UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

DEPARTEMENT DES MATHEMATIQUES

Master Mathématique et Application au Calcul Scientifique

(MACS)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Master Sciences et Techniques (MST)

Modèle des frères London et Ginzburg-Landau: Extension de quelques résultats mathématiques

Réalisé par: HDACH YASSINE

Encadré par: Pr. EL KHOMSSI MOHAMMED

Soutenu le 14 juin 2017

Devant le jury composé de:

-Pr.EL AYADI RACHID	Faculté des Sciences et Technique Fès	Examinateur
-Pr.EL HILALI ALAOUI AHMED	Faculté des Sciences et Technique Fès	Examinateur
-Pr.EL KHOMSSI MOHAMMED	Faculté des Sciences et Technique Fès	Encadrant
-Pr.EZZAKI FATIMA	Faculté des Sciences et Technique Fès	Examinateur
-Pr. HILALI ABDELMAJID	Faculté des Sciences et Technique Fès	Président

Année Universitaire 2016 / 2017

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à témoigner ma vive reconnaissance au Professeur
MOHAMED EL KHOMSSI qui a guidé avec beaucoup d'attention, de gentillesse et de patience,sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude aux Professeurs EL AYADI RACHID, EL HILALI ALAOUI AHMED , EZZAKI FATIMA et HILALI ABDELMAJID d'avoir accepter et consacrer une partie de leur temps à la participation au jury.

Un grand merci à tous mes collègues de UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH,et à tous ceux qui m'ont aidé un jour.

Enfin, et à ce stade, ils doivent déjà se sentir oubliés, je pense à ma mère, mon père, mes sœurs, mon frère et toute ma famille. Leurs amour, affection et soutient.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements 2
Résumé 6
Abstract 7

1 Phénomène physique **8**
1.1 Supraconducteurs à basse température critique 8
1.2 Supraconducteurs à haute température critique 8
1.3 Résistivité nulle 10
1.4 Effet de Meissner-Ochsenfeld 11
1.4.1 Réponse d'un conducteur parfait soumis à un champ magnétique 11
1.5 Modèle de Drude-Lorentz 12
1.6 Équations des frères London 12
1.6.1 Première équation des frères London 13
1.6.2 Seconde équation des frères London avec hypothèse 13
1.6.3 Seconde équation des frères London sans hypothèse 15

2 Analyse mathématique d'équation de London **16**
2.1 Exponentielle d'un opérateur linéaire continu 16
2.2 Opérateurs linéaire non bornés 17
2.3 Opérateurs m-dissipatifs 17
2.4 Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif 18
2.5 Étude d'équation London (avec hypothèse) 20
2.6 Étude d'équation London (sans hypothèse) 21
2.7 Équations non homogène 24
2.8 Chemin vers l'équation d'onde 27
2.8.1 Équation d'onde unidimensionnel 27
2.9 Équation d'onde multidimensionnel 28
2.9.1 Méthode de la moyennes sphérique 28
2.10 Méthode caractéristique d'une EDP pour obtenir une EDO 32

3 étude thermodynamique **35**
3.1 Principes de thermodynamique 35
3.2 Énergie libre 36
3.3 Théorie phénoménologique de Guinzburg et landau 36

3.3.1 Paramètre d'ordre 36
3.3.2 Densité d'énergie libre champ nul 36
3.3.3 Densité d'énergie libre en champ non nul 38
3.3.4 Système de Guinzbur-Landau 38
3.3.5 Problème d'évolution de Guinzburg-Landau 39

4 Étude du système de Ginzburg-Landau unidimensionnel 40
4.1 Introduction 40
4.2 Rappels 40
4.2.1 Stabilité des solutions 41

Bibliographie 48

TABLE DES FIGURES

1.1 Évolution des température critique T_c entre 1911 et 2004. 9
1.2 Résistance du mercure en fonction de la température 9
1.3 A gauche : résistivité électrique en fonction de la température pour un matériel supraconducteur. A droite : résistivité électrique en fonction de la température pour un métal contenant des défauts (sale). 10
1.4 anneau supraconducteur où circulent des courants supraconducteurs persistants 10
1.5 11
1.6 12
1.7 Pénétration du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. 14
1.8 Dépendance en température prévisible de la longueur de pénétration λ_L. 14

2.1 Caractérisation d'effet de Messner en 2d 21
2.2 Représentation de la solution u en $t = 2s$ et $t = 2s$ 34
2.3 Représentation de la solution u en $t = 3s$ et $t = 4s$ 34

4.1 À gauche : image du réseau de vortex de l'état mixte d'un échantillon de Pb+6%¸ étain (U. Essmann et H. Träuble, 1966). À droite : image du réseau de vortex de l'état mixte obtenue par microscopie à effet tunnel d'un échantillon de NbSe2 (Harald Hess and R.B. Robinson, and J.V. Waszczak, Physica B 169 (1991) 422 47

RÉSUMÉ

Nous avons décomposé ce mémoire en quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous avons présenté deux idées fondamentales : d'une part nous avons donner l'explication du phénomène de supraconductivité et les catégories des matériaux supraconducteurs existantes, nous avons parlé aussi des propriétés fondamentales caractérisant ce phénomène, et plus précisément d'effet Meissner qui reste le second effet surprenant de la supraconductivité. D'autre part, pour expliquer ce dernier d'une manière phénoménologique nous avons mettre l'accent sur les équations des frères London qui les modélise. Nous avons donné une extension du modèle dans le cas où le champ électrique est évolutive. Dans le deuxième chapitre nous avons fait une analyse mathématique des modèles obtenues, tout en traitent les questions d'existence, d'unicité, de régularité , ainsi des estimations à priori. Dans une deuxième temps nous avons cherché une expression explicite de la solution exacte pour l'extension du modèle des frères London. Parmi les théories les plus connues modélisant l'état macroscopique des supraconducteurs est la théorie de Guinzbug-Landau. Le Troisième chapitre sera l'objet de présenter les équations de Guinzbug-Landau modélisant cet état pour le cas stationnaire ou non stationnaire. Nous avons complété ce mémoire par l'étude du cas particulier du système de Guinzbug-Landau unidimensionnel, dont le but de trouver une dépendance entre le système non linéaire et son linéarisé.

ABSTRACT

We have decomposed this monograph into four chapters. First, we have presented two fundamentals ideas. On the one hand we have explained the superconductivity phenomena and the existent categories of the superconductors materials, we have talked also about the fundamentals properties that characterizes this phenomena, and more precisely the Meissner effect which always be the second surprising effect of the superconductivity phenomena. On the other hand, to explain this later in a phenomenological way we have focused on the London equations which models them. We have given an extension of the model in the evolutionary electric field case. In the second chapter we have made a mathematical analysis of the obtained models, addressing the existence, uniqueness and regularity questions, also a preliminary estimations. Second, we have looked for an explicit expression of the exact solution for the extension of London model. Among the theories the most known which models the macroscopic state of superconductors is the Guinzbug-Landau theory. Le third chapter will be the purpose to present the Guinzbug-Landau equations models this state for the stationary or non-stationarity case. We have finished this monograph by the study of a particular case of the unidimensional Ginzbug-Landau unidimensionnel system, whose purpose is to find a dependence between the non-linear system and its linearized.

CHAPITRE 1

PHÉNOMÈNE PHYSIQUE

1.1 Supraconducteurs à basse température critique

La supraconductivité a été découverte en 1911 par H.Kamerlingh Onnes à l'Université de Leiden en Hollande. H. Kamerlingh Onnes observa que la résistance électrique de certains métaux comme le mercure, le plomb ou l'étain disparaissait à basses températures voir la Figure 1.2, et la partie gauche de la Figure 1.3. H.Kamerlingh Onnes (Nobel Prize in 1913) donne le nom de supraconductivité à cette nouvelle état des propriétés électroniques de la matière et appela température critique T_c la température en dessous de laquelle la résistance devenait infiniment petite. La question relative à la valeur de la résistance électrique dans cet état a été investi-guée en effectuant des expériences où l'on induisait dans un anneau des courants supraconducteurs à l'aide d'un champ magnétique externe ; voir Figure 1.3. En effet, la diminution du courant électrique avec le temps, déterminée à l'aide de la variation du champ magnétique induit, permet de calculer la résistance. A l'aide d'une mesure de champ des plus sensibles, la résonance magnétique nucléaire, les scientifiques on conclut qu'il faudrait attendre au moins 105 ans pour qu'une possible diminution soit détectable !

1.2 Supraconducteurs à haute température critique

Pour l'exemple de mercure l'état SC est atteinte en 4.23 **K** qui coût très cher, dans ce contexte, existe il des métaux où l'état SC atteinte à haute température critique. En 1986, G'eorg Bédnorz et Alexander Müller découvrent que la SC apparaît à 38 **K** pour le composé $La_{2-x}Ba_xCuO_{4-\delta}$ ($x \sim 0.15$).
Ces derniers sont récompensés du prix Nobel de physique l'année suivant. La figure 1.1 , montre les dates des différents records de (T_c) depuis la découverte de la **SC**.

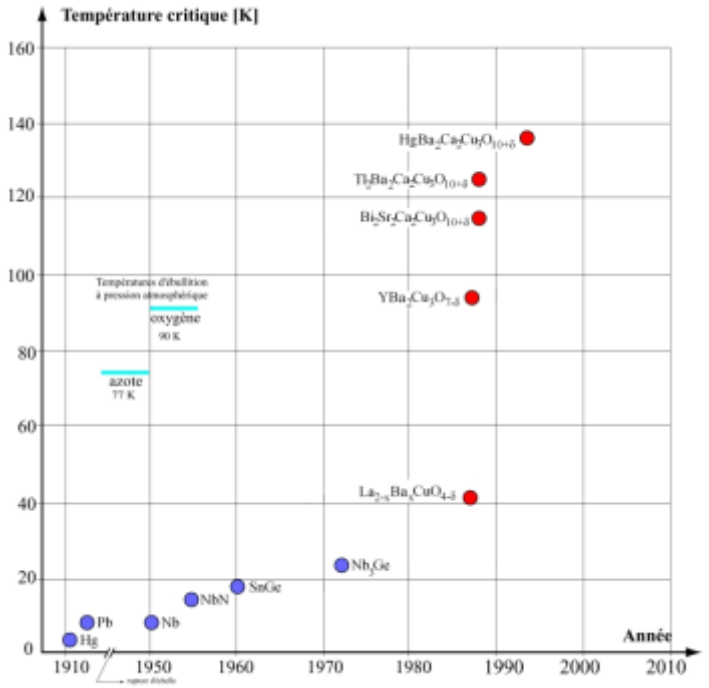

FIGURE 1.1 – Évolution des température critique T_c entre 1911 et 2004.

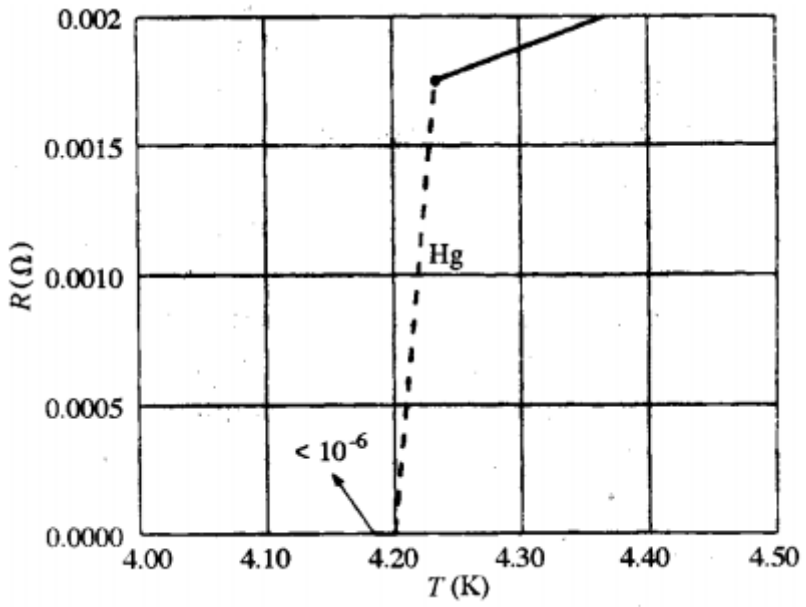

FIGURE 1.2 – Résistance du mercure en fonction de la température

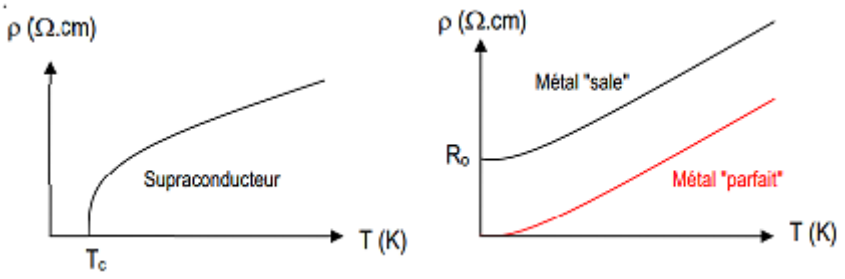

FIGURE 1.3 – A gauche : résistivité électrique en fonction de la température pour un matériel supraconducteur. A droite : résistivité électrique en fonction de la température pour un métal contenant des défauts (sale).

La Figure 1.4 schématisant un anneau supraconducteur où circulent des courants supraconducteurs persistants. La mesure de l'induction magnétique B en fonction du temps permet d'estimer la valeur de conductibilité électrique du supraconducteur. Si au temps $t = 0$ un courant $i(t = 0)$ circule dans un anneau d'induction mutuelle L et de résistance R, le courant diminue de façon exponentielle avec une constante de temps égale à L/R comme indiqué dans l'équation.

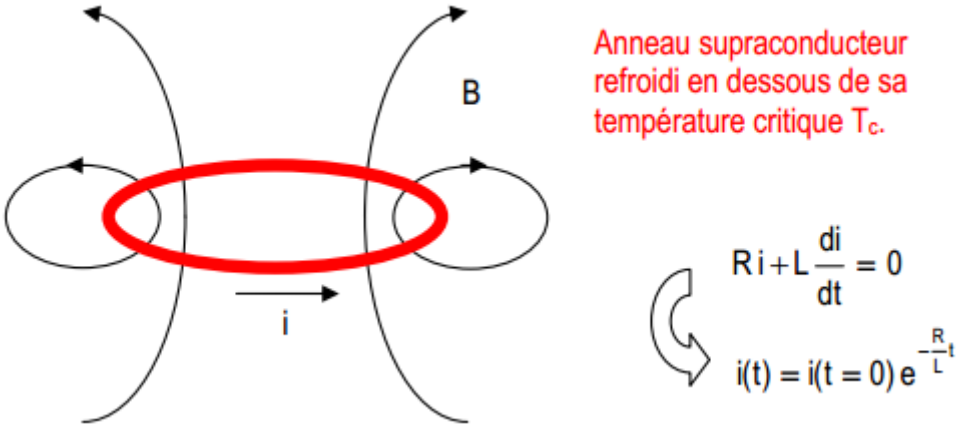

FIGURE 1.4 – anneau supraconducteur où circulent des courants supraconducteurs persistants

1.3 Résistivité nulle

Les SC ont une résistivité nulle en dessous de T_c, mais ceci n'a pas été facile à prouver expérimentalement. En effet,à cette échelle les erreurs peuvent venir des instruments de mesure. Gilles Holst, l'étudiant de Heike Kammerlingh Onnes qui a fait les mesures sur le mercure, d'abord pensé que la chute de résistance était due à un court-circuit.
Après une autre expérience réalisable est de faire circuler un courant I dans un anneau SC et de mesurer le champ magnétique induit B au centre de l'anneau. Ce champ a été mesuré et est stable sur plusieurs années, donc I est bien constant.
On constate aussi que l'énergie par effet Joule et nulle :

$$E = \int RI^2 dt = 0J \tag{1.1}$$

Le courant est nulle aussi en effet :

$$E = \rho j \tag{1.2}$$

1.4 Effet de Meissner-Ochsenfeld

Définition 1.1 *L'effet Meissner fait référence au phénomène d'exclusion totale de toute induction magnétique de l'intérieur d'un supraconducteur quand il est porté à une température inférieure à sa température critique. Il a été découvert par Walther Meissner et Robert Ochsenfeld en 1933 et est souvent appelé diamagnétisme parfait ou l'effet Meissner-Ochsenfeld.*

1.4.1 Réponse d'un conducteur parfait soumis à un champ magnétique

Comme vu précédemment, le flux magnétique dans un anneau composé d'un conducteur parfait ne change pas ; c'est-à-dire : $\frac{dB}{dt} = 0$. Il en est donc de même à l'intérieur d'un échantillon composé par une telle matière. Ainsi, lorsque on applique un champ magnétique H_a (crée par une source externe) sur un échantillon dépourvu de résistance électrique, des courants vont se mettre à circuler à sa périphérie de sorte à annuler l'induction B en son intérieur ($B = \mu_0(H + M)$; μ_0 est la constante de perméabilité du vide et M est l'aimantation). La Figure 1.5 montre sur un échantillon de forme ellipsoïdale la réponse de ce dernier suite à l'application d'un champ externe $B_a = \mu_a H_a$. Les courants de surface engendrent un champ B_i tel que $B = 0$ en son intérieur. Le profil du champ résultant (addition vectorielle de B_a avec $B_i(r)$) est donné sur la partie droite de la figure . Remarquer que la réponse dia-magnétique de l'échantillon fait que le champ aux pôles de l'ellipsoïde est plus important que celui appliqué B_a (lignes de flux plus rapprochées). De même, le champ à l'équateur est nul. Ceci est dû à la réponse de l'échantillon à un champ externe (l'aimantation M) qui modifie le profil de flux. Ce phénomène est traité dans la littérature sous la dénomination de "facteur de dés-aimantation" (ou facteur de reconstruction). Si l'on coupe le champ magnétique externe, l'échantillon se retrouve dans son état original comme le montre la partie gauche de la Figure 1.6.

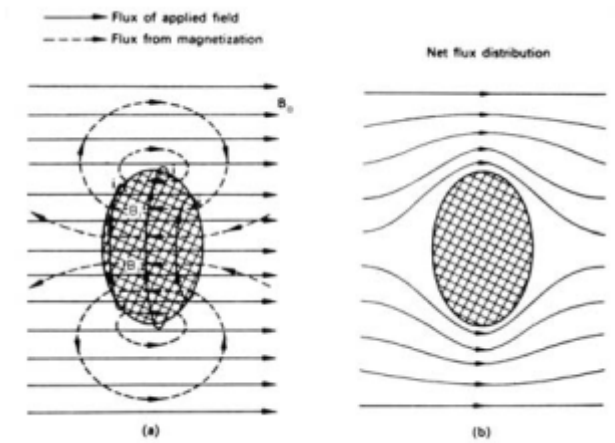

Figure 1-5: Réponse d'un échantillon dépourvu de résistance électrique suite à l'application d'un champ magnétique externe $B_a=\mu_0 H_a$; les courants de surface induisant la réponse B_i circulent à la périphérie de l'échantillon. Sur la partie droite de la figure est représentée la déformation des lignes de flux suite à la réponse diamagnétique de l'échantillon.

FIGURE 1.5

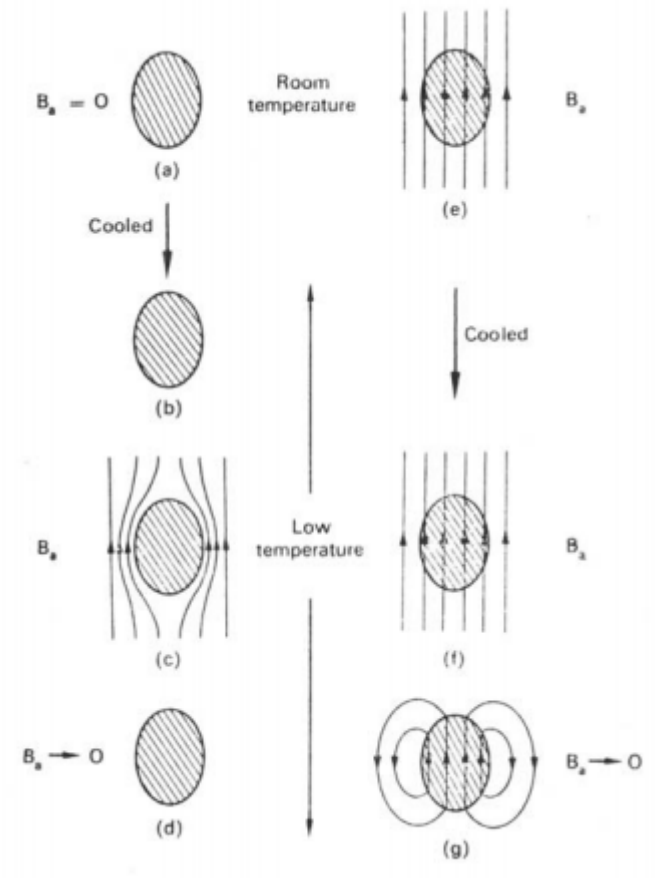

Figure 1-6: Partie de gauche: un échantillon est refroidi en champ nul (a→b) puis soumis à un champ magnétique externe B_a (c). Le fait que l'échantillon soit dépourvu de résistance explique l'induction de courants de surface permanents produisant un champ qui s'oppose complètement au champ externe (diamagnétisme parfait). Au point (d) on coupe le champ externe et l'échantillon retrouve son état initial. La partie de droite montre le résultat que l'on aurait obtenu si l'opération avait débuté avec le champ externe B_a enclenché. Le fait que l'échantillon soit pénétré par des lignes de flux (e) dans son état résistif fait qu'il reste aimanté lorsque l'on coupe le champ au point (g); point où il est dans un état dépourvu de résistance.

FIGURE 1.6

1.5 Modèle de Drude-Lorentz

Un champ électrique **E** sur une charge q exerce une force décrite par l'équation $F = qE$. La deuxième loi fondamentale de Newton : $F = m\frac{dv}{dt}$.
En combinant ces deux équations on obtient l'équation de **Drude-Lorentz** :

$$m(\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v) = qE \tag{1.3}$$

Où τ est un facteur phénoménologique ayant la dimension du temps et rendant compte des collision des électrons avec les ions du réseau. Dans un SC on a $\tau \longrightarrow \infty$, $q = q_s$ est la charge des super-électrons, $v = v_s$ leur vitesse et $m = m_s$ leur masse.

1.6 Équations des frères London

Pour expliquer l'effet de Meisner d'une façon phénoménologique voir 1.7. Les frères Fritz et Heinz London proposèrent en 1935 deux équations qui portent leur noms rendre compte des propriétés des SC .
Les équations de London montrent qu'un champ magnétique ne pénètre qu'à la surface d'un matériau supraconducteur parce que l'absence de collisions entre électrons permet un transport

d'électricité sans pertes. La longueur de London caractérise la distance maximale de pénétration d'un champ magnétique dans un supraconducteur.

1.6.1 Première équation des frères London

on défini une densité de super-courant par unité de surface notée J_s tel que :

$$J_s = n_s q_s v_s \tag{1.4}$$

En rapprochant les équations 1.3 et 1.4 et en posant

$$\lambda^2 = \frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2} \tag{1.5}$$

en obtient une équation appelée **première équation LL** :

$$E = \mu_s \lambda^2 \frac{dJ_s}{dt} \tag{1.6}$$

Cette dernière décrit l'effet d'un champ électrique sur un SC . on voit déjà une particularité : un champ électrique dans un SC accélère les superélectrons, cette propriété est bien prouvée expérimentalement. Dans l'état normal le champ maintient le courant alors que dans l'état SC le courant est constant même sans champ.

1.6.2 Seconde équation des frères London avec hypothèse

notons que :

$$\bigtriangledown \leftrightarrow \vec{grad}$$

$$\nabla_{\cdot} \leftrightarrow div$$

$$\nabla_{\times} \leftrightarrow \vec{rot}$$

Hypothèse
On suppose que tous les super-courants sont dus au champ magnétique et qu'il n'y a pas de variation du champ électrique ie $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$

Proposition 1.1 *Si $B(0,x) = 0$ alors le champs magnétique vérifie le modèle suivant :*

$$B = \lambda^2 \Delta B$$

Preuve 1.1 *D'après La loi d'Ampère-Maxwell on a :*

$$\nabla_{\times} B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 J_s \tag{1.7}$$

En utilisant l'hypothèse l'équation 1.7 devient

$$\nabla_{\times} B = \mu_0 J_s \tag{1.8}$$

Et par suite

$$\nabla_{\times}\nabla_{\times} B = \mu_0 \nabla_{\times} J_s \tag{1.9}$$

À partir de la première équation de LL et Fraday-Maxwelle $\nabla_\times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ *On peut obtenir l'équation qui régit le champ magnétique :*

$$\lambda^2 \frac{d(\nabla_\times \nabla_\times B)}{dt} + \frac{dB}{dt} = 0 \tag{1.10}$$

De plus $\nabla_\times(\nabla_\times B) = \nabla(\nabla_. B) - \Delta B = -\Delta B$ *puisque* $\nabla_. B = 0$
En intégrant entre 0 et t et sachant que $B(0, x) = 0$ *alors*

$$B = \lambda^2 \Delta B \tag{1.11}$$

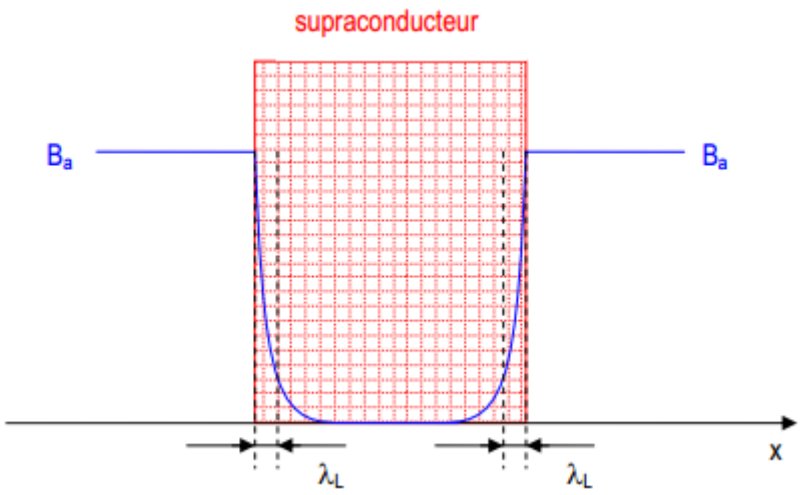

FIGURE 1.7 – Pénétration du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur.

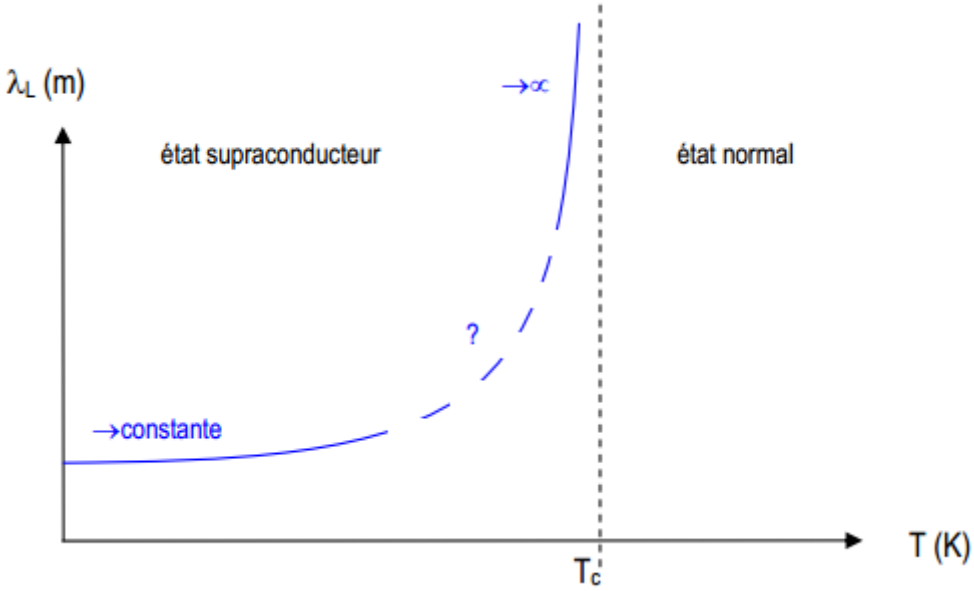

FIGURE 1.8 – Dépendance en température prévisible de la longueur de pénétration λ_L.

1.6.3 Seconde équation des frères London sans hypothèse

Proposition 1.2 *Le champs magnétique vérifie le modèle suivant :*

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \Delta B + \frac{c^2}{\lambda^2} B = f$$

Où f est une fonction dépend des conditions initiales.

Preuve 1.2 *À partir de la première équation de LL et Fraday-Maxwelle*

$$\nabla_\times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{1.12}$$

On peut obtenir l'équation qui régit le champ magnétique :

$$\mu_0 \lambda^2 \frac{d(\nabla_\times J_s)}{dt} + \frac{dB}{dt} = 0 \tag{1.13}$$

En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$\mu_0 \lambda^2 \nabla_\times J_s + B = f \tag{1.14}$$

Où f est une fonction dépend des conditions initiales.
De plus d'après la loi d'Ampère-Maxwell :

$$\nabla_\times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 J_s \tag{1.15}$$

Alors :

$$\nabla_\times \nabla_\times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla_\times E}{\partial t} + \mu_0 \nabla_\times J_s \tag{1.16}$$

Or on sait que $\nabla_\times \nabla_\times B = -\Delta B$, *donc d'après 1.12 , 1.14 on a :*

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \Delta B + \frac{c^2}{\lambda^2} B = f \tag{1.17}$$

Qui est la deuxième équations ***LL****.*

CHAPITRE 2

ANALYSE MATHÉMATIQUE D'ÉQUATION DE LONDON

Rappels L'étude des équations à dériver partielles nécessite quelques théorèmes classiques.

Théorème 2.1 *(**Théorème du point fixe de Banach**)[4][6].*
Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)\ \forall x, y \in E$. Alors il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$

Remarque 2.1 *Soit A un opérateur de X vers Y, le graphe de A est l'ensemble*

$$G(A) = (x, Ax), x \in X$$

Théorème 2.2 *(**Graphe fermé**)[4]*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $A : X \to Y$ un opérateur linéaire. Alors $A \in L(X, Y)$ si et seulement si le graphe de A est fermé dans $X \times Y$.

Théorème 2.3 *(**Lax-Milgram**)[4][6]*
Soit H un espace de Hilbert et $b : H \times H \to R$ une forme bilinéaire continue et il existe $\alpha > 0$ tel que $b(u, u) > \alpha\|u\|^2$, Alors :
Pour tout élément $f \in H'$, il existe un seule élément $u \in H$ tel que $b(u, v) =< f, v > \forall v \in H$

2.1 Exponentielle d'un opérateur linéaire continu

Soit X un espace de Banach et $A \in L(X)$. On a $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ donc $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ par suite l'exponentiel d'un opérateur linéaire continue est bien définie, de plus la fonction $t \to e^{tA}$ est $C^\infty(R, L(X))$ et on a

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$$

Proposition 2.1 *[4][6] Soit $A \in L(X).\forall T > 0$ et $x \in X, \exists! u \in C^\infty(R, L(X))$ solution de problème :*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \forall t \in [0, T] & (1) \\ u(0) = x & (2) \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec $u(t) = e^{tA}x$

Preuve
u solution du problème par construction, il reste à monter l'unicité. soit v une autre solution et $z(t) = e^{-tA}v(t)$.on a $z'(t) = 0$ alors $z(t) = z(0) = x$, et par suit $v(t) = e^{tA}x$.

2.2 Opérateurs linéaire non bornés

Soit E un Banach et $\|.\|$ sa norme.

Définition 2.1 *[5][6][20] Un opérateur linéaire non borné dans E est le couple (D, A), ùo D est un sous-espace vectoriel de E, $A : D \to E$ est une application linéaire qui n'est pas continue.*

2.3 Opérateurs m-dissipatifs

Définition 2.2 *Un opérateur linéaire A est dissipatif si :*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|x - \lambda Ax\| \geq \|x\|$$

Corollaire 2.1 *si E est un espace de Hilbert, A est dissipatif si :*

$$< Ax, x > \geq 0$$

Définition 2.3 *Un opérateur linéaire A dans X est m-dissipatif si*
A est dissipatif et

$$\forall f \in E, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A), x - \lambda Ax = f$$

Proposition 2.2 *soit A un opérateur m-dissipatif dans E et $\lambda > 0$. J_λ est l'opérateur linéaire continue définie par : $J_\lambda = (id - \lambda A)^{-1}$ et de plus $\|J_\lambda\| \leq 1$*

Proposition 2.3 *[6] Soit A un opérateur linéaire dissipatif.Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) A est m-dissipatif
(ii) Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall f \in E, \exists x \in D(A)$ tel que $x - \lambda_0 Ax = f$

Proposition 2.4 *Si A est m-dissipatif , alors $G(A)$ est fermé dans $E \times E$.*

On définie sur D(A) la norme suivant :

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\| + \|Au\|$$
$$\forall u \in D(A)$$

Corollaire 2.2 *soit A un opérateur m-dissipatif. Alors $(D(A), \|\|_{D(A)})$ est un espace de Banach, et $A \in L(D(A), E)$*

Proposition 2.5 *Soit A un opérateur m-dissipatif et $u \in \overline{D(A)}$,alors quand $\lambda \to 0$ on a*

$$lim\|J_\lambda u - u\| = 0$$

Preuve On a $\|J_\lambda - id\| \leq 2$, donc il suffit de montrer la proposition pour les éléments de D(A). Soit $u \in D(A)$, $J_\lambda u - u = J_\lambda(u - (id - \lambda A)u)$

Donc $\|J_\lambda u - u\| \leq \|u - (id - \lambda A)u\| = \lambda\|Au\| \to 0$ quand $\lambda \to 0$

Définition 2.4 *[5][21] Si A est m-dissipatif, alors pour $\lambda > 0$,on note A_λ l'opérateur définie par :*

$$A_\lambda = AJ_\lambda = \frac{J_\lambda - id}{\lambda} = \frac{J_\lambda(id - (id - \lambda A))}{\lambda} = J_\lambda A$$

On a $A_\lambda \in L(X)$ et $\|A_\lambda\| \leq \frac{2}{\lambda}$

Corollaire 2.3 *[20] A est m-dissipatif de domaine dense, alors $\forall u \in D(A)$ on a $lim\|A_\lambda - Au\| = 0$*

Preuve Soit $u \in D(A)$, on a $A_\lambda = J_\lambda A$.
donc $\forall u \in D(A)$ on a
$A_\lambda u \to Au$ quand $\lambda \to 0$ car $(Au \in \overline{D(A)})$ Le théorème de Hille-Yosida est un utile fondamentale utiliser pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution des problème d'évolution linéaire.

2.4 Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Soit E un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif,de domaine dense dans E.Posons $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$ $\forall \lambda > 0$, $t > 0$

Théorème 2.4 *[6] $\forall x \in E$, la suite de fonction $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$ converge uniformément sur tout intervalle borné $[0, T]$ vers une fonction $u \in C([0, +\infty[, E)$, quand $\lambda \to 0$.*
Si on pose $T(t)x = u(t)$, $\forall x \in E$ et $\forall t \geq 0$ on a
$T(t) \in L(E)$ et $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$
$T(0) = id$
$T(s + t) = T(s)T(t)$, $\forall s, t \geq 0$
De plus, pour tout $x \in D(A)$,$u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} u \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, E) \textit{(1)} \\ u^{'}(t) = Au(t), \forall t \geq 0 \textit{(2)} \\ u(0) = x, \forall t \geq 0 \textit{(3)} \end{cases} \tag{2.2}$$

Enfin , pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$ on a

$$T(t)Ax = AT(t)x$$

Preuve 2.4 Elle se devise en cinq étapes.
Étape 1.
On a $t \geq 0$ et $\lambda > 0$

$$T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda} = e^{t(\frac{J_\lambda - id}{\lambda})} = e^{-\frac{t}{\lambda}} e^{\frac{1}{\lambda} J_\lambda}$$

Donc

$$\|T_\lambda(t)\| \leq e^{-\frac{t}{\lambda}} e^{\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda\|} \leq 1$$

En particulier

$$\|u_\lambda(t)\| \leq \|x\|$$

Étape 2.
Supposons que $x \in D(A)$, par construction on a A_λ et A_μ commutent, pour tout λ, μ, en particulier pour tout $t \geq 0$, $s \in R$, on a

$$T_\lambda(st)T_\mu(t - st) = e^{st(A_\lambda - A_\mu) + tA_\mu}$$

Alors
$$\frac{d}{ds}(T_\lambda(st)T_\mu(t-st)) = tT_\lambda(st)T_\mu(t-st)(A_\lambda - A_\mu)$$
Il en résulte que pour $\lambda \to 0$ et $\mu \to 0$
$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(T)\| = \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq \| \int_0^1 \frac{d}{ds}(T_\lambda(st)T_\mu(t-st))ds\| \leq t\|(A_\lambda x - A_\mu x)\| \to 0 \tag{2.3}$$
On en déduit que u_λ est suite de Cauchy dans $C([0,T],E)$ pour tout $T > 0$. Soit $u \in C([0,\infty],E)$ sa limite .
Étape 3.
On pose $u(t) = T(t)x$. D'après **Étape 1.** on a pour tout $t \geq 0$ et $x \in D(A)$
$$\|T(t)x\| \leq \|x\|$$
Et donc $T(t)$ se prolonge de façon unique en un opérateur $T(t) \in L(E)$ avec $\|T(t)\| \leq 1$. Soit alors $x \in E$, et $x_n \in D(A)$, avec $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. On a
$$\|T_\lambda(t)x - T(t)x\| \leq \|T_\lambda(t)x - T_\lambda(t)x_n\| + \|T_\lambda(t)x_n - T(t)x_n\| + \|T(t)x_n - T(t)x\|$$
Donc
$$\|T_\lambda(t)x - T(t)x\| \leq 2\|x_n - x\| + \|T_\lambda(t)x_n - T(t)x_n\|$$
Et donc $T_\lambda x \to T(t)x$ uniformément sur $[0,T]$ pour tout $T > 0$, quand $\lambda \to 0$. On a donc montré Que $T(0) = id$.
Montrons que $T(s+t) = T(s)T(t)$, $\forall s,t \geq 0$
Remarquons que $T_\lambda(s+t) = T_\lambda(s)T_\lambda(t)$ et donc quand $\lambda \to 0$ on a
$$\|T(t)T(s)x - T(s+t)x\| \leq \|T(t)T(s)x - T(t)T_\lambda(s)x\| + \|T(t)T_\lambda(s)x - T_\lambda(t)T_\lambda(s)x\| + \|T_\lambda(s+t)x - T(s+t)x\|$$
Faisons $\lambda \longrightarrow 0$, on conclue que $T(t)T(s)x = T(s+t)x$, $\forall x \in D(A)$
Étape 4.
Dans le cas où $u \in D(A)$. On pose $v_\lambda(t) = A_\lambda T_\lambda(t)x = T_\lambda(t)A_\lambda x = u'_\lambda(t)$.Alors
$$\|v_\lambda(t) - T(t)Ax\| \leq \|T(t)Ax - T_\lambda Ax\| + \|A_\lambda x - Ax\|$$
Donc $v_\lambda(t) \to T(t)Ax$ lorsque $\lambda \to 0$, uniformément sur $[0,T]$ pour tout $T > 0$.On écrit alors
$$u_\lambda(t) = x + \int_0^t v_\lambda(s)ds$$
Et on fait $\lambda \to 0$.Il vient
$$u(t) = x + \int_0^t T(s)Axds$$
Par suite $u \in C^1([0,T],E)$, et pour tout $t \geq 0$
$u'(t) = T(t)Ax$ $(*)$

Montrons cette fois que $u \in C([0,T],D(A))$. On a $v_\lambda(t) = A(J_\lambda T_\lambda(T)X)$ et
$$\|J_\lambda T_\lambda(t)x - T(t)x\| = \|J_\lambda T_\lambda(t)x - J_\lambda T(t)x + J_\lambda T(t)(t)x - T(t)x\|$$
Donc
$$\|J_\lambda T_\lambda(t)x - T(t)x\| \leq \|T_\lambda(t)x - T(t)x\| + \|J_\lambda T(t)x - T(t)x\|$$

Et alors le couple $(J_\lambda T_\lambda(t)x, A(J_\lambda T_\lambda(t)x) \to (T(t)x, AT(t)x$ lorsque $\lambda \to 0$ dans $E \times E$, or on sait que le graphe de A est fermé, il en résulte que $T(t)x \in D(A)$ pour tout $t \geq 0$, et $AT(t)x = T(t)Ax$. de plus d'après $(*)$ on conclue que pour tout $t \geq 0$:

$$u'(t) = Au(t)$$

Étape 5.
Montrons l'unicité de la solution. Soit u une solution, et $\tau > 0$. Posons pour tout $t \in [0, \tau]$

$$v(t) = T(t-\tau)u(t)$$

On a alors $v \in C([0,\tau], D(A)) \cap C^1([0,\tau], E)$ et $\forall t \in [0,\tau]$

$$v^{'}(t) = AT(t-\tau)u(t) + T(t-\tau)u'(t)$$

Alors $\forall t \in [0,\tau]$

$$v'(t) = T(t-\tau)(u'(t) - Au(t)) = 0$$

Donc $v(\tau) = v(0)$, et par suite $u(\tau) = T(\tau)x$ $\forall \tau \geq 0$. Ce qui achève la démonstration.

2.5 Étude d'équation London (avec hypothèse)

Soit Ω un ouvert de R^n, dans cette section on va traiter l'équation suivante

$$\begin{cases} B - \lambda^2 \Delta B = f, sur \Omega (1) \\ B = 0, sur \partial\Omega (2) \end{cases} \tag{2.4}$$

Théorème 2.5 *Pour toute $f \in L^2(\Omega)$, il existe un seul $B \in H_0^1(\Omega)$ tel que $B - \lambda^2 \Delta B = f$*

Preuve 2.1 *$\forall V \in H_0^1(\Omega)$ on a*

$$\int BV - \lambda^2 \int \Delta BV = \int fV \tag{2.5}$$

Par intégration par partie 2.4 devient

$$\int BV + \lambda^2 \int \nabla B \nabla V = \int fV \tag{2.6}$$

Soit $a : H_0^1 \times H_0^1 \to R$ la forme bilinéaire définie par $a(B,V) = \int BV + \lambda^2 \int \nabla B \nabla V$, et $L : H_0^1 \to R$ la forme linéaire définie par $< L, V >= \int fV$
Est continue et par inégalité de Hölder on a

$$| < L, V > | \leq \|f\|_{L^2} \|V\|_{H_0^1}$$

La forme bilinéaire a est aussi continue avec

$$a(B,V) \leq max(1, \lambda^2) \|B\|_{H_0^1} \|V\|_{H_0^1}$$

De plus a est coercive :

$$a(B,B) \geq min(1, \lambda^2) \|B\|_{H_0^1}^2$$

En appliquant théorème de Lax-Milgram on a $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists! B \in H_0^1(\Omega)$ tel que $B - \lambda^2 \Delta B = f$

Remarque 2.2 *L'équation LL (avec hypothèse) est le cas particulier du modèle 2.3 avec* $f = 0$

Corollaire 2.4 *Soit* Ω *un ouvert de* R^n *et* B *la solution de* $B - \lambda^2 \Delta B = 0$ *dans* $H_0^1(\Omega)$. *Alors* $\|B\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$. *ce modèle rend compte de l'effet Meisner*

Preuve 2.2 *D'après l'équation 2.5 et* $B = V$, $f = 0$ *on a*

$$min(1, \lambda^2) \int |B|^2 + \int |\nabla B|^2 \leq \int |B|^2 + \lambda^2 \int |\nabla B|^2 = 0$$

Donc

$$\|B\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

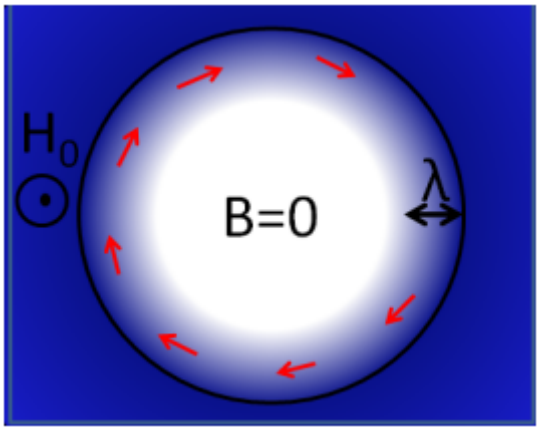

FIGURE 2.1 – Caractérisation d'effet de Messner en 2d .

2.6 Étude d'équation London (sans hypothèse)

Reprenant l'équation 1.17

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \Delta B + \dfrac{c^2}{\lambda^2} B = f & (1) \\ B(x,0) = B_0(x) & (2) \\ B^{'}(x,0) = B_1(x) & (3) \end{cases} \tag{2.7}$$

Faisant un changement de variable de type :

$$U(t,x) = B(\frac{c}{\lambda} t, \frac{x}{\lambda})$$

On arrive à une équation de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + U = g & (1) \\ U(x,0) = U_0(x) & (2) \\ U^{'}(x,0) = U_1(x) & (3) \end{cases} \tag{2.8}$$

Avec

$$g(t,x) = f(\frac{c}{\lambda}t, \frac{x}{\lambda})$$

Commencent par le traitement du problème homogène :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + U = 0 & (1) \\ U(x,0) = U_0(x) & (2) \\ U^{'}(x,0) = U_1(x) & (3) \end{cases} \tag{2.9}$$

Pour montrer l'existence de ce problème, on va appliqué le théorème 2.4. Posons $\frac{\partial U}{\partial t} = V$
Avec ce changement de variable l'équation 2.10 est équivalent à :
$\begin{bmatrix} U \\ \frac{\partial U}{\partial t} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} V \\ \Delta U - U \end{bmatrix}$

Définition 2.5 *[1][12] Fixons l'espace d'étude $E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ où Ω un ouvert de R^n.*
Soit l'opérateur (A,D(A)) définie par $A(u,v) = (v, \Delta u - u)$,
Et $D(A) = \{(u,v) \in E, \Delta u \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega)\}$

Remarque 2.3 *E est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :*

$$< (u,v),(w,z) >= \int (\nabla u \nabla w + uw + vz)dx$$

Proposition 2.6 *A est m-dissipative de domaine dense*

Preuve
$D(\Omega) \times D(\Omega) \subset D(A)$, donc A est de domaine dense. d'autre part $\forall (u,v),(w,z) \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned} < A(u,v),(w,z) > &= \int \nabla u \nabla w + vw + (\Delta u - u)zdx \\ &= -\int \nabla u \nabla z + uz + (\Delta w - w)vdx \\ &= - < (u,v), A(w,z) > \end{aligned} \tag{2.10}$$

En particulier pour $(u,v) = (w,z)$ on obtient :

$$< A(u,v),(w,z) >= 0$$

Donc A est un opérateur dissipatif.
Soit $(f,g) \in E$, montrons que l'équation $(u,v) - A(u,v) = (f,g)$ admet une solution dans D(A).
Or $(u,v) - A(u,v) = (f,g)$ est équivalent au système

$$\begin{cases} 2u - \Delta u = f + g & (1) \\ v = u - f & (2) \end{cases} \tag{2.11}$$

En appliquant Lax-Milgram,il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta u \in L^2(\Omega)$ solution de l'équation (1) du système (3.5), et par suite de (2) en conclue que $v \in H_0^1(\Omega)$, d'où $(u,v) \in D(A)$ ainsi A est un opérateur m-dissipatif de domaine dense.

Remarque 2.4 *On peut prolonger notre opérateur A dans l'espace $E = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$*

Définition 2.6 *Fixons cette fois l'espace d'étude* $E = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *où* Ω *un ouvert de* R^n.
Soit l'opérateur (A,D(A)) définie par $A(u,v) = (v, \Delta u - u)$,
Et $D(A) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Proposition 2.7

$$H^{-1}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega), \exists \varphi_u \in H_0^1(\Omega), \Delta\varphi_u - \varphi_u = u, dans D'(\Omega)\}$$

Preuve 2.3 *On rappelle que* $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega)$, *avec injections denses*
Par théorème de Riesz
$\forall u \in H^{-1}(\Omega), \exists \varphi_u \in H_0^1(\Omega)$ *tel que* $< u, \theta >=< \varphi_u, \theta >_{H_0^1(\Omega)}$, $\forall \theta \in H_0^1(\Omega)$
Donc $< u, \theta >=< \varphi_u, \theta >_{L^2(\Omega)} + < \nabla\varphi_u, \nabla\theta >_{L^2(\Omega)}$
Par application de théorème de Green on obtient que.

$$< u, \theta >=< \varphi_u, \theta >_{L^2(\Omega)} + < \Delta\varphi_u, \theta >_{L^2(\Omega)}$$

Donc

$$u = \Delta\varphi_u + \varphi_u$$

Ainsi on équipe $H^{-1}(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$< u, v >=< \varphi_u, \varphi_v >_{L^2(\Omega)} + < \nabla\varphi_u, \nabla\varphi_v >_{L^2(\Omega)}$$

Proposition 2.8 *A est m-dissipative de domaine dense*

Preuve 2.4 *On a* $D(\Omega) \times D(\Omega) \subset D(A)$, *et donc A est de domaine dense dans E soit* $(u,v),(w,z) \in D(A)$ *et considérons* φ_v *et* φ_v *définie précédemment. Puisque* $v, z \in L^2(\Omega)$ *on a alors* $\Delta\varphi_v, \Delta\varphi_z \in L^2(\Omega)$ *par suite*

$$\begin{aligned} < A(u,v),(w,z) >_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} &= \int vwdx + < \Delta u - u, z >_{H^{-1}(\Omega)} \\ &= \int vwdx + \int (\nabla u \nabla\varphi_z + u\varphi_z)dx \\ &= \int vwdx - \int u(\Delta\varphi_z - \varphi_z)dx \\ &= \int vwdx - \int uzdx \end{aligned} \tag{2.12}$$

De même

$$< (u,v), A(w,z) >_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} = \int zudx - \int wvdx$$

Par conséquent

$$< A(u,v),(w,z) >_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} = - < (u,v), A(w,z) >_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$$

Donc

$$< A(u,v),(u,v) >= 0$$

Par suite A est dissipative.
Soit $(f,g) \in E$.*L'équation* $(u,v) - A(u,v) = (f,g)$ *est équivalent au système*

$$\begin{cases} 2u - \Delta u = f + g & (1) \\ v = u - f & (2) \end{cases} \tag{2.13}$$

Par application de Lax-Milgram il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ *de (1) de système (2.14). on résout ensuite (2) et on trouve que* $v \in L^2(\Omega)$ *donc* $u, v \in D(A)$ *; donc A est m dissipative*

Théorème 2.6 *[6] Soit $(\alpha, \beta) \in E$ et soit U(t) la première composante de $T(t)(\alpha, \beta)$. Alors U est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} U \in C^1([0,+\infty[, H_0^1) \cap C^2([0,+\infty[, L^2), \Delta U \in C([0,+\infty[, L^2)(1) \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + U = 0(2) \\ U(0) = \alpha, U^{'}(0) = \beta(3) \end{cases} \tag{2.14}$$

Preuve
D'après ce qui précède le problème 2.15 est de la forme

$$\lambda^{'}(t) = A\lambda(t) \tag{2.15}$$

Où $\lambda(t) = \begin{bmatrix} U \\ \frac{\partial U}{\partial t} \end{bmatrix}^{'}$
On a déjà montrer que A est un opérateur m-dissipatif de domaine dense, d'après le théorème 2.4, le problème 2.15 admet une unique solution $\lambda \in C([0,+\infty[, D(A)) \cap C^1([0,+\infty[, E)$
Et par suite $U \in C^1([0,+\infty[, H_0^1) \cap C^2([0,+\infty[, L^2)$, et $\Delta U \in C([0,+\infty[, L^2)$

2.7 Équations non homogène

Dans ce paragraphe en va traiter le problème non homogène.
Soit E un espace de Banach, A un opérateur m-dissipatif de domaine dense. on note T(t) le semi-groupe de contractions engendré par A.
Soit $T > 0$ et $x \in E$ et $f :\to E$, on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], E)(1) \\ u^{'}(t) = Au(t) + f(t), \forall t \in [0,T](2) \\ u(0) = x(3) \end{cases} \tag{2.16}$$

Lemme 2.1 *[6] Soit $x \in D(A)$ et $f \in C([0,T], E)$. On considère une solution $u \in C^1([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], E)$ du problème 2.17. Alors on a*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \forall t \in [0,T] \tag{2.17}$$

Preuve 2.5 *Soit $t \in]0,T]$. on pose*

$w(s) = T(t-s)u(s), \forall s \in [0,t]$.

Soit $\forall s \in [0,t]$ et $h \in [0, t-s]$. on a

$$\frac{w(s+h) - w(s)}{h} = T(t-s-h)\frac{u(s+h) - u(s)}{h} - \frac{T(h) - id}{h}u(s)$$

D'autre part $T(t-.)f(.) \in C([0,t], E)$.

Donc $w \in C^1([0,t],E)$ *et* $w^{'}(s) = T(t-s)f(s)$ *Et par suite* $\forall \tau < t$ *on a*

$$w(\tau) = \int_0^\tau T(t-s)f(s)ds + w(0)$$

Donc à la limite lorsque $\tau \to t$ *En obtient*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \forall t \in [0,T] \tag{2.18}$$

Remarque 2.5 *Du lemme 2.1 on conclue que pour* $x \in D(A)$ *et* $f \in C([0,T],E)$ *le problème 2.17 possède au plus une seule solution.*

Lemme 2.2 *[6]* $\forall x \in E$ *et* $f \in L^1([0,T],E)$ *on a* $u \in C([0,T],E)$ *de plus on a*

$$\|u\|_{C([0,T],E)} \leq \|x\| + \|f\|_{L^1([0,T],E)}$$

Preuve 2.6 *Pour* $x \in D(A)$ *l'inégalité est claire en utilisant le lemme 2.1, ensuite par densité le résultat s'obtient* $x \in E$

Théorème 2.7 *[6] Soit* $x \in D(A)$ *et* $f \in C([0,T],E)$ *on suppose que l'une des deux conditions suivant est satisfaite.*
(i) $f \in L^1([0,T],D(A))$
(ii) $f \in W^{1,1}([0,T],E)$
Alors u donné par le lemme 2.1 est la solution du problème 2.17

Preuve 2.7 *Elle se décompose en quatre étape. Soit*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(s)f(t-s)ds, \forall t \in [0,T] \tag{2.19}$$

Étape 1. *On a* $v \in C^1([0,T[,E)$. *En effet, lorsque* $f \in L^1([0,T],D(A))$, *on écrit pour* $t \in [0,T[$ *et* $h \in [0,t-s]$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t T(t-s)\frac{T(h)-id}{h}f(s)ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \tag{2.20}$$

Puisque f est à valeur dans $D(A)$, *et par définition de générateur infinitésimal de semi groupe* $\boldsymbol{T}$, *On conclue que :*
$\frac{T(h)-Id}{h}f \to Af$ *Dans* $L^1([0,T],E)$, *lorsque*$h \to 0$
Donc pour tout $t \in [0,T[$ *on a*

$$\frac{dv}{dt}(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds + f(t) \tag{2.21}$$

Est cette formule définie une fonction continue donc $v \in C^1([0,t],E)$
Si $f \in W^{1,1}([0,T],E)$,*alors pour tout* $t \in [0,T[$ *et* $h \in [0,t-s]$, *alors*

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds + T(h)\frac{1}{h}\int_0^h T(t-s)f(s)ds \tag{2.22}$$

Par un petit changement de variable

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = \int_0^t T(s)\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}ds + T(h)\frac{1}{h}\int_0^h T(s)f(t-s)ds \tag{2.23}$$

Puisque $f \in W^{1,1}([0,T],E)$ *alors quand* $h \to 0$ *on a*

$$\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h} \to f'(t-s), dans, L^1([0,t],E) \tag{2.24}$$

Et par suite pour tout $t \in [0,T[$ *on a*

$$\frac{dv}{dt}(t) = \int_0^t T(s)f'(t-s)ds + T(t)f(0) \tag{2.25}$$

On appliquons le lemme 2.2 on a $v \in C^1([0,t[,E)$
Étape 2. *De la même façon, on montre que* $\frac{dv}{dt}(T)$ *existe, et par suite* $v \in C^1([0,t],E)$
Étape 3. *Soit* $t \in [0,T[$ *et* $h \in [0,t-s]$. *On a*

$$\frac{T(h)-id}{h}v(t) = \frac{1}{h}(T(h)v(t)-v(t)) = \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{2.26}$$

Donc

$$\frac{T(h)-id}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \tag{2.27}$$

En faisant $h \to 0$ *, on obtient que* $v(t) \in D(A)$ *et* $Av(t) = v'(t) - f(t)$. *de plus* A *est un opérateur m-dissipative alors son graphe est fermer,si* $t \to T$ *le résultat reste vrais. Il résulte que* $v \in C([0,T],D(A))$, *et* $v'(t) = Av(t) + f(t)$.
Étape 4. *On a* $u(t) = T(t)x + v(t)$ *donc*
$u \in C([0,T],D(A)) \cap C^1([0,T],E)$
De plus pour tout $t \in [0,T]$ *on a* $u'(t) = At(t)x + Av(t) + f(t)$ *donc*

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

Définition 2.7 ***(Espace de Sobolev)****[1][12][19][23][17] Soit* $s \in \mathbb{R}$, *on définie*
$H^s(R^n) = \{u \in S'(R^n)/(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in L^2(R^n)\}$

Théorème 2.8 *Soit* $s > 0$,$T > 0$ *et* $g \in L^1([0,T]H^s)$
Si $(U_0,U_1) \in H^{s+1} \times H^s$ *alors la solution du problème 2.7* $U \in C([0,T],H^{s+1}) \cap C^1([0,T],H^s)$

Preuve 2.8 *Appliquant la transformer de Fourier à l'équation* (1) *du modèle 2.7, alors*

$$\frac{\partial^2 \hat{U}(t,\xi)}{\partial t^2} + (1+|\xi|^2)\hat{U}(t,\xi) = \hat{g}(t,\xi) \tag{2.28}$$

On ait arriver à une équation différentielle avec second membre. on commence comme toujours par l'équation homogène, le polynôme caractéristique est $r^2 + 1 + |\xi|^2 = 0$, *ces solution est* $r = \mp\sqrt{1+|\xi|^2}$,*donc l'équation homogène à pour solution*

$$\hat{U}(t,\xi) = cos(t\sqrt{1+|\xi|^2})\hat{U}_0(\xi) + \frac{sin(t\sqrt{1+|\xi|^2})}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\hat{U}_1(\xi) \tag{2.29}$$

Par suite la solution générale obtenue en appliquant la méthode de variation de la constante. $\hat{U}(t,\xi)$ *est sous la forme suivante :*

$$\hat{U}(t,\xi) = cos(t\sqrt{1+|\xi|^2})\hat{U}_0(\xi) + \frac{sin(t\sqrt{1+|\xi|^2})}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\hat{U}_1(\xi) + \int_0^t \frac{sin((t-s)\sqrt{1+|\xi|^2})}{\sqrt{1+|\xi|^2}}\hat{g}(s,\xi)ds \tag{2.30}$$

Par inégalité triangulaire de la norme on obtient

$$\|U\|_{H^{s+1}} \leq \|U_0\|_{H^{s+1}} + \|\frac{U_1}{\sqrt{1+|.|^2}}\|_{H^{s+1}} + \int_0^t \|\frac{g(s,.)}{\sqrt{1+|.|^2}}\|_{H^{s+1}} ds \tag{2.31}$$

Et par suite

$$\|U\|_{H^{s+1}} \leq \|U_0\|_{H^{s+1}} + \|U_1\|_{H^s} + \|g\|_{L^1([0,T],H^s)} \tag{2.32}$$

Remarque 2.6 *Dans l'équation LL sans hypothèse le second membre ne dépend pas du temps,la solution U peut s'exprimer autrement :*
On a

$$\frac{\partial^2 \hat{U}(t,\xi)}{\partial t^2} + (1+|\xi|^2)\hat{U}(t,\xi) = \hat{g}(\xi) \tag{2.33}$$

Dans ce cas $\hat{U} = \hat{U}_h + \hat{U}_p$, *avec* $\hat{U}_h$ *est déjà connue et de plus on peut remarquez que* $\hat{U}_p = \frac{\hat{g}(\xi)}{1+|\xi|^2}$ *est bien une solution particulière qui réalise le second membre, ainsi on peut conclure l'estimation 2.33*

$$\|U\|_{H^{s+1}} \leq \|U_0\|_{H^{s+1}} + \|U_1\|_{H^s} + \|g\|_{L^1([0,T],H^s)} \tag{2.34}$$

2.8 Chemin vers l'équation d'onde

Théorème 2.9 *[18] Soit u solution dans* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ *de* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u = 0$ *avec* $u(0) = u_0, u'(0) = u_1$
On définie v par $v(t,x_1,...,x_{n+1}) = e^{ix_{n+1}}u(t,x_1,...,x_n)$ *alors v est la solution du problème*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0 & (1) \\ v(0,x_1,...,x_{n+1}) = e^{ix_{n+1}}u_0(,x_1,...,x_n) & (2) \\ v_t(0,x_1,...,x_{n+1}) = e^{ix_{n+1}}u_1(,x_1,...,x_n) & (3) \end{cases} \tag{2.35}$$

Preuve 2.9 *Par calcule des dérivés partielles on obtient* $\Delta v = e^{ix_{n+1}}(\Delta u - u)$ *donc* $v_{tt} - \Delta v = e^{ix_{n+1}}(u_{tt} - \Delta u + u)$ *d'où le résultat.*

Remarque 2.7 *Se changement de variable nous ramenons vers l'étude d'équation d'onde, où on a plusieurs résultats dans la littérature.*

2.8.1 Équation d'onde unidimensionnel

Théorème 2.10 ***(Formule d'Alembert)***
Pour $n = 1$ *la solution du problème 2.32 est donnée par la formule suivante :*

$$v(t,x) = \frac{v_0(x-t) + v_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_1(y)dy$$

Preuve 2.10 *Par transformer de Fourier on arrive à la résolution de l'équation différentielle* $\hat{v}_{tt}(t,\xi) + \xi^2\hat{v}(t,\xi) = 0$ *, donc* $\hat{v}$ *est sous la forme :*

$$\hat{v}(t,\xi) = \hat{v}_0(\xi)(\frac{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}}{2}) + \frac{\hat{v}_1(\xi)}{\xi}(\frac{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}}{2i})$$

Et pa suite

$$v(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\{\hat{v}_0(\xi)(\frac{e^{i\xi(x+t)}+e^{i\xi(x-t)}}{2}) + \frac{\hat{v}_1(\xi)}{i\xi}(\frac{e^{i\xi(x+t)}-e^{i\xi(x-t)}}{2})\}d\xi \tag{2.36}$$

Posons $\hat{h}(\xi) = \frac{\hat{v}_1(\xi)}{i\xi} \Rightarrow i\xi\hat{h}(\xi) = \hat{v}_1(\xi) \Rightarrow \hat{h}'(\xi) = \hat{v}_1(\xi)$
Et puisque la transformer de Fourier est bijective alors $h' = v_1$ *donc* $h(x) = \int_0^x v_1(y)dy$ *Donc*

$$v(t,x) = \frac{v_0(x+t)+v_0(x-t)}{2} + \frac{h(x+t)-h(x-t)}{2} \tag{2.37}$$

Finalement

$$v(t,x) = \frac{v_0(x-t)+v_0(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_1(y)dy \tag{2.38}$$

2.9 Équation d'onde multidimensionnel

Grâce au changement de variable présenter précédemment, on remarque que si on veut trouver la forme explicite de la solution du modèle **LL** sans hypothèse dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ $n > 1$ ils suffit d'exprimer la solution d'équation d'onde dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n+1}$

2.9.1 Méthode de la moyennes sphérique

[9][18] Dans ce paragraphe on va chercher une forme similaire à la formule d'Alembert, dite formule de Kirchhoff.
Rappelle

Théorème 2.11 ***(Changement de variable)****[14]*
Soient Ω *et* ω *deux ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\varphi : \omega \longrightarrow \Omega$ *un difféomorphisme de classe* C^2*. Alors en posant* $J_\varphi(x) := det(\varphi'(x))$*, pour toute fonction mesurable positive* $f\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *on a :*

$$\int_\Omega f(y)dy = \int_\omega f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|dx$$

Théorème 2.12 ***(Formule de Stokes)****[14]*
Soit Ω *un ouvert de classe* C^1*. Si* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$*, pour* $1 \le i \le n$ *on a la formule d'intégration par parties :*

$$\int_\Omega \partial_i u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)n_i(\sigma)d\sigma \tag{2.39}$$

d'une façon équivalent, si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *et* $div(u) = \sum_{i=1}^n \partial_i u_i$ *, on a*

$$\int_\Omega div(u(x))dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma).n(\sigma)d\sigma \tag{2.40}$$

Notations
• B(x,r) la boule de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$
• ∂ B(x,r) le bord de la boule ou bien la sphère dans $\mathbb{R}^n$
• $\alpha(n)$ le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$
• $n\alpha(n)$ la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$

Remarque 2.8 *Avec ces notations on a* $vol(Bx,r) = \alpha(n)r^n$ *et* $S(B(x,r)) = n\alpha(n)r^{n-1}$

Avec ces notations on a $vol(Bx,r) = \alpha(n)r^n$ et $S(B(x,r)) = n\alpha(n)r^{n-1}$

Définition 2.8 *[14] (Moyenne sphérique). Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction au moins localement intégrable. On définie la moyenne sphérique de f dans B(x,r) par :*

$$\bar{f}(x,r) = \frac{1}{vol(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n}\int_{B(x,r)} f(y)dy$$

De même on définie la moyenne sphérique de f dans $\partial B(x,r)$ *par :*

$$\bar{f}(x,r) = \frac{1}{S(B(x,r))}\int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} f(y)dS(y)$$

Où dS(y) est une mesure de la sphère .
En générale pour un mesurable Ω *on définie cette moyenne par :*

$$\bar{f}(x,r) = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(y)dy$$

Exemple
Pour n = 3 les coordonnes sphérique exprime cette moyenne d'une manière plus précis. on sait que dans $\mathbb{R}^3$ $vol(B(x,r)) = \frac{4}{3}\pi r^3$ et $S(B(x,r)) = 4\pi r^2$:
• Dans le de la boule B(0,r) on a :

$$\bar{f}(0,r) = \frac{3}{4\pi r^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} f(\rho,\theta,\phi)\rho^2 sin(\phi)d\rho d\theta d\phi \tag{2.41}$$

• Dans le cas de la sphère on a

$$\bar{f}(0,r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} f(\rho,\theta,\phi)r^2 sin(\phi)d\theta d\phi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} f(\rho,\theta,\phi)sin(\phi)d\theta d\phi \tag{2.42}$$

Remarque 2.9 *On peut remarquer que le calcule des dériver partielle par apport r dans la formule 2.39 est simple que celle de 2.38 . Donc notée que la dans suite on va s'intéresser au traitement de sphère et pas da la boule.*

Définition 2.9 *Soit* $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. *Pour chaque* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *on définie de la même manière* $\bar{u}(x,r,t) = \frac{1}{S(B(x,r))}\int_{\partial B(x,r)} u(y,t)dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rw,t)dS(w)$.

Lemme 2.3 $\lim_{r\to 0^+} \bar{u}(x,r,t) = u(t,x)$. *Ce résultat est obtenue par application de la définition 2.9 .*

Proposition 2.9 *Si u est solution de :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \textit{(1)} \\ u(x,0) = \phi(x) & \textit{(2)} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \textit{(3)} \end{cases} \tag{2.43}$$

Alors pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{u}(x,r,t)$ est la solution de

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{rr} - \dfrac{n-1}{r}\bar{u}_r = 0 & r > 0, t \geq 0 \textit{(1)} \\ \bar{u}(x,r,0) = \bar{\phi}(x,r) & \textit{(2)} \\ \bar{u}_t(x,r,0) = \bar{\psi}(x,r) & \textit{(3)} \end{cases} \tag{2.44}$$

Preuve 2.11 *D'après la définition 2.9 , on a*

$$\bar{u}(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rw)dS(w) \tag{2.45}$$

Donc

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(x,r,t) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rw,t).wdS(w) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y,t).\frac{y-x}{r}\frac{dS(y)}{r^{n-1}} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Considérons $\nu(y) = \frac{y-x}{r}$ la normale sortons de $\partial B(x,r)$, et on utilisant la formule de Stokes, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(x,r,t) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial(u)(y,t)}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)dS(y) \end{aligned} \tag{2.47}$$

En générale pour une fonction $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, avec l'utilisation des cordonnes sphérique (ρ, w), avec w la variable qui décrit la sphère. Avec ces notation on a

$$\partial_r \int_{B(x,r)} h(y)dy = \partial_r \int_0^r \int_{\partial B(0,1)} h(x+\rho w)\rho^{n-1}dS(w) = \int_{\partial B(0,1)} h(x+rw)r^{n-1}dS(w) \tag{2.48}$$

Et par le changement de variable $\sigma = x + rw$, on a $dS(w) = \frac{dS(\sigma)}{r^{n-1}}$. Finalement

$$\partial_r \int_{B(x,r)} h(y)dy = \int_{\partial B(x,r)} h(\sigma)dS(\sigma) \tag{2.49}$$

Reprenons le résultat 2.44, on arrive à

$$\begin{aligned} \partial_r(r^{n-1}\bar{u}_r)(x,r,t) &= \frac{1}{n\alpha(n)}\partial_r \int_{B(x,r)} \Delta u(y,t)dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(\sigma,t)dS(\sigma) \end{aligned} \tag{2.50}$$

De plus

$$\bar{u}_{tt}(x,r,t) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}(\sigma,t)dS(\sigma) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u(\sigma,t)dS(\sigma)$$

Donc

$$\bar{u}_{tt} = \frac{1}{r^{n-1}}\partial_r(r^{n-1}\bar{u}_r)$$

Finalement

$$\bar{u}_{tt} = \bar{u}_{rr} + \frac{n-1}{r}\bar{u}_r \tag{2.51}$$

Théorème 2.13 *[18] Pour n=3 si on pose $\bar{v}(x,r,t) = r\bar{u}(x,r,t)$. si $\bar{u}$ est solution du modèle 2.45. Alors $\bar{v}$ est solution du modèle*

$$\begin{cases} \bar{v}_{tt} - \bar{v}_{rr} = 0 & r > 0, t \geq 0 (1) \\ \bar{v}(x,r,0) = r\bar{\phi}(x,r) = g(x,r) & (2) \\ \bar{v}_t(x,r,0) = r\bar{\psi}(x,r) = h(x,r) & (3) \\ \bar{v}_t(x,0,t) = 0 & (4) \end{cases} \tag{2.52}$$

Preuve 2.12 *D'après le résultat 2.45, on a pour $n = 3$ $\bar{u}_{tt} = \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{u}_r$*
De plus $\bar{v}_{rr} = r(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{u}_r)$.Donc

$$\bar{v}_{tt} - \bar{v}_{rr} = 0$$

Remarque 2.10 *Avec les calcules qu'on a fait, pour le cas de **n=3** la solution et déjà exprimez à l'aide de la formule d'Alembert.*
*Finalement on peut dire que la solution du modèle **LL** (sans hypothèse) est résolue pour **n=2***

Théorème 2.14 *Pour n=3, la solution u du modèle 2.44 est :*

$$= \frac{d}{dt}[\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \phi(x+tz)dS(z)] + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \psi(x+tz)dS(z) \tag{2.53}$$

Preuve 2.13 *En utilisant la formule d'Alembert, la solution v du problème 2.53 est*

$$v(x,r,t) = \frac{1}{2}[g(x,t+r) - g(x,t-r)] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{r+t} h(x,y)dy \tag{2.54}$$

Plus que ça on sait que $u(x,t) = \lim_{x\to 0^+} \bar{u}(x,r,t)$, et $v(x,r,t) = r\bar{u}(x,r,t)$. Alors

$$u(x,t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{v(x,r,t)}{r}$$

Donc

$$u(x,t) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2r}[g(x,t+r) - g(x,t-r)] + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{r+t} h(x,y)dy$$

Donc

$$u(x,t) = \frac{dg}{dt}(x,t) + h(x,t) \tag{2.55}$$

Et

$$\begin{cases} g(x,t) = t\bar{\phi}(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \phi(x+tz)dS(z) \\ h(x,t) = t\bar{\psi}(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \psi(x+tz)dS(z) \end{cases} \tag{2.56}$$

Finalement

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \phi(x+tz)dS(z)] + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \psi(x+tz)dS(z) \tag{2.57}$$

Théorème 2.15 *Si ϕ et ψ sont des fonction suffisamment régulières . Alors u donnée par théorème 2.14 est*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,t)} [\phi(y) + \nabla\phi(y).(y-x) + t\psi(y)]dS(y)$$

Preuve 2.14 *On a*

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \phi(x+tz)dS(z)] = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \phi(x+tz)dS(z) + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \nabla\phi(x+tz).zdS(z)$$

Alors

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \phi(x+tz)dS(z)] = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,r)} \phi(y)dS(y) + \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,r)} \nabla\phi(x+tz).zdS(z)$$

En utilisant le résultat 2.54 u est sous la forme :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,t)} [\phi(y) + \nabla\phi(y).(y-x) + t\psi(y)]dS(y) \tag{2.58}$$

Théorème 2.16 *Pour n=2, U solution de modèle **LL** (sans hypothèse) est :*

$$U(x_1,x_2,t) = e^{-ix_3}u(x_1,x_2,x_3,t) \tag{2.59}$$

Où u est l'application donnée par le théorème 2.14

2.10 Méthode caractéristique d'une EDP pour obtenir une EDO

Théorème 2.17 *Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma = \beta^2 - (1+\alpha^2)$, tel que $\beta^2 > 1+\alpha^2$.*
Alors $u(x,y,t) = A.cos(\frac{x+\alpha y+\beta t}{\sqrt{\gamma}}) + B.sin(\frac{x+\alpha y+\beta t}{\sqrt{\gamma}})$, est la solution de problème.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = 0 \\ \quad u(0,x,y) = A.cos(\dfrac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}) + B.sin(\dfrac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}) \\ \quad u_t(0,x,y) = \dfrac{\beta}{\sqrt{\gamma}}(B.cos(\dfrac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}) - A.sin(\dfrac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}})) \end{cases} \tag{2.60}$$

Preuve 2.15 *Soit $\xi = x+\alpha y+\beta t$, on cherche les solution de la forme $u(x,y,t) = g(\xi)$,*
Avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Remarquant qu'avec ce changement de variable on a :
$u_{tt}(x,y,t) = \beta^2 g''(\xi)$, $u_{xx} = g''(\xi)$ et $u_{yy} = \alpha^2 g''(\xi)$.
Donc avec ces formules le problème (2.61) est équivalent à résoudre l'équation différentielle

$$\beta^2 g''(\xi) - g''(\xi) - \alpha^2 g''(\xi) + g(\xi) = 0$$

Alors

$$g''(\xi)(\beta^2 - (1+\alpha^2)) + g(\xi) = 0$$

Par suite le polynôme caractéristique (P) est se la forme $\gamma r^2 + 1 = 0$ *, de plus on a* $\beta^2 > 1 + \alpha^2 \Longleftrightarrow \gamma > 0$*, alors les racines de (P) sont* $r = \mp\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ *ainsi la solution g est sous la forme*

$$g(\xi) = A.cos(\frac{\xi}{\sqrt{\gamma}}) + B.sin(\frac{\xi}{\sqrt{\gamma}})$$

Finalement

$$u(t,x,y) = A.cos(\frac{x+\alpha y+\beta t}{\sqrt{\gamma}}) + B.sin(\frac{x+\alpha y+\beta t}{\sqrt{\gamma}})$$

Avec

$$u(0,x,y) = A.cos(\frac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}) + B.sin(\frac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}})$$

Et

$$u_t(0,x,y) = \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}(B.cos(\frac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}) - A.sin(\frac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}))$$

Théorème 2.18 *soit* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\gamma = \beta^2 - (1+\alpha^2)$ *, tel que* $\beta^2 < 1 + \alpha^2$*.*
alors $u(x,y,t) = A.e^{\frac{x+\alpha y+\beta t}{\sqrt{\gamma}}} + B.e^{\frac{-(x+\alpha y+\beta t)}{\sqrt{\gamma}}}$*, est la solution de problème.*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u = 0 \\ \quad u(0,x,y) = A.e^{\frac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}} + B.e^{\frac{-(x+\alpha y)}{\sqrt{\gamma}}} \\ \quad u_t(0,x,y) = \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}(A.e^{\frac{x+\alpha y}{\sqrt{\gamma}}} - B.e^{\frac{-(x+\alpha y)}{\sqrt{\gamma}}}) \end{cases} \tag{2.61}$$

Preuve 2.16 *Même démonstration que le théorème précédent avec*

$$g(\xi) = A.e^{\frac{\xi}{\sqrt{\gamma}}} + B.e^{\frac{-\xi}{\sqrt{\gamma}}}$$

Exemple d'application Pour $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $A = B = 1$
La solution u se varie de la manière suivante :

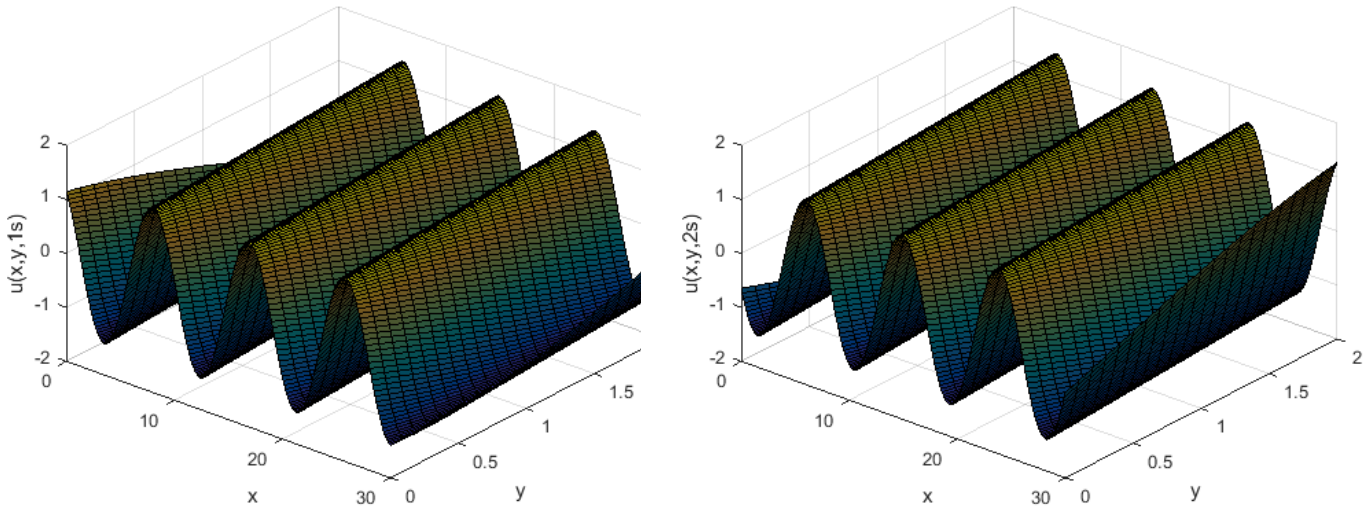

FIGURE 2.2 – Représentation de la solution u en $t = 2s$ et $t = 2s$

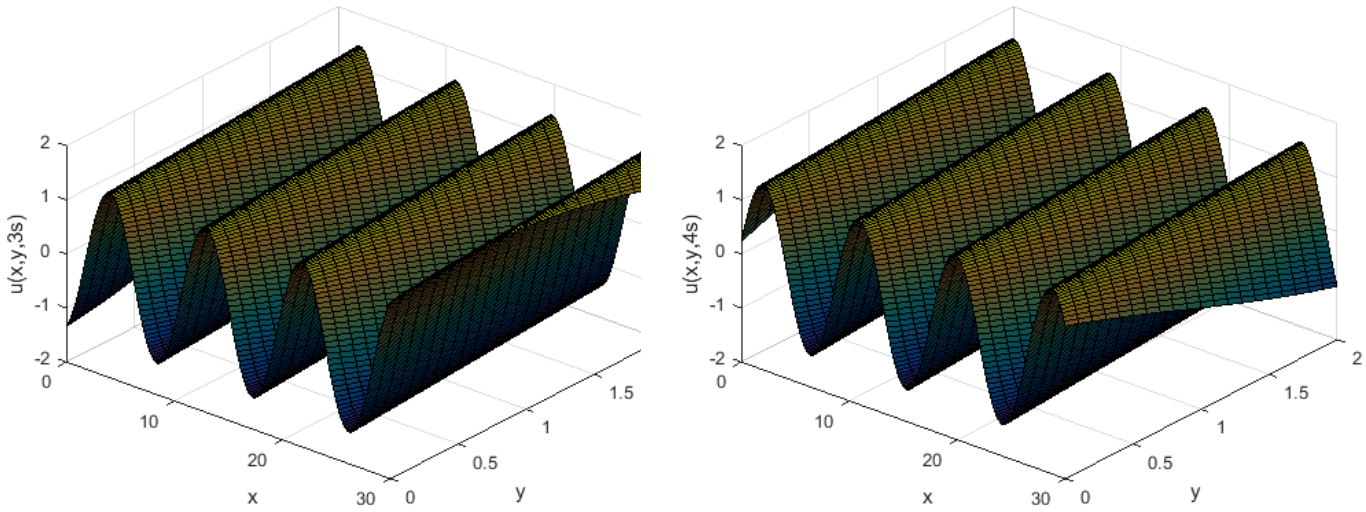

FIGURE 2.3 – Représentation de la solution u en $t = 3s$ et $t = 4s$

CHAPITRE 3

ÉTUDE THERMODYNAMIQUE

L'état SC présente des caractéristiques macroscopiques qui rendent intéressant le traitement de la transition à T_c à l'aide de la théorie phénoménologique des transitions de phases de Landau, rattachée à la thermodynamique.
Pour décrire la transformation $N \longrightarrow SC$, nous allons employer l'énergie libre F(T,B_a), qui est en fonction de la température et du champ magnétique appliqué.Nous allons également utiliser l'énergie interne U(S,B_a) : où S est l'entropie.

3.1 Principes de thermodynamique

1. *Conservation de l'énergie.*
   La variation de la chaleur est égale à la somme de la variation de l'énergie interne d'un système et du travaille qu'il fournit :

$$\delta Q = dU + \delta W$$

2. *Définition de l'entropie.*
   L'entropie ne peut que croitre ou rester constante au cours du temps :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \geq 0$$

3. *Principe de Nernst.*
   Au zéro absolu, l'entropie est nulle :

$$T = 0 \Rightarrow S = 0$$

Remarque 3.1 *En présence d'un champ magnétique appliquée B_a, on définit l'élément de travail par :*

$$\delta W = M dB_a \tag{3.1}$$

Et donc, en vertu du première principe de la thermodynamique, on peut écrire :

$$dU = TdS - MdB_a \tag{3.2}$$

3.2 Énergie libre

État normale.
il est pratique d'utiliser l'énergie libre de Helmholtz définie par :

$$F_n = U - TdS$$

Donc

$$dF_n = SdT - MdB_a \tag{3.3}$$

L'avantage de l'énergie libre est qu'elle fait intervenir deux variables la température et le champ magnétique qui sont ajustables.

3.3 Théorie phénoménologique de Guinzburg et landau

En 1950, Vitali Guinzburg et Lev Landau proposent une théorie phénoménologique de transition de phase de deuxième ordre pour la supraconductivité

3.3.1 Paramètre d'ordre

Il existe des matériaux, dit ferromagnétique qui présente en dessous d'une température de curie T_c, un moment magnétique macroscopique dŭ à l'alignement des spins des ions du réseau cristallin. Or, entre T_c et 0 K le paramètre d'ordre m change ; il vaut dans la phase désordonnée et 1 dans la phase la plus ordonnée. On peut prendre comme paramètre d'ordre pour un matériaux ferromagnétique

$$m = |\frac{n_\uparrow - n_\downarrow}{n_\uparrow + n_\downarrow}|$$

Où $n_\uparrow$ est le nombre d'électrons avec spin up et $n_\downarrow$ avec un spin down . À $T > T_c$, il n'a pas de prépondérance d'une orientation par apport à une autre en raison de l'agitation thermique et donc $n_\uparrow \backsimeq n_\downarrow$ et par conséquence $m = 0$. Maintenant si $T < T_c$, m va augmenter de telle façon qu'à zéro Kelvin il vaille 1. L'idée de Guinburg et Landau a été de décrire la transition SC à l'aide d'une pseudo-fonction d'onde complexe comme paramètre d'ordre :

$$\psi(r) = |\psi(r)|e^{i\Theta}$$

Ils sont choisie la densité de super-électrons comme définition du carré de la norme du paramètre d'ordre |

$$|\psi|^2_{L^2} = n_s$$

3.3.2 Densité d'énergie libre champ nul

Considérons que le paramètre d'ordre ne change pas avec la position,c'est le cas au centre d'un SC sans champs magnétique. Nous traitons le cas en présence de champ plus loin.
À partir d'énergie libre de l'état normal F_n et d'une densité liée au paramètre d'ordre $F_{|\psi|}$ aux alentours de T_c :

$$F_s = F_n + F_{|\psi|}$$

En suppose que $F_{|\psi|}$ admet un développement en série de puissances :

$$F_{|\psi|} = \sum_{i=1}^{n} a_i |\psi|^i \tag{3.4}$$

Les coefficients de la série doivent satisfaire certains conditions.

Condition 1

Proximité de T_c. $n = 4$ on ne prend que les thermes majeurs, et comme à la transition le paramètre d'ordre est petit, les thermes des puissances supérieures de $|\psi|$ sont négligeable.

Condition 2

Stabilité de $F_{|\psi|}$. $a_1 = 0$ En effet, dans l'état normal (désordonné), $|\psi| = 0$ et $(\frac{\partial F_{|\psi|}}{\partial |\psi|})_{|\psi|=0} = 0$.

Condition 3

Symétrie d'axe $|\psi| = 0$. $a_3 = 0$ Car la fonction est paire, ceci n'est vrai que dans un cas sans champ magnétique.

Condition 4

Solution unique de $F_{|\psi|}$ par état. $a_2 > 0$ pour $T > T_c$ et $a_2 < 0$ pour $T < T_c$.

Condition 5

Paramètre d'ordre finie. $a_4 > 0$ Il ne doit pas exister de minimum pour $F_{|\psi|}$.
Notons $a_2 \leftrightarrow \alpha$ et $a_4 \leftrightarrow \frac{\beta}{2}$ on obtient finalement :

$$F_{|\psi|} = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 \tag{3.5}$$

Ensuite on sait que l'état SC doit être favorisé en dessous de T_c, de même, l'état normal a une densité d'énergie plus basse pour $T < T_c$. Ce qui s'exprime par les équations.

$$SC : F_s < F_n \Rightarrow F_{|\psi|} < 0 \tag{3.6}$$

$$N : F_s \geq F_n \Rightarrow F_{|\psi|} \geq 0 \tag{3.7}$$

De plus, la densité d'énergie doit être un minimum local. Exprimé mathématiquement par les testes des dérivées premières et secondes

$$\frac{\partial F_{|\psi|}}{\partial |\psi|} = 2\alpha\psi + 2\beta|\psi|^2\psi = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 F_{|\psi|}}{\partial^2 |\psi|} = 2\alpha + 6\beta|\psi|^2 > 0 \tag{3.9}$$

En utilisant les conditions 4 et 5 ainsi que les équations 1.24 et 1.25 on voit que dans l'état SC :

$$|\psi|^2 = \frac{-\alpha}{\beta} = |\psi_\infty|^2 \tag{3.10}$$

Pour ce point critique la densité d'énergie libre vaut

$$F_{|\psi|} = \frac{-\alpha^2}{2\beta} \tag{3.11}$$

3.3.3 Densité d'énergie libre en champ non nul

L'avantage de la théorie Guinzburg Landau est de pouvoir traiter des cas de distribution non linéaire et non uniforme de la densité superélectrons, autrement dit de paramètre d'ordre. Dans cas de présence de champ son énergie doit être prise en compte de plus, l'énergie libre du système va dépendre aussi de gradient de paramètre d'ordre ψ donc d'une manière générale

$$F_s = F_n + F_{|\psi|} + F_{B_a} + F_{|\nabla\psi|,A} \tag{3.12}$$

Pour la composant magnétique :

$$F_{B_a} = \int_0^{B_a} M dB_a = B_a^2 \tag{3.13}$$

En utilisant la composante cinétique de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{h^2}{2m_s}|\nabla\psi|^2 = \frac{1}{2m_s}|ih\nabla\psi|^2$$

Cependant une formulation plus exacte et plus pratique (car invariance par changement de jauge) prend en compte également le potentiel A,définie par $B = \nabla_* A$
Ce qui s'exprime en effectuant la substitution

$$-ih\nabla\psi \to (-ih\nabla\psi + q_s A)\psi$$

Et donc

$$F_{|\nabla\psi|,A} = \frac{1}{2m_s}|(-ih\nabla + q_s A)\psi|^2 \tag{3.14}$$

Et par suit l'équation de Guinzburg-Landau :

$$F_s = F_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{B_a^2}{2\mu_0} + \frac{h^2}{2m_s}|\nabla\psi|^2 + \frac{ihq_s}{2m_s}A(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) + \frac{q_s^2}{2m_s}A^2|\psi|^2 \tag{3.15}$$

Ou encore

$$F_s = F_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{B_a^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m_s}|(-ih\nabla + q_s A)\psi|^2 \tag{3.16}$$

3.3.4 Système de Guinzbur-Landau

Le but comme toujours est de minimisé l'énergie libre F_s, le minimum est caractériser par le calcul des variations par apport à ψ et A :

$$\frac{\delta F_s}{\delta\psi} = \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m_s}(-ih\nabla + q_s A)^2\psi \tag{3.17}$$

Et

$$\frac{\delta F_s}{\delta A} = \frac{1}{\mu_0}\nabla_\times\nabla_\times A + \frac{ihq_s}{2m_s}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{q_s^2}{m_s}A|\psi|^2 \tag{3.18}$$

Système d'équation de Guinzbur-Landau :

$$\begin{cases} \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \dfrac{1}{2m_s}(-ih\nabla + q_s A)^2\psi = 0 & (1) \\ \dfrac{1}{\mu_0}\nabla_\times\nabla_\times A + \dfrac{ihq_s}{2m_s}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \dfrac{q_s^2}{m_s}A|\psi|^2 = 0 & (2) \end{cases} \tag{3.19}$$

Soit $\kappa^2 = \frac{2m^s\beta}{\mu_0 q_s^2 h^2}$
Avec des changements des variables adéquate le système 1.35 devient :

$$\begin{cases} \kappa^2(|\psi|^2 - 1)\psi + (i\nabla + A)^2\psi = 0 & (1) \\ \nabla_\times \nabla_\times A + i(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) + A|\psi|^2 = 0 & (2) \end{cases} \tag{3.20}$$

Équation de Guinzburg-Landou $1D$

$$\begin{cases} \psi'' = \kappa^2[(A^2 - 1)\psi + \psi^3] & (1) \\ A'' = A\psi^2 & (2) \end{cases} \tag{3.21}$$

3.3.5 Problème d'évolution de Guinzburg-Landau

Ce modèle est modélisé comme un problème de Cauchy sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} - i\Theta\psi + (|\psi|^2 - 1)\psi + (i\nabla + A)^2\psi = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial A}{\partial t} + \nabla\Theta + \nabla_\times\nabla_\times A - imag(\psi^*\nabla\psi) - A|\psi|^2 = 0 & (2) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) & (3) \\ A(x,0) = A_0(x) & (4) \end{cases} \tag{3.22}$$

Avec $imag(\psi^*\nabla\psi)$ est la partie imaginaire de $\psi^*\nabla\psi$, Θ est le potentiel électrique (scalaire réel).ψ le paramètre d'ordre (scalaire complexe) et A le potentiel magnétique (vecteur réel)

CHAPITRE 4

ÉTUDE DU SYSTÈME DE GINZBURG-LANDAU UNIDIMENSIONNEL

4.1 Introduction

En mathématiques, dans l'étude des systèmes dynamiques, le théorème de Hartman-Grobman ou théorème de linéarisation est un théorème important concernant le comportement local des systèmes dynamiques au voisinage d'un point d'équilibre.
Essentiellement, ce théorème énonce qu'un système dynamique, au voisinage d'un équilibre, se comporte qualitativement de la même manière que le système linéarisé au voisinage de l'origine. Par conséquent, lorsque l'on est en présence d'un tel système, on utilise plutôt la linéarisation, plus facile à analyser, pour étudier son comportement.

4.2 Rappels

Pour plus de détaille sur la notion de stabilité vous pouvez voir [8] [16]

Définition 4.1 ***Notion de stabilité.***
Une question importante est de connaître le comportement des trajectoires initialement voisines de l'équilibre pour cela on définit la notion de stabilité d'un point d'équilibre. La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non-linéaires.

Définition 4.2 ***Stabilité globale et stabilité locale***
Si on compare les comportements possibles dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires, on s'aperçoit que les comportements dynamiques des systèmes non linéaires sont beaucoup plus compliqués, avec un éventail beaucoup plus grand. Par exemple, parler de la stabilité de l'équilibre ou de la stabilité du système revient au même dans le cas linéaire, puisque l'on peut confondre la stabilité locale et la stabilité globale. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre sous la forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature du point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique mais aussi à déterminer le domaine d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de la stabilité ou de l'instabilité locale ou globale,

la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité globale signifie la divergence de solutions en dehors de toute limite.

4.2.1 Stabilité des solutions

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes

$$\begin{cases} x^{'}(t) = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$;notons que le problème 4.1 est un problème aux valeurs initiales, la solution qui passe par x_0 au temps t_0 s'écrit donc $x(t, x_0, t_0)$ avec $x(t_0, x_0, t_0) = x_0$, cette solution étant déterministe à cause des théorèmes d'existence et d'unicité. L'équation 4.1 modélise un très grand nombre de phénomènes dans des domaines très variés. Physiquement parlant, la qualité d'un système qui revient à son état d'équilibre après avoir subi une perturbation de cet état. Pour un système en mouvement ou en oscillation, la stabilité nécessite en général des forces de rappel. Si les forces de rappel d'un système oscillant, électrique ou mécanique, tel qu'un servomécanisme, ne sont pas correctement synchronisées et si l'amortissement est insuffisant, ces forces ne peuvent pas remplir leur fonction et rendent le système instable et incontrôlable. cette définition, qui est claire pour la majorité des systèmes physiques, apparaît grossière d'un point de vue mathématique et pose une question importante : comment juger les solutions qui sont à la limite de la stabilité ? Pour répondre à cette question, nous allons introduire la définition exacte de la stabilité selon Liapunov, en considérant que $\tilde{x}_0$ est une perturbation de x_0, $x(t, \tilde{x}_0)$ étant par conséquent la solution perturbée.

Définition 4.3 ***(Stabilité au sens de Liapunov)***
La solution $x(t; x_0)$ de 4.1 est stable si
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t, x_0) - x(t, \tilde{x}_0)\| < \epsilon$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$

Remarque 4.1 *Puisque la solution à tout instant dépend d'une manière continue des conditions initiales, cette définition suggère que, avec une perturbation suffisamment petite, les solutions restent proches dans tout le futur.*

Définition 4.4 *Un point x_{eq} est un point d'équilibre, ou un point singulier du système 4.1 tel que $F(x_{eq}) = 0$. On considérera toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation par un simple changement de variable $x \longleftarrow x - x_{eq}$.*

On s'intéresse dans ce chapitre à étudier le système de Ginzburg-Landau unidimensionnel 3.21 :

$$\begin{cases} \psi^{''} = \kappa^2[(A^2 - 1)\psi + \psi^3] & (1) \\ A^{''} = A\psi^2 & (2) \\ \psi'(\pm d) = 0, A'(\pm d) = h_e & (3) \end{cases} \tag{4.2}$$

Théorème 4.1 *[11] Pour un champ potentiel nul (A=0), le paramètre d'ordre est donné par :*

$$\psi = \tanh\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2}}\right) \tag{4.3}$$

Preuve 4.1 *Pour A=0 le système (4.2) devient :*

$$\begin{cases} \psi'' + \kappa^2\left(\psi - \psi^3\right) = 0 \quad (1) \\ \psi'(\pm d) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

En multipliant l'équation (1) par ψ' et en intégrant nous obtenons la première intégrale :

$$\frac{1}{\kappa^2}(\psi')^2 + \psi^2 - \frac{1}{2}\psi^4 = cst \tag{4.5}$$

Dans le cas idéal $\psi = 1$, et pour satisfaire les conditions initiales nous prenons $cst = \frac{1}{2}$, donc l'équation (4.5) peut s'écrire sous la forme :

$$(\psi')^2 = \frac{\kappa^2}{2}\left(1 - \psi^2\right)^2 \tag{4.6}$$

Finalement, la solution de (4.4) est donnée par :

$$\psi = \tanh\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2}}\right)$$

Théorème 4.2 ***Cauchy-Lipschitz****[10]*
Ce théorème permet d'affirmer l'existence de solutions locales.
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,et $F : (t, X) \longrightarrow F(t, X)$ une fonction continue de U dans $\mathbb{R}^n$, et telle que les n dérivées partielles par rapport aux n variables constituant X soient continues. Pour tout $(t_0, X_0) \in U$ [conditions initiales, dites « conditions de Cauchy »], il existe un intervalle ouvert J, $t_0 \in J$, tel que l'équation différentielle $X' = F(t, X)$ admette sur J une unique solution vérifiant $X(t_0) = X_0$. Ce théorème est admis. Un cas particulier important est celui où F est de classe C^1 sur U.

Proposition 4.1 *Le système (4.2) est équivalent à :*

$$u' = F(u) \tag{4.7}$$

Avec le vecteur $u = \begin{pmatrix} \psi \\ A \\ \psi' \\ A' \end{pmatrix}$.

Preuve 4.2 *Considérons le vecteur* $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi \\ A \\ \psi' \\ A' \end{pmatrix}$, *le système (4.2) devient :*

$$u' = F(u) = \begin{pmatrix} F_1(u) \\ F_{2(u)} \\ F_3(u) \\ F_4(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ \kappa^2 u_1(u_1^2 + u_2^2 - 1) \\ u_1^2 u_2 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Théorème 4.3 *Soit un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$, pour tout $(x_0, u_0) \in U$ il existe un intervalle ouvert J et $x_0 \in J$, l'équation différentielle $u' = F(x, u)$ admette sur J une unique solution vérifiant $u(x_0) = u_0$.*

Preuve 4.3 *On a*

$$F(u) = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ \kappa^2 u_1(u_1^2 + u_2^2 - 1) \\ u_1^2 u_2 \end{pmatrix}$$

On remarque que la fonction F à une forme polynomiale, et par suite il est de classe C^1 par rapport à u. D'après le théorème ***Cauchy-Lipschitz*** *on a le résultat.*

Définition 4.5 ***(Linéarisation)***
Soit l'équation différentielle $y' = f(y)$, et $f \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ $y_0 \in \mathbb{R}^d$.
Le système linéarisé en y_0 est le système d'équations différentielles suivant :

$$y' = \frac{\partial f(y_0)}{\partial y}(y - y_0) + f(y_0) \tag{4.9}$$

C'est le système obtenu en remplaçant f(y) par son développement de Taylor à l'ordre 1 en y_0.

Proposition 4.2 *Au voisinage de $u_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ \psi_0' \\ 0 \end{pmatrix}$ l'équation différentielle linéarisé associée à (4.1) est donnée par :*

$$u' = F(u_0) + M(u - u_0) \tag{4.10}$$

Avec $M = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)_{u_0}$.

Théorème 4.4 ***Grobmann-Hartman****[7][22]*
Soit $y' = f(y)$, $f \in C^1(R^d; R^d)$ un système d'équations différentielles sur R^d. Supposons que $f(0) = 0$ et que la matrice $M = \dfrac{\partial f(y_0)}{\partial y}$ n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle. Alors il existe des voisinages U et V de l'origine 0 dans R^d, et un homéomorphisme (bijection bi-continue) $h : U \longrightarrow V$ qui envoie les trajectoires de $y' = f(y)$ sur les trajectoires de $y' = My$ en préservant le sens du temps. Plus précisément, si $y_0 \in R^d$ est une valeur initiale et si $y(t; y_0) \in U$, alors $\exp(tM)h(y_0) \in V$ et on a :

$$y(t, y_0) = (h^{-1} \circ \exp(tM) \circ h)(y_0) \tag{4.11}$$

Ainsi, au voisinage d'un point $y_0 \in R^d$ tel que $f(y_0) = 0$, les solutions du système $y' = f(y)$ se comportent comme celles de $y' = M(y - y_0)$. Si la partie réel des valeurs propres de la matrice M sont non nuls.

Théorème 4.5 *Au voisinage de u_0 il existe des voisinages U et V de $0_{\mathbb{R}^4}$ et un homéomorphisme $h : U \longrightarrow V$ tels que :*

$$u(x, u_0) = (h^{-1} \circ \exp(xM) \circ h)(u_0) \tag{4.12}$$

Preuve 4.4 *On a $F(0) = 0$, montrons que M n'a pas de valeur propre de partie réelle nulle. La matrice M est donnée par :*

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \kappa^2(3u_1^2 + u_2^2 - 1) & 2\kappa^2 u_1 u_2 & 0 & 0 \\ 2u_1 u_2 & u_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Donc M est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \kappa^2(3\psi_0^2 - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Notons $a = \kappa^2(3\psi_0^2 - 1)$,

$$P(\lambda) = |M - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ a & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \psi_0^2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - a)(\lambda^2 - \psi_0^2) \tag{4.15}$$

On a $P(0) = \det(M) \neq 0$ donc M est inversible. De plus les valeurs propres de M ont de partie réelles non nulles, donc on peut appliquer le théorème (4.2.1). Alors il existe un homéomorphisme $h : U \longrightarrow V$ tel que :

$$u(x, u_0) = (h^{-1} \circ \exp(xM) \circ h)(u_0)$$

Calculons $\exp(xM)$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_0^2 \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $p \geq 1$

$$M^{2p} = \begin{pmatrix} a^{2p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_0^{2p} \end{pmatrix}$$

.

De même pour les indice impaire.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_0^2 \\ a^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc pour tout $p \geq 0$

$$M^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_0^{2p} \\ a^{2(p+1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_0^{2(p+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or on sait que :

$\cosh(x) = \sum_{p\geq 0} \dfrac{x^{2p}}{(2p)!}$ *et* $\sinh(x) = \sum_{p\geq 0} \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$

Donc $\exp(xM) = \sum_{p\geq 0} \dfrac{x^{2p}M^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p\geq 0} \dfrac{x^{2p+1}M^{2p+1}}{(2p+1)!}$.
Finalement, nous obtenons :

$$\exp(xM) = \begin{pmatrix} \cosh(ax) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(x\psi_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(ax) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(x\psi_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sinh(ax)}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sinh(\psi_0 x)}{\psi_0} \\ \sinh(ax) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(\psi_0 x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Théorème 4.6 *Pour* $u_1 = (1,0,0,0)$ *alors les solutions du système* $u' = F(u)$ *se comportent comme celles de* $u' = M(u_1)(u - u_1)$.

Preuve 4.5 *On a* $F(u_1) = 0$ *et* $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}\right)_{u_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *dans ce cas :*

$$exp^{xM} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{2}\kappa x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\sqrt{2}\kappa x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sinh(\sqrt{2}\kappa x)}{\sqrt{2}\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh(x) \\ \sinh(\sqrt{2}\kappa x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh(x) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

CONCLUSION

Nous considérons que le fait de pensé que le champ électrique peut être en fonction de temps nous a permet d'obtenir une extension d'équation de London, cette équation est plus compliquée que le cas où le champ électrique est constant par apport au temps.

le fait de transformer le problème obtenu en un problème d'onde classique , nous a donner la possibilité d'une part d'appliquer la théorie des opérateurs m-dissipatif (existence et unicité), et d'autre part d'obtenir une solution exacte.

Pour l'aspect thermique liée à l'équation de Ginzburg-Landau, notre travail est une synthèse très bref afin d'expliquer avec thermes très précis, le système de Ginzburg-Landau à partir d'une fonction d'ordre et un champ potentiel.

Un résultat substantiel est obtenu dans le chapitre quatre, en effet nous avons linéarisé le problème de Ginzburg-Landau unidimensionnel, après vérification des hypothèse de théorème de Grobmann-Hartman, nous avons obtenue un lien entre la solution du modèle non linéaire et son linéarisé.

PERSPECTIVES

1. Peut ont améliorer l'extension du modèle des frères London, en ajoutant un terme non linéaire $F(B)$ comme suivant :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - c^2 \Delta B + \frac{c^2}{\lambda^2} B = f + F(B) \tag{4.18}$$

   Quels sont les critères de chois de la fonction F dont le bute de modéliser les turbulents (vortex) visualiser par expérience voir figure 4.1 aux nivaux de champ magnétique B.

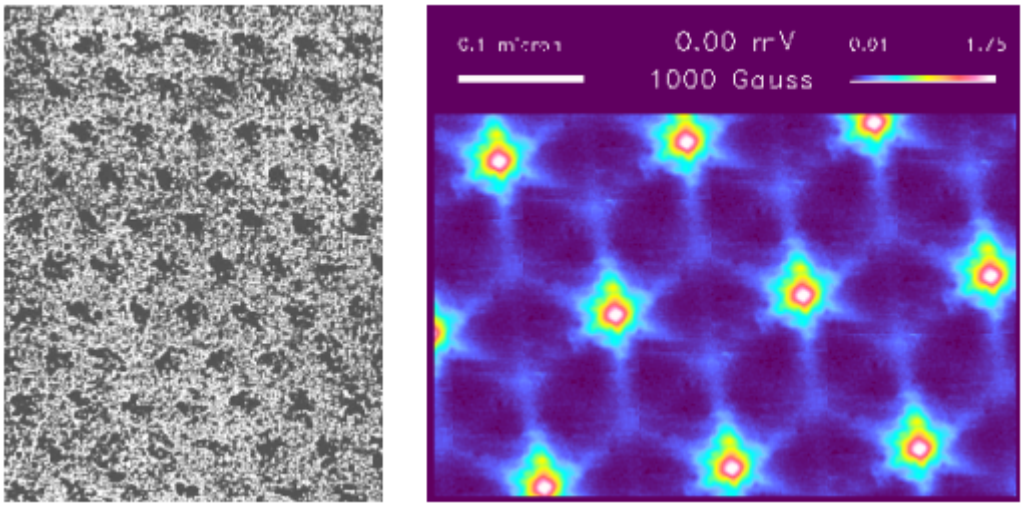

FIGURE 4.1 – À gauche : image du réseau de vortex de l'état mixte d'un échantillon de $Pb+6\%$¸ étain (U. Essmann et H. Träuble, 1966). À droite : image du réseau de vortex de l'état mixte obtenue par microscopie à effet tunnel d'un échantillon de NbSe2 (Harald Hess and R.B. Robinson, and J.V. Waszczak, Physica B 169 (1991) 422

2. est-il possible de trouver des résultat d'existence dans des espaces de Banach différent que celle déjà traiter.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.A.Adams : Sobolev Spaces ; Academic Press, New York 1975

[2] L.Antognazza , Decroux.M et Triscone.G : Introduction à la supraconductivité

[3] H.Aydi : Vorticité dans le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité. Jul,2008

[4] H.Brezis : Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications ; Editions Masson, Paris 1983.

[5] H.Brezis : Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contraction dans les espaces de Hilbert ; North Holland, Amsterdam 1973.

[6] Th.Cazenave et A.Haraux : Introduction aux Problèmes d'Évolution Semi-Linéaires ; Collection "Mathématiques et Applications" de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), Editions Ellipses, Paris 1991.

[7] Coayla-Teran, A.Edson , Mohammed, A.Salah-Eldin and Rufno, C.Paulo Régis "Hartman-Grobman Teorems along Hyperbolic Stationary Trajectories." (Feb 2007).

[8] R.Merkin David ,(1997), Introduction to the Theory of Stability, Springer-Verlag.

[9] C.Evans :Partiel Differential Equation. American mathematical Society . August , 1997

[10] H.Fack : Equations différentielles, INSA de Lyon,2003

[11] R.Feynman : The Feynman LECTURES ON PHYSICS ; VOLUME III, QUANTUME MECHANICS, October,2010

[12] F.Golse : Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles ; Octobre 2012.

[13] H.Hélène : Équation Différentielles ; INSA de Lion 2014.

[14] O.Kavian, Introduction à la Théorie des Points Critiques.Nancy, le 20 Juillet 1993.

[15] J.L.Lions : Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires ; Éditions Dunod-Gauthiers-Villars, Paris 1969.

[16] H.Leipholz, (1970) ; Stability Theory, An Introduction to the Stability of Dynamical Systems and Rigid Bodies. Academic Press.

[17] V.G.Maz'ja : Sobolev Spaces ; Springer, Berlin (1985).

[18] R.Reinhard : Lectures on Nonlinear Evolution Equations ; Konstanz, April 2015

[19] L.Schwartz : Théorie des distributions, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg. Hermann, Paris 1966.

[20] N.Th.Varopoulos : Hardy-Littlewood theory for semigroups ; J. Func. Analysis, 63 (1985).

[21] K.Yosida : Functional Analysis :Springer-Verlag, “Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften”, New York 1974.

[22] S.Zimmerman An Undergraduate’s Guide to the Hartman-Grobman and Poincaré-Bendixon Theorems, MATH181HM : Dynamical Systems Spring 2008

[23] C.Zuily : Distributions et équations aux dérivées partielles, 2ème édition. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1986.