UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

## Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

## (MACS)

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)**

# Existence et unicité des solutions locales des équations de Navier-Stokes

**Réalisé par:** AFKIR FARID

**Encadré par:** Pr. EL BARAKA AZZEDDINE

**Soutenu le 16 juin 2017**

**Devant le jury composé de:**

- Pr. AKHMOUCH MOHAMED — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EL BARAKA AZZEDDINE — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. ELHILALI ALAOUI AHMED — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EL KHAOULANI RACHID — Faculté des Sciences et Techniques de Fès

**Année Universitaire 2016 / 2017**

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Monsieur El Baraka Azzeddine, qui a accepté d'encadrer mon projet de fin d'étude, et d'autre part, pour ses conseils, son aide et sa confiance continue en mon travail.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance envers tous les membres du jury.

Je remercie aussi mes collègues, avec qui j'ai passé deux années très agréables et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce rapport.

Enfin, je suis reconnaissant à mes parents qui n'ont pas cessé de me soutenir durant toutes ces années et qui m'ont donné les moyens d'en arriver jusque là.

# Table des matières

# Liste des notations

Les notations dans $\mathbb{R}^3$.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \upsilon = \begin{pmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \\ \upsilon_3 \end{pmatrix}$$

deux fonctions vectoriels

— $\upsilon_t$ :dérivée partielle de $\upsilon$ par rapport à t

$$\upsilon_t = \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$$

— $\Delta \upsilon$ :laplacien de $\upsilon$

$$\triangle \upsilon = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_3^2}$$

— $(\upsilon.\nabla)\upsilon$ : le terme bilinéaire

$$(\upsilon.\nabla)\upsilon = \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon}{\partial x_3}$$

— $u \otimes \upsilon$ : produit tensoriel entre $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ et $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$u \otimes \upsilon = \begin{pmatrix} (u_1\upsilon_1) & (u_2\upsilon_1) & (u_3\upsilon_1) \\ (u_1\upsilon_2) & (u_2\upsilon_2) & (u_3\upsilon_2) \\ (u_1\upsilon_3) & (u_2\upsilon_3) & (u_3\upsilon_3) \end{pmatrix}$$

- $\nabla.(u \otimes \upsilon)$ : divergence du produit tensoriel $u \otimes \upsilon$. On a :

$$\nabla.(u \otimes \upsilon) = \begin{pmatrix} \partial_1(u_1\upsilon_1) & \partial_2(u_2\upsilon_1) & \partial_3(u_3\upsilon_1) \\ \partial_1(u_1\upsilon_2) & \partial_2(u_2\upsilon_2) & \partial_3(u_3\upsilon_2) \\ \partial_1(u_1\upsilon_3) & \partial_2(u_2\upsilon_3) & \partial_3(u_3\upsilon_3) \end{pmatrix} = (\nabla.u)\upsilon + (u.\nabla)\upsilon$$

- $\nabla p$ : le gradient de $p$,$p$ fonction scalaire.

$$\nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3})$$

- $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ : transformée de Fourier de f

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} exp(-ix.\xi)f(x)dx \tag{1}$$

- $\mathcal{F}^{-1}(f)$ : transformée inverse de Fourier de f

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} exp(ix.\xi)f(\xi)d\xi. \tag{2}$$

- $D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1, 2, 3.$ où $i^2 = -1$
- $R_j = D_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \qquad j = 1, 2, 3.$ : les transformation de Riez.
- $\mathbb{P} = id - \nabla\Delta^{-1}\nabla$ : l'opérateur Leray-Hopff.
- $S(t) = \exp(t\triangle) = (\dfrac{1}{4\pi t})^{\frac{3}{2}} \exp(-\dfrac{|x|}{4t})*$ : semi groupe de la chaleur(opérateur de convolution $*$).
- $supp(f)$ :support de la fonction $f : E \longrightarrow F$

$$supp(f) = \overline{\{x \in E, \quad f(x) \neq 0_F\}}.$$

# Introduction

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle très importants dans les domaines Économique, Biologique et physique .... Parmi ces équations il existent les équations Magnéto-Hydrodynamique, Boussinesq et Navier-Stokes ....

Les équations de Navier-Stokes sont des équations non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides, ces équations sont nommées pour honorer les travaux de deux scientifiques du $XIX^{\text{eme}}$ siècle, le mathématicien et l'ingénieur des ponts Henri Navier qui introduit la notion de viscosité dans les équations d'Euler en 1823, et le physicien George Gabriel Stokes qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845.

Les équations de Navier-Stokes c'est l'un des sept problèmes de mathématique du millénaire posés par la fondation Clay en 2000.

Les équations de Navier Stokes forment un modèle bien accepté. Ces équations bien évidement compliqués, cette complication est dû au terme linéaire de diffusion $\mu\Delta\upsilon$ et le terme non linéaire cinématique $\rho(\upsilon.\nabla)\upsilon$ qui rend difficile le choix d'un espace fonctionnel bien adapté au problème, c'est pourquoi jusqu'à présent il n'y a aucune théorie capable d'étudier l'existence, unicité, régularité et le comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes.
Ce projet s'organise de la façon suivante :

Dans le premier chapitre on donne quelques équations d'hydrodynamique (équation de conservation de masse, équation de mouvement d'hydrodynamique ...) et on rappelle les constructions physiques des équations de Navier-Stokes et l'approximation de Boussinesq.

Dans le deuxième chapitre, on introduit la décomposition de Littelwood-Paley qui est très importante dans la démonstration du théorème fondamental (d'existence et d'unicité de la solution locale du système des équations de Navier-Stokes). on utilisant le principe du Duhamel, pour transformer le système des équation de Navier-Stokes en une forme intégrale. On distingue par les définitions entre la solution fort "mild" et la solution fort "classique" et nous définissons l'espace de Banach qui s'adapte aux-équations de Navier-Stokes. On termine ce chapitre par la démonstration du théorème fondamental (d'existence et d'unicité de la solution locales du système des équations de Navier-Stokes) dans un espace adapté aux équations de Navier-Stokes.

Dans le dernier chapitre, on va donner certains résultats classiques, dans les espaces qui s'adaptent aux équations de Navier-Stokes, par exemple dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$, $p > 3$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{1}{2}$, les espaces de Hölder Zygmund, en général dans les espaces de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ et de Triebel $F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$.

Chapitre 1

# Construction physique des modèles

Dans ce chapitre, nous rappelons les constructions physiques des différents modèles

## 1.1 Les équations de l'hydrodynamique

les équations de l'hydrodynamique nous donne des différentes lois de conservations de la physique. Pour ce faire, nous suivons la présentation faite dans le chapitre 2 du livre de Chandrasekhar [6].
On considère un fluide dont la densité $\rho$ où $x \in \mathbb{R}^3$ et $t \in [0, \infty[$. On note par $\upsilon(t,x) = (\upsilon_1(t,x), \upsilon_2(t,x), \upsilon_3(t,x))$ la vitesse de fluide.

### 1.1.1 L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \upsilon_j) = 0, \tag{1.1}$$

exprime la conservation de la masse. Une autre forme de (1.1) qui pourra être utile, est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

Pour un fluide homogène incompressible ( $\rho = \rho_0$ est constante ), l'équation de continuité est réduite à :

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} = 0, \tag{1.3}$$

dans ce cas, la vitesse est donc un champ de divergence nulle. les équations de mouvement de l'hydrodynamique :

$$\rho \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = \rho X_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1.4}$$

où $X_i$ est la $i^{\text{eme}}$ composante de toute force extérieure qui pourrait agir sur le fluide.
$P_{ij}$ est la tenseur des contrainte exercée dans la direction $x_j$ sur un élément de surface normal à $x_i$. Cette force doit dépendre du taux de croissance de déformation dans le fluide donné par :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.5}$$

D'après une des hypothèses de la dynamique des fluides, nous donne l'équation suivante :

$$P_{ij} = w_{ij} + \sum_{k,l=1}^{3} q_{ij;kl} e_{kl}, \tag{1.6}$$

où $w_{ij} = -p\delta_{ij}$ est un tenseur symétrique vers lequel tend $P_{ij}$ quand $e_{ij} = 0$ , et $q_{ij;kl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$ est un tenseur d'ordre 4.où $p,\ \lambda$ et $\mu$ sont des fonctions (scalaires). Dans le cas d'un fluide isotropique, la forme de (1.6) doit être invariante à toutes rotations et translations des coordonnées du système. Ça implique donc que $w_{ij}$ et $q_{ij;kl}$ sont des tenseurs isotropiques. On trouve :

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} e_{kk}. \tag{1.7}$$

On définit $p$ comme étant la pression isotropique en $x_i$ quand il n'y a pas de déformation, dans ce cas,

$$\sum_{i=1}^{3} P_{ii} = -3p = -3p + 2\mu \sum_{i=1}^{3} e_{ii} + 3\lambda \sum_{k=1}^{3} e_{kk}. \tag{1.8}$$

On trouve alors, dans le cas où le fluide n'est pas forcément incompressible :

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{1.9}$$

$$\text{et} \quad P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3} e_{kk}. \tag{1.10}$$

Le coefficient $\mu$ qui apparaît dans cette équation est le coefficient de viscosité. Les termes dans (1.10) qui sont proportionnels à $\mu$ définissent les contraintes dues à la viscosité. Si on les note par

$$p_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right) - \sum_{k=1}^{3}\frac{2}{3}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]. \tag{1.11}$$

Dans le cas d'un fluide homogène incompressible, le tenseur visqueux a la forme plus simple :

$$p_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right). \tag{1.12}$$

En remplaçant $P_{ij}$ dans (1.4) par son expression, on trouve :

$$\rho\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x_k}\right]. \tag{1.13}$$

Dans le cas d'un fluide homogène incompressible pour lequel $\mu$ est constante, l'équation (1.13) est réduite à :

$$\rho\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\Delta\upsilon_i. \tag{1.14}$$

### 1.1.2 Le taux de dissipation visqueux :

En multipliant (1.13) par $\upsilon_i$ et en intégrant sur $V$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\frac{\partial}{\partial t}\upsilon_i^2\,dx + \frac{1}{2}\int_V \rho\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j}\upsilon_i^2\,dx = \int_V \rho\upsilon_i X_i\,dx + \int_V \upsilon_i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}\,dx. \tag{1.15}$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_i^2) = (\frac{\partial}{\partial t}\rho)\upsilon_i^2 + \rho\frac{\partial}{\partial t}\upsilon_i^2 \tag{1.16}$$

et d'après le théorème de Gauss pour l'intégrale, on a :

$$\int_V \rho \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \frac{\partial}{\partial x_j} \upsilon_i^2 \, dx = -\int_V \sum_{j=1}^{3} \upsilon_i^2 \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \upsilon_j) \, dx + \int_S \rho \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \upsilon_i^2 \, dn_j \tag{1.17}$$

$$\int_V \upsilon_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \, dx = -\int_V \sum_{j=1}^{3} P_{ij} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \, dx + \int_S \sum_{j=1}^{3} P_{ij} \upsilon_i dn_j \tag{1.18}$$

où $n_j$ est le vecteur normale à la surface S, dirigé vers l'extérieure et dont la norme est égale qu'il représente. et d'après des simplifications, l'équation (1.15) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \upsilon_i^2 \, dx &= \int_V \rho \upsilon_i X_i \, dx + \sum_{j=1}^{3} \int_S \upsilon_i P_{ij} \, dS_j \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \int_S \rho \upsilon_i^2 \upsilon_j \, dS_j - \sum_{j=1}^{3} \int_V P_{ij} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \, dx. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Cette relation donne le taux auquel l'énergie cinétique contenue dans un volume $V$ du fluide varie et on observe qu'il est la somme de quatre termes. Les trois premiers termes représentent respectivement le taux auquel agit la force externe sur le fluide dans $V$, le taux auquel la contrainte $P_{ij}$ agit sur la surface au bord de $V$, et enfin, le taux auquel l'énergie se dissipe au delà de $S$. Il reste à interpréter le dernier terme du côté droit de l'équation (1.19), il s'agit d'une intégrale de la quantité :

$$-P_{ij} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j}. \tag{1.20}$$

En utilisant les définitions de $e_{ij}$ et de $P_{ij}$, alors on peut écrire :

$$P_{ij} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = P_{ij} e_{ij} = \left( -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3} \mu \sum_{k=1}^{3} \delta_{ij} e_{kk} \right) e_{ij} = -p e_{jj} + 2\mu e_{ij}^2 - \frac{2}{3} \mu e_{jj}^2. \tag{1.21}$$

Le premier terme du côté droit est :

$$-p \sum_{j=1}^{3} e_{jj} = -p \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} = \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{1.22}$$

l'intégrale de cette quantité représente donc la variation de l'énergie interne due à la compression subie par le fluide. Le terme restant dans (1.21),

$$\phi = \sum_{j=1}^{3} \left( 2\mu \sum_{i=1}^{3} e_{ij}^2 - \frac{2}{3}\mu e_{jj}^2 \right), \tag{1.23}$$

doit donc désigner le taux auquel l'énergie est dissipée, de façon irréversible, par viscosité dans chaque élément de volume du fluide. De plus, $\phi$ est en fait définie positive. Pour le voir, on doit réécrire $\phi$ sous la forme :

$$\phi = 4\mu \left( e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 \right) + \frac{2}{3}\mu \left[ (e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 \right]. \tag{1.24}$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, $\sum_{j=1}^{3} e_{jj} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} = 0$ et l'expression correspondante de $\phi$ est :

$$\phi = 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}^2. \tag{1.25}$$

### 1.1.3 L'équation de conduction thermique

Les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement mènent respectivement aux équations de continuité et de mouvement. Il reste à interpréter la loi de conservation de l'énergie. Comme on va le voir, elle conduit à l'équation de conduction thermique. À une constante additive près, l'énergie $\epsilon_i$ par unité de masse du fluide peut s'écrire :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}\upsilon_i^2 + c_V \theta, \tag{1.26}$$

où $c_V$ est la chaleur spécifique à volume constant et $\theta$ est la température. En prenant en compte les gains et les pertes d'énergie qui interviennent dans un volume $V$ de fluide, par unité de temps, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_V \theta) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho c_V \theta \upsilon_j) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - p \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} + \phi. \tag{1.27}$$

Avec l'aide de l'équation de continuité, on peut simplifier l'équation précédente comme suit :

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(c_V\theta)+\rho\sum_{j=1}^{n}\upsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j}(c_V\theta)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)-p\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}+\phi. \qquad (1.28)$$

Les équations (1.1), (1.11), (1.13), (1.24) et (1.28) forment les équations de base de l'hydrodynamique. Elles sont complétées d'une équation d'état. Pour la plupart des substances, on peut écrire :

$$\rho=\rho_0\left[1-\beta(\theta-\theta_0)\right], \qquad (1.29)$$

où $\beta$ est le coefficient d'expansion volumique et $\theta_0$ est la température pour laquelle $\rho=\rho_0$ .

## 1.2 L'approximation de Boussinesq

Maintenant que nous avons formulé les équations de l'hydrodynamique, nous essayons de les simplifier dans le but d'obtenir les équations de Boussinesq. En effet, L'approximation de Boussinesq consiste à considérer que les variation de la masse volumique du fluide en fonction de la température sont négligeable sauf qui interviennent dans le terme $\rho X_i$ dans l'équation du mouvement, ne peuvent être ignorées . On peut ainsi considérer $\rho$ comme constant pour tous les termes de l'équation du mouvement à part celui devant la force externe.

En se basant sur les remarques précédentes, on remplace (1.3) par

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_j}=0. \qquad (1.30)$$

Avec cette condition sur $\upsilon$ , l'expression du tenseur de contrainte visqueux est :

$$p_{ij}=\mu\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i}\right), \qquad (1.31)$$

où, pour la même raison, on peut considérer $\mu$ comme une constante. L'équation du mouvement (1.13) devient alors :

$$\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\left(1+\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)X_i+\nu\Delta\upsilon_i, \qquad (1.32)$$

où $\nu(=\mu/\rho_0)$ désigne la viscosité cinétique, $\rho_0$ la densité à une température choisie $\theta_0$ et :

$$\delta\rho = -\rho_0\beta(\theta - \theta_0). \tag{1.33}$$

On s'intéresse maintenant à l'équation de conduction thermique (1.28). On peut considérer $c_V$ et $k$ comme étant des constantes et les sortir des signes dérivés. On ignore aussi le terme : $-p\nabla \cdot v$ du côté droit. Le terme de dissipation visqueuse $\phi$ peut aussi être ignoré. Sous ces conditions, l'équation de conduction thermique (1.28) devient :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u\frac{\partial\theta}{\partial x_j} = \kappa\Delta\theta, \tag{1.34}$$

où $\kappa(=k/\rho_0 c_V)$ est le coefficient de conduction thermique. Les équations (1.30), (1.32), (1.33) et (1.34) forment les équations de base dans l'approximation de Boussinesq.

Chapitre 2

# EXISTENCE ET UNICITÉ LOCALE

Nous avons vu que l'on peut modéliser les équations de Navier-Stokes, pour un fluide visqueux homogène incompressible de viscosité constante, à l'aide du système suivant :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta \upsilon_i. \\ \sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial \upsilon_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

Nous donnons maintenant le système des équations de Navier-Stokes que nous considérons dans la suite :

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} + \rho(\upsilon.\nabla)\upsilon = \rho X - \nabla p + \mu \Delta \upsilon. \\ \nabla.\upsilon = 0 \\ \upsilon(0, x) = \upsilon_0 \end{cases}$$

où la variable en temps $t$ appartient à l'intervalle $[0, T[$ , la variable $x$ est dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, les inconnues sont le champs de vitesse du fluide $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ et la fonction $p$ qui représente la pression du fluide et la fonction $X = (X_1, X_2, X_3)$ qui représente la force extérieure. Pour simplifier, nous considérons le cas d'un fluide homogène et incompressible de densité $\rho = 1$ et viscosité $\mu = 1$ et $X = 0$, Notre système devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} - \Delta \upsilon + (\upsilon.\nabla)\upsilon + \nabla p = 0 \\ \nabla.\upsilon = 0 \\ \upsilon(0) = \upsilon_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Il convient évidement de préciser, dès le début. le sens mathématique que nous voulons donner aux équations du système (2.1). Car souvent, dans la littérature concernant la résolution des équation de Navier-Stokes, le mot "solution" a été utilisé de manière fort différente.

**Définition 2.1.** *On dira que $\upsilon(t,x)$ est une solution forte classique des équations de Navier-Stokes s'il existe deux espaces de Banach E et F de distributions de x tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :*

$$\upsilon(t,x) \in \mathcal{C}([0,T];E) \cap \mathcal{C}^1([0,T];F) \tag{2.2}$$

$$E \hookrightarrow F \quad \text{(injection continue )} \tag{2.3}$$

$$\upsilon \in E \Rightarrow \triangle \upsilon \in F \quad \text{(opérateur continue)} \tag{2.4}$$

$$\upsilon \in E \Rightarrow (\upsilon.\nabla)\upsilon \in F \quad \text{(opérateur continue)} \tag{2.5}$$

**Définition 2.2.** *On dira que $\upsilon(t,x)$ est une solution fort "mild" des équations de Navier-Stokes s'il existe un espace de Banach E tel que $\upsilon(t,x) \in \mathcal{C}([0,T[;E)$ et si $\upsilon(t,x)$ vérifie :*

$$\upsilon(t) = S(t)\upsilon_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)(\upsilon.\nabla)\upsilon(s)ds \tag{2.6}$$

*S(t)=exp(t$\triangle$) et $\mathbb{P}$ étant respectivement le semi groupe de la chaleur et l'opérateur de projection sur les champs de vecteurs à divergence nulle et l'intégrale $\int_0^t \mathbb{P}S(t-s)(\upsilon.\nabla)\upsilon(s)ds$ étant considérée au sens de Bochner.*

**Remarque 2.1.** *L'équivalence entre la recherche de solutions classiques et de solution "mild" pour le problème de Cauchy d'une équation d'évolution arbitraire n'est pas toujours assurée* *car, en général, une solution "mild" n'est pas différentiable par rapport au temps ([15],page 106). Cependant, l'intérêt de solution "mild" vient de ce que, si le problème admet une solution classique, alors cette solution vérifie l'équation intégrale([15],page 183).*

Dans ce projet nous nous concentrons seulement sur la recherche de solutions "mild" des équations de Navier-Stokes.

## 2.1 La décomposition de Littlewood-Paley

Nous rappelons ici les résultats classique sur la décomposition de Littlewood-Paley.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} exp(-ix.\xi)f(x)dx \tag{2.7}$$

On fixe désormais une fonction $\varphi(x)$ de la classe de Schwartz $S(\mathbb{R}^3)$, invariante par rotation, réelle et dont la transformé de Fourier $\widehat{\varphi}(\xi)$ vérifie

$$0 \leqslant \widehat{\varphi}(\xi) \leqslant 1\,, \widehat{\varphi}(\xi) = 1\; si\; |\xi| \leqslant \frac{3}{4},\; \widehat{\varphi}(\xi) = 0\; si\; |\xi| \geq \frac{3}{2}. \tag{2.8}$$

On pose alors

$$\psi(x) = 8\varphi(2x) - \varphi(x) \tag{2.9}$$

et

$$\psi_j(x) = 2^{3j}\psi(2^j x) = \varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x) \tag{2.10}$$

où

$$\varphi_j(x) = 2^{3j}\varphi(2^j x) \tag{2.11}$$

On désigne par : $\Delta_j = \psi_j *$ et par $S_j = \varphi_j *$ ceci pour tout j$\in \mathbb{Z}$. Pour toute distribution$f \in S'(\mathbb{R}^3)$, on définit pour $\alpha \in \mathbb{R},\; p \neq \infty,\; 0 < p, q \leqslant \infty$,

$$\| f \|_{F_p^{\alpha,q}} = \| S_0 f \|_p + \| \{\sum_{j \geqslant 0} (2^{\alpha j} \mid \Delta_j f \mid)^q\}^{\frac{1}{q}} \|_p \tag{2.12}$$

et, pour les mêmes indices, $p = \infty$

$$\| f \|_{B_p^{\alpha,q}} = \| S_0 f \|_p + \{\sum_{j \geqslant 0} (2^{\alpha j} \| \Delta_j f \|_p)^q\}^{\frac{1}{q}} \tag{2.13}$$

$F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ $\left(B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)\right)$ sont respectivement l'espace de Tribel-Lizorkin (Besov).
On a la décomposition de l'unité est :

$$I = S_0 + \sum_{j \geq 0} \Delta_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j \tag{2.14}$$

En fait, on devrait dire une décomposition, car il y a divers choix possibles pour la fonction $\varphi$. D'ailleurs, nous faisons remarquer que seule la première des deux séries qui apparaissent dans (2.14) s'applique à une distribution tempérée arbitraire $f \in S'(\mathbb{R}^3)$. En effet, si par exemple $f = 1$, alors $\Delta_j f = 0 \, \forall j \in \mathbb{Z}$ et $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$ donnerait $1 = 0$, tandis que $S_0 f = 1$ et donc $f = S_0 f + \sum_{j \geq 0} \Delta_j f$.
Plus généralement, $\Delta_j f = 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\widehat{\Delta_j f} = 0 \;\; \forall j \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\widehat{\psi}_j(\xi)\widehat{f} = 0 \;\; \forall j \in \mathbb{Z},$ or $supp(\widehat{\psi_j}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{3}{4}2^j \leqslant \mid \xi \mid \leqslant \frac{3}{2}2^j\}$ alors $supp(\widehat{f}) = \{0\}$ donc d'après le théorème ponctuelle $f$ est une polynôome. Il convient alors d'interpréter l'identité $I = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \triangle_j$ modulo les polynômes [8].
Plus précisément, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$I = S_k + \sum_{j \geq k} \Delta_j \tag{2.15}$$

On a alors

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \tag{2.16}$$

dans $S'(\mathbb{R}^3) \diagup$Polynôme, (voir [14] page 77 et page 179)

.

Pour réduire le système différentielle (2.1) sous la forme d'intégrale "mild", il faut introduire l'opérateur de projection $\mathbb{P}$ sur les champs de vecteurs à divergence nulle. soit $\upsilon(x) = (\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \upsilon_3(x))$ un champs de vecteurs arbitraire, on pose d'abord

$$z(x) = R_1\upsilon_1 + R_2\upsilon_2 + R_3\upsilon_3 \tag{2.17}$$

$R_j = -i\partial_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ étant les transformations de Riez classiques, et l'on désigne par

$$\mathbb{P}(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3) = (\upsilon_1 - R_1 z, \upsilon_2 - R_2 z, \upsilon_3 - R_3 z) \tag{2.18}$$

On vérifie les propriétés suivantes,

$$\nabla.\upsilon = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}\upsilon = \upsilon \tag{2.19}$$

$$\mathbb{P}\upsilon = 0 \Longrightarrow \upsilon = \nabla p \tag{2.20}$$

$$\nabla.\mathbb{P}\upsilon = 0 \quad \forall \upsilon \tag{2.21}$$

*Démonstration.* Ces propriétés sont facile à vérifiés en passant par la transformé de Fourier. En effet, on a :

$$\widehat{\mathbb{P}\upsilon}_j(\xi) = \sum_{k=1}^{3}(\delta_{j,k} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2})\widehat{\upsilon_k}(\xi) \tag{2.22}$$

□

On sait aussi que si $\nabla.\upsilon = 0$ alors $\nabla.\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} = 0$ et $\nabla.\triangle\upsilon = 0$. On applique la divergence sur l'équation de Navier-Stokes (2.1) on obtient :

$$\nabla.\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \nabla.\Delta\upsilon + \nabla.(\upsilon.\nabla)\upsilon + \nabla.\nabla p = 0$$

d'après la simplification

$$\begin{aligned} \nabla.\nabla p &= -\nabla.(\upsilon.\nabla)\upsilon \\ \Delta p &= -\nabla.(\upsilon.\nabla)\upsilon \end{aligned} \tag{2.23}$$

On applique la transformé de Fourier à (2.23)

$$-|\xi|^2\widehat{p} = -\widehat{\nabla.(v.\nabla})v$$

d'où

$$\widehat{p} = -|\xi|^{-2}\widehat{\nabla.(v.\nabla})v$$

Par transformé de Fourier inverse, on obtient :

$$p = -\Delta^{-1}(\nabla.(v.\nabla)v) \tag{2.24}$$

d'où :

$$\nabla p = -\nabla\Delta^{-1}(\nabla.(v.\nabla)v) \tag{2.25}$$

on remplace le gradient de pression $p$ par sa formule, dans l'équation (2.1) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + \nabla.(v.\nabla)v - \nabla\Delta^{-1}(\nabla.(v.\nabla)v) = 0$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v &= -[id - \nabla\Delta^{-1}\nabla.](\nabla.(v \otimes v)) \\ &= -\mathbb{P}\nabla.(v \otimes v)\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$ : l'opérateur de projection sur les champs de vecteurs à divergence nulle. alors

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = -\mathbb{P}\nabla.(v \otimes v) \tag{2.26}$$

alors, d'après le principe de Duhamel, on a l'équation intégrale

$$v(t) = S(t)v_0 - \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla.(v \otimes v)(s)ds \tag{2.27}$$

$$= S(t)\upsilon_0 + B(\upsilon, \upsilon)(t) \tag{2.28}$$

$S(t) = \exp(-t\Delta)$ est un $\mathcal{C}_0$ semi groupe dans $E$ . et si $\upsilon(t)$ est une solution de (2.27) et que $\nabla.\upsilon_0 = 0$ et d'après l'équation (2.21) alors nécessairement $\nabla.\upsilon = 0$.
On forme

$$r(t) = \upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 + \int_0^t S(t-s)\nabla.(\upsilon \otimes \upsilon)(s)ds \tag{2.29}$$

et l'on a $\mathbb{P}r(t) = 0$, donc $r(t)$ est un gradient.
Nous nous concentrons sur la recherche de solutions "mild" de (2.27) qui sont les champs de vecteurs $\upsilon(t,x)$ dans $\mathcal{C}([0,T[,E)$, continue en $t \in [0,T[$ à valeurs dans un espace de Banach $E$ de distribution de x.

**Remarque 2.2.** *La pression $p$ n'apparait plus pas dans les équations de Navier-Stokes sous la forme d'intégrale "mild" et dans ce cas elle est déterminée, par la formule suivante*

$$p = -\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} R_j R_k(\upsilon_j \upsilon_k) \tag{2.30}$$

Nous allons maintenant donner les hypothèses portant sur l'espace de Banach E pour être en mesure de résoudre l'équation (2.27) par l'algorithme des contraction de Picard (Théorème de Point fixe).

## 2.2 Énoncé du théorème fondamental

**Définition 2.3.** *l'espace $E$ est adapté aux équation de Navier-Stokes si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *E est un espace de Banach fonctionnel :*

$$S(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow E \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^3)(injection continue) \tag{2.31}$$

2. *la norme$\| \ \|$ dans E est invariante par translations*

$$\forall f \in E, \qquad \forall k \in \mathbb{R}^3, \quad \|f(.)\| = \|f(. + k)\| \tag{2.32}$$

3. *le produit ponctuel entre deux distributions tempérées dans E est encore une distribution tempérées*

$$\forall f \in E, \qquad \forall g \in E, \quad fg \in S'(\mathbb{R}^3) \tag{2.33}$$

*et enfin*

4. *il existe une suite de réels $\eta_j > 0 \quad j \in \mathbb{Z}$ telle que*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|j|}\eta_j < \infty \tag{2.34}$$

*et que*

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall f \in E, \ \forall g \in E, \ \|\Delta_j(fg)\| \leqslant \eta_j \|f\| \|g\| \tag{2.35}$$

**Remarque 2.3.** *Dans ce qui suite, nous nous intéresserons à des estimations composante par composante pour cela On a supposé que $f$ et $g$ sont des distributions à valeurs scalaires dans (2.32), (2.33), (2.35), $\Delta j$ est le bloc dyadique qui apparaît dans une décomposition de Littlewood-Paley.*

**Remarque 2.4.** *On désigne par $\dot{B}_E^{0,1}$ l'espace (du type Besov homogène ) des distribution $f \in E$ telles que dans une décomposition de Littlewood-Paley, on ait*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \|\Delta_j \ f \ \| < \infty \tag{2.36}$$

On a alors :

**Théorème 2.1.** *Soit $E$ un espace de Banach adapté aux équation de Navier-Stokes. Alors pour toute donnée initiale $\upsilon_0 \in E$, vérifiant au sens des distributions $\nabla.\upsilon_0 = 0$, il existe un $T =$*

*$T(\|v_0\|) > 0$ et une unique solution locale "mild" $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T[,E)$ des équations de Navier-Stokes telle que $v(0,x) = v_0$. En outre, $v(t) - S(t)v_0 \in \mathcal{C}([0,T[,\dot{B}_E^{0,1})$ et*

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \sup_{\|v_0\|\leqslant 1} \|v(t) - S(t)v_0\| = 0 \tag{2.37}$$

*Plus précisément, pour tout $t \in [0,T[$*

$$\|v(t) - S(t)v_0\| \leqslant c\eta(t)\|v_0\|^2 \tag{2.38}$$

*avec*

$$\eta(t) = t \sum_{4^{-j}\geq t} 2^j \eta_j + \sum_{4^{-j}<t} 2^{-j}\eta_j \tag{2.39}$$

*$\eta_j$ est définit, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ par (2.35).*

Dans le cas d'espace de Banach non séparable mais adapté aux équations de Navier-Stokes, le théorème (2.1) s'applique encore mais fournit seulement une solution $v(t,x) \in \mathcal{C}_*([0,T[;E)$, c'est à dire bornée et faiblement continue :

**Définition 2.4.** *Soit $E$ un espace de Banach fonctionnel et soit $v(t,x)$ un champs de vecteurs définit de $[0,T[$ à valeurs dans $E$. On dira que $v(t,x)$ est continu au sens "faible-strict" et l'on écrira $v(t,x) \in \mathcal{C}_*([0,T[;E)$, si $v(t,x)$ est borné dans $E$ c'est à dire $v(t,x) \in L^\infty([0,T[;E)$ et si la continuité de l'application $v(t,x) : [0,T[\to E$ est celle définit par l'injection de $E$ dans $S'(\mathbb{R}^3)$, c'est à dire la convergence au sens des distributions.*

## 2.3 Preuve du théorème

La démonstration du théorème (2.1) repose sur d'établir la continuité de l'opérateur bilinéaire

$$B(v,u)(t) = -\int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla.(v\otimes u)(s)ds \tag{2.40}$$

Comme [5], Nous avons l'opérateur scalaire

$$B(f,g)(t) = -\int_0^t (t-s)^{-2}\theta(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}) * (fg)(s)ds \tag{2.41}$$

où $f = f(t,x)$ et $g = g(t,x)$ sont deux champs scalaires et $\theta = \theta(x)$ une fonction analytique d'intégrale nulle ,$\int_{\mathbb{R}^3} \theta = 0$, qui est $O(|x|^{-4})$ pour $|x| \longrightarrow \infty$.Pour simplifier on choisira pour $\theta$ la fonction dont la transformé de Fourier est donnée par

$$\widehat{\theta}(\xi) = |\xi| \exp(-|\xi|^2). \tag{2.42}$$

L'importance de cette remarque vient de ce qu'elle nous permet de considérer l'opérateur de projection $\mathbb{P}$, celui de divergence $\nabla.$ et le semi groupe de la chaleur $S(t)$ comme un seul opérateur de convolution $\theta$. Alors on remplace l'opérateur matriciel $\mathbb{P}S(t)\nabla.$ par l'opérateur scalaire $\Lambda S(t)$ où $\Lambda = (\sqrt{-\Delta})^{\frac{1}{2}}$ est l'opérateur de Calderòn pseudo différentielle de transformé de Fourier est $|\xi|$. On remarquera que $\mathbb{P}\nabla.$ est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 1 tout comme $\Lambda$.

**Lemme 2.1.** *si E est un espace de Banach adapté aux équations de Navier-Stokes. il existe une fonction $\omega(t) \in L^1([0,1])$ telle que, pour tout $t \in [0,1]$ et toute fonction (scalaire) $f \in E$ et $g \in E$, l'on ait*

$$\|\Lambda S(t)(fg)\| \leqslant \omega(t)\|f\|\|g\| \tag{2.43}$$

où, si $t \in J_m = [4^{-m}, 4^{-m+1}[$, et on a :

$$\omega(t) \leqslant c\sum_{j\leqslant m} 2^j \eta_j + c\sum_{j>m} 2^{-2j+3m}\eta_j \tag{2.44}$$

et les constantes $\eta_j$ sont définis par les estimations (2.34) et (2.35).

*Démonstration.* $\omega(t) \in L^1([0,1])$, car

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \omega(t)dt &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{4^{-m}}^{4^{-m+1}} \omega(t)dt \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} [\sup_{t\in J_m} \omega(t)] \int_{4^{-m}}^{4^{-m+1}} dt \\
&= 3\sum_{m=0}^{\infty} [\sup_{t\in J_m} \omega(t)] 4^{-m} \\
&\leqslant c\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j\leqslant m} 2^{j-2m}\eta_j + c\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j>m} 2^{-2j+m}\eta_j \\
&= c\sum_{j\leqslant m}^{\infty}\sum_{m=0} 2^{j-2m}\eta_j + c\sum_{j>m}^{\infty}\sum_{m=0}^{j-1} 2^{-2j+m}\eta_j \\
&\leqslant c\sum_{j\leqslant m}^{\infty} 2^j\eta_j \sum_{m=0} 2^{-2m} + c\sum_{j>m}^{\infty} 2^{-2j}\eta_j \sum_{m=0}^{j-1} 2^m \\
&\leqslant c\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|j|}\eta_j < \infty
\end{aligned}$$

d'où $\omega(t) \in L^1([0,1])$ . d'après l'unité de la séries on a

$$\Lambda S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \triangle_j \Lambda S(t) \tag{2.45}$$

Soit $\tilde{\triangle}_j(f) = f * \tilde{\psi}_j$ où $\tilde{\psi}_j$ est définie comme $\psi_j$ et la transformé de Fourier de $\tilde{\psi}$ égale 1 si $\frac{3}{4} \leqslant \mid \xi \mid \leqslant 3$ et nulle si $\mid \xi \mid \leqslant \frac{3}{8}$ ou $\mid \xi \mid \geq 6$. Puisque $spect(\psi_j) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3, \quad \frac{3}{4} \leqslant \mid \xi \mid \leqslant 3\}$ alors $\tilde{\triangle}_j \triangle_j = \triangle_j$. on considère que tous les opérateurs commutent entre eux donc

$$\Lambda S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\triangle}_j \Lambda S(t) \triangle_j \tag{2.46}$$

On note

$$\tilde{\triangle}_j \Lambda S(t) = 2^j W_{j,t} \quad si \quad j \leqslant m \tag{2.47}$$

et

$$\tilde{\triangle}_j \Lambda S(t) = 2^{-2j+3m} W_{j,t} \quad si \quad j \geq m+1 \tag{2.48}$$

où

$$W_{j,t}(f) = f * \omega_{j,t} \tag{2.49}$$

où

$\omega_{j,t}$ est une fonction qu'on déterminera par les formules (2.57) et (2.58)
telle que pour tout $t \in J_m$

$$\| \omega_{j,t} \|_1 \leqslant c \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.50}$$

En effet, Si m=0, ces estimations sont facile, on passe aux transformées de Fourier dans

$$\Lambda S(t) = \sum_{-\infty}^{0} 2^j \triangle_j W_{j,t} + \sum_{1}^{+\infty} 2^{-2j+3m} \triangle_j W_{j,t} \tag{2.51}$$

on a

$$|\xi| \exp(-t|\xi|^2) = \sum_{-\infty}^{0} 2^j \widehat{\psi}_j(\xi) \widehat{\omega}_{j,t}(\xi) + \sum_{1}^{+\infty} 2^{-2j} \widehat{\psi}_j(\xi) \widehat{\omega}_{j,t}(\xi) \tag{2.52}$$

avec

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ix.\xi) \psi_j(x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-ix.\xi) 2^{3j} \psi(2^j x) dx$$

on pose $2^j x = y$ et $dy = 2^{3j} dx$ alors

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(-i 2^{-j} y.\xi) \psi(y) dy = \widehat{\psi}(2^{-j} \xi) \tag{2.53}$$

donc (2.52) devient

$$|\xi| \exp(-t|\xi|^2) = \sum_{-\infty}^{0} 2^j \widehat{\psi}(2^{-j} \xi) \widehat{\omega}_{j,t}(\xi) + \sum_{1}^{+\infty} \widehat{\psi}(2^{-2j} \xi) \widehat{\omega}_{j,t}(\xi) \tag{2.54}$$

On a la transformé de Fourier de (2.46) donne :

$$|\xi|\exp(-t|\xi|^2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\xi|\exp(-t|\xi|^2)\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\xi) \tag{2.55}$$

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi)\widehat{\tilde{\psi}}(\xi) \tag{2.56}$$

Par identification, on définit $\omega_{j,t}$ par

$$\widehat{\omega}_{j,t}(2^j\xi) = |\xi|\widehat{\tilde{\psi}}(\xi)\exp(-t4^j|\xi|^2) \quad si \quad j \leqslant 0. \tag{2.57}$$

et par

$$\widehat{\omega}_{j,t}(2^j\xi) = 8^j|\xi|\widehat{\tilde{\psi}}(\xi)\exp(-t4^j|\xi|^2) \quad si \quad j \geq 1. \tag{2.58}$$

Maintenant montrons que pour tout $t \in J_0, \omega_{j,t} \in L^1(\mathbb{R}^3) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
Montrons d'abord que $\|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(2^j.)\|_1 = \|\omega_{j,t}\|_1$. En effet

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(2^j.)(x) = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(+ix.\xi)\widehat{\omega}_{j,t}(2^j\xi)d\xi$$

On pose $2^j\xi = \eta$ et $d\eta = 2^{-3j}d\xi$ d' où :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(2^j.)(x) &= 2^{-3j}(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(+ix.2^{-j}\xi)\widehat{\omega}_{j,t}(\eta)d\eta \\ &= 2^{-3j}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(.))(2^{-j}x) \\ &= 2^{-3j}\omega_{j,t}(2^{-j}x)\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(2^j.)\|_1 &= 2^{-3j}\|\omega_{j,t}(2^{-j})\|_1 \\ &= 2^{-3j}\int_{\mathbb{R}^3}|\omega_{j,t}(2^{-j}x)|dx\end{aligned} \tag{2.59}$$

On pose $2^{-j}x = y$ et $dx = 2^{3j}dy$ d' où :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(2^j.)\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\omega_{j,t}(y)|dy \\ &= \|\omega_{j,t}\|_1\end{aligned}$$

1[er] cas : si $j \leqslant 0$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\omega}_{j,t}(2^j.)(y)\|_1 &= \|\mathcal{F}^{-1}(|.|\widehat{\widetilde{\psi}}(.)\exp(-t4^j|.|)(y)\|_1 \\ &= \|\mathcal{F}^{-1}(|.|\widehat{\widetilde{\psi}}(.)) * \mathcal{F}^{-1}(\exp(-t4^j|.|))\|_1 \qquad (2.60)\end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{F}^{-1}(\exp(-t4^j|.|))(y) = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} exp(+iy.\xi)\exp(-t4^j|\xi|^2)d\xi$$

On pose $2^j\xi = \eta$ et $d\eta = 2^{3j}d\xi$ d'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\exp(-t4^j|.|))(y) &= 2^{-3j}(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} exp(+i2^{-j}y.\eta)\exp(-t|\eta|^2)d\eta \\ &= 2^{-3j}\mathcal{F}^{-1}(\exp(-t|.|))(2^{-j\cdot}y)\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young de (2.60) on a

$$\begin{aligned}\|\omega_{j,t}\|_1 &\leqslant 2^{-3j}\|\mathcal{F}^{-1}(|.|\widehat{\widetilde{\psi}}(.))\|_1\|\mathcal{F}^{-1}(\exp(-t|.|))(2^{-j})\|_1 \\ &\leqslant \|\mathcal{F}^{-1}(|.|\widehat{\widetilde{\psi}}(.))\|_1\|\mathcal{F}^{-1}(\exp(-t|.|^2))\|_1\end{aligned} \qquad (2.61)$$

On a $\mathcal{F}^{-1}(|.|\widehat{\widetilde{\psi}}(.)) \in S(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathcal{F}^{-1}(|.|\widehat{\widetilde{\psi}}(.)) \in L^1(\mathbb{R}^3)$, on a aussi pour tout $t \in J_0$, $exp(-t|\xi|^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ indépendant de t, $\forall t \in J_0$ $\mathcal{F}^{-1}(\exp(-t|.|^2)) \in S(\mathbb{R}^3)$ donc, pour tout $t \in J_0,\ \omega_{j,t} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ pour tout $j \leqslant 0$.
2[eme] cas, si $j \geq 1$

$$\widehat{\omega}_{j,t}(2^j\xi) = 8^j|\xi|\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi)\exp(-t4^j|\xi|^2)$$

On pose $2^j\xi = \eta$ alors

$$\widehat{\omega}_{j,t}(\eta) = 4^j|\eta|\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\eta)\exp(-t|\eta|^2) \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \omega_{j,t}(\eta) &= \mathcal{F}^{-1}(4^j|\eta|\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\eta)\exp(-t|\eta|^2) & (2.63)\\ &= 4^j\mathcal{F}^{-1}\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\eta) * \mathcal{F}^{-1}(|\eta|\exp(-t|\eta|^2)) & (2.64)\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young on a

$$\|\omega_{j,t}\|_1 \leqslant 4^j\|\mathcal{F}^{-1}\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}\eta)\|_{\frac{3}{5}}\|\mathcal{F}^{-1}(|\eta|\exp(-t|\eta|^2))\|_1 \tag{2.65}$$

On a

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}.)(y) = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(+iy.\xi)\tilde{\psi}(2^{-j}\xi)d\xi$$

On pose $2^{-j}\xi = \eta$ et $d\eta = 2^{3j}d\xi$ d' où :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\tilde{\psi}}(2^{-j}.)(y) &= 2^{3j}(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\exp(+iy.2^j\eta)\tilde{\psi}(\eta)d\eta \\ &= 2^{3j}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\tilde{\psi}}(.)(2^jy) \\ &= 2^{3j}\tilde{\psi}(2^jy)\end{aligned}$$

d'où :

$$\|\omega_{j,t}\|_1 \leqslant 2^{5j}\|\tilde{\psi}(2^j.)\|_{\frac{3}{5}}\|\mathcal{F}^{-1}(|.|\exp(-t|.|^2))\|_3$$

$$\|\omega_{j,t}\|_1 \leqslant \|\tilde{\psi}\|_{\frac{3}{5}}\|\mathcal{F}^{-1}(|.|\exp(-t|.|^2))\|_3 \tag{2.66}$$

on a pour tout $t \in J_0$, $|\xi|\exp(-t|\xi|^2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ indépendant de t, et puisque $|\xi|\exp(-t|\xi|^2) \in S(\mathbb{R}^3)\forall t \in J_0$ on a $\mathcal{F}^{-1}|\xi|(\exp(-t|.|^2)) \in S(\mathbb{R}^3)$ donc, pour tout $t \in J_0,\ \omega_{j,t} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ pour tout $j > 0$. par suite, pour tout $t \in J_0, \omega_{j,t} \in L^1(\mathbb{R}^3) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

Pour passé au cas général où $t \in J_m$, on pose d'abord $t = 4^{-m}s$ où $s \in [4^m, 4^{m+1}]$ et on remplace $\xi$ par $2^{-m}\xi$ dans (2.54). On obtient :

$$2^{-m}|\xi|\exp(-4^{-m}s4^{-m}|\xi|^2) = \sum_{-\infty}^{0} 2^j\widehat{\psi}(2^{-j-m}\xi)\widehat{\omega}_{j,t}(2^{-m}\xi) + \sum_{1}^{+\infty} 2^{-2j+m}\widehat{\psi}(2^{-j-m}\xi)\widehat{\omega}_{j,t}(2^{-m}\xi)$$

alors

$$\begin{aligned}|\xi|\exp(-2^{-4m}s|\xi|^2) &= \sum_{-\infty}^{0} 2^{j+m}\widehat{\psi}(2^{-j-m}\xi)|\xi|\widehat{\tilde{\psi}}(\xi)\exp(-2^{-4m}s|\xi|^2)\\ &+ \sum_{1}^{+\infty} 2^{-2j-2m}\widehat{\psi}(2^{-j-m}\xi)|\xi|\widehat{\tilde{\psi}}(\xi)\exp(-2^{-4m}s|\xi|^2)\end{aligned}$$

On pose $k = j + m$

$$\begin{aligned}|\xi|\exp(-2^{-4m}s|\xi|^2) &= \sum_{-\infty}^{m} 2^{k}\widehat{\psi}_k(\xi)|\xi|\widehat{\tilde{\psi}}(\xi)\exp(-2^{-4m}s|\xi|^2)\\ &+ \sum_{m+1}^{+\infty} 2^{-2k}\widehat{\psi}_k(\xi)|\xi|\widehat{\tilde{\psi}}(\xi)\exp(-2^{-4m}s|\xi|^2)\end{aligned} \tag{2.67}$$

pour tout $t \in [4^{-m}, 4^{-m+1}]$ On a $s \in [4^m, 4^{m+1}]$ et $4^{-2m}s \in [4^{-m}, 4^{-m+1}]$ on pose $t = 4^{-2m}s$, et par transformé de Fourier inverse de (2.67) on a le résultats suivant :

$$\Lambda S(t) = \sum_{-\infty}^{m} 2^k\tilde{\triangle}\Lambda S(t)\triangle_k + \sum_{m+1}^{+\infty} 2^{-2k}\tilde{\triangle}\Lambda S(t)\triangle_k. \tag{2.68}$$

Finalement, puisque la norme dans E ( un espace de Banach ) est invariante par translation, pour $f \in E$ et $\omega \in L^1(\mathbb{R}^3)$ on a $f * \omega \in E$ . En effet

$$\|f * \omega\| = \|\int_{\mathbb{R}^3} f(.-y)\omega(y)\| \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} |\omega(y)|\|f(.-y)\| = \|\omega\|_1\|f\| \tag{2.69}$$

pour terminé on a

$$\|\Lambda S(t)fg\| \leqslant \|\sum_{-\infty}^{m} 2^k\tilde{\triangle}\Lambda S(t)\triangle_k fg\| + \|\sum_{m+1}^{+\infty} 2^{-2k}\tilde{\triangle}\Lambda S(t)\triangle_k fg\| \tag{2.70}$$

on a $\tilde{\triangle}\Lambda S(t) \in S(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^3)$ alors

$$\|\Lambda S(t)fg\| \leqslant \sum_{-\infty}^{m} 2^k c\|\triangle_k fg\| + \sum_{m+1}^{+\infty} 2^{-2k}\|\triangle_k fg\| \tag{2.71}$$

d'après l'estimation (2.35), d'espace adapté aux équation de Navier-Stokes

$$\|\Lambda S(t)fg\| \leqslant \sum_{-\infty}^{m} 2^k c\eta_k\|f\|\|g\| + \sum_{m+1}^{+\infty} 2^{-2k}\eta_k\|f\|\|g\| \tag{2.72}$$

d'où

$$\|\Lambda S(t)fg\| \leqslant (\sum_{-\infty}^{m} 2^k c\eta_k + \sum_{m+1}^{+\infty} 2^{-2k+3m}\eta_k)\|f\|\|g\| \tag{2.73}$$

□

Relions ce lemme à la preuve du théorème (2.1). Plus précisément, on a

$$v(t) = S(t)v_0 + B(v,v)(t)$$

où

$$B(v,u)(t) = -\int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla.(v\otimes u)(s)ds$$

et le lemme 2.1 entraîne

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|B(v,u)(t)\| \leqslant \left[\int_0^T \omega(t)dt\right] (\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v(t)\|)(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|) \tag{2.74}$$

avec $\omega(t) \in L^1([0,T])$.
le lemme suivant assurant l'existence et l'unicité de solution $v(t,x)$ de l'équation (2.28) dans $\mathcal{C}([0,T[;E)$

**Lemme 2.2.** *Soit X un espace de Banach et $B : X \times X \longrightarrow X$ une application bilinéaire telle que $\| \ \|$ désignant la norme dans $X$,on ait, pour tout $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$,*

$$\|B(x_1,x_2)\| \leqslant \eta\|x_1\|_X\|x_2\|_X \tag{2.75}$$

*Alors, pour tout $y \in X$ vérifiant*

$$4\eta\|y\| < 1 \tag{2.76}$$

*l'équation*

$$x = y + B(x,x) \tag{2.77}$$

*admet une solution $x$ dans X. En outre, cette solution $x$ vérifie*

$$\|x\| \leqslant 2\|y\| \tag{2.78}$$

*Pour démontrer ce résultat on considère la boule $B_R = \{x \in X; \|x\| \leqslant R\}$ de X, où R est définie par*

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta\|y\|}}{2\eta} \tag{2.79}$$

*il est claire que R est solution de l'équation*

$$\|y\| + \eta R^2 = R \tag{2.80}$$

*et que*

$$R \leqslant 2\|y\| \tag{2.81}$$

*Démonstration.* soit $x_n$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_{n+1} = y + B(x_n, x_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.82}$$

montrer que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, on a $x_{n+1} \in B_R$ :

$$\|x_{n+1}\| \leqslant \|y\| + \|B(x_n, x_n)\| \leqslant \|y\| + \eta\|x_n\|^2 \tag{2.83}$$

$$\leqslant \|y\| + \eta R^2 = R \tag{2.84}$$

et

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (2\eta R)\|x_n - x_{n-1}\| \tag{2.85}$$
$$\leqslant (2\eta R)^n\|x_1 - x_0\| \tag{2.86}$$

soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p > q$,

$$\begin{aligned}\|x_p - x_q\| &\leqslant [(2\eta R)^{p-1} + (2\eta R)^{p-2} + \ldots + (2\eta R)^q]\|x_1 - x_0\| \\ &= (2\eta R)^q[1 + (2\eta R)^2 + (2\eta R)^3 + \ldots + (2\eta R)^{p-q-1}]\|x_1 - x_0\| \\ &= (2\eta R)^q[\frac{1-(2\eta R)^{p-q}}{1-2\eta R}]\|x_1 - x_0\|\end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand $p$ et $q$ tend vers $\infty$, alors la suite est de Cauchy dans un espace de Banach $X$ alors elle est convergente vers $\tilde{x}$, on a $x_n \in B_R$ et puisque $B_R$ fermé donc $\tilde{x} \in B_R$ et vérifie la propriété (2.78) .

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}\| &\leqslant \|y\| + \|B(\tilde{x}, \tilde{x})\| \\ &\leqslant \|y\| + \eta\|\tilde{x}\|^2 \leqslant \|y\| + \eta R^2 = R \leqslant 2\|y\|\end{aligned}$$

L'unicité de la solution dans la boule $B_R$, soient x et y deux solution de (2.77)

$$\begin{aligned}\|x - y\| &= \|B(x, x) - B(y, y)\| \\ &\leqslant \|B(x - y, x)\| + \|B(y, x - y)\| \leqslant 2\eta R\|x - y\| \\ &< \|x - y\|\end{aligned}$$

Donc x=y dans la boule $B_R$, □

**Remarque 2.5.** *-L'espace $X$ qui nous intéresse est $\mathcal{C}([0, T[, E)$ normé avec la norme*

$$\|v\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|v(t, .)\| \tag{2.87}$$

il nous reste à démontrer (2.76), c'est à dire

$$4\eta(T) \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|S(t)v_0\| = 4\eta(T)\|v_0\| \tag{2.88}$$

$$4\eta(T)\|v_0\| = 4\eta(T)\| \lim_{t\longrightarrow 0} S(t)v_0\| = \lim_{t\longrightarrow 0} 4\eta(T)\|S(t)v_0\| \tag{2.89}$$

$$\leqslant 4\eta(T) \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|S(t)v_0\| \tag{2.90}$$

on a l'estimation (2.69) nous donne

$$\|S(t)v_0 \| \leqslant \|S(t)\|_1 \|v_0\|$$

et le semi groupe de la chaleur $S(t) \in L^1(\mathbb{R}^3)$. En effet :

$$\|S(t)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |(4\pi t)^{-\frac{3}{2}} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})|dx \tag{2.91}$$

on pose $y = \frac{x}{2\sqrt{t}}$, $\quad dy = \frac{dx}{(2\sqrt{t})^3}$

$$\begin{aligned} \|S(t)\|1 &= \int_{\mathbb{R}^3} (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} \exp(-|y|^2)(2\sqrt{t})^3 dy \\ &= (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} (\pi)^{\frac{3}{2}} (4t)^{\frac{3}{2}} = 1 \end{aligned}$$

par suite,

$$4\eta(T) \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|S(t)v_0\| = 4\eta(T)\|v_0\|$$

On trouve alors que pour $T = T(\|v_0\|)$ suffisamment petit, la condition $4\eta(T)\|v_0\| < 1$ est vérifiée. alors il existe $v(t,x) \in (\mathcal{C}([0,T[,E)$ de l'équation intégrale (2.28).

Montrons l'unicité d'une solution $v(t,x)$ (dans la boule $B_R$) $\mathcal{C}([0,T[,E)$ de l'équation intégrale (2.28). En effet :

soit $v'(t,x) \in B_{R'}$ un autre solution de l'équation intégrale (2.28) et $R \neq R'$ , on aurait :

$$\begin{aligned} \|v - v'\| &= \|B(v - v', v) + B(v', v - v')\| \\ &\leqslant \eta(T)(R + R')\|v - v'\| \end{aligned}$$

d'où, pour T suffisamment petit, $\eta(T)(R + R') < 1$, $v \equiv v'$ (voir, à ce propos ([11], page 254),([9], page 290) et([10], page 143)

**Lemme 2.3.** *soit $\upsilon(t)$ la solution des équation de Navier-Stokes donnée par le Théorème (2.1). Alors, pour tout $t \in [0, T[$, on a*

$$\|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\| \leqslant c\eta(t)\|\upsilon_0\| \tag{2.92}$$

*avec*

$$\eta(t) = t \sum_{4^{-j} \geqslant t} 2^j \eta_j + \sum_{4^{-j} < t} 2^{-j} \eta_j \tag{2.93}$$

*En particulier, on en déduit facilement que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \sup_{\|\upsilon_0\| \leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\| = 0 \tag{2.94}$$

La rapidité de convergence (2.94) est donnée, via (2.93),

*Démonstration.* d'après (2.78) et(2.74). On a l'estimation (2.92) est évident. En effet

$$\|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\| \leqslant [\int_0^t \omega(s)ds](\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \|\upsilon(s)\|)^2 \tag{2.95}$$

$$\leqslant 4[\int_0^t \omega(s)ds](\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \|S(s)\upsilon_0\|)^2 \tag{2.96}$$

et d'après (2.88) on obtient

$$\|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\| \leqslant 4 \left[\int_0^t \omega(s)ds\right] (\|\upsilon_0\|)^2 \tag{2.97}$$

Maintenant calculé $\int_0^t \omega(s)ds$, soit $4^{-m} \leqslant s \leqslant 4^{-m+1}$ on a

$$\omega(s) \leqslant c \sum_{j \geqslant m} 2^j \eta_j + \sum_{j > m} 2^{-2j+3m} \eta_j \tag{2.98}$$

les constantes $\eta_j$ étant définies par (2.34) et (2.35), pour tout $t > 0$ il existe $m_0$ telle que $4^{-m_0} \leqslant t \leqslant 4^{-m_0+1}$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \omega(s)ds &\leqslant \sum_{m \geqslant m_0} \int_{4^{-m}}^{4^{-m+1}} \omega(s)ds \\
&\leqslant c \sum_{m \geqslant m_0} \sup_{4^{-m} \leqslant s \leqslant 4^{-m+1}} \omega(s) 4^{-m} \\
&\leqslant c \sum_{m \geqslant m_0} \sum_{j \geqslant m} 2^{j-2m} \eta_j + c \sum_{m \geqslant m_0} \sum_{j > m} 2^{-2j+m} \eta_j \\
&= c \sum_{m \geqslant m_0} 2^{-2m} \sum_{j \leqslant m_0} 2^j \eta_j + c \sum_{j > m_0} \sum_{m=0}^{j-1} 2^{-2j+m} \eta_j \\
&\leqslant c 4^{-m_0} \sum_{k \geqslant 0} 2^{-2k} \sum_{j \leqslant m_0} 2^j \eta_j + c \sum_{j > m_0} 2^{-2j} \eta_j \sum_{m=0}^{j-1} 2^m \\
&\leqslant c 4^{-m_0} \sum_{j+1 \leqslant m_0} 2^j \eta_j + c \sum_{j > m_0} 2^{-j} \eta_j
\end{aligned}$$

d'où finalement,

$$\int_0^t \omega(s)ds \leqslant c 4^{-m_0} \sum_{4^{-j} \geqslant t} 2^j \eta_j + c \sum_{4^{-j} > t} 2^{-j} \eta_j =: \eta(t) \tag{2.99}$$

□

La démonstration du Théorème 2.1 sera terminée si l'on montre ce lemme suivant.

**Lemme 2.4.** *Soit $\upsilon(t)$ la solution des équations de Navier-Stokes donnée par le théorème (2.1). Alors pour tout $t \in [0, T[$,*

$$\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}([0, T[; \dot{B}_E^{0,1}(\mathbb{R}^3)) \tag{2.100}$$

*Démonstration.* Revenons à (2.27) et (2.46)

$$v(t) - S(t)v_0 = \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla.(v \otimes v)(s)ds \tag{2.101}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \triangle_j \mathbb{P}S(t-s)\tilde{\triangle}_j \nabla.(v \otimes v)(s)ds \tag{2.102}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_j(t) \tag{2.103}$$

On remarque que la transformé de Fourier de $d_j$ est porté par la couronne $\alpha 2^j \leqslant |\xi| \leqslant \beta 2^j$ où $(\beta > \alpha > 0)$.

$$d_j(t) = \int_0^t \tilde{d}_j(t-s,s)ds \tag{2.104}$$

pour montrer le lemme, il faut vérifier que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \|d_j(t)\| < \infty$.
Alors soient $f$ et $g$ deux fonctions (scalaires) $\in E$ si $4^{-m} \leqslant t-s \leqslant 4^{-m+1}$ et $j \leqslant m$ on a

$$\tilde{\Delta}_j \Lambda S(t-s)\Delta_j(fg)(s) = 2^j W_{j,t-s}\Delta_j(fg)(s) \tag{2.105}$$

par suite

$$\|\tilde{\triangle}_j \Lambda S(t-s)\triangle_j(fg)(s)\| \leqslant 2^j c\|\Delta_j fg\| \tag{2.106}$$

$$\leqslant 2^j \eta_j \sup_{0 \leqslant s \leqslant T}(\|f(s)\|) \sup_{0 \leqslant s \leqslant T}(\|g(s)\|) \tag{2.107}$$

et si $j > m$, on a

$$\tilde{\triangle}_j \Lambda S(t-s)\triangle_j(fg)(s) = 2^{-2j+3m} W_{j,t-s}\triangle_j(fg)(s) \tag{2.108}$$

alors

$$\|\tilde{\triangle}_j \Lambda S(t-s)\triangle_j(fg)(s)\| \leqslant 2^{-2j+3m}\|\Delta_j fg\| \tag{2.109}$$

$$\leqslant 2^{-2j+3m}\eta_j \sup_{0 \leqslant s \leqslant T}(\|f(s)\|) \sup_{0 \leqslant s \leqslant T}(\|g(s)\|) \tag{2.110}$$

Soit $v(t)$ une solution de l'équation de Navier-Stokes donc, si $4^{-m} \leqslant t-s \leqslant 4^{-m+1}$ et $j \leqslant m$, on a

$$\|\tilde{d}_j(t-s,s)\| \leqslant c2^j \eta_j (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|v(s)\|)^2 \tag{2.111}$$

et pour tout $4^{-m} \leqslant t-s \leqslant 4^{-m+1}$ et $j \geqslant m+1$, on a

$$\|\tilde{d}_j(t-s,s)\| \leqslant c2^{-2j+3m} \eta_j (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|v(s)\|)^2 \tag{2.112}$$

d'où

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \|d_j(t)\| \leqslant \int_0^t \sum_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{d}_j(t-s,s)\| ds \tag{2.113}$$

$$\leqslant \sum_{m\geqslant 0} \int_{4^{-m}+s}^{4^{-m+1}+s} \sum_{j\leqslant m} \|\tilde{d}_j(t-s,s)\| ds + \sum_{m\geqslant 0} \int_{4^{-m}+s}^{4^{-m+1}+s} \sum_{j\geqslant m+1} \|\tilde{d}_j(t-s,s)\| ds \tag{2.114}$$

$$\leqslant c \sum_{m\geqslant 0} \sum_{j\leqslant m} 2^{j-2m} \eta_j (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|v(s)\|)^2 + c \sum_{m\geqslant 0} \sum_{j\geqslant m+1} 2^{-2j+3m} \eta_j (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|v(s)\|)^2 \tag{2.115}$$

$$\leqslant c \sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|j|} \eta_j (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|v(s)\|)^2 \tag{2.116}$$

d'où

$$\|d_j(t)\| \leqslant 2^{-|j|} \eta_j (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|v(s)\|)^2 \tag{2.117}$$

ce qui termine la démonstration du lemme $\square$

Chapitre 3

# Applications

Dans ce chapitre on applique le théorème fondamentale sur certaines espaces de Banach classiques(Lebesgue, Sobolev, Hölder-Zygmund, Besov et Triebel Lizorkin ...) qui sont adaptés aux équation de Navier-Stokes au sens de la Définition(2.3). Les exemples d'espaces qui sont évidentes au sens de la Définition, si $E$ est une algèbre de fonction car

$$\|\triangle_j(fg)\| \leqslant \|\psi_j\|\|fg\| \leqslant c\|f\|\|g\| \tag{3.1}$$

d'où

$$\eta_j \leqslant c \qquad j \in \mathbb{Z}$$

de sorte que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{-|j|}\eta_j < \infty$$

Les exemples intéressants sont donc ceux où E n'est pas une algèbre de fonctions,

## 3.1 Les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$

**Théorème 3.1.** *Soit $p > 3$ fixé. Alors, pour toute donnée initiale $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$ vérifiant au sens des distributions $\nabla.v_0 = 0$, il existe un $T = T(\|v_0\|_p) > 0$ et une unique solution locale* "$mild$"

$\upsilon(t,x) \in \mathcal{C}([0,T[; L^p(\mathbb{R}^3))$ *des équations de Navier-Stokes. En outre*

$$\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}([0,T[; \dot{B}_p^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)) \tag{3.2}$$

*et aussi*

$$\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}([0,T[; \dot{B}_p^{\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)) \tag{3.3}$$

$\alpha = \alpha(p) = 1 - \frac{3}{p} > 0$ *et, pour tout* $t \in [0,T[$, *on a uniformément en* $\upsilon_0$

$$\sup_{\|\upsilon_0\| \leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\|_p \leqslant ct^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})} \tag{3.4}$$

Pour démontrer ce théorème il faut d'abord montrer le lemme suivant.

**Lemme 3.1.** *L'espace de Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^3)$ *est adapté aux équation de Navier-Stokes si et seulement si* $p > 3$. *Plus précisément, il existe deux constantes* $c \geqslant c' > 0$ *telles que, pour tout* $p \geqslant 2$ *et tout* $j \in \mathbb{Z}$,

$$c' 2^{\frac{3j}{p}} \leqslant \eta_j \leqslant c 2^{\frac{3j}{p}}$$

*Démonstration.* simple application de l'inégalité de Young entraîne si $(p \geqslant 2)$

$$\|\Delta_j(fg)\|_p \leqslant \|\psi_j\|_r \|fg\|_{\frac{p}{2}} \tag{3.5}$$

avec

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{p} + \frac{1}{r} - 1 \tag{3.6}$$

On a $\psi_j(x) = 2^{3j}(2^j x)$

$$\|\psi_j\|_r \leqslant c 2^{3j(1-\frac{1}{r})} = c 2^{\frac{3j}{p}} \tag{3.7}$$

et (l'inégalité de Hölder)

$$\|fg\|_{\frac{p}{2}} \leqslant \|f\|_p \|g\|_p \tag{3.8}$$

D'où, finalement

$$\eta_j \leqslant c2^{\frac{3j}{p}} \tag{3.9}$$

Pour terminé la démonstration du lemme, il ne nous reste qu'à prouver l'inégalité en sens inverse,

$$\eta_j \geqslant c' 2^{\frac{3j}{p}} \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

(voir[5],page 51 ),

□

Nous allons maintenant trouver de nouveau les résultats du théorème (3.1) en particulier la valeur limite $p > 3$, par une méthode directe assez standard (voir 2.3) pour utiliser le lemme de point fixe , il suffit d'étudier la continuité de l'opérateur bilinéaire donné par (2.41), agissant sur les fonctions scalaires $f = f(t,x)$ et $g = g(t,x)$,

**Lemme 3.2.** *Soit p>3 fixé. Alors l'opérateur bilinéaire $B(f,g)(t)$ donné par (2.41) est pour tout $T > 0$ , continue de $\mathcal{C}([0,T[; L^p(\mathbb{R}^3)) \times \mathcal{C}([0,T[; L^p(\mathbb{R}^3)) \longrightarrow \mathcal{C}([0,T[; L^p(\mathbb{R}^3))$*

*Démonstration.* On utilise encore l'inégalité de Young $(p \geqslant 2)$ et $\dfrac{1}{q} + \dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{p} + 1$, pour tout $t \geqslant 0$

$$\|B(f,g)(t)\|_p \leqslant \int_0^t (t-s)^{-2} \|\theta(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}})\|_q \|(fg)(s)\|_{\frac{p}{2}} \tag{3.11}$$

avec une changement de variable et l'inégalité de Hölder entraîne

$$\|B(f,g)(t)\|_p \leqslant [\int_0^t (t-s)^{-2+\frac{3}{2q}} ds] \|\theta\|_q (\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|f(s)\|_p)(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|g(s)\|_p) \tag{3.12}$$

En prenant le $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}$ on trouve

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|B(f,g)(t)\|_p \leqslant c \int_0^T \omega(t) dt (\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|f(s)\|_p)(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|g(s)\|_p) \tag{3.13}$$

avec

$$\omega(t) = t^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} \tag{3.14}$$

et pour tout $T > 0$ on a

$$\int_0^T \omega(t)dt = T^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})} \tag{3.15}$$

pour termine le lemme il faut montrer (3.2) et (3.3). Soit $p > 3$, $\upsilon(t) \in \mathcal{C}([0,T[, L^p(\mathbb{R}^3))$ alors d'après l'estimation (2.101), $\forall k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\|\Delta_k(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_p = \|\Delta_k \int_0^t \mathbb{P}S(t-s)\nabla.(\upsilon \otimes \upsilon)(s)ds\|_p \tag{3.16}$$

$$= \|\Delta_k \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \Delta_j \mathbb{P}S(t-s)\tilde{\Delta}_j \nabla.(\upsilon \otimes \upsilon)(s)ds\|l_p \tag{3.17}$$

$$= \|\sum_{j=k-2}^{k+2} \Delta_k d_j(t)\|_p \tag{3.18}$$

$$\leqslant \sum_{j=k-2}^{k+2} \|\Delta_k d_j(t)\|_p \tag{3.19}$$

les opérateurs $\Delta_k$ sont bornés dans $L^p(\mathbb{R}^3)$ et l'estimation (2.117), nous donne

$$\|\Delta_k(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_p \leqslant c(2^{-|k|}\eta_k)(\sup_{0\leqslant s\leqslant T} \|\upsilon(s)\|)^2 \tag{3.20}$$

$\upsilon(t) \in \mathcal{C}([0,T[, L^p(\mathbb{R}^3))$ solution local "mild", alors d'après l'estimation(2.78) et le lemme (3.2) on trouve :

$$\|\Delta_k(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_p \leqslant c(2^{-|k|}2^{\frac{3k}{p}})(\|\upsilon_0\|_p)^2 \tag{3.21}$$

d'où

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(2^{-k}\|\Delta_k(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0))\| \leqslant c(\|\upsilon_0\|_p)^2 \sup_{k\in\mathbb{Z}}(2^{-|k|+k(\frac{3}{p}-1)}) \tag{3.22}$$

donc

$$v(t) - S(t)v_0 \in \mathcal{C}([0,T[; \dot{B}_p^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3))$$

Soit $\alpha = 1 - \frac{3}{p} > 0$ et $\forall k \geq 0$,

$$2^{k(1-\frac{3}{P})}\|\Delta_k(v(t) - S(t)v_0)\|_p \leqslant c(\|v_0\|_p)^2 \tag{3.23}$$

alors en fait les même étapes de (3.21), on obtient

$$v(t) - S(t)v_0 \in \mathcal{C}([0,T[; \dot{B}_p^{\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3))$$

$\square$

À l'aide de ce lemme on peut démontrer le théorème (3.1) sans passé à la Définition (2.1) d'espace adapté aux équations de Navier-Stoke. c'est à dire le théorème (2.1) suit directement des lemmes(2.2), (3.2). On peut aussi le démontrer avec des lemmes (2.2), (2.3) et (3.1), il reste à calculer $\eta(t)$. En effet soit $t \geqslant 0$, il existe $m > 0$ telle que $4^{-m} \leqslant j \leqslant 4^{-m+1}$

$$\eta(t) = t\sum_{4^{-j}\geqslant t} 2^j\eta_j + c\sum_{4^{-j}>t} 2^{-j}\eta_j \leqslant 4^{-m+1}\sum_{4^{-j}\geqslant t} 2^j\eta_j + c\sum_{4^{-j}>t} 2^{-j}\eta_j \tag{3.24}$$

on a dans (3.24) que $4^{-j} \geqslant t$ équivalent à $m \geqslant j$ et $4^{-j} > t$ équivalent à $m \leqslant j$ et $\eta_j$ provient du lemme (3.1), alors on a

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m+1}\sum_{m\geqslant j} 2^j 2^{\frac{3j}{p}} + c\sum_{m\leqslant j} 2^{-j}2^{\frac{3j}{p}} \tag{3.25}$$

on pose $j = m + k$,

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m+1}\sum_{0\geqslant k} 2^{m+k}2^{(m+k)\frac{3}{p}} + c\sum_{0\leqslant k} 2^{-(m+k)}2^{\frac{3}{p}(m+k)} \tag{3.26}$$

d'où

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m+1}\sum_{0\geqslant k} 2^{m+k}2^{(m+k)\frac{3}{p}} + c\sum_{0\leqslant k} 2^{-(m+k)}2^{\frac{3}{p}(m+k)} \tag{3.27}$$

$$\eta(t) \leqslant c2^{m(\frac{3}{p}-1)} \tag{3.28}$$

d'où

$$\eta(t) \leqslant ct^{\frac{1}{2}(\frac{3}{p}-1)} \tag{3.29}$$

ce qui termine la démonstration.

## 3.2 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$

Il s'agit de l'espace de Banach $H^s(\mathbb{R}^3)$, définit par la norme suivante.

$$\|f\|_{H^s} = \left[\int_{\mathbb{R}^3}(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.30}$$

**Lemme 3.3.** *si*

$$0 < s < \frac{3}{2}, \quad f \in H^s(\mathbb{R}^3), \quad g \in H^s(\mathbb{R}^3), alors \qquad fg \in H^{2s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \tag{3.31}$$

*et si*

$$s > \frac{3}{2}, \quad f \in H^s(\mathbb{R}^3), \quad g \in H^s(\mathbb{R}^3), alors \qquad fg \in H^s(\mathbb{R}^3) \tag{3.32}$$

$H^s(\mathbb{R}^3)$ est un espace de l'algèbre pour $s > \dfrac{3}{2}$, voir ([18]).

**Remarque 3.1.** *L'énoncé est inexacte dans les cas limites $s = 0$ et $s = \frac{3}{2}$, En effet, si l'on utilise pour $s = 0$ l'information minimale est $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^3)$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^3)$. On a $L^1(\mathbb{R}^3) \nrightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$. De même, si $s = \frac{3}{2}$ l'énoncé du lemme serait que $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est une algèbre, ce qui est faux.*

**Lemme 3.4.** *L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ est adapté aux équations de Navier-Stokes si et seulement si $s > \frac{1}{2}$. Plus précisément.*

$$0 \leqslant s \leqslant \frac{3}{2}, \quad j \geqslant 0, \eta_j \leqslant c2^{-j(s-\frac{3}{2})} \tag{3.33}$$

$$s = \frac{3}{2}, \quad j \geqslant 0, \eta_j \leqslant c(j+1) \tag{3.34}$$

$$s > \frac{3}{2}, \quad j \geqslant 0, \eta_j \leqslant c \tag{3.35}$$

$$s \geqslant 0, \quad j < 0, \eta_j \leqslant c \tag{3.36}$$

Pour démontrer le lemme 3.4, nous utilise $l'algorithme\ du\ paraproduit\ de\ J.M.Bony$ (voir par exemple, [1], [3], [13]). L'importance de cet algorithme vient de ce qu'il facilite considérablement l'évaluation de la quantité $\| \triangle_j(fg) \|$ pour $f$ et $g$ dans un espace de Banach, dont la norme sera définie à l'aide de Littlewood-Paley.

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \triangle_j f \tag{3.37}$$

$$fg = (\sum_{j\in\mathbb{Z}} \triangle_j f)(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \triangle_j g) = \sum_{n=0}^{\infty}[S_{n+1}fS_{n+1}g - S_nfS_ng] + S_0fS_0g \tag{3.38}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[(S_nf + \Delta_nf)(S_ng + \Delta_ng) - S_nfS_ng] + S_0fS_0g \tag{3.39}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}[\Delta_nfS_ng + \Delta_ngS_nf] + S_0fS_0g \tag{3.40}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Delta_nfS_{n-2}g + \sum_{n=0}^{\infty}\Delta_ngS_{n-2}f + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=n-2}^{n}\Delta_nf\Delta_lg + \Delta_ng(\Delta_{n-2}f + \Delta_{n-1}f)\right) \tag{3.41}$$

$$+ S_0fS_0g$$

Les spectres du produit $\Delta_nfS_{n-2}g$ appartiennent à la couronne dyadique $\frac{1}{4}2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^k(3 + \frac{1}{2})$. D'autre part, les spectres de chaque produit $\Delta_if\Delta_jg$ pour tout $\{i, j\} \in \{n-2, n-1, n\}$, appartiennent à la boule $|\xi| \leqslant c2^n$ et le spectre de $S_0fS_0g$ appartient à la boule $|\xi| \leqslant c$. Tout cela signifie que $\Delta_j(fg)$ se compose en trois morceaux : $\Delta_j(\Delta_nfS_{n-2}g)$ pour $|j-n| \leqslant 2$,

$\Delta_j(\Delta_n g S_{n-2} f)$ pour $|j-n| \leqslant 2$, et enfin $\Delta_j \sum_{n=j-4}^{\infty} \left( \sum_{l=n-2}^{n} \Delta_n f \Delta_l g + \Delta_n g(\Delta_{n-2} f + \Delta_{n-1} f) \right)$. Dans chacun des trois cas, nous ne retiendrons que les termes typiques pour ne pas alourdir les notations, avec ces simplifications,

$$\Delta_j(fg) = \sum_{|j-n|\leqslant 2} \Delta_j(\Delta_n f S_{n-2} g) + \sum_{|j-n|\leqslant 2} \Delta_j(\Delta_n g S_{n-2} f) + \Delta_j \sum_{n\geqslant j} (\Delta_n f \Delta_n g) \tag{3.42}$$

la norme dans $H^s(\mathbb{R}^3)$ est caractérisé dans une décomposition de Littlewood-Paley par

$$\|f\|_{H^s} = \|S_0 f\|_2 + (\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js} \|\Delta j f\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

est équivalente à la norme (3.30) (voir [2],[16] ).Alors venons-en à l'estimation de $\eta_j$ dans l'espace $H^s(\mathbb{R}^3)$, analysons d'abord, pour $j \geqslant 0$ et $0 < s < \dfrac{3}{2}$.

$$\|\Delta_k f S_{k-2} g\|_2 =(\int_{\mathbb{R}^3} |\Delta_k f S_{k-2} g|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.44}$$

$$\leqslant \|\Delta_k f\|_2 \|S_{k-2} g\|_\infty \tag{3.45}$$

on a

$$\|S_{k-2} g\|_\infty \leqslant \|S_0 g\|_\infty + \sum_{0<j<k-2} \|\Delta_j\|_\infty \tag{3.46}$$

et, d'après l'inégalité de S.Bernstein (voir [14], page 14)

$$\|S_{k-2} g\|_\infty \leqslant \|S_0 g\|_2 + \sum_{0<j<k-2} 2^{j\frac{3}{2}} \|\triangle_j g\|_2 \tag{3.47}$$

On a $0 < s < \dfrac{3}{2}$ d'où

$$\|S_{j-2} g\|_\infty \leqslant 2^{j(\frac{3}{2}-s)} \|g\|_{H^s} \tag{3.48}$$

tandis que, si $s = \dfrac{3}{2}$

$$\|S_{j-2} g\|_\infty \leqslant c(j+1) \|g\|_{H^s} \tag{3.49}$$

D'ailleurs, pour tout $s \geqslant 0$

$$\|\Delta_k f\|_2 \leqslant 2^{-ks}\|f\|_{H^s} \tag{3.50}$$

pour tout $s \geqslant 0$, grâce à l'inégalité de Young et Hölder

$$\|\Delta_j \sum_{k\geqslant j}(\Delta_k f \Delta_k g)\|_2 \leqslant \|\psi_j\|_2\| \sum_{k\geqslant j}(\Delta_k f \Delta_k g)\|_1 \tag{3.51}$$

$$\leqslant c2^{\frac{3j}{2}} \sum_{k\geqslant j} \|\Delta_k f\|_2 \|\Delta_k g\|_2 \tag{3.52}$$

$$\leqslant c2^{\frac{3j}{2}} 2^{-js}2^{-js}\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} \tag{3.53}$$

Enfin, si $s > \dfrac{3}{2}$, on utilise le fait que $H^s(\mathbb{R}^3)$ est une algèbre Banach (3.1). alors, pour tout $j \geqslant 0$,

$$\|\Delta_j fg\|_{H^s} \leqslant \|\psi_j\|_1 \|fg\|_{H^s} \tag{3.54}$$

$$\leqslant c\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} \tag{3.55}$$

si $s \geqslant 0$, pour tout $j < 0$ d'après inégalité de Young

$$\|\triangle_j fg\|_{H^s} \leqslant c\|\triangle_j fg\|_2 \tag{3.56}$$

$$\leqslant \|\psi_j\|_2\|fg\|_1 \leqslant c\|f\|_2\|g\|_2 \tag{3.57}$$

$$\leqslant c\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} \tag{3.58}$$

p montrons la première estimation du lemme (3.4), pour tout $0 \leqslant s < \dfrac{3}{2}$, pour tout $j \geqslant 0$ et d'après les estimations précédentes on a

$$\|\Delta_j fg\|_{H^s} = \|S_0 \Delta_j fg\|_2 + \left(\sum_{k\geqslant 0} 2^{2ks}\|\Delta_j \Delta_k fg\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $j \geqslant 2$ on a $\|S_0\Delta_j fg\| = 0$, $\|S_0\Delta_j fg\| \leqslant c\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$ alors

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j fg\|_{H^s} &\leqslant c\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} + \left(\sum_{|k-j|\leqslant 2} 2^{2ks}\|\Delta_j\Delta_k fg\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant c\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s} + c\left(\sum_{|k-j|\leqslant 2} 2^{2k(\frac{3}{2}-s)}\|f\|_{H^s}^2\|g\|_{H^s}^2\right) \\
&\leqslant c2^{j(\frac{3}{2}-s)}\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}
\end{aligned}$$

alors $\|\Delta_j fg\|_{H^s} \leqslant c2^{j(\frac{3}{2}-s)}\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$, pour tout $0 \leqslant s < \dfrac{3}{2}$ et pour tout $j \geqslant 0$, et les autres estimations sont traités de même analogue.

Alors le lemme est complètement démontré, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ est adapté aux équations de Navier-Stokes si et seulement si $s > \dfrac{1}{2}$. si $s = \dfrac{1}{2}$ est traité par Cannone(voir [5] le chapitre 3) on passe à le théorème suivante :

**Théorème 3.2.** *Soit $s > \dfrac{1}{2}$ fixé. Alors, pour toute donnée initiale $\upsilon_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ vérifiant au sens des distributions $\nabla.\upsilon_0 = 0$, il existe un $T = T(\|\upsilon_0\|_{H^s}) > 0$ et une unique solution locale "mild" $\upsilon(t,x) \in \mathcal{C}([0,T[; H^s(\mathbb{R}^3))$ des équations de Navier-Stokes. En outre, si $\dfrac{1}{2} < s \leqslant \dfrac{3}{2}$, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}([0,T[; H^{2s-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \tag{3.59}$$

*et si $s > \dfrac{3}{2}$ pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}([0,T[; H^{s+1-\varepsilon}(\mathbb{R}^3)) \tag{3.60}$$

*On a aussi, pour tout $t \in [0,T[$, uniformément en $\upsilon_0$, si $\dfrac{1}{2} < s \leqslant \dfrac{3}{2}$,*

$$\sup_{\|\upsilon_0\|\leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\|_{H^s} \leqslant ct^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \tag{3.61}$$

*si $s > \dfrac{3}{2}$,*

$$\sup_{\|\upsilon_0\|\leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\|_{H^s} \leqslant ct^{\frac{1}{2}} \tag{3.62}$$

*Démonstration.* L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$ est adapté aux équations de Navier-Stokes si et seulement si $s > \dfrac{1}{2}$ , $v(t)$ solution de l'équation de Navier-Stoke pour tout $t \in [0, T[$, alors d'après le lemme (2.3) on a

$$\|v(t) - S(t)v_0\| \leqslant c\eta(t)\|v_0\|^2$$

où

$$\eta(t) = t \sum_{4^{-j} \geqslant t} 2^j \eta_j + c \sum_{4^{-j} > t} 2^{-j} \eta_j$$

nous cherchons à estimer $\eta(t)$, En effet :
soit $4^{-m_0} \leqslant t \leqslant 4^{-m_0+1}$, on a $4^{-j} \geqslant t$ équivalent à $m_o \geqslant j$, et $4^{-j} < t$ équivalent à $m_0 \leqslant j$, d'où :

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m_0+1} \sum_{j \leqslant m_0} 2^j \eta_j + c \sum_{j \geqslant m_0} 2^{-j} \eta_j \tag{3.63}$$

on pose $j - m_0 = k$,

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m_0+1} \sum_{k \leqslant 0} 2^{m_0+k} \eta_{k+m_0} + c \sum_{k \geqslant 0} 2^{-m_0-k} \eta_{k+m_0} \tag{3.64}$$

$$\leqslant c2^{-2m_0} \left[ \sum_{k < -m_0} 2^{m_0+k} \eta_{k+m_0} + \sum_{-m_0 \leqslant k < 0} 2^{m_0+k} \eta_{k+m_0} \right] + c \sum_{k \geqslant 0} 2^{-m_0-k} \eta_{k+m_0} \tag{3.65}$$

si $\dfrac{1}{2} < s < \dfrac{3}{2}$, d'après le lemme (3.4), on a :

$$\begin{aligned} \eta(t) &\leqslant c2^{-2m_0} \left[ +2^{m_0} \sum_{-m_0 \leqslant k < 0} 2^k 2^{-(k+m_0)(s-\frac{3}{2})} \right] + c2^{-m_0(s-\frac{1}{2})} \sum_{k \geqslant 0} 2^{k(\frac{1}{2}-s)} \\ &\leqslant c2^{-2m_0} + 2^{-m_0(s-\frac{1}{2})} \sum_{-m_0 \leqslant k < 0} 2^{k(1+\frac{3}{2}-s)} + c2^{-m_0(s-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

puisque $2^{-2m_0} \leqslant 2^{-m_0(s-\frac{1}{2})}$, alors

$$\eta(t) \leqslant t^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \tag{3.66}$$

si $s=\frac{3}{2}$, l'estimation (3.64) nous donne

$$\eta(t) \leqslant c2^{-2m_0}\left[\sum_{k<-m_0} 2^{m_0+k}c + \sum_{-m_0\leqslant k<0} 2^{m_0+k}(k+m_0+1)\right] + c\sum_{k\geqslant 0} 2^{-m_0-k}(k+m_0+1) \tag{3.67}$$

d'où

$$\eta(t) \leqslant t^{\frac{1}{2}} \tag{3.68}$$

on conclut que pour tout $\frac{1}{2} < s \leqslant \frac{3}{2}$

$$\|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\|_{H^s} \leqslant ct^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}\|\upsilon_0\|_{H^s} \tag{3.69}$$

donc

$$\sup_{\|\upsilon_0\|\leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\| \leqslant ct^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}$$

si $s > \frac{3}{2}$, on peut démontrer l'estimation (3.62) sans peine comme la démonstration de (3.61). En effet

d'après le lemme (3.4) et l'estimation (3.64) on a

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m_0+1}\sum_{k\leqslant 0} 2^{m_0+k}c + c\sum_{k\geqslant 0} 2^{-m_0-k}c \tag{3.70}$$

$$\leqslant c2^{-2m_0}2^{m_0} + c2^{-m_0} \tag{3.71}$$

$$\leqslant c2^{-m_0} \tag{3.72}$$

d'où le résultats

(3.59) et (3.60) sont conséquence de l'estimation (2.117). En effet si $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$, l'espace $H^s$ est adapté aux équations de Navier-Stokes, alors l'estimation (2.117) nous donne pour tout $t \in [0, T[$ et tout $j \geqslant 0$.

$$\|\Delta_j(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_{H^s} \leqslant c2^{-j}\eta_j\|\upsilon_0\|_{H^s} \tag{3.73}$$

$$\|S_0\Delta_j(v(t)-S(t)v_0)\|_2+(\sum_{|k-j|2}(2^{ks}\|\Delta_k\Delta_j(v(t)-S(t)v_0)\|_2)^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant c2^{-j}2^{j(s-\frac{3}{2})} \quad (3.74)$$

on utilise série d'unité (2.14) alors, pour tout $\epsilon>0$, tout $t\in[0,T[$ et tout $j\geqslant 0$ et $\frac{1}{2}<s<\frac{3}{2}$,

$$\|\Delta_j(v(t)-S(t)v_0)\|_2 \leqslant \sum_{|k-j|\leqslant 2}\|\Delta_k\Delta_j(v(t)-S(t)v_0)\|_2) \quad (3.75)$$

$$\leqslant c2^{-j(2s-\frac{1}{2}-\epsilon)}2^{-j\epsilon} \quad (3.76)$$

si $s=\frac{3}{2}$, pour tout $\epsilon>0$, tout $t\in[0,T[$ et tout $j\geqslant 0$ ,

$$\|\Delta_j(v(t)-S(t)v_0)\|_2\leqslant c2^{-j(\frac{5}{2}-\epsilon)}2^{-j\epsilon}(j+1) \quad (3.77)$$

et si $\frac{1}{2}<s\leqslant\frac{3}{2}$, on a

$$\|S_0(v(t)-S(t)v_0)\|_2\leqslant ct^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}\|v_0\|_{H^s} \quad (3.78)$$

alors les estimation (3.75), (3.77 )et (3.78) nous donne finalement (3.59).
(3.60) se déduit d'une manière analogue. □

## 3.3 Les espaces de Hölder-Zygmund $C^\alpha(\mathbb{R}^3)$

Nous nous intéressons ici aux espaces $C^\alpha(\mathbb{R}^3)$, $\alpha>0$, non homogènes définis par :

$$\|f\|=\|S_0f\|_\infty+\sup_{j\geqslant 0}(2^{j\alpha}\|\Delta_jf\|_\infty) \quad (3.79)$$

Dans ce cas particulier, nous disposons d'une information supplémentaire, à savoir que $C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ est une algèbre et donc adapté aux équations de Navier-Stokes. En rappelant que $C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ est un espace de Banach non séparable, on obtient facilement le théorème suivant :

**Théorème 3.3.** *Soit $\alpha>0$ fixé. Alors pour toute donnée initiale $v_0\in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ vérifiant au sens des distributions $\nabla.v_0=0$ il existe un $T=T(\|v_0\|)>0$ et une unique solution locale* *"mild" $\upsilon(t,x) \in \mathcal{C}_*([0,T[;C^\alpha(\mathbb{R}^3))$ des équations de Navier-Stokes. En outre $\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}_*([0,T[;C^{\alpha+1}(\mathbb{R}^3))$ et on a aussi, pour tout $t \in [0,T[$, uniformément en $\upsilon_0$, l'estimation suivante :*

$$\sup_{\|\upsilon_0\|\leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\| \leqslant c\sqrt{t} \tag{3.80}$$

*Démonstration.* .

montrons que, pour tout $t \in [0,T[$, $\eta(t) \leqslant c\sqrt{t}$, En effet :

$\eta_j \leqslant c$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, car l'espace de Hölder-Zygmund est une algèbre, soit $t \in [0,T[$ il existe $m_0$ telle que $4^{-m_0} \leqslant t \leqslant 4^{-m_0+1}$, l'estimation (3.64) nous donne :

$$\eta(t) \leqslant 4^{-m_0+1} \sum_{k\leqslant 0} 2^{m_0+k} c + c \sum_{k\geqslant 0} 2^{-m_0-k} c \tag{3.81}$$

$$\leqslant c2^{-2m_0} 2^{m_0} + c2^{-m_0} \tag{3.82}$$

$$\leqslant c2^{-m_0} \tag{3.83}$$

d'après le théorème fondamental, on a

$$\sup_{\|\upsilon_0\|\leqslant 1} \|\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0\|_{C^\alpha} \leqslant c\sqrt{t}$$

$C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ est adapté aux équations de Navier-Stokes, pour tout $\alpha > 0$, pour tout $j \geqslant 0$, on a

$$\|\Delta_j(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_{C^\alpha} \leqslant c2^{-j}\eta_j \|\upsilon_0\|_{C^\alpha} \tag{3.84}$$

d'où

$$2^{j\alpha}\|\Delta_j(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_\infty \leqslant c2^{-j}\|\upsilon_0\|_{C^\alpha} \tag{3.85}$$

et

$$\|S_0(\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0)\|_\infty \leqslant c\sqrt{t}\|\upsilon_0\|_{C^\alpha} \tag{3.86}$$

d'après (3.85),(3.86) et pour tout $t \in [0,T[$, $\alpha > 0$ on a

$$\upsilon(t) - S(t)\upsilon_0 \in \mathcal{C}_*([0,T[;C^{\alpha+1}(\mathbb{R}^3))$$

□

## 3.4 Les espaces de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$

Comme on l'a déjà vu, Les espaces de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ sont définis par la norme suivante :

$$\|f\| = \|S_0 f\|_p + \left\{\sum_{j\geqslant 0}(2^{\alpha j}\|\Delta_j f\|_p)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{3.87}$$

Pour que la condition (2.33) soit vérifiée, on est amené à supposer $\alpha \geqslant 0$ (voir [18], page 145) et, pour que $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ soit un espace de Banach, on demandera en outre que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et que $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

**Lemme 3.5.** *l'espace de Besov $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ est adapté aux équations de Navier-Stokes dans les cinq cas suivantes :*

$$1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ \alpha > \frac{3}{p} \tag{3.88}$$

$$1 \leqslant p \leqslant \infty,\ q = 1,\ \alpha = \frac{3}{p} \tag{3.89}$$

$$2 \leqslant p \leqslant 3,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ \frac{3}{p} - 1 < \alpha \leqslant \frac{3}{p} \tag{3.90}$$

$$3 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \alpha \leqslant \frac{3}{p} \tag{3.91}$$

*et*

$$3 < p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant 2,\ \alpha = 0. \tag{3.92}$$

*Démonstration.* d'abord que, dans les deux cas suivants :

$$1 \leqslant p \leqslant \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ \alpha > \frac{3}{p} \tag{3.93}$$

et

$$1 \leqslant p \leqslant \infty,\ q = 1,\ \alpha = \frac{3}{p} \tag{3.94}$$

$B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ est une algèbre voir ([18], page 145) et donc un espace adapté aux équations de Navier-Stokes.
D'ailleurs, si $0 \leqslant \alpha < \frac{3}{p}$ et $p \neq \infty$, $(j \geqslant 0)$,

$$\|S_{j-2}f\Delta_j g\|_p \leqslant \|S_{j-2}f\|_\infty \|\Delta_j g\|_p \tag{3.95}$$
$$\leqslant c2^{-j\alpha}2^{\frac{3j}{p}}2^{-j\alpha}\|f\|\|g\|. \tag{3.96}$$

tandis que si $\alpha = \frac{3}{p} \geqslant 0$, $(j \geqslant 0)$,

$$\|S_{j-2}f\Delta_j g\|_p \leqslant \|S_{j-2}f\|_\infty \|\Delta_j g\|_p \tag{3.97}$$
$$\leqslant c(j+1)2^{-j\alpha}\|f\|\|g\|. \tag{3.98}$$

L'inégalité de Young donne, si $2 \leqslant p \leqslant \infty$, et $\alpha \neq 0$, $(j \geqslant 0)$,

$$\|\Delta_j(\sum_{k\geqslant j}\Delta_k f\Delta_k g)\|_p \leqslant c2^{\frac{3j}{p}}\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k f\|_p\|\Delta_k g\|_p \tag{3.99}$$
$$\leqslant c2^{\frac{3j}{p}}\sup_{k\geqslant j}(\|\Delta_k g\|_p)\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k f\|_p \tag{3.100}$$
$$\leqslant c2^{\frac{3j}{p}}\sup_{k\geqslant j}(\|\Delta_k g\|_p)\sum_{k\geqslant j}(2^{k\alpha}\|\Delta_k f\|_p 2^{-k\alpha}) \tag{3.101}$$
$$\tag{3.102}$$

d'après l'inégalité de Hölder, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$

$$\sum_{k\geqslant j}(2^{k\alpha}\|\Delta_k f\|_p 2^{-k\alpha}) \leqslant (\sum_{k\geqslant j}((2^{k\alpha}\|\Delta_k f\|_p)^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{k\geqslant j}2^{-k\alpha}r))^{\frac{1}{r}} \tag{3.103}$$
$$\leqslant c2^{-j\alpha}\|f\| \tag{3.104}$$

et on a $l^q \hookrightarrow l^\infty$, car $q \leqslant \infty$

$$\sup_{k\geqslant j}(\|\Delta_k g\|_p) \leqslant 2^{-j\alpha}\sup_{k\geqslant j}(2^{k\alpha}\|\Delta_k g\|_p) \tag{3.105}$$
$$\leqslant c2^{-j\alpha}\|g\| \tag{3.106}$$

donc

$$\|\Delta_j(\sum_{k\geqslant j}\Delta_k f\Delta_k g)\|_p \leqslant c2^{\frac{3j}{p}}2^{-j\alpha}2^{-j\alpha}\|f\|\|g\| \tag{3.107}$$

tandis que si $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha = 0$ et $1 \leqslant q \leqslant 2$, $j \geqslant 0$.

$$\|\Delta_j(\sum_{k\geqslant j}\Delta_k f\Delta_k g)\|_p \leqslant c2^{\frac{3j}{p}}\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k f\|_p\|\Delta_k g\|_p \tag{3.108}$$

$$\leqslant c2^{\frac{3j}{p}}(\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k g\|_p^r)^{\frac{1}{r}} \tag{3.109}$$

$$\tag{3.110}$$

$q \leqslant r$ d'après l'injection continue de $l^q \hookrightarrow l^r$, on a

$$\|\Delta_j(\sum_{k\geqslant j}\Delta_k f\Delta_k g)\|_p \leqslant c2^{\frac{3j}{p}}(\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{k\geqslant j}\|\Delta_k g\|_p^q)^{\frac{1}{q}} \tag{3.111}$$

$$\leqslant c2^{\frac{3j}{p}}\|f\|\|g\|. \tag{3.112}$$

□

Le théorème (2.1) s'applique et fournit une et une seule solution "mild" $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T[; B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3))$.

**Remarque 3.2.** *On aura remarqué que si* $p = q = 2$, *alors* $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3) \backsim H^\alpha(\mathbb{R}^3)$ *et l'on retrouve* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Si* $p = q = \infty$, *alors* $B_\infty^{\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3) \backsim C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ *et l'on a bien* $\alpha > 0$.

## 3.5 Les espaces de Triebel $F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$

On rappelle que ces espaces $F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ sont définis dans une décomposition de Littlewood-Paley par :

$$\|f\| = \|S_0 f\|_p + \left\|\{\sum_{j\geqslant 0}(2^{\alpha j}|\Delta_j f|)^q\}^{\frac{1}{q}}\right\|_p \tag{3.113}$$

on est amené à supposer que $1 \leqslant p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty$ , et $\alpha \geqslant 0$.

**Lemme 3.6.** *L'espaces de Triebel $F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ est adapté aux équations de Navier-Stokes dans les six cas suivantes :*

$$1 < p < \infty,\ 1 < q < \infty,\ \alpha > \frac{3}{p} \tag{3.114}$$

$$1 \leqslant p < q \leqslant \infty,\ \alpha > \frac{3}{p} \tag{3.115}$$

$$1 \leqslant q \leqslant p < \infty,\ \alpha > \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \tag{3.116}$$

$$2 \leqslant p \leqslant 3,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ \frac{3}{p} - 1 < \alpha \leqslant \frac{3}{p} \tag{3.117}$$

$$3 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \alpha \leqslant \frac{3}{p} \tag{3.118}$$

$$3 < p < \infty,\ 1 \leqslant q \leqslant 2,\ \alpha = 0. \tag{3.119}$$

Dans les trois premiers estimations L'espaces de Triebel $F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3)$ est une algèbre multiplicative, pour les estimations qui reste en fait les mêmes démonstration du lemme précèdent .
Le théorème (2.1) s'applique et fournit une et une seule solution "mild" $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T[; F_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^3))$.

# Conclusion

Nous déduisons que la solution forte "mild" des équations de Navier-Stokes existe et elle est unique dans l'espace qui adapté aux équations de Navier-Stokes.
Nous vous donnons quelques limitations liées à la méthode de résolution de l'équation de Navier-Stokes tout long de ce projet :

Dans l'étude de $v(t) - S(t)v_0 = B(v, v)(t)$ nous avons toujours remplacé le terme bilinéaire $B(v, u)$ par sa version scalaire simplifiée et, en conséquence, nous nous sommes limités à donner seulement des estimations composante par composante. alors est ce que on peut mieux exploiter le caractère oscillant du terme bilinéaire $B(v, u)$,

En réalité, on ne doit pas calculer une solution $v(t, x)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier. Il conviendrait, en conséquence, de remplacer, dans les théorèmes que nous avons énoncés, l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier par un ouvert $\Omega$ suffisamment régulier. Dans ce cas, la méthode d'analyse de Littlewood-Paley ne s'applique plus.

Un difficulté qui se pose est la suivante. Lorsque l'on considère un ouvert $\Omega$ au lieu de l'espace $\mathbb{R}^3$, on ne doit pas se donner seulement une condition initiale $v_0(x)$, mais aussi des conditions aux limites, à savoir des conditions qui doivent être satisfaites par la solution aux bords de l'ouvert $\Omega$.

# Bibliographie


[1] S. ALINHAC et P. GERARD, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash Moser*. Savoir Actuels, Inter Éditions du C.N.R.S. 1991.

[2] J. BERGH and J. LÖFSTRÖM, *Interpolation spaces. An introduction* . Springer-Verlag, 1976.

[3] J. M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup 4éme Série 14 :209-246, 1981.

[4] M. CANNONE, *Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations*. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, vol. 3, S. Friedlander and D. Serre, Elsevier, 2004

[5] M. CANNONE, *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes* . Diderot Éditeurs, Arts et Sciences, Paris, New York, Amsterdam, 1995.

[6] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* . Dover, New-York, 1981.

[7] P. FEDERBUSH, *Navier ans d Stokes meet the wavelet* . Comm. Math. Phys.155 :219-248. 1993.

[8] M. FRAZIER, B. JAWERTH and G. WEISS, *Littlewood-Paley theory and the stydy of function spaces*. Monograph in the CBM-AMS, Regional Conference Series in Mathematics, 79, American Mathematical Society 1991.

[9] H. FUJITA and T. KATO, *On the Navier-Stokes initial value probleme* . I. Arch. Rat. Mech. Anal. 16 :269-315. 1964.

[10] T. KATO, *Strong solution of the Navier-Stokes equations in Morrey space*. Bol. Soc. Brasil. Math(N.S) 22 :127-155 .1992 .

[11] T. KATO and H. FUJITA, *On the non-stationary Navier system* . Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32 :243-260. 1962.

[12] M. LESIEUR, *La turbulence développée*. La Recherche. 139 :1412-1425. Décembre 1982.

[13] Y. MEYER,*Remarque sur un théorème de J. M. Bony*. Supp. Rend. Circ. Math. Palermo 1 :1-20. 1981.

[14] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs I : Ondelettes*. Hermann, Paris. 1990.

[15] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*. Springer-Verlag, Appl. Math. Sciences, 44. 1983.

[16] J. PEETRE, *New thoughts on Besov spaces*. Duke Univ. Math. Series, Durham. N. C. 1976.

[17] M. E. TAYLOR, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*. Comm. Part. Diff. Equat. 17 : 1407-1456 .1992.

[18] H. TRIEBEL, *Theory of function space II*. Monographs in Mathematics, 84, Birkhauser Verlag, Basel 1992 .