrer que $(s, 0)$ est un élément régulier de R.
Soit $(c, d) \in R$ tel que $(s, 0)(c, d) = (0, 0)$, ce qui signifie que $sc = 0$ dans A et $sd = 0$ dans E. Par conséquent, $c = 0$ puisque s est un élément régulier de A. D'autre part, $sd = 0$ implique que $d = 0$ car s est un élément inversible de $Tot(A)$ et E est un $Tot(A)$-module.
Inversement, supposons que S est un sur-anneau de R, i.e, $R \subseteq S \subseteq T(R)$. On veut montrer que $T(R) = T(A) \propto E$ Et cela suffit pour montrer que S a la forme $S = B \propto E$, où B est un sur-anneau de A.
Soit U l'ensemble des éléments réguliers de A. Alors c'est une partie multiplicative de A et R; et on a $U^{-1}R = (U^{-1}A) \propto (U^{-1}E) = T(A) \propto E$ car E est un $T(A)$-module et $U^{-1}T(A) = T(A)$. Mais, on peut facilement montrer que tout élément de U est un élément régulier de R. Donc, $(R \subseteq)U^{-1}R = T(A) \propto E \subseteq T(R)$ et donc il reste à montrer que $T(A) \propto E$ est un anneau total, i.e, tout élément de $T(A) \propto E$ est inversible ou diviseur de zero.
Soit (a, e) un élément régulier de $T(A) \propto E$. Alors $a \neq 0$ (car si $a = 0$, alors $(0, e)(0, f) = 0_R$ pour chaque $f \in E$ ce qui signifie que $(0, e)$ n'est pas un élément régulier de $T(A) \propto E$). Maintenant, il est facile de montrer que a est un élément régulier de $T(A)$ puisque (a, e) est un élément régulier de $T(A) \propto E$ et donc a est inversible dans $T(A)$ (car $T(A)$ est un anneau total des quotients). Ainsi, (a, e) est inversible dans $T(A) \propto E$ ce qui achève la preuve du théorème.

Maintenant, on donne le premier résultat principal dans cette section.

***Théorème* 4.3.2**
Soit $A \subseteq B$ une extension d'anneaux, E un B-module, $T := B \propto E$ l'extension triviale de B par E, et soit $R = A \propto E$ l'extension triviale de A par E. Alors T est bien-centré sur R si et seulement si B est bien-centré sur A.

Preuve
Supposons que T est bien-centré sur R et soit $c \in B$. Par conséquent, il existe un élément inversible (b, e) dans T, où $b \in B$ et $e \in E$, tel que $(c, 0)(b, e)(= (bc, ce)) \in R$. Ainsi, b est un élément inversible dans B (car (b, e) est inversible dans T) et $bc \in A$; cela signifie que B est bien-centré sur A. Inversement, supposons que B est bien-centré sur A et soit $(b, e) \in T$, où $b \in B$ et $e \in E$. Si $b = 0$, alors $(0, e) \in R$ et le résultat est clair. Supposons

que $b \neq 0$. Puisque B est bien-centré sur A et $b \in B$, il existe $u \in U(B)$ tel que $bu \in A$. Par conséquent $(b,e)(u,0) = (ub, ue) \in R$ et $(u,0) \in U(T)$. Cela signifie que T est bien-centré sur R.

L'exemple suivant montre que la condition "E est un $T(A)$-module" dans le Théorème 4.3.1 et la condition "$T := B \propto E$ et $R := A \propto E$" dans le Théorème 4.3.2 sont nécessaires.

***Exemple* 4.3.1**
Soient A un anneau, B et C deux sur-anneaux de A tels que
$A \subseteq B \subsetneqq C \subseteq T(A)$. *Posons $R := A \propto B$ et $S := B \propto C$. Alors :*

1. *S est un sur-anneau de R.*
2. *S n'est jamais bien-centré sur R (même si A est un domaine de valuation).*

Preuve

1. C'est clair que S est un sur-anneau de R puisque $T(R) = T(A) \propto T(A)$.
2. On montre que S n'est jamais bien-centré sur R. Sinon, soit $(0,c) \in S$, où $c \in C - B$. Alors il existe $(u,v) \in U(B \propto C)(= U(B) \propto C)$ tel que $(u,v)(0,c)(= (0,uc)) \in R$ car S est bien-centré sur R. Par conséquent, $uc \in B$ et donc $c \in B$ car $u \in U(B)$, contradiction. Donc, S n'est jamais bien-centré sur R.

Dans [30, Théorème 4.5] Heinzer et Roitman ont prouvé que pour un domaine de Prüfer R avec spectre Noethérien, tout sur-anneau bien-centré de type fini de R est un localisé de R, et pour un domaine Noethérien R, tout sur-anneau plat de type fini de R est un localisé de R, et il ont soulevé les questions ouvertes mentionnées dans l'introduction. Dans ce qui suit, et en étendant ces questions à un anneau commutatif arbitraire (qui n'est pas nécessairement un domaine), Nous étudions le transfert de ces questions dans l'anneau extension triviale. De plus, Nous construisons de nouvelles classes d'anneaux commutatifs arbitraires R telles que tout sur-anneau bien-centré de type fini et tout sur-anneau plat est un localisé de R.

***Théorème* 4.3.3**
Soient A un anneau, $T(A)$ son anneau total des quotients, E un $T(A)$-module et $R := A \propto E$. Alors :

1. *Tout sur-anneau bien-centré de type fini de R est un localisé de R si et seulement si tout sur-anneau bien-centré de type fini de A est un localisé de A.*
2. *Tout sur-anneau plat de R est bien-centré sur R si et seulement si tout sur-anneau plat de A est bien-centré sur A.*
3. *Tout sur-anneau bien-centré plat de type fini de R est un localisé de R si et seulement si tout sur-anneau bien-centré plat de type fini de A est un localisé de A.*

Preuve

1. supposons que tout sur-anneau bien-centré de type fini de A est un localisé de A et soit S un sur-anneau bien-centré de type fini de R. Par le Théorème 4.3.1, S a la forme : $S = B \propto E$, où B est un sur-anneau de A. Aussi, B est bien-centré sur A par le Théorème 4.3.2 car S est bien-centré sur R. Trivialement B est A-module de type fini (car si $S = \sum_{i=1}^{n} R(a_i, e_i)$, où n est un entier positif et $(a_i, e_i) \in S$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$, alors $B = \sum_{i=1}^{n} Aa_i$). Donc, B est un localisé de A. Soit U une partie multiplicative de A telle que $B = U^{-1}A$. Par conséquent, $U^{-1}R = U^{-1}(A \propto E) = (U^{-1}A) \propto (U^{-1}E) = B \propto E = S$ (car $U^{-1}E = S^{-1}BE = BE = E$). Inversement, supposons que tout sur-anneau bien-centré de type fini de R est un localisé de R et soit B un sur-anneau bien-centré de type fini de A. Par le Théorème 4.3.1, $S = B \propto E$ est un sur-anneau de R. Aussi, S est bien-centré sur R par le Théorème 4.3.2 car B est bien-centré sur A. d'autre part, S un R-module de type fini. En effet, posons $B = \sum_{i=1}^{n} Aa_i$, où n est un entier positif et $a_i \in B$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$. Alors $\sum_{i=1}^{n} R(a_i, 0) = (\sum_{i=1}^{n} Aa_i) \propto (\sum_{i=1}^{n} Aa_iE) = B \propto (BE) = B \propto E = S$ puisque E est un B-module (comme E est un $T(A)$-module et $T(A) = T(B)$). Donc, S est un sur-anneau bien-centré de type fini de R et donc S est un localisé de R. Soit U une partie multiplicative de R telle que $S = U^{-1}R$. Alors $U \subseteq U(B \propto E) = U(B) \propto E$. Soit $U_0 := \{s \in A | (s, v) \in U$ pour certain $v \in E\}$. Il est facile de voir que U_0 est une partie multiplicative de A et $U_0^{-1}A = B$ et cela complète la preuve de 1..

2. Supposons que tout sur-anneau plat de A est bien-centré sur A et soit S un sur-anneau plat de R. Par le Théorème 4.3.1, S est de la forme $S = B \propto E$, où B est un sur-anneau de A. Mais S est un A-module plat puisque S est un R-module plat et R est un A-module plat. Donc, B est un A-module plat car $S \cong B \times E$ comme A-modules. Par conséquent B est bien-centré sur A, et donc S est bien-centré sur R par le Théorème 4.3.2. Inversement, soit B un sur-anneau plat de A. Par le Théorème 4.3.1, $S = B \propto E$ est un sur-anneau de R. On montre que S est R-plat. En effet, $B \otimes_A R$ est un R-module plat car B est un A-module plat. Mais, $B \otimes_A R = B \propto E = S$ puisque $R \cong A \times E$ comme A-modules et $B \otimes_A E = BE = E$ (car E est un $T(A)$-module et $T(A) = T(B)$). Donc, S est un sur-anneau plat de R et donc S est bien-centré sur R. Par conséquent B est bien-centré sur A par le Théorème 4.3.2.

3. Similaire à 1. et 2..

Maintenant, on construit une nouvelle famille d'anneaux commutatifs arbitraires répondant aux questions ci-dessus et qui ne sont même pas cohérents.

***Exemple* 4.3.2**
Soient V un domaine de valuation qui n'est pas un corps, $L := qf(V)$, E un L-espace vectoriel non nul et $R := V \propto E$. Alors :

1. *Tout sur-anneau bien-centré de type fini de R est un localisé de R.*
2. *Tout sur-anneau plat de R est bien-centré sur R.*
3. *R n'est pas cohérent.*

Preuve
1. et 2. sont obtenus immédiatement par le Théorème 4.3.3.
3. Soit $e(\neq 0) \in E$ et $(0, e) \in R$. Alors $(0 : (0, e)) = 0 \propto E$ n'est pas un idéal de type fini de R (puisque E est un L-espace vectoriel et L n'est pas un V-module de type fini). Donc, R n'est pas un anneau cohérent.

CHAPITRE 5

LES IDÉAUX ET LES MODULES DE MULTIPLICATION

`D. D. Anderson, Principal-like ideals and related polynomial content conditions, "Commutative Algebra: Noetherian and Non-Noetherian Perspectives", Springer , August 2010, p. 1 - 21.`

5.1 *Les idéaux de multiplication*

***Définitions* 5.1.1**

– *Soit R un anneau commutatif. Un idéal I est dit idéal de multiplication si pour chaque idéal $A \subseteq I$, il existe un idéal C avec $A = CI$; on peut prendre $C = (A : I)$.*
– *L'anneau R est un anneau de multiplication si chaque idéal de R est de multiplication.*

C'est clair qu'un R-module cyclic est un module de multiplication.

***Théorème* 5.1.1 ([1])**
Dans un anneau local tout idéal de multiplication est principal.

Preuve
Soient (R, M) un anneau local et A un idéal de multiplication dans R. Supposons que $A = S(x_\alpha)$. Alors $(x_\alpha) = I_\alpha A$ pour certain idéal I_α puisque A est un idéal de multiplication. Ainsi $A = S(x_\alpha) = \Sigma I_\alpha A = (SI_\alpha)A$. Si $SI_\alpha = R$, alors $I_{\alpha_0} = R$ pour certain α_0 car R est local. Dans ce cas $A = I_{\alpha_0}A = (x_{\alpha_0})$. Si $\Sigma I_\alpha \neq R$, alors $A = MA$. Supposons

que $x \in A$. Alors il existe un idéal C avec $(x) = CA = C(MA) = M(CA) = M(x)$; donc $x = 0$ par le lemme de Nakayama. Ainsi $A = 0$ est principal.

Remarque
C'est facile de voir que si I est un idéal de multiplication et S est une partie multiplicative de R, alors $IS^{-1}R$ est un idéal multiplication de $S^{-1}R$ (un résultat similaire pour les modules de multiplication). Ainsi un idéal de multiplication est localement principal. De plus, pour I de type fini, I est un idéal de multiplication si et seulement si I est localement principal (puisque pour I de type fini, l'équation $I\ B = (B : I)I$ est vraie si et seulement si elle est vraie localement). Cependant, un idéal localement principal peut ne pas être un idéal de multiplication (ex, un idéal qui n'est pas de type fini dans un domaine presque de Dedekind). Les conditions nécessaires pour un idéal localement principal pour être un idéal multiplication sont données dans Théorème 5.1.2.

***Définition* 5.1.1**
Soit I un idéal d'un anneau commutatif R. On défini $\theta(I) = \Sigma_{x \in I}(Rx : I)$. Alors $\theta(I)$ est un idéal avec $I \subseteq \theta(I) \subseteq R$.

***Théorème* 5.1.2**

1. *Pour un idéal I dans un anneau commutatif, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *I est un idéal de multiplication,*
   (b) *Si $M \supseteq \theta(I)$ est un idéal maximal, alors $I_M = 0_M$.*
2. *Un idéal I est de type fini et localement principal si et seulement si $\theta(I) = R$.*
3. *Pour un idéal de multiplication I et $i \in I$, iI est de type fini.*
4. *Soit M un idéal maximal de R. Alors M est un idéal de multiplication si et seulement si soit :*
   (a) *M est de type fini et localement principal ou bien*
   (b) *R_M est un corps.*

Le Théorème suivant donne certaines caractérisations d'un anneau de multiplication.

***Théorème* 5.1.3**
Pour un anneau commutatif R les conditions suivantes sont équivalente :

1. *R est un anneau de multiplication.*
2. *Chaque idéal premier de R est un idéal de multiplication.*
3. *$T(R)$ est un anneau de multiplication, tout idéal régulier de R est inversible, et tout idéal premier non maximal de R est idempotent.*

5.2 *Les modules de multiplication*

***Définition* 5.2.1**
Un R-module M est dit module de multiplication si pour chaque sous-module N de M, $N = AM$ pour certain idéal A de R ; on peut prendre $A = (N : M)$.
C'est clair qu'un R-module cyclic est un module de multiplication.

Maintenant pour un module M, $\theta(M) = \Sigma_{m \in M}(Rm : M)$, on peut réduire l'étude des modules de multiplication aux idéaux de multiplication par l'idéalisation.

***Théorème* 5.2.1**
Soient A un anneau commutatif et M un A-module, et soit $R = A \propto M$ l'extension triviale de A par M. Si N est un sous-module de M, alors N est un module de multiplication si et seulement si $0 \propto N$ est un idéal de multiplication de $R \propto M$.

Remarque
Si A est un domaine et M est un K-espace vectoriel, où $K = qf(A)$, alors $0 \propto N$ est de multiplication si et seulement si $dim(M) = 1$.

***Définitions* 5.2.1**
- *Soient M un R-module et $\mathcal{M}$ un idéal maximal de R. On défini $T_{\mathcal{M}}(M) = \{m \in M | (1-p)m = 0 pour certain p \in \mathcal{M}\}$ qui est un sous-module de M.*
- *M est dit $\mathcal{M}$-torsion si $T_{\mathcal{M}}(M) = M$. Puisque $R - \mathcal{M}$ est la saturation de $1 + \mathcal{M}$, $m \in T_{\mathcal{M}}(M) \Leftrightarrow fm = 0$ pour certain $f \in R - \mathcal{M}$. Ainsi $T_{\mathcal{M}}(M)$ est le noyau de l'application naturelle $M \to M_{\mathcal{M}}$ et M est $\mathcal{M}$-torsion , $M_{\mathcal{M}} = 0_{\mathcal{M}}$.*
- *M est dit $\mathcal{M}$-cyclic s'il existe $q \in \mathcal{M}$ et $m \in M$ tels que $(1-q)M \subseteq Rm$. D'une manière équivalente, M est $\mathcal{M}$-cyclic, s'il existe $f \in R - \mathcal{M}$ et $m \in M$ tels que $fM \subseteq Rm \Leftrightarrow \mathcal{M} \not\supseteq \theta(M)$.*

On cite certaines caractérisations équivalentes pour les modules de multiplication d'après [3].

***Théorème* 5.2.2**
Soient M un R-module et A un sous-module de M. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *A est un module de multiplication.*
2. *Si $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de R avec $\mathcal{M} \supseteq \theta(A)$, alors $A_{\mathcal{M}} = 0_{\mathcal{M}}$.*
3. *Si B est un sous-module cyclic de A, alors $\theta(A)B = B$.*
4. *Pour chaque idéal maximal de $\mathcal{M}$ de R, l'une des assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour $a \in A$, il existe $m \in \mathcal{M}$ avec $(1-m)a = 0$, i.e, A est $\mathcal{M}$-torsion, ou*

(b) *Il existe $a_0 \in A$ et $m \in \mathcal{M}$ avec $(1-m)A \subseteq Ra_0$, i.e, A est $\mathcal{M}$-cyclic.*

5. *Pour chaque idéal maximal $\mathcal{M}$ de R avec $A_{\mathcal{M}} \neq 0_{\mathcal{M}}$, il existe $f \in R - \mathcal{M}$ et $a_0 \in A$ avec $fA \subseteq Ra_0$.*
6. *Pour chaque idéal maximal $\mathcal{M}$ de R avec $A_{\mathcal{M}} \neq 0_{\mathcal{M}}$, $A_{\mathcal{M}}$ est cyclic et $(N : A)_{\mathcal{M}} = (N_{\mathcal{M}} : A_{\mathcal{M}})$ pour chaque sous-module N de M (de A).*
7. *Si I est un idéal de R et N est un sous-module de M avec $N \subseteq IA$, alors $N = JA$ pour certain idéal $J \subseteq I$.*

***Théorème* 5.2.3 ([20])**

1. *Un R-module M est un module de multiplication si et seulement si $\cap I_\lambda M = (\cap(I_\lambda + ann(M))M$ pour toute famille $\{I_\lambda\}_\lambda$ des idéaux de R.*
2. *La somme directe $\oplus M_\lambda$ de R-modules est un R-module de multiplication si et seulement si chaque M_λ est un module de multiplication et pour chaque λ, il existe un idéal A_λ avec $A_\lambda M_\lambda = M_\lambda$ mais $A_\lambda(\Sigma_{\mu \neq \lambda} \oplus M_\mu) = 0$.*
3. *Un sous-module N d'un module de multiplication M est maximal (resp, premier, essentielle) si et seulement si $N = \mathcal{M}M$ pour certain idéal maximal (resp, premier, essentielle) $\mathcal{M}$ de R. Il s'en suit que tout sous-module propre d'un module de multiplication est contenu dans un sous-module propre maximal. De plus, un module de multiplication avec nombre fini de sous-modules maximaux est cyclic. Ainsi un module Artinien de multiplication est cyclic.*
4. *Soient M un module non nul de multiplication avec $Z(M) = P_1 \cup ... \cup P_n$ et $ann(M) \subseteq P_1 \cap ... \cap P_n$ pour un ensemble fini d'idéaux premiers de R (e.g, M est Noethérien). Alors M est isomorphe à B/A où $A \subset B$ sont des idéaux de R avec B/A est inversible dans R/A. Dans ce cas M est dit module de multiplication trivial. Lorsque $Z(M) = Z(R)$ pour un R-module fidèle de multiplication, il s'en suit que si R est Noethérien, alors tout R-module non nul de multiplication est trivial. En particulier, un R-module fidèle de multiplication sur un anneau Noethérien est isomorphe à un idéal inversible et ainsi il est de type fini.*

***Théorème* 5.2.4 ([36])**

1. *Tout R-module de type fini est trivial si et seulement si pour tout R-module de type fini de multiplication M on a $(0 : M) = (0 : m)$ pour certain $m \in M$.*
2. *Pour tout anneau commutatif S et un ensemble non vide d'indéterminées $\{X_\lambda\}$ sur S, tout module fidèle de type fini de multiplication sur $R = S[\{X_\lambda\}]$ est trivial.*

***Exemples* 5.2.1**

– *Soient A un domaine et E est un K-espace vectoriel, où $K = qf(A)$, si $R = A \propto E$ est un anneau de multiplication alors A l'est aussi.*
– *Soient (A, M) un anneau local et E un A-module tels que $ME = 0$, alors $R = A \propto E$ n'est pas un anneau de multiplication.*

– *Soient A un domaine et E est un K-espace vectoriel, où $K = qf(A)$, alors $R = A \propto E$ est un anneau de multiplication si et seulement si $dim(M) = 1$.*

***Exemple* 5.2.1**
Soit $D := \alpha \times_c \beta = \{(a,b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\}$ le produit fibré de α et β déjà défini dans le chapitre 2. Si D est un anneau de multiplication alors A et B le sont.

Preuve
Les idéaux premiers de D sont de la forme $p_A^{-1}(J)$ ou $p_B^{-1}(Q)$, où J est n'importe quel idéal premier de A et Q un idéal premier de B, tel que $Q \not\supseteq Ker(\beta)$.
Soient $P \in spec(A)$ et $Q \subseteq P$, on a $p_A^{-1}(Q) \subseteq p_A^{-1}(P)$, alors il existe I idéal de D tel que $p_A^{-1}(Q) = Ip_A^{-1}(P)$ ainsi $Q = p_A(I)P$ (on a bien $p_A(I)$ un idéal de A car p_A est surjective). D'où A est un anneau de multiplication.
Soient $P \in spec(B)$ et $Q \subseteq P$. Si $P \not\supseteq ker(\beta)$, on utilise la même démarche pour A. Sinon, on a bien $p_B^{-1}(P)$ un idéal de D, alors il existe I un idéal de D tel que $p_B^{-1}(Q) = Ip_B^{-1}(P)$ d'où P est un idéal de multiplication. Ainsi B est un anneau de multiplication.

PERSPECTIVES

Au terme de ce travail, nous allons essayer d'éclaircir des perspectives de notre recherche. Nos questions visées sont regroupées en trois parties et sont comme suit :

Premier axe de recherche :
Notre objectif dans cet axe sera l'étude du transfert de la FF-propriété à l'extension amalgamée $A \bowtie^f J$ pour certaines classes d'anneaux A et B, d'homomorphisme d'anneaux $f : A \to B$ et d'idéaux J de B ; ce qui nous permettra ultérieurement d'enrichir la littérature par une famille importante d'exemples d'anneaux caractérisés par cette propriété.

Deuxième axe de recherche :
Nous allons essayer d'étudier le transfert de la propriété bien-centré à l'extension amalgamée $A \bowtie^f J$ pour certaines classes d'anneaux A et B, d'homomorphisme d'anneaux $f : A \to B$ et d'idéaux J de B.

Troisième axe de recherche :
Dans ce dernier axe nous allons essayer de caractériser les idéaux et les modules de multiplication dans l'extension amalgamé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Anderson, Multiplication ideals, multiplication rings, and the ring R(X), Canad. J. Math. 28 (1976), 760–768.

[2] D. D. Anderson, Some remarks on multiplication ideals, Math. Japonica 25 (1980), 463–469.

[3] D. D. Anderson, Some remarks on multiplication ideals, II, Comm. Algebra 28 (2000), 2577–2583.

[4] D.F. Anderson and D.E. Dobbs, Pairs of rings with the same prime ideals, Canad. J. Math. 32 (1980), 362–384.

[5] D.D. Anderson and M. Roitman, A characterization of cancellation ideals, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2853–2854.

[6] D. D. Anderson and M. Winders, Idealization of a module, J. Comm. Algebra, 1 (2009), 3–56.

[7] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *Amalgamated algebras along an ideal*, Comm Algebra and Aplications, Walter De Gruyter (2009), 241–252.

[8] M. D'Anna, C. A. Finacchiaro, et M. Fontana ; *Properties of chains of prime ideals in amalgamated algebras along an ideal*, J. Pure Applied Algebra **214**(2010), 1633-1641

[9] M. D'Anna et M. Fontana ; *An amalgamated duplication of a ring along an ideal : the basic properties*, J. Algebra Appl. **6**(3) (2007), 443-459.

[10] A. Barnard, Multiplication modules, J. Algebra 71 (1981), 174–178.

[11] E. Bastida and R. Gilmer, Overrings and divisorial ideals of rings of the form D+M, Michigan Math. J. 20 (1992), 79–95.

[12] H. S. Butts and R. C. Phillips, Almost multiplication rings, Canad. J. Math. 17 (1965), 267–277.

[13] J. Brewer and E. Rutter, A note on finitely generated ideals that are locally principal, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 429–432.

[14] D. L. Costa, *Parameterizing families of non-Noetherian rings,* Comm. Algebra 22 (1994) 3997–4011.

[15] H. Cartan and S, Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[16] D.L. Costa, J.L. Mott and M. Zafrullah, *The construction $D+XD_S[X]$,* J. Algebra 53 (1978) 423–439.

[17] D. E. Dobbs ; *Divided rings and going-down*,Pac. J. Math **67**, 353-363 (1976).

[18] P. M. Eakin ; *The converse of a wellknown theorem on Noetherian rings*,Math. Ann. **177**, 278-282 (1968).

[19] S. El Baghdadi, A. Jhilal, and N. Mahdou ; *On FF-rings*, J. Pure and Appl. Algebra 216 (2012) 71-76.

[20] Z. El-Bast and P. F. Smith, Multiplication modules, Comm. Algebra 16 (1988), 755–779.

[21] Z. El-Bast and P. F. Smith, Multiplication modules and theorems of Mori and Mott, Comm. Algebra 16 (1988), 781–796.

[22] M. Fontana, *Topologically defined classes of commutative rings,* Ann. Mat. Pura Appl. 123 (1980) 331–355.

[23] S. Gabelli and E. Houston, Coherentlike Conditions in Pullbacks, Michigan Math. J. 44 (1997), 99–122.

[24] R. Gilmer, Multiplicative ideal theory, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No. 12, Queen's Univ. Kingston, Ontario, 1968.

[25] R. Gilmer and J. L. Mott, Multiplication rings as rings in which ideals with prime radical are primary, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 40–52.

[26] S. Glaz, Commutative Coherent Rings, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1371, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[27] S. Glaz ; *Commutative coherent rings*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1371 (1989).

[28] M. Griffin, Multiplication rings via their total quotient rings, Canad. J. Math. 26 (1974), 430–449.

[29] W. Heinzer and J. Ohm, *The finiteness of I when $R[X]/I$ is R-flat, II,* Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972) 1–8.

[30] W. Heinzer and M. Roitman, Well-centered overrings of an integral domain, J. Algebra 272 (2004), 435–455.

[31] J.A. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*, Marcel Dekker, New York-Basel,1988.

[32] Chr. U. Jensen, *A remark on flat and projective modules,* Canad. J. Math.18 (1966) 943–949.

[33] A. Jhilal and N. Mahdou, *On strong n-perfect rings*, Comm. Algebra 38 (2010) 1057–1065.

[34] S. Kabbaj and N. Mahdou, *Trivial extensions defined by coherent-like conditions*, Comm. Algebra 32 (2004) 3937–3953.

[35] M. D. Larsen and P. J. McCarthy, Multiplicative Theory of Ideals, Academic Press, New York, 1971.

[36] G. M. Low and P. F. Smith, Multiplication modules and ideals, Comm. Algebra 18 (1990), 4353–4375.

[37] N. Mahdou, *On Costa's conjecture*, Comm. Algebra 29 (2001) 2775–2785.

[38] N. Mahdou, *On* 2*-Von Neumann regular rings*, Comm. Algebra 33 (2005) 3489–3496.

[39] N. Mahdou, *Introduction à l'algèbre homologique*

[40] N. Mahdou, *Cours et exercices corrigés : Structure algébrique*

[41] J. L. Mott, Equivalent conditions for a ring to be a multiplication ring, Canad. J. Math. 16 (1965), 429–434.

[42] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, 1962.

[43] J. Rotman ; *An Introduction to Homological Algebra*, Academic press, Pure and Appl. Math., A Series of Monographs and Textbooks, 25 (1979).

[44] J. D. Sally and W. V. Vasconcelos, *Flat ideal I*, Comm. Algebra 3 (1975) 531–543.

[45] P. F. Smith, Some remarks on multiplication modules, Arch. Math. 50 (1988), 223–235.

[46] P. F. Smith, Multiplication modules and projective modules, Periodics Math. Hungarica 29 (1994), 163–168.

[47] W. W. Smith, Projective ideals of finite type, Canad. J. Math. 21 (1969), 1057–1061.

[48] M. Zafruallah, *Flatness and invertibility of an ideal,* Comm. Algebra 18 (1990) 2151–2158.