كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⴰⵙⵙⴰⵏⵉⵏ ⴷ ⵜⵙⵏⵉⵅⵉⵜⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵙⵉⴷⵉ ⵎⵓⵃⵎⵎⴰⴷ ⴱⵏ ⵄⴱⴷⵍⵍⴰⵀ
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Mathématiques et Applications

(MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

A Propos Des Polynômes De Tchebychev

Réalisé par : ASSARRAR Anass

Encadré par: Pr. EL KHOMSSI Mohammed

Soutenu le 08/06/2018

Devant le jury composé de:

-Pr. EL KHOMSSI Mohammed — Encadrant

-Pr. EZZAKI Fatima

-Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed

-Pr. HILALI Abdelmajid

Année Universitaire 2017 / 2018

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

A propos des polynômes de Tchebychev

Réalisé par:
Assarrar Anass

20 juin 2018

Dédicaces

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.
A mes chers frères et sœurs pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.
A toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.
A mes amis étudiants à mes enseignants de la faculté des sciences et techniques-Fès.

Remerciement

En premier lieu je tiens à remercier ma famille : mes parents, mes sœur mes frères et tous mes proches et amis, qui m’ont accompagné aidé, soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à mon encadrant, le professeur El Khomssi Mohammed, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu’il a consacrées à diriger cette recherche.

Remerciement et profonde gratitude vont également aux membres du jury :

Professeur El khomssi Mohammed

Professeur El Hilali Alaoui Ahmed

Professeur EZZAKI Fatima

Professeur HILALI Abdelmajid

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Les polynômes de Tchebychev : propriétés et orthogonalité **7**
2.1 Généralités sur l'orthogonalité 7
2.2 Les polynômes classiques 9
2.3 Les polynômes de Hermite 10
2.4 Les polynômes de Laguerre 11
2.5 Les polynômes de Jacobi 12
2.6 les polynômes de Chebychev $T_n(x)$ 13

3 D'autres espèces de polynômes de Tchebycheb **18**
3.1 Le deuxième espèce $U_n(x)$ 18
3.2 Le troisième espèce $V_n(x)$ 21
3.3 Le quatrième espèce $W_n(x)$ 24

4 les quatres espèces **27**
4.1 Propriétés communes 27
4.2 Polynômes de Tchebychev de la variable complexe 27
4.3 Synthèse générale 29
4.4 Relation entre les polynômes de Tchebychev et les puissances de x 31

5 Théorie d'approximation polynomiale et polynômes de Tchebychev **32**
5.1 Forme de Lagrange du polynôme d'interpolation 32
5.2 Stabilité et convergence du polynôme de Lagrange 33
5.3 Meilleure approximation au sens de Tchebychev 35
5.4 Approximation polynomiale 37
5.4.1 Formule de Lagrange du polynôme d'interpolation . 39
5.4.2 Formule d'interpolation de Tchebychev 39
5.5 Séries orthogonaux de Tchebychev 42

6 conclusion **45**

1 Introduction

La première famille des polynômes orthogonaux apparaît avec les premiers travaux de Legendre sur les mouvements planétaires en 1784. Dans ces travaux, il avait établi plusieurs propriétés communes de ces familles. Il a notamment explicité l'équation différentielle du second ordre ayant pour solution ces polynômes et étudié les zéros de ces polynômes. Cette famille porte aujourd'hui le nom de "polynômes de Legendre". Par la suite, d'autre familles ont été introduites notamment celle de Hermite(1864), qui est utilisé dans la théorie des approximations. Nous pouvons citer aussi les travaux de N.H.Abel, V.L.Lagrange, P.L.Tchebychev qui a commencé, avec T.J.Steiltjes, la création et le développement de la théorie générale des polynômes orthogonaux à l'aide des fractions continues. En 1879 Laguerre avait introduit une famille des polynômes qui portent son nom aujourd'hui.Il a montré entre autre que ces polynômes orthogonaux sont liés à certaines fractions continues.Au milieu du XIX siècle,Jacobi introduit une nouvelle famille qui généralise les polynômes de Legendre et de Tchebychev.Aujourd'hui,ces trois familles Jacobi,Laguerre et Hermite,sont connues par le nom des "vrais polynômes classiques". Le premier ouvrage consacré entièrement aux polynômes orthogonaux est celui de Shohat édité en 1934 sous le titre "Théorie Générale des Polynômes Orthogonaux". Vient ensuite, en 1939, le livre de Szegö intitulé "Orthogonal Polynomials" qui traite la théorie générale des polynômes orthogonaux et leur comportement asymptotique. De nos jours on peut citer le livre de Chihara (1978) qui traite la théorie algébrique de l'orthogonalité et des nouvelles notions introduites ces dernières années. La notion de l'orthogonalité usuelle a subi beaucoup de généralisation, ça a commencé par la notion des p-(p > 1)orthogonalité (Boukhemis 1988) puis la d-orthogonalité (P. Maroni 1989), vient ensuite notamment la biorthogonalité (Brezinski 1992) et enfin l'orthogonalité multiple (Aptekarev, Van Assche...).Bien sûr toutes ces notions ont été introduites afin d'améliorer les méthodes de l'approximation qu'elles soient fonctionnelles au sens des Hermite-Padé généralisée, d'augmenter l'ordre des équations différentielles ayant pour solution ces polynômes et par suite rendre plus compréhensibles les phénomènes modélisés par ces équations différentielles.Dans ce mémoire, qui traite la classe des polynômes de Tchebychev (les quatres espèces de Tchebychev) nous nous somme beaucoup référés aux 2 ouvrages de Mason et Handscomb et de Chihara.

Motivation

****“Chebyshev polynomials are everywhere dense in numerical analysis.”****

Cette remarque a été attribué à un certain nombre d’éminents mathématiciens et numériciens. Il peut être dû à Philip Davis, a certainement parlé par George Forsythe, et c’est un attrayant et apte remarque. Il n’y a guère de domaine de l’analyse numérique où de Tchebychev ne chute pas en surprise comme visiteurs, et en fait, il y a maintenant un certain nombre de sujets dans lesquels ces polynômes prendre une position importante dans les développements modernes - y compris les polynômes orthogonaux, approximation polynomiale, intégration numérique, et des méthodes spectrales pour des équations aux dérivées partielles.
Cependant, il y a un autre aspect que l’on peut donner à la citation ci-dessus, à savoir que par l’étude de Tchebychev l’un est pris dans un voyage qui mène à tous les domaines de l’analyse numérique.

D’ailleurs,parmi leurs célèbres applications Les polynômes de Tchebychev permettent de démontrer le théorème de Weierstrass selon lequel toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d’une suite de fonctions polynomiales.
Ils sont également impliqués dans le calcul de filtres en électronique analogique, "les filtres de Tchebychev". Enfin, ils permettent une explication théorique de l’efficacité supérieure de la transformée en cosinus discrète dans le cadre de l’interpolation d’un signal numérique échantillonné, par rapport à d’autres méthodes comme le « zéro-padding +filtrage passe-bande».

2 Les polynômes de Tchebychev : propriétés et orthogonalité

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions des polynômes de Tchebychev ainsi que quelques propriétés pour chaque espèce.

2.1 Généralités sur l'orthogonalité

La théorie des polynômes orthogonaux est un sujet lié avec des branches très importantes de l'analyse. Les polynômes orthogonaux, c'est à dire les fonctions trigonométriques, hypergéométriques, Bessel et elliptiques, rentrent dans le cadre des fractions continues, les problèmes d'interpolation (de Lagrange, de Hermite), la théorie des équations différentielles et intégrales. Pour motiver cette idée, remarquons que l'identité

$$2cosm\theta cosn\theta = cos(m+n)\theta + cos(m-n)\theta \tag{1}$$

donne la formule d'intégration suivante :

$$\int_0^{\pi} cos(m\theta)cos(n\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, m, n \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n, m, n \neq 0 \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases} \tag{2}$$

de la formule d'intégration précédente, quand l'intégral s'annule, on dit que $\cos(m\theta)$ et $\cos(n\theta)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[0;\pi]$, pour $m \neq n$.
Si on pose :

$$x = cos\theta,$$

alors la formule s'écrit comme suit :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = 0, m \neq n \tag{3}$$

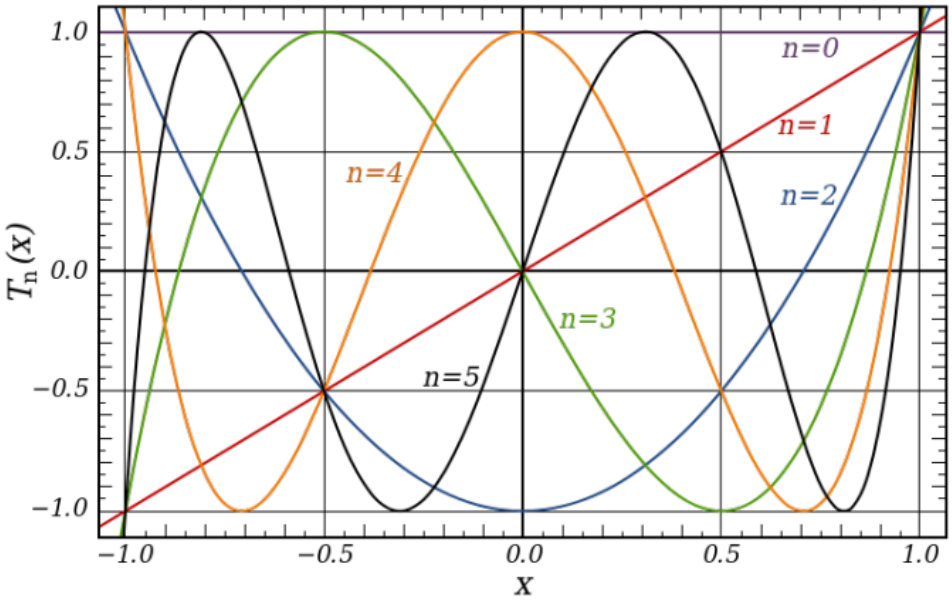
où

$$cos(n\theta) = T_n(x) = cos(narccosx), -1 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

on a :

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1\ \ T_3(x) = 4x^3 - 3x,...$$

Voici les graphes des polynômes $T_0(x)$, $T_1(x)$,$T_2(x)$,$T_3(x)$, $T_4(x)$, $T_5(x)$



Définitions 2.1. *On appelle fonction poids sur intervalle* $[a;b] \subset R$ *, toute fonction w qui vérifie les deux conditions :*

$$\forall x \in [a;b]\,, w(x) \geqslant 0 \text{ et}$$
$$\int_a^b w(x)dx < \infty$$

exemple : Toutes les fonctions continues positives sur un compact sont des fonctions poids .

Définitions 2.2. *Soit* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de polynômes avec* $deg(P_n) = n$*,et soit w une fonction poids sur* $[a;b]$*, on dit que* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids w dans* $[a;b]$ *si*

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = 0, m \neq n \tag{5}$$

d'après (3), on peut dire que $\{T_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *sont des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids* $(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ *dans* $[-1;1]$ *.*

2.2 Les polynômes classiques

Les trois familles de polynômes orthogonaux Hermite, laguerre et Jacobi (contient aussi les cas particulier de Tchebychev), ont plusieurs propriétés communes qui sont, en fait des caractérisations. Ces trois familles sont appelées les vrais polynômes orthogonaux classiques.

(a) La première caractérisation est celle de S.Bochner. Les polynômes orthogonaux classiques sont les seuls solutions de l'équation différentielles suivantes :

$$\alpha_2(x)y'' + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = \lambda y,$$

avec $\alpha_2(x)$, $\alpha_1(x)$ et $\alpha_0(x)$ sont des polynômes de degrés au plus 2, 1 et 0 respectivement et $\lambda \neq 0$, Cette équation peut s'écrire aussi sous une autre caractérisation de la forme $(*)$.

(b) Une deuxième caractérisation est la formule d'orthogonalité (appelée formule de Rodrigues), ces polynômes sont donnés à l'aide des fonctions poids par :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[\rho^n(x) w(x)\right],$$

tel que $\rho(x)$ est un polynôme indépendant de n de degré ≤ 2 .

Ainsi,$y(x) = P_n(x)$ satisfait une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\rho(x)w(x)\frac{dy}{dx}\right] - \lambda_n w(x) y = 0. \qquad (*)$$

(c) la troisième caractérisation est que Les polynômes classiques, vérifient l'équation de Pearson suivante :

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{ax+b}{\rho(x)}, deg\left[\rho(x)\right] \leq 2.$$

2.3 Les polynômes de Hermite

En mathématiques, les polynômes d' Hermite sont une suite de polynômes qui a été nommée ainsi en l'honneur de Charles Hermite (bien qu'ils aient surtout été étudiés par Joseph-Louis Lagrange lors de ses travaux sur les probabilités). Ils sont parfois décrits comme des polynômes osculateurs .

Définitions 2.3. *Ils sont définis comme suit :*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad (forme\ dite\ probabiliste)$$

$$\hat{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2} \qquad (forme\ dite\ physique)$$

Les deux définitions sont liées par la propriété d'échelle suivante

$$\hat{H}_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(x\sqrt{2})$$

Ils peuvent également s'écrire sous forme de développement polynomial :

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} x^{n-2k}$$
$$\hat{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

où $E(\frac{n}{2})$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$

Les premiers polynômes d' Hermite sont les suivants :

$$\begin{aligned}
&H_0(x) = 1\ , && \hat{H}_0(x) = 1 \\
&H_1(x) = x\ , && \hat{H}_1(x) = 2x \\
&H_2(x) = x^2 - 1\ , && \hat{H}_2(x) = 4x^2 - 2 \\
&H_3(x) = x^3 - 3x\ , && \hat{H}_3(x) = 8x^3 - 12x \\
&H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3\ , && \hat{H}_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12
\end{aligned}$$

2.4 Les polynômes de Laguerre

En mathématiques, les polynômes de Laguerre, nommés d'après Edmond Laguerre, sont les solutions normalisées de l'équation de Laguerre :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et se réécrit sous la forme de Sturm-Liouville :

$$-\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right) = ne^{-x}y.$$

Cette suite de polynômes peut être définie par la formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

Les polynômes de Laguerre apparaissent en mécanique quantique dans la partie radiale de la solution de l'équation de Schrödinger pour un atome à un électron .
Le coefficient dominant de $L_n(x)$ est $\frac{(-1)^n}{n!}$. Les physiciens utilisent souvent une définition des polynômes de Laguerre où ceux-ci sont multipliés par $(\breve{}1)^n n!$, obtenant ainsi des polynômes unitaires.
Voici les premiers polynômes de Laguerre :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= -x + 1 \\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\
L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \\
L_4(x) &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)
\end{aligned}$$

2.5 Les polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, sont les polynômes définis par la formule :

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right], \qquad (**)$$

tels que α, β sont deux paramètres vérifient des conditions d'orthogonalité $\alpha > -1$ et $\beta > -1$. Les polynômes de Jacobi vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux i.e.

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \gamma_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

avec

$$\beta_n = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)},$$
$$\gamma_n = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}.$$

A l'aide de la formule de dérivation de Leibneiz, et à partir de (**), on obtient la formule explicite de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ suivante :

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n+\alpha}{n-k}\tbinom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}.$$

Théorème 2.1. *Les polynômes de Jacobi $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, satisfont l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre suivante :*

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+2+\beta)x]\,y' + n(n+1+\alpha+\beta)y = 0,$$

ou bien sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}y'\right] + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = 0.$$

2.6 les polynômes de Chebychev $T_n(x)$

Définitions 2.4. *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce* $T_n(x)$ *(polynôme de Jacobi pour* $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ *)sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$cos(n\theta) = T_n(x),\ avec\, x = cos\theta, \tag{6}$$

pour tout x dans $[-1;1]$, alors θ appartient à $[0;\pi]$, on peut vérifier facilement que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n, voici quelques polynômes $T_n(x)$:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1\ T_3(x) = 4x^3 - 3x, ...$$

on donne quelques valeurs de $T_n(x)$:

$$T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n, T_{2n}(0) = (-1)^n, T_{2n+1}(0) = 0.$$

Proposition 2.1. *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce* $T_n(x)$ *sont orthogonaux dans l'intervalle* $[-1;1]$ *par rapport à la fonction poids* $w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$
i.e.

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

preuve : voir annexe.

Proposition 2.2. *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce* $T_n(x)$ *vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n \geq 1 \\ T_0(x) = 1\ \ et\ \ T_1(x) = x \end{cases} \tag{7}$$

Preuve 2.1. *Soit* $x \in [-1;1]$ *, posons* $\theta = arccosx$*, ainsi* $\theta \in [0;\pi]$*,*
pour tout $n \in N$ *on a :*

$$\begin{aligned} cos(n+1)\theta + cos(n-1)\theta &= 2cos\left[\frac{(n+1)\theta + (n-1)\theta}{2}\right] cos\left[\frac{(n+1)\theta - (n-1)\theta}{2}\right] \\ &= 2cosn\theta cos\theta. \end{aligned}$$

donc

$$cos(n+1)\theta + cos(n-1)\theta = 2cos\theta cosn\theta,$$

d'où le résultat i.e.

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x), \forall n \in N$$
$$AvecT_0(x) = 1 \;\; et \;\; T_1(x) = x \blacksquare$$

Remarque 2.1. *D'après (7), les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.*

Proposition 2.3. *Les polynômes de Tchebychev de la première espèce $T_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0. \tag{8}$$

Proposition 2.4. *Les zéros du polynôme $T_n(x)$ sont de la forme :*

$$x_k = cos\frac{(k - \frac{1}{2})\pi}{n}, k = 1, 2, 3, ..., n$$

Preuve 2.2. *De la définition (6) ; les zéros pour x dans $[-1; 1]$ de $T_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0; \pi]$ de $cosn\theta$, i.e.*

$$n\theta = (k - \frac{1}{2})\pi, k = 1, 2, ..., n.$$

d'où les zéros de $T_n(x)$ sont :

$$x_k = cos\frac{(k - \frac{1}{2})\pi}{n}, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

$\blacksquare$

Exemple 2.1. *on considère le polynôme $T_3(x)$ tel que*

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

les zéros du polynôme $T_3(x)$ sont :

$$x_1 = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_2 = cos\frac{\pi}{2} = 0,$$
$$x_3 = cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

on remarque que $T_3(x)$ admet trois racines réelles,simples et distinctes dans $[-1; 1]$.

Proposition 2.5. ***L'orthogonalité des polynômes {$T_i(x), i = 0, 1, ..., n$} dans le cas discret***
On peut vérifier que les polynômes de Tchebychev de la première espèce {$T_i(x), i = 0, 1, ..., n$} sont orthogonaux dans l'ensemble de $(n+1)$ points $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, à savoir :

$$x_k = cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+1},$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \frac{n+1}{2} & , i = j \neq 0 \\ n+1 & , i = j = 0 \end{cases}$$

En effet, on considère la somme suivante :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n+1} cos(k - \frac{1}{2})\theta = cos\frac{1}{2}\theta + cos\frac{3}{2}\theta + ... + cos(n + \frac{1}{2})\theta, \qquad (9)$$

si on pose $z = e^{i\theta}$,alors

$$\begin{aligned} S_n(\theta) &= Re\left[z^{\frac{1}{2}}(1 + z + z^2 + ... + z^n)\right] \\ &= Re\left[z^{\frac{1}{2}}(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z})\right] \\ &= Re\left[z^{\frac{1}{2}}(\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1})\right] \\ &= Re\left[z^{\frac{1}{2}}\frac{z^{\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}}(\frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{-1}{2}}})\right] \\ &= Re\left[z^{\frac{n+1}{2}}(\frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{-1}{2}}})\right], \end{aligned}$$

on sait que

$$\frac{z^{\frac{n+1}{2}} - z^{-\frac{n+1}{2}}}{2i} = sin(\frac{n+1}{2})\theta, et \ \frac{z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{-1}{2}}}{2i} = sin\frac{1}{2}\theta,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
S_n(\theta) &= Re\left[z^{\frac{n+1}{2}}(\frac{sin(\frac{n+1}{2})\theta}{sin(\frac{1}{2})\theta})\right] \\
&= Re\left[cos(\frac{n+1}{2})\theta + isin(\frac{n+1}{2})\theta\right]\frac{sin(\frac{n+1}{2})\theta}{sin(\frac{1}{2})\theta} \\
&= \frac{2cos(\frac{n+1}{2})\theta sin(\frac{n+1}{2})\theta}{2sin\frac{1}{2}\theta}
\end{aligned}$$

donc

$$S_n(\theta) = \frac{sin(n+1)\theta}{2sin(\frac{1}{2})\theta}, \tag{10}$$

d'après(9)

$$S_n(0) = n+1,$$

on a : pour $0 \leq i, j \leq n$*,*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) &= \sum_{k=1}^{n+1} cos(i\theta_k)cos(j\theta_k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\left[cos(i+j)\theta_k + cos(i-j)\theta_k\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[S_n\left(\frac{(i+j)\pi}{n+1}\right) + S_n\left(\frac{(i-j)\pi}{n+1}\right)\right],
\end{aligned}$$

si $i = j = 0$*, alors :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} T_0(x_k)T_0(x_k) &= \frac{1}{2}\left[S_n(0) + S_n(0)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2(n+1)\right] \\
&= n+1,
\end{aligned}$$

si $i = j \neq 0$*, alors :*

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) + S_n(0)\right],$$

d'après (10), on a :

$$
\begin{aligned}
S_n\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right) &= \frac{sin\left[(n+1)(\frac{2i\pi}{n+1})\right]}{2sin\left[\frac{1}{2}(\frac{2i\pi}{n+1})\right]} \\
&= \frac{sin(2i\pi)}{2sin(\frac{i\pi}{n+1})} \\
&= 0, \forall i \leq n,
\end{aligned}
$$

donc,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_i(x_k) &= \frac{1}{2}\left[0+(n+1)\right] \\
&= \frac{n+1}{2},
\end{aligned}
$$

si $i \neq j$ *alors*

$$
\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \frac{1}{2}\left[S_n\left(\frac{(i+j)\pi}{n+1}\right) + S_n\left(\frac{(i-j)\pi}{n+1}\right)\right],
$$

or,d'après (10) on a :

$$
S_n\left(\frac{(i+j)\pi}{n+1}\right) = \frac{sin(i+j)\pi}{2sin\left(\frac{(i+j)\pi}{2(n+1)}\right)} \; et \; S_n\left(\frac{(i-j)\pi}{n+1}\right) = \frac{sin(i-j)\pi}{2sin\left(\frac{(i-j)\pi}{2(n+1)}\right)},
$$

donc

$$
\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) = 0, \forall i,j \leq n, i \neq j,
$$

d'où le résultat i.e.

$$
\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \frac{n+1}{2} & , i = j \neq 0 \\ n+1 & , i = j = 0 \end{cases}
$$

Propriétés

1. Le coefficient dominant des polynômes $T_n(x)$ est 2^{n-1} , $\forall n \geq 1$,
2. $T_n(x)$ a la parité de n.

Preuve 2.3. *1) Soit le polynôme $T_n(x)$ tel que*

$$T_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...,$$

supposons que $a_n \neq 0$, de la relation (7) on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1}x^{n+1} + ... &= 2x(a_n x^n + ...) - a_{n-1}x^{n-1} - .... \\ &= 2a_n x^{n+1} + ... \end{aligned}$$

par identification on trouve

$$a_{n+1} = 2a_n,$$

i.e.

$$a_{n+1} = 2a_n = 2^2 a_{n-1} = 2^n a_1,$$

puisque $T_1(x) = x$, alors

$$a_n = 2^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

2)

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= T_n(-cosn\theta) \\ &= T_n(cosn(\theta + \pi)) \\ &= cos(n\theta + n\pi) \\ &= (-1)^n cos(n\theta) \\ &= (-1)^n T_n(cos\theta), \end{aligned}$$

d'où le résultat i.e.

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(cos\theta) = (-1)^n T_n(x).$$

■

3 D'autres espèces de polynômes de Tchebycheb

3.1 Le deuxième espèce $U_n(x)$

Définitions 3.1. *Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$(polynôme de Jacobi pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$))sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{sin(n+1)\theta}{sin(\theta)} = U_n(x), \; avec \, x = cos\theta, \tag{11}$$

pour tout x dans $[-1;1]$, alors θ appartient à $[0;\pi]$, voici quelques polynômes $U_n(x)$:

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,$$
$$U_2(x) = 4x^2 - 1\ \ ,...$$

Proposition 3.1. *Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1;1]$ par rapport à la fonction poids $w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$*
i.e.

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

preuve : voir annexe.

Proposition 3.2. *Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ U_0(x) = 1\ \ et\ \ U_1(x) = 2x \end{cases} \tag{12}$$

Preuve 3.1. *Soit $x \in [-1;1]$, posons $\theta = arccosx$, ainsi $\theta \in [0;\pi]$, pour tout $n \in N$ on a :*

$$sin(n+1)\theta = sinn\theta cos\theta + cosn\theta sin\theta \tag{13}$$
$$sin(n-1)\theta = sinn\theta cosn\theta - cosn\theta sin\theta, \tag{14}$$

les relations (13) et (14) donnent

$$sin(n+1)\theta + sin(n-1)\theta = 2sin\theta cos\theta,$$

on divise par $sin\theta$ on obtient :

$$\frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta} + \frac{sin(n-1)\theta}{sin\theta} = 2cos\theta\frac{sinn\theta}{sin\theta},$$

d'où le résultat i.e.

$$U_n(x) = U_{n-1}(x) - 2xU_{n-2}(x), \forall n \geqslant 2$$
$$AvecU_0(x) = 1\ \ et\ \ U_1(x) = 2x$$

■

Remarque 3.1. *D'après (12), les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.*

Proposition 3.3. *Les polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce $U_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n+2)y(x) = 0. \tag{15}$$

Proposition 3.4. *Les zéros du polynôme $U_n(x)$ sont déterminés à partir des zéros de $sin(n+1)\theta, \theta \in [0;\pi]$ comme suit :*

$$x = y_k = cos\frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Preuve 3.2. *De la définition (11) ; les zéros pour x dans $[-1;1]$ de $U_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0;\pi]$ de $sin(n+1)\theta$, i.e.*

$$(n+1)\theta = k\pi, k = 1, 2, ..., n.$$

d'où les zéros de $U_n(x)$ sont :

$$y_k = cos\frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, ..., n$$

■

Proposition 3.5. *Le coefficient dominant des polynômes $U_n(x)$ est 2^n,$\forall n \geqslant 2$.*

Preuve 3.3. *Soit le polynôme $U_n(x)$ tel que*

$$U_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...,$$

supposons que $a_n \neq 0$, de la relation (12) on obtient :

$$\begin{aligned} a_n x^n + ... &= 2x(a_{n-1}x^{n-1} + ...) - (a_{n-2}x^{n-2} + ...), \\ \Rightarrow (a_n x^n + ...) &= 2(a_{n-1}x^n + ...), \end{aligned}$$

par identification on trouve

$$a_n = 2a_{n-1},$$

i.e.

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1}a_1 = 2^n a_0,$$

puisque $U_1(x) = 1$, alors

$$a_n = 2^n, \forall n \geq 2.$$

■

Proposition 3.6. ***L'orthogonalité des polynômes {$\sqrt{1-x^2}U_i(x), i = 0, 1, ..., n$} dans le cas discret***
On peut vérifier que les polynômes {$\sqrt{1-x^2}U_i(x), i = 0, 1, ..., n$} sont orthogonaux dans l'ensemble de $(n+1)$ points $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, à savoir :

$$x_k = cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+1},$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1-x_k^2)U_i(x_k)U_j(x_k) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j; 0 \leq i, j \leq n \\ \frac{n+1}{2} & si\ i = j\ et\ 0 \leq i < n \\ n+1 & si \quad , i = j = n \end{cases}$$

Preuve 3.4. *on note pour $0 \leq i, j \leq n$,*

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1}(1-x_k^2)U_i(x_k)U_j(x_k)$$

où $\{x_k\}$ sont les zéros du polynôme T_{n+1}.puis on a

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^{n+1} sin(i+1)\theta_k sin(j+1)\theta_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}[cos(i-j)\theta_k - cos(i+j+2)\theta_k] \\ &= \frac{1}{2}\left[S_n\left(\frac{(i-j)\pi}{n+1}\right) - S_n\left(\frac{(i+j+2)\pi}{n+1}\right)\right]. \end{aligned}$$

ainsi en utilisant la formule de la somme S_n déjà définie dans l'exemple (2.2) on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1-x^2)U_i(x_k)U_j(x_k) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j; 0 \leq i, j \leq n \\ \frac{n+1}{2} & si\ i = j\ et\ 0 \leq i < n \\ n+1 & si \quad , i = j = n \end{cases}$$

3.2 Le troisième espèce $V_n(x)$

Définitions 3.2. *Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ (polynôme de Jacobi pour $\beta = -\alpha = \frac{1}{2}$)) sont des polynômes en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{cos(n+\frac{1}{2})\theta}{cos(\frac{1}{2}\theta)} = V_n(x),\ avec\, x = cos\theta, \tag{16}$$

pour tout x dans $[-1;1]$, alors θ appartient à $[0;\pi]$, voici quelques polynômes $V_n(x)$:

$$V_0(x) = 1,\ V_1(x) = 2x - 1, ...,$$

Proposition 3.7. *Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1;1]$ par rapport à la fonction poids $w(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}$*
i.e.

$$\int_{-1}^{1} V_n(x)V_m(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}dx = \pi\delta_{mn}$$

preuve : voir annexe.

Proposition 3.8. *Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ V_0(x) = 1 \ \ et \ \ V_1(x) = 2x - 1 \end{cases} \tag{17}$$

Preuve 3.5. *Soit $x \in [-1;1]$, posons $\theta = arccosx$, ainsi $\theta \in [0;\pi]$, pour tout $n \in N$ on a :*

$$cos(n+\frac{1}{2})\theta = cos\theta cos(n-1+\frac{1}{2})\theta - sin\theta sin(n-1+\frac{1}{2})\theta, \tag{18}$$

$$cos(n-2+\frac{1}{2})\theta = cos\theta cos(n-1+\frac{1}{2})\theta + sin\theta sin(n-1+\frac{1}{2})\theta, \tag{19}$$

les relations (18) et (19) donnent :

$$cos(n+\frac{1}{2})\theta + cos(n-2+\frac{1}{2})\theta = 2cos\theta cos(n-1+\frac{1}{2})\theta,$$

on divise par $cos\frac{1}{2}\theta$ on obtient :

$$\frac{cos(n+\frac{1}{2})\theta}{cos\frac{1}{2}\theta} + \frac{cos(n-2+\frac{1}{2})\theta}{cos\frac{1}{2}\theta} = 2cos\theta\frac{cos(n-1+\frac{1}{2})\theta}{cos\frac{1}{2}\theta},$$

d'où le résultat i.e.

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \forall n \geqslant 2$$
$$AvecV_0(x) = 1 \ \ et \ \ V_1(x) = 2x - 1$$

■

Remarque 3.2. *D'après (17), les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.*

Proposition 3.9. *Les polynômes de Tchebychev de la troisième espèce $V_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1-x^2)y''(x)+(1-2x)y'(x)+n(n+1)y(x)=0. \tag{20}$$

Proposition 3.10. *Les zéros du polynôme $V_n(x)$ sont de la forme :*

$$x=x_k=cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}, k=1,2,3,...,n.$$

Preuve 3.6. *De la définition (16) ; les zéros pour x dans $[-1;1]$ de $V_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0;\pi]$ de $cos(n+\frac{1}{2})\theta$, i.e.*

$$(n+\frac{1}{2})\theta=(k-\frac{1}{2})\pi, k=1,2,....,n.$$

d'où les zéros de $V_n(x)$ sont :

$$y_k=cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}, k=1,2,...,n$$

■

Proposition 3.11. *Le coefficient dominant des polynômes $V_n(x)$ est 2^n,$\forall n\geqslant 2$.*

Preuve 3.7. *Soit le polynôme $V_n(x)$ tel que*

$$V_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....,$$

supposons que $a_n\neq 0$, de la relation (17) on obtient :

$$\begin{aligned} a_nx^n+....&=2x(a_{n-1}x^{n-1}+....)-(a_{n-2}x^{n-2}+....),\\ \Rightarrow (a_nx^n+....)&=2(a_{n-1}x^n+....),\end{aligned}$$

par identification on trouve

$$a_n=2a_{n-1},$$

i.e.

$$a_n=2a_{n-1}=2^{n-1}a_1=2^na_0,$$

puisque $V_1(x)=1$, alors

$$a_n=2^n, \forall n\geq 2.$$

■

3.3 Le quatrième espèce $W_n(x)$

Définitions 3.3. *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont des polynômes(polynôme de Jacobi pour $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$)) en x de degré n définis à l'aide de la relation suivante :*

$$\frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin(\frac{1}{2}\theta)} = W_n(x),\ avec\, x = cos\theta, \tag{21}$$

pour tout x dans $[-1;1]$, alors θ appartient à $[0;\pi]$, voici quelques polynômes $W_n(x)$:

$$W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x+1, ...,$$

Proposition 3.12. *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont orthogonaux dans l'intervalle $[-1;1]$ par rapport à la fonction poids $w(x) = (1+x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$*
i.e.

$$\int_{-1}^{1} W_n(x)W_m(x)(1+x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \pi\delta_{mn}$$

preuve :voir annexe.

Proposition 3.13. *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ vérifiant la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\begin{cases} W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \forall n \geq 2 \\ W_0(x) = 1\ \ et\ \ W_1(x) = 2x+1 \end{cases} \tag{22}$$

Preuve 3.8. *Soit $x \in [-1;1]$, posons $\theta = arccosx$, ainsi $\theta \in [0;\pi]$, pour tout $n \in N$ on a :*

$$sin(n+\frac{1}{2})\theta + sin(n-2+\frac{1}{2})\theta = 2cos\theta sin(n-1+\frac{1}{2})\theta,$$

on divise par $sin\frac{1}{2}\theta$ on obtient :

$$\frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} + \frac{sin(n-2+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} = 2cos\theta\frac{sin(n-1+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta},$$

d'où le résultat i.e.

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x), \forall n \geqslant 2$$
$$AvecW_0(x) = 1\ \ et\ \ W_1(x) = 2x+1 \quad \blacksquare$$

Remarque 3.3. *D'après (22), les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont des polynômes de degré n en x.*

Proposition 3.14. *Les polynômes de Tchebychev de la quatrième espèce $W_n(x)$ sont les solutions de l'équation différentielle suivante :*

$$(1-x^2)y''(x) - (1+2x)y'(x) + n(n+1)y(x) = 0. \tag{23}$$

Proposition 3.15. *Les zéros du polynôme $W_n(x)$ sont de la forme :*

$$x = x_k = cos\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Preuve 3.9. *De la définition (21), les zéros pour x dans $[-1;1]$ de $W_n(x)$ doivent correspondre à les zéros pour θ dans $[0;\pi]$ de $sin(n+\frac{1}{2})\theta$, i.e.*

$$(n+\frac{1}{2})\theta = k\pi, k = 1, 2, ..., n.$$

d'où les zéros de $W_n(x)$ sont :

$$y_k = cos\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}, k = 1, 2, ..., n$$

■

Proposition 3.16. *Le coefficient dominant des polynômes $W_n(x)$ est 2^n, $\forall n \geqslant 2$.*

Preuve 3.10. *Soit le polynôme $W_n(x)$ tel que*

$$W_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...,$$

supposons que $a_n \neq 0$, de la relation (22) on obtient :

$$\begin{aligned} a_n x^n + ... &= 2x(a_{n-1}x^{n-1} + ...) - (a_{n-2}x^{n-2} + ...), \\ &\Rightarrow (a_n x^n + ...) = 2(a_{n-1}x^n + ...), \end{aligned}$$

par identification on trouve

$$a_n = 2a_{n-1},$$

i.e.

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^{n-1}a_1 = 2^n a_0,$$

puisque $W_0(x) = 1$, alors

$$a_n = 2^n, \forall n \geq 2.$$

■

Proposition 3.17. ***L'orthogonalité des polynômes {$\sqrt{1+x}V_i(x), i = 0, 1, ..., n$} et {$\sqrt{1-x}W_i(x), i = 0, 1, ..., n$} dans le cas discret***
les polynômes {$\sqrt{1+x}V_i(x), i = 0, 1, ..., n$} et {$\sqrt{1-x}W_i(x), i = 0, 1, ..., n$} sont orthogonaux dans l'ensemble de $(n+1)$ points $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$, à savoir :

$$x_k = cos\theta_k, \quad \theta_k = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+1},$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1-x_k)V_i(x_k)V_j(x_k) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j; 0 \leq i, j \leq n \\ n+1 & si\ i = j\ et\ 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1+x_k)W_i(x_k)W_j(x_k) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j; 0 \leq i, j \leq n \\ n+1 & si\ i = j\ et\ 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Preuve 3.11. *on note pour $0 \leq i, j \leq n$,*

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1}(1+x_k)V_i(x_k)V_j(x_k)$$

où $\{x_k\}$ sont les zéros du polynôme T_{n+1}.puis on a :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 2\sum_{k=1}^{n+1} cos(i+\frac{1}{2})\theta_k cos(j+\frac{1}{2})\theta_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}[cos(i+j+1)\theta_k + cos(i-j)\theta_k] \\ &= \frac{1}{2}\left[S_n\left(\frac{(i+j+1)\pi}{n+1}\right) - S_n\left(\frac{(i-j)\pi}{n+1}\right)\right] \end{aligned}$$

ainsi en utilisant la formule de la somme S_n déjà définie dans la proposition () on obtient

$$\begin{aligned} b_{ij} &= 0, \quad i \neq j; i, j \leq n \\ b_{ii} &= n+1, \quad si\ i = j\ et\ 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

de même on peut montrer facilement que

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1+x_k)W_i(x_k)W_j(x_k) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j; 0 \leq i, j \leq n \\ n+1 & si\ i = j\ et\ 0 \leq i \leq n \end{cases}$$

4 les quatres espèces

4.1 Propriétés communes

Corollaire 4.1. *Les polynômes T_n, U_n, V_n, et W_n vérifiant les propriétés suivantes :*
1) $U_n(x) = \frac{1}{2}[V_n(x) + W_n(x)]$, *pour tout* $n \in N$,
2) $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$,
3) $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$,
4) $V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x)$,
5) $T_n\prime(x) = nU_{n-1}(x)$,
6) $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)\,\forall n \geq 2$.

preuve :voir annexe.

Corollaire 4.2. *Si on pose* $u = cos\frac{1}{2}\theta$, *alors*
a)$T_n(x) = T_{2n}(u)$,
b)$U_n(x) = \frac{1}{2}u^{-1}U_{2n+1}(u)$,
c)$V_n(x) = u^{-1}T_{2n+1}(u)$,
d)$W_n(x) = U_{2n}(u)$.

Preuve :voir annexe.

4.2 Polynômes de Tchebychev de la variable complexe

Définitions 4.1. *On considère la variable complexe z donnée par :*

$$z = \frac{1}{2}(w + w^{-1}),\ \ avec\ w = rcos\theta + irsin\theta = re^{i\theta}, \tag{24}$$

on obtient ainsi l'équation :

$$w^2 - 2zw + 1 = 0,$$

qui a pour solutions

$$w = w_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

lorsque

$$\mid w \mid = 1,$$

i.e.

$$z = cos\theta,$$

alors, les polynômes de Tchebychev de la première espèce sont donnés dans C par :

$$T_n(z) = \frac{1}{2}(w^n + w^{-n}). \tag{25}$$

en utilisant (25)

$$T_n(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n),$$

de la même façon, en utilisant le fait que lorsque $z = cos\theta$, on obtient la forme des polynômes de Tchebychev de la deuxième espèce dans C suivante :

$$\begin{aligned} U_{n-1}(z) &= \frac{sin\, n\theta}{sin\theta} \\ &= \frac{w^n - w^{-n}}{w - w^{-1}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{\sqrt{z^2 - 1}}, \end{aligned}$$

ainsi, on obtient la forme des polynômes de Tchebychev $V_n(z)$ et $W_n(z)$ dans C suivante :

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \frac{w^{n+\frac{1}{2}} + w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}} + w^{-\frac{1}{2}}} \\ W_n(z) &= \frac{w^{n+\frac{1}{2}} - w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

4.3 Synthèse générale

les propriétés de base pour les quatres espèces de polynômes :

kind	1st	2nd	3rd	4th
$P_n =$	T_n	U_n	V_n	W_n
$P_n(\cos(\theta)) =$	$\cos n\theta$	$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$	$\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$	$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$
$P_n(\frac{1}{2}(w+w^{-1})) =$	$\frac{1}{2}(w^n+w^{-n})$	$\frac{w^{n+1}-w^{-n-1}}{w-w^{-1}}$	$\frac{w^{n+\frac{1}{2}}+w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}+w^{-\frac{1}{2}}}$	$\frac{w^{n+\frac{1}{2}}-w^{-n-\frac{1}{2}}}{w^{\frac{1}{2}}-w^{-\frac{1}{2}}}$
$P_0(x) =$	1			
$P_1(x) =$	x	$2x$	$2x-1$	$2x+1$
recurrence	$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$			
x^n coefficient	2^{n-1} $(n>0)$	2^n		
zeros	$x_{k,n} := \cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n}$	$\cos\frac{k\pi}{n+1}$	$\cos\frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}$	$\cos\frac{k\pi}{n+\frac{1}{2}}$
extrema	$y_{k,n} := \cos\frac{k\pi}{n}$	no closed form		
$\lVert P_n\rVert_\infty =$	1	$n+1$	$2n+1$	

Remarque 4.1. *les fonctions poids qui nous assure l'orthogonalité pour chaque espèce est obtenus à l'aide de la formule suivante :* $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *et on peut aussi vérifier que ces fonctions poids vérifient les deux conditions de la définition (2.1)*

Exemple 4.1. *la fonction poids du quatrième espèce est une fonction positive :*
$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = (1+x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ *et on a*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{-1}{2}}dx &= \int_{-1}^{1}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}(1-x)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{-darccos\ x}{dx}(1-x)dx \qquad (on\ pose\ x = cos\theta\ \ alors) \\
&= -\int_{\pi}^{0}d\theta(1-cos\theta) = \int_{0}^{\pi}d\theta - \int_{0}^{\pi}cos\theta d\theta = \pi
\end{aligned}$$

les propriétés d'orthogonalité pour les quatres espèces de polynômes :

kind	1st	2nd	3rd	4th
$P_n =$	T_n	U_n	V_n	W_n
weight $w(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
orthogonality	$\langle P_m\,,\,P_n\rangle = \int_{-1}^{1} w(x)P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ (m \neq n)$			
$\langle P_n\,,\,P_n\rangle =$	$\frac{1}{2}\pi\ \ (n>0)$	$\frac{1}{2}\pi$	π	

les propriétés d'orthogonalité dans le cas discret pour les quatres espèces de polynômes :

kind	1st	2nd	3rd	4th
$P_n =$	T_n	U_n	V_n	W_n
weight $w(x) =$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
abscissae	$x_{k,N+1} = \cos\{(k-\frac{1}{2})\pi/(N+1)\}$			
discrete orthogonality	$\langle P_m\,,\,P_n\rangle = \sum_{k=1}^{N+1} P_m(x_{k,N+1})P_n(x_{k,N+1})w(x_{k,N+1})\sqrt{1-x_{k,N+1}^2} = 0\ (m \neq n \leq N)$			
$\langle P_n\,,\,P_n\rangle =$	$\frac{1}{2}(N+1)\ \ (0<n\leq N)$	$\frac{1}{2}(N+1)$	$(N+1)$	

4.4 Relation entre les polynômes de Tchebychev et les puissances de x

Pour exprimer x^n en fonction de $T_n(x)$, on utilise la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} xT_n(x) = \frac{1}{2}\left[T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)\right], \\ xT_0(x) = T_1(x). \end{cases}$$

Exemple 4.2. *Prenons n = 4, alors*

$$\begin{aligned} x^4T_0(x) &= x^3T_1(x) \\ &= x^2xT_1(x) \\ &= x^2\left[\frac{1}{2}\left[T_2(x) + T_0(x)\right]\right] \\ &= x\left[\frac{1}{2}x\left[T_2(x) + T_0(x)\right]\right] \\ &= x\left[\frac{1}{2}xT_2(x) + \frac{1}{2}xT_0(x)\right] \\ &= x\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[T_3(x) + T_1(x)\right] + \frac{1}{2}T_1(x)\right], \end{aligned}$$

puisque $T_0(x) = 1$, *alors*

$$\begin{aligned} x^4 &= x\left[\frac{1}{4}T_3(x) + \frac{1}{4}T_1(x) + \frac{1}{2}T_1(x)\right] \\ &= x\left[\frac{1}{4}T_3(x) + \frac{3}{4}T_1(x)\right] \\ &= \frac{1}{4}xT_3(x) + \frac{3}{4}xT_1(x) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left[T_4(x) + T_2(x)\right] + \frac{3}{4}\frac{1}{2}\left[T_2(x) + T_0(x)\right] \\ &= \frac{1}{8}T_4(x) + \frac{1}{8}T_2(x) + \frac{3}{8}T_2(x) + \frac{3}{8}T_0(x) \\ &= \frac{1}{8}T_4(x) + \frac{1}{2}T_2(x) + \frac{3}{8}T_0(x). \end{aligned}$$

5 Théorie d'approximation polynomiale et polynômes de Tchebychev

Tchebychev a découvert ces familles de polynômes en travaillant sur le problème de convergence des interpolations de Lagrange. On peut démontrer qu'en choisissant les racines des polynômes de Tchebychev comme points d'interpolation, On peut minimiser l'oscillation des polynômes interpolateurs en utilisant les abscisses de Tchebychev au lieu de points équirépartis pour interpoler.

5.1 Forme de Lagrange du polynôme d'interpolation

Soit $a = x_0 \leq ... \leq x_i \leq ... \leq x_n = b$ une division de l'intervalle $[a, b]$ et $\{y_i\}_{i=0}^n$,des valeurs correspondantes. Le problème est de trouver un polynôme de degré inférieur ou égale à m,$S_m \in P_m$, appelée polynôme d'interpolation, vérifiant $S_m(x_i) = y_i, \forall i$. Posé sous cette forme, ce problème peut avoir un nombre infini de solutions, une seule solution ou aucune. Toutefois, il y a une et une seule solution, si on cherche cette solution dans l'espace $P_n(m = n)$. En effet, en définissant les polynômes caractéristiques de Lagrange $l_i \in P_n$, associés aux nœuds $\{x_i\}_{i=0}^n$,

$$l_i(x) := \prod_{j=1 j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

on remarque qu'ils forment une base de P_n. Comme $l_i(x_j) = \gamma_{ij}$, on peut déduire que le polynôme d'interpolation recherché se laisse écrire sous la forme suivante (formule d'interpolation de Lagrange) et est unique :

$$S_n(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Théorème 5.1. *Étant donné (n+1) points distincts $x_0, ..., x_n$ ainsi que (n+1) valeurs associées $y_0, ..., y_n$, il existe un unique polynôme $S_n \in P_n$, tel que $S_n(x_i) = y_i$ pour i=0,...,n.*
Soit W_{n+1} le polynôme nodal de degré (n+1) associé aux nœuds x_i et défini par

$$W_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Le prochain théorème donne l'erreur d'interpolation faite quand on remplace une fonction f par son polynôme d'interpolation $S_n f$ associé aux nœuds x_i.

Théorème 5.2. *Soient $a = x_0 \leq ... \leq x_i \leq ... \leq x_n = b$, (n+1) nœuds distincts et $f \in C^{n+1}([a,b])$. L'erreur d'interpolation au point $x \in [a,b]$ est donnée par*

$$E_n(x) := f(x) - S_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x),$$

avec $\xi \in [a,b]$.

Il est clair, qu'on ne peut rien dire sur l'erreur d'interpolation E_n si on ne connait aucun renseignement sur la fonction f, sauf ses valeurs dans les nœuds x_i. Étudions maintenant plus en détail la convergence uniforme du polynôme de Lagrange.

5.2 Stabilité et convergence du polynôme de Lagrange

Notons la norme maximum d'une fonction $f \in C([a,b])$ par $\| f \|_\infty := \underset{x\in[a,b]}{max} \mid f(x) \mid$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé aux nœuds $\{x_i\}_{i=0}^n$ est donné par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

Si on remplace les valeurs $f(x_i)$ par des valeurs approchées $\widetilde{f_i}$ (par exemple due aux erreurs dans les mesures expérimentales ou aux erreurs d'arrondi) on aura une erreur sur le polynôme d'interpolation

$$\| p_n - \widetilde{p_n} \|_\infty = \| \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - \widetilde{f_i}) l_i(x) \|_\infty \leq \Lambda_n \underset{i=0,...,n}{max} \mid f(x_i) - \widetilde{f_i} \mid,$$

avec

$$\Lambda_n := \| \lambda_n(x) \|_\infty, \qquad \lambda_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \mid l_i(x) \mid .$$

La constante Λ_n, qui dépend que de n, de $[a, b]$ et des points x_i est appelé constante de Lebesgue et joue le rôle d'une constante de stabilité pour l'interpolation. On peut montrer en plus le théorème suivant de majoration de l'erreur d'interpolation.

Théorème 5.3. *Soit $f \in C([a, b])$ et $p_n \in P_n$ son polynôme d'interpolation associé aux nœuds $x_0, ..., x_n$. Alors on a*

$$\| E_n \|_\infty = \| f - p_n \|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) E_n^*(f), \quad E_n^*(f) := \underset{q \in P_n}{inf} \| f - q \|_\infty .$$

On remarque que Λ_n dépend que des nœuds x_i tandis que E_n^* dépend que de f. Analysons ces deux termes.

Notons $\bar{\Lambda}_n$ l'infimum des constantes de Lebesgue pour tous les choix possible de nœuds $\{x_i\}_{i=0}^n$ à n fixé. On peut montrer que

$$\bar{\Lambda}_n \sim \frac{2}{\pi} log(n), \quad c.a.d. \quad \underset{n \longrightarrow \infty}{lim} \bar{\Lambda}_n = \infty. \ (***)$$

Il est très compliqué de trouver les nœuds qui mènent vers la constante de Lebesgue minimale Λ. Par contre, les points d'interpolation de Chebyshev

$$x_i := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), i = 0..., n,$$

qui sont les zéros du polynôme de Chebyshev de degré (n+1), sont quasi optimaux. En ce qui concerne le deuxième terme, le théorème de Weierstrass montre que pour toute fonction $f \in C([a, b])$ on a

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{lim} E_n^*(f) = 0.$$

Il est important de remarquer maintenant que pour une fonction $f \in C([a, b])$ donnée, le choix des nœuds d'interpolation est crucial ! ! ! Par contre on peut montrer, due à la propriété (***), que pour n'importe quel choix de nœuds $x_0^n, ..., x_n^n$ pour chaque valeur de n, on trouvera toujours une fonction $f \in C([a, b])$, telle que le polynôme d'interpolation p_n ne converge pas uniformément vers f, pour $n \longrightarrow \infty$. La propriété (***) montre aussi que l'interpolation de Lagrange peut devenir très instable pour des grand n.

La figure suivante montre le phénomène de Runge. Il s'agit de l'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leq x \leq 5,$$

soit avec nœuds equirépartis soit avec les nœuds de Chebyshev. Il est particulièrement évident que dans ce cas (fonction régulière !) le polynôme d'interpolation avec nœuds équidistants ne converge pas uniformément vers f, par contre le choix des points de Chebyshev mène à la convergence uniforme.

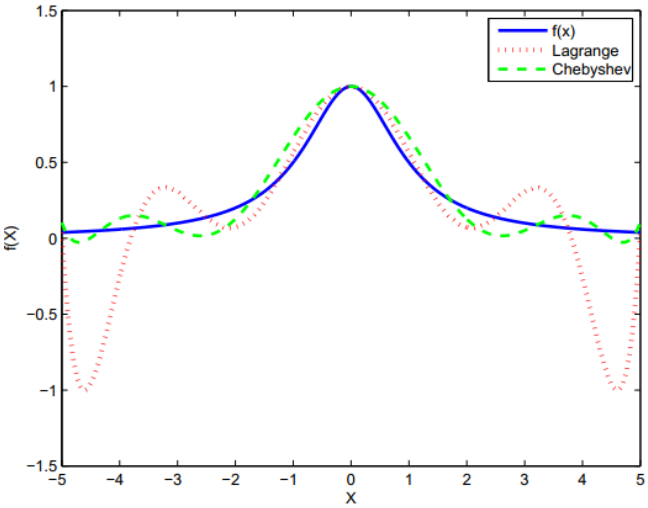


Figure 1 – Phénomène de Runge. Interpolation de Lagrange avec des nœuds équidistants (trait discontinu) ainsi que les nœuds de Chebyshev (trait pointillé).

5.3 Meilleure approximation au sens de Tchebychev

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On se propose de déterminer les points x_i, $i = 0, 1, , n$, pour lesquels le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n(x)$ associé aux (n + 1)-couples (x_i, y_i) $i = 0, n$, avec $y_i = f(x_i)$, qui réalise la meilleure approximation de la fonction f. D'après le théorème de l'estimation d'erreur de l'interpolation on a :

$$\forall x \in [a, b]\,, \exists c \in \,]a; b[\,/ f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Définitions 5.1. *On appelle meilleure approximation au sens de Tchebychev de la fonction f par un polynôme de degré* $\leq n$ *, le polynôme de l'interpolation de Lagrange associé aux points d'interpolation* x_i*,* $i = 0, 1, ..., n$ *pour lesquels la quantité :*

$$E(x_0, x_1, ..., x_n) = \underset{x \in]a;b[}{max} \mid (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) \mid$$

est minimale.

Lemme 5.1. *Soit P un polynôme de degré n tel que le coefficient de* x^n *est égal à 1. Alors :*

$$\underset{x \in [-1;1]}{max} \mid P(x) \mid \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

preuve :voir annexe.

Théorème 5.4. *La meilleure approximation de la fonction f au sens de Tchebychev est réalisée par le choix suivant :*

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} s_i,\ i = 0, 1, ..., n$$

où s_i*, i = 0,1,...,n sont les racines du polynôme de Tchebychev* T_{n+1} *de degré n+1,que nous avons déjà vu dans le premier chapitre à savoir :*

$$s_i = cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi), i = 1, 2, 3, ..., n$$

Preuve 5.1. *soient* $x_0, x_1, ..., x_n$*,* $(n+1) - point$ *de l' intervalle* $[a, b]$ *et* $P_n(x)$ *le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux* $(n+1) - couples\ (x_i, y_i)_{i=0,n}$*, avec* $y_i = f(x_i)$*. Il est clair que l'application :*

$$\begin{aligned} \ell : [-1, 1] &\longrightarrow [a, b] \\ t &\longrightarrow \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

est une bijective et que :

$$\underset{x \in [a,b]}{max} \mid f(x) - P_n(x) \mid = \underset{t \in [-1;1]}{max} \mid f(\ell(t)) - P_n(\ell(t)) \mid$$

Si on note par $t_i = \ell^{-1}(x_i)$*,* $i = 0, 1, ..., n$*,* $Q_n(t) = P_n(\ell(t))$ *et* $g(t) = f(\ell(t))$*, on vérifie facilement que le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux* $(n+1) - couples\ (t_i, y_i)_{i=0,n}$*, avec* $y_i = g(t_i) = f(x_i)$*, est égal à* $Q_n(t)$*.*

Par conséquent, la recherche des points $(x_i)_{i=0,n}$ *qui réalisent la meilleure approximation de f sur l'intervalle* $[a, b]$ *est équivalente à la recherche des points* $(t_i)_{i=0,n}$ *qui réalisent la meilleure approximation de g sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *.*

Étant donné des points $(t_i)_{i=0,n}$ *de l'intervalle* $[-1; 1]$*, le polynôme*

$$P(t) = (t - t_0)(t - t_1)...(t - t_n)$$

est de degré n+1 et le coefficient de t^{n+1} *est égal à 1, d'après le lemme précèdent :*

$$\underset{t\in[-1;1]}{max} \mid (t - t_0)(t - t_1)...(t - t_n) \mid \geq \frac{1}{2^n} = \underset{t\in[-1;1]}{max} \mid \frac{T_{n+1}(t)}{2^n} \mid$$

D'autre part, on a :

$$T_{n+1}(t) = 2^n(t - s_0)(t - s_1)...(t - s_n)$$

avec $(s_i = cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi))_{i=0,n}$ *les (n + 1) racines du polynôme de Tchebychev* T_{n+1}*. D'où :*

$$\underset{t\in[-1;1]}{max} \mid (t - t_0)(t - t_1)...(t - t_n) \mid \geq \underset{t\in[-1;1]}{max} \mid (t - s_0)(t - s_1)...(t - s_n) \mid$$

Ce qui prouve que les points $(s_i)_{i=0,n}$ *réalisent la meilleure approximation de g et par conséquent les points :*

$$x_i = \ell(s_i) = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} s_i, i = 0, 1, ..., n$$

réalisent la meilleure approximation de f. ■

5.4 Approximation polynomiale

D'après le théorème de Weierstrass, à toute fonction continue, il existe un polynôme P_n de degré n, pour n suffisamment grand réalise une approximation polynomiale de f i.e.

$$\| f - P_n \|_\infty < \epsilon, \forall \epsilon > 0$$

Notation 1)$L^p_w([a, b])$ avec $1 \leq p < +\infty$ désigne l'espace des fonctions L^p-intégrable sur $[a, b]$ avec :

$$\int_a^b \mid f(x) \mid^p w(x)dx < +\infty,$$

tel que w(x) est une fonction poids sur $[a, b]$.
2)P_n désigne l'espace vectoriel des polynômes sur $\Re$ à coefficients réels de degré au plus n.
3) Pour deux fonctions f et g de l'espace $L^2_w([a, b])$, on définit le produit scalaire $< f, g >$ comme suit :

$$< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx.$$

Théorème 5.5. *La meilleure approximation polynomiale $P_n^M(x)$ de degré inférieur ou égale à n dans $L^2_w([a, b])$ d'une fonction f, est unique, en plus elle est caractérisée par la propriété(nécessaire et suffisante) suivante :*

$$< f - P_n^M, P_n >= 0$$

pour tout polynôme $P_n(x)$ de degré n.

Corollaire 5.1. *La meilleure approximation polynomiale $P_n^M(x)$ de degré inférieur ou égale à n dans $L^2_w([a, b])$ d'une fonction f, s'exprime en terme de la famille de polynômes orthogonaux $\{\phi_i\}_{i\geq 0}$ sous la forme :*

$$P_n^M = \sum_{i=0}^{i=n} c_i\phi_i$$

avec

$$c_i = \frac{< f, \phi_i >}{< \phi_i, \phi_i >}.$$

Exemple 5.1. *Cherchons la meilleure approximation $P_n^M(x)$ de la fonction $f(x) = 1-x^2$ dans l'intervalle $[-1, 1])$ par rapport à la fonction poids $w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$. Dans ce cas les polynômes $T_i(x)$ sont appropriés, alors*

$$P_1^M(x) = c_0T_0(x) + c_1T_1(x),$$

avec

$$c_0 = \frac{< f, T_0 >}{< T_0, T_0 >} = \frac{1}{2}$$

et

$$c_1 = \frac{< f, T_1 >}{< T_1, T_1 >} = 0$$

d'où

$$P_1^M(x) = \frac{1}{2}T_0(x) + 0T_1(x) = \frac{1}{2}.$$

5.4.1 Formule de Lagrange du polynôme d'interpolation

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} f(x_i) l_i(x).$$

avec

$$l_i(x) = \prod_{j=1 j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Remarque 5.1. *$\{Y_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux $\Rightarrow$ $Y_n(x)$ admet n racines réels distincts, pour tout $n \geq 0$.*

Lemme 5.2. *Soit $Y_n(x)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux, si les points d'interpolation $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ sont les zéros du polynômes $Y_{n+1}(x)$, alors les polynômes $l_i(x)$ peuvent être écrits sous la forme :*

$$l_i(x) = \frac{Y_{n+1}(x)}{(x - x_i)Y'_{n+1}(x_i)}$$

Corollaire 5.2. *Pour l'interpolation polynomiale aux zéros du polynômes de Tchebychev $T_{n+1}(x)$, les polynômes $l_i(x)$ sont donnés par :*

$$l_i(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{(x - x_i)T'_{n+1}(x_i)}, avec\, T'_{n+1}(x_i) = (n+1)U_n(x_i),$$

ou bien

$$l_i(cos\theta) = \frac{cos(n+1)\theta sin\theta_i}{(n+1)(cos\theta - cos\theta_i)sin(n+1)\theta_i}$$

5.4.2 Formule d'interpolation de Tchebychev

On sait que les polynômes de Tchebychev $\{T_i(x), i = 1, 2, ..., n\}$ sont orthogonaux dans l'ensemble des zéros $\{x_k\}_{k=1}^{n+1}$ de $T_{n+1}(x)$ dans $[-1; 1]$,tels que :

$$x = x_k = cos\frac{(k - \frac{1}{2})\pi}{n+1}, k = 1, 2, 3, ..., n+1 \tag{26}$$

le polynôme d'interpolation de Tchebychev $P_n(x)$ de la fonction f aux points x_k s'écrit sous la forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{2}c_0T_0 + \sum_{i=1}^{n} c_iT_i(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + ...,$$

les coefficient c_i sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 5.6. *Les coefficients c_i dans la formule précédente sont donnés explicitement par :*

$$c_i = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)T_i(x_k).$$

Preuve 5.2. *Si on suppose que $f(x)$ égale à $P_n(x)$ aux points x_k , alors on obtient :*

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \frac{1}{2}c_0T_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_iT_i(x) \qquad (***) \\ &= \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + ...,\end{aligned}$$

multiplions (***) par $\frac{2}{n+1}T_j(x_k)$, et en faisant la somme, on trouve :

$$\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)T_j(x_k) = \sum_{i=0}^{n} c_i\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k),$$

d'après la formule d'orthogonalité :

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ \frac{n+1}{2} & , i = j \neq 0 \\ n+1 & , i = j = 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$c_i = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)T_i(x_k).$$

■

Exemple 5.2. *On considère la fonction f tel que :* $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$,

cherchons le polynôme interpolateur de Tchebychev $P_2(x)$ *de la fonction f aux points* $\{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\}$ *,*
soit $P_n(x)$ *tel que :*

$$P_n(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_iT_i(x)$$

avec

$$c_i = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k)T_i(x_k),$$

tels que x_k *sont les zéros du polynôme* $T_{n+1}(x)$ *donnés par (29),*
on sait que $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2}, x_3 = 0$ *sont les zéros du polynôme de Tchebychev* $T_3(x)$*, donc le polynôme d'interpolation de Tchebychev de la fonction f aux points* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *s'écrit sous la forme :*

$$P_2(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + \sum_{i=1}^{2} c_iT_i(x), \qquad (****)$$

avec

$$c_i = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} f(x_k)T_i(x_k),$$

pour i = 0, on obtient :

$$c_0 = \frac{2}{3}\left[f(x_1)T_0(x_1) + f(x_2)T_0(x_2) + f(x_3)T_0(x_3)\right] \quad = \frac{2}{3}\left[sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3} + sin(\frac{-\pi}{4}\sqrt{3}sin(0)\right] = 0,$$

pour i = 1, on obtient :

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2}{3}\left[f(x_1)T_0(x_1) + f(x_2)T_0(x_2) + f(x_3)T_0(x_3)\right] \\
&= \frac{2}{3}\left[sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3})x_1 + sin(\frac{-\pi}{4}\sqrt{3})x_2 + sin(0)x_3\right] \\
&= \frac{2}{3}\left[sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + sin(\frac{-\pi}{4}\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3}),
\end{aligned}$$

pour i = 2, on obtient :

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{2}{3}\left[sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3})(2x_1^2-1)+sin(\frac{-\pi}{4}\sqrt{3})(2x_2^2-1)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3})(2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1)+sin(\frac{-\pi}{4}\sqrt{3})(2(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1)\right]=0, \end{aligned}$$

on remplace c_1, c_2, c_3 *dans (****), on obtient :*

$$\begin{aligned} P_2(x) &= c_1 x \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} sin(\frac{\pi}{4}\sqrt{3})x. \end{aligned}$$

5.5 Séries orthogonaux de Tchebychev

On peut associer à toute fonction $f \in L_w^2([1,1])$, une série orthogonale en fonctions des polynômes de Tchebychev i.e.

$$f(x) \simeq \frac{1}{2}c_0\phi_0(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i\phi_i(x)$$

tel que

$$\phi_i(x) = T_i(x), U_i(x), V_i(x) \; ou \; bien \; W_i(x),$$

et

$$c_i = \frac{< f, \phi_i >}{< \phi_i, \phi_i >}, \forall i \geq 0,$$

avec

$$w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}, ou \; bien (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, ou \; bien (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}, ou (1+x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

le type de série de Tchebychev dépend de choix d'un polynôme de Tchebychev à savoir $T_i(x)$,$U_i(x)$,$V_i(x)$ ou $W_i(x)$.

Exemple 5.3. *La série orthogonale de Tchebychev de la première espèce d'une fonction continue f est donnée par :*

$$f(x) \simeq \frac{1}{2}c_0T_0(x) + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i\phi_i(x) \simeq \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + ...,$$

tels que

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{< f, T_i >}{< T_i, T_i >}, \forall i \geq 0, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_i(x) (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} dx, \forall i \geq 0. \end{aligned}$$

En particulier, si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *alors*

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} T_i(x) (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} dx, \forall i \geq 0 \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_i(x) dx, \forall i \geq 0, \end{aligned}$$

pour i=0 on obtient :

$$c_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_0(x) dx = \frac{4}{\pi},$$

pour i=1 on obtient :

$$c_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x dx = 0,$$

pour i=2 on obtient :

$$c_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (2x^2 - 1) dx = -\frac{4}{3\pi},$$

pour i=3 on obtient :

$$c_3 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_3(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (4x^2 - 3x) dx = 0,$$

pour i=4 on obtient :

$$c_4 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} T_4(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} (8x^4 - 8x^2 + 1) dx = -\frac{4}{15\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &\simeq \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + ..., \\ &\simeq \frac{2}{\pi} T_0(x) - \frac{4}{3\pi} T_2(x) - \frac{4}{15\pi} T_4(x) - .... \end{aligned}$$

Pour $f(x) = arccos(x)$,

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} arccos(x)T_i(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx, \forall i \geq 0 \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} arccos(x)T_i(x)\left(-\frac{darccos(x)}{dx}\right)dx, \forall i \geq 0, \end{aligned}$$

posons $x = cos\theta$ *, on obtient :*

$$c_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta cosi\theta d\theta, \forall i \geq 0,$$

pour i = 0, on obtient :

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \theta cos0\theta d\theta =_p i,$$

par conséquent

$$c_i = -\frac{2}{\pi i}\left(\left[-\frac{1}{i}cos(i\theta)\right]_0^{\pi}\right), \forall i \geq 1,$$

pour i = 1, on obtient :

$$c_1 = -\frac{2}{\pi i}\left([-cos(\theta)]_0^{\pi}\right) = -\frac{4}{\pi}$$

pour i = 2, on obtient :

$$c_2 = -\frac{2}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{2}cos(\theta)\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi}(\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}) = 0,$$

pour i = 3, on obtient :

$$c_3 = -\frac{2}{3\pi}\left(\left[-\frac{1}{3}cos(3\theta)\right]_0^{\pi}\right) = -\frac{2}{3\pi}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = -\frac{4}{9\pi},$$

d'où

$$\begin{aligned} arccos(x) &\simeq \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + ..., \\ &\simeq \frac{\pi}{2}T_0(x) - \frac{4}{\pi}T_1(x) - \frac{4}{9\pi}T_3(x) - .... \end{aligned}$$

6 conclusion

Le choix de ce thème n'est pas fortuit, il a pour ambition d'acquérir le maximum de connaissances concernant cette famille de polynômes et ces applications dans tous les domaine de mathématiques et physique en utilisant les nouvelles techniques de modélisation introduites ces dernières années.
Ainsi dans ce travail de mémoire de fin d'étude, nous avons fait une synthèse au sens de montrer d'une part le rôle des polynômes classiques liés au résolution des équations différentielles et des propriétés spécifiques de cette famille de polynômes .
D'autres part,nous avons met l'axone dans le cadre de l'interpolation linéaire.
Enfin,la faiblesse des polynômes de Lagrange(ajouter un point c'est revient à changer la base de Lagrange est dépassé par le choix des polynômes de Tchebychev(corollaire 5.2)).

Annexe

Preuve de la proposition (2.1)

Preuve 6.1. *Soient* $m, n \in N$ *tels que* $m \neq n$*,*
on a par définition :

$$cos(n\theta) = T_n(x) = cos(n arccos\, x), -1 \leq x \leq 1,$$

et on a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx &= \int_{-1}^{1} cos(n arccosx)cos(m arccosx)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx \\ &= \int_{-1}^{1} cos(n arccosx)cos(m arccosx)\left(\frac{-d arcosx}{dx}\right)dx.\end{aligned}$$

si on pose :

$$\theta = arccosx,$$

alors l'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx &= -\int_{\pi}^{0} cos(n\theta)cos(m\theta)d\theta \\ &= -\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2}\left[cos(m-n)\theta + cos(m+n)\theta\right]d\theta \\ &= 0,\ pour\ m \neq n,\end{aligned}$$

pour m = n , on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} T_n^2(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx &= \int_{-1}^{1} cos^2(narcosx)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} cos^2(narccosx)\left(\frac{darcosx}{dx}\right)dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} cos^2(n\theta)d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} \frac{cos(2n\theta)+1}{2}d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} 1d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

■

Preuve de la proposition (3.1)

Preuve 6.2. *Soient* $m, n \in N$ *tels que* $m \neq n$*,*
on a par définition :

$$\frac{sin(n+1)\theta}{sin(\theta)} = U_n(x),\ avec\, x = cos\theta,$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}U_n(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}U_m(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{-darcos\theta}{dx}\right)U_n(x)U_m(x)(1-x^2)dx.
\end{aligned}$$

posant $x = cos\theta$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= -\int_{\pi}^{0} \frac{d\theta}{dx} U_n(cos(\theta))U_m(cos(\theta))(1-cos^2(\theta))dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} U_n(cos(\theta))U_m(cos(\theta))(1-cos^2(\theta))d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} \frac{(sin(n+1)\theta sin(m+1)\theta)(1-cos^2(\theta))}{sin^2(\theta)} d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} (sin(n+1)\theta sin(m+1)\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

puisque,$sin(a)sin(b) = \frac{1}{2}[cos(a-b) - cos(a+b)]$, *alors*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= -\int_{\pi}^{0} \frac{1}{2}\left[cos(n-m)\theta - cos(m+n+2)\theta\right] d\theta \\
&= 0, si\ m \neq n,
\end{aligned}$$

pour m = n, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} U_n^2(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= -\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} U_n^2(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{darcosx}{dx}\right) U_n^2(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx,
\end{aligned}$$

posons $x = cos(\theta)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx &= -\int_{\pi}^{0} \frac{d\theta}{dx} U_n^2(cos\theta))(1-cos^2(\theta))dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} \frac{sin^2(n+1)\theta}{sin^2(\theta)}(1-cos^2(\theta))d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} sin^2(n+1)\theta d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} (1-cos^2(n+1)\theta)d\theta \\
&= -\int_{\pi}^{0} 1d\theta + \int_{\pi}^{0} \frac{1+cos(2(n+1))\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}.$$

■

Preuve de la proposition (3.6)

Preuve 6.3. *Soient* $m, n \in N$ *tels que* $m \neq n$,
on a :

$$\int_{-1}^{1} V_n(x)V_m(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}V_n(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}V_m(x)dx$$

posant $x = cos\theta$, *on obtient :*

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+cos\theta)^{\frac{1}{2}} = (2cos^2(\frac{1}{2})\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}cos\frac{1}{2}\theta \quad \Rightarrow (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}cos\frac{1}{2}\theta$$

car

$$cos^2(\frac{1}{2})\theta = \frac{1+cos\theta}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} V_n(x)V_m(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}dx &= -\int_{-1}^{1}\left(\frac{darccosx}{dx}\right)V_n(cos(\theta))\sqrt{2}cos\frac{1}{2}\theta \\ &\quad * V_m(cos\theta)\sqrt{2}cos\frac{1}{2}\theta dx \\ &= 2\int_0^{\pi} cos(n+\frac{1}{2})\theta cos(m+\frac{1}{2})\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi}[cos(n-m)\theta + cos(m+n+1)\theta]d\theta \\ &= 0, pourm \neq n,\end{aligned}$$

pour m = n, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} V_n^2(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}dx &= -\int_{-1}^{1}\left(\frac{darccosx}{dx}\right)V_n^2(x)(1+x)dx \\ &= \int_0^{\pi} V_n^2(cos\theta)(1+cos\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\frac{cos^2(n+\frac{1}{2})\theta}{cos^2(\frac{1}{2})\theta}(1+cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} cos^2(n+\frac{1}{2})\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi}\frac{1+cos(2n+1)\theta}{2}d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 1d\theta + \int_0^{\pi} cos(2n+1)\theta d\theta \qquad = \pi,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} V_n(x)V_m(x)(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{-1}{2}}dx = \pi\delta_{mn}.$$

■

Preuve de la proposition (3.11)

Preuve 6.4. *Soient* $m, n \in N$ *tels que* $m \neq n$,
on a :

$$\int_{-1}^{1} W_n(x)W_m(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{-1}{2}}dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}W_n(x)W_m(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}dx,$$

posant $x = cos\theta$, *on obtient :*

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = (1-cos\theta)^{\frac{1}{2}} = (2sin^2(\frac{1}{2})\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}sin\frac{1}{2}\theta \quad \Rightarrow (1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}sin\frac{1}{2}\theta$$

car

$$sin^2(\frac{1}{2})\theta = \frac{1-cos\theta}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} W_n(x)W_m(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{-1}{2}}dx &= -\int_{-1}^{1}\left(\frac{darccosx}{dx}\right)W_n(cos(\theta))\sqrt{2}sin\frac{1}{2}\theta \\ &\qquad * W_m(cos\theta)\sqrt{2}sin\frac{1}{2}\theta dx \\ &= 2\int_0^{\pi} sin(n+\frac{1}{2})\theta sin(m+\frac{1}{2})\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi}[cos(n-m)\theta - cos(m+n+1)\theta]d\theta \\ &= 0, pourm \neq n,\end{aligned}$$

pour m = n, on a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} W_n^2(x)(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{-1}{2}}dx &= -\int_{-1}^{1}\left(\frac{darccosx}{dx}\right)W_n^2(x)(1-x)dx \\ &= \int_0^{\pi} W_n^2(cos\theta)(1-cos\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi}\frac{sin^2(n+\frac{1}{2})\theta}{sin^2(\frac{1}{2})\theta}(1-cos\theta)d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} sin^2(n+\frac{1}{2})\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi}(1-cos(2n+1)\theta)d\theta \\ &= \int_0^{\pi}1d\theta - \int_0^{\pi}cos(2n+1)\theta d\theta \qquad = \pi,\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-1}^{1} W_n(x)W_m(x)(1+x)^{\frac{-1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx = \pi\delta_{mn}.$$

■

Preuve du Corolaire (4.1)

Preuve 6.5. *1)Par définition :*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[V_n(x)+W_n(x)] &= \frac{1}{2}\left[\frac{cos(n+\frac{1}{2})\theta}{cos\frac{1}{2}\theta}+\frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{cos(n+\frac{1}{2})\theta sin\frac{1}{2}\theta+cos\frac{1}{2}\theta sin(n+\frac{1}{2})\theta}{cos\frac{1}{2}\theta sin\frac{1}{2}\theta}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[2\frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta}\right]\\ &= \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta}\\ &= U_n(x).\end{aligned}$$

2)Par définition :

$$\begin{aligned}U_n(x)-U_{n-1}(x) &= \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta}-\frac{sinn\theta}{sin\theta}\\ &= \frac{2cos(n+\frac{1}{2})\theta sin\frac{1}{2}\theta}{sin\theta}\end{aligned}$$

car

$$sin(n+1)\theta-sinn\theta=2cos(n+\frac{1}{2})\theta sin\frac{1}{2}\theta,$$

et puisque

$$sin\theta=2sin\frac{1}{2}\theta cos\frac{1}{2}\theta,$$

alors

$$U_n(x)-U_{n-1}(x)=\frac{cos(n+\frac{1}{2})\theta}{cos\frac{1}{2}\theta}$$

d'où

$$V_n(x)=U_n(x)-U_{n-1}(x).$$

3)Par définition :

$$\begin{aligned}U_n(x)+U_{n-1}(x) &= \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta}+\frac{sinn\theta}{sin\theta}\\ &= \frac{2cos\frac{1}{2}\theta sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\theta}\end{aligned}$$

car

$$sin(n+1)\theta + sinn\theta = 2cos\frac{1}{2}\theta sin(n+\frac{1}{2})\theta,$$

et puisque

$$sin\theta = 2sin\frac{1}{2}\theta cos\frac{1}{2}\theta,$$

alors

$$U_n(x) + U_{n-1}(x) = \frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

d'où

$$W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x).$$

4) On a d'une part :

$$V_n(x) + V_{n-1}(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x) + U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),$$

car

$$V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x),$$

et puisque

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x),$$

alors

$$V_n(x) - V_{n-1}(x) = 2T_n(x),$$

et d'autre part on a :

$$W_n(x) + W_{n-1}(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x) - U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),$$

donc

$$W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x),$$

d'où

$$V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x).$$

5)Par définition :

$$cos(n\theta) = T_n(x),\ avec\, x = cos\theta,$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{dT_n(x)}{dx} &= \frac{dT_n(x)}{d\theta\frac{dx}{d\theta}}\\ &= -nsin\, n\theta\frac{1}{-sin\theta}\\ &= n\frac{sin\, n\theta}{sin\theta}\\ &= nU_{n-1}(x).\end{aligned}$$

6)On a par définition :

$$\begin{aligned}U_n(x) - U_{n-2}(x) &= \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta} - \frac{sin(n-1)\theta}{sin\theta}\\ &= \frac{2cos\, n\theta sin\theta}{sin\theta}\\ &= 2cos\, n\theta\\ &= 2T_n(x).\end{aligned}$$

d'où

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)\ \forall n \geq 2.$$

■

Preuve du corollaire (4.2)

Preuve 6.6. *a) Soit* $u = cos\frac{1}{2}\theta$*, alors*

$$\begin{aligned}T_{2n}(u) &= cos(2n\, arccosu)\\ &= cos(2n(\frac{1}{2}\theta))\\ &= cos\, n\theta\, , avecx = cos\theta,\end{aligned}$$

d'où

$$T_n(x) = T_{2n}(u).$$

b) Soit $u = cos\frac{1}{2}\theta$*, alors*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u^{-1}U_{2n+1}(u) &= \frac{1}{2}\frac{1}{cos\frac{1}{2}\theta}\frac{sin(2(n+1)arccos\,cos\frac{1}{2}\theta)}{sin(arccos\,cos\frac{1}{2}\theta)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{cos\frac{1}{2}\theta}\frac{sin(n+1)\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(n+1)\theta}{cos\frac{1}{2}\theta sin\frac{1}{2}\theta}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(n+1)\theta}{\frac{1}{2}sin\theta}\right] \\
&= \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta} \\
&= \frac{sin(n+1)\theta}{sin\theta} \\
&= U_n(x), avec\, x = cos\theta,
\end{aligned}$$

d'où

$$U_n(x) = \frac{1}{2}u^{-1}U_{2n+1}(u).$$

c) Soit $u = cos\frac{1}{2}\theta$*, alors*

$$\begin{aligned}
u^{-1}T_{2n+1}(u) &= \frac{1}{cos\frac{1}{2}\theta}cos\left((2n+1)arccos\,cos\frac{1}{2}\theta\right) \\
&= \frac{1}{cos\frac{1}{2}\theta}cos\left((2n+1)\frac{1}{2}\theta\right) \\
&= \frac{1}{cos\frac{1}{2}\theta}cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta \\
&= V_n(x),\ avec\, x = cos\theta,
\end{aligned}$$

d'où

$$V_n(x) = u^{-1}T_{2n+1}(u).$$

d) Soit $u = cos\frac{1}{2}\theta$*, alors*

$$\begin{aligned} U_{2n}(u) &= \frac{sin((2n+1)arccos\, cos\frac{1}{2}\theta)}{sin(arccos\, cos\frac{1}{2}\theta)} \\ &= \frac{sin((2n+1)\frac{1}{2}\theta)}{sin\frac{1}{2}\theta} \\ &= \frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} \\ &= W_n(x)\,, avec\, x = cos\theta, \end{aligned}$$

d'où

$$W_n(x) = U_{2n}(u).$$

■

Preuve du Lemme (5.1)

Preuve 6.7. *: on pose :*

$$Q(x) = P(x) - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Les points extremums $(x'_k)_{k=0,n}$ *de* T_n *vérifient :*

$$1 = x'_0 > x'_1 > ... > x'_n = -1$$

Si on suppose que :

$$\exists k \in \{0, 1, ..., n-1\} / Q(x'_k)Q(x'_{k+1}) \geq 0 \tag{27}$$

on obtient l'existence de k $\in \{0, 1, ..., n-1\}$ *tel que :*

$$Q(x'_k) = P(x'_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \geq 0\, et\, Q(x'_{k+1}) = P(x'_{k+1}) - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{n-1}} \geq 0 \tag{28}$$

ou

$$Q(x'_k) = P(x'_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \leq 0\, et\, Q(x'_{k+1}) = P(x'_{k+1}) - \frac{(-1)^{k+1}}{2^{n-1}} \leq 0 \tag{29}$$

Si k est un entier pair, alors :

$$P(x'_k) \geq \frac{1}{2^{n-1}}\, ou\, P(x'_{k+1}) \leq \frac{-1}{2^{n-1}}$$

Si k est un entier impair, alors :

$$P(x'_{k+1}) \geq \frac{1}{2^{n-1}} \, ou \, P(x'_k) \leq \frac{-1}{2^{n-1}}$$

Dans tous les cas, il existe i $\in \{k, k+1\}$ *tel que :*

$$\mid P(x'_i) \mid \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Si on suppose que la proposition (26) est fausse, alors :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\} / Q(x'_k) Q(x'_{k+1}) < 0$$

Dans ce cas, la fonction continue $Q(x)$ *change de signe n fois dans l'intervalle* $[-1, 1]$ *, donc elle possède n racines dans l'intervalle* $[-1, 1]$*. D'autre part,*$Q(x)$ *est un polynôme de degré inférieur ou égal à n-1, car le coefficient de* x_n *du polynôme de Tchebychev* T_n *est égal à* 2^{n-1} *D'où :*

$$\forall x \in \Re, Q(x) = P(x) - \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} = 0$$

ce qui donne :

$$max_{x \in [-1;1]} \mid P(x) \mid = max_{x \in [-1;1]} \mid \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \mid = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dans les deux cas, on a ce qu'il faut pour démontrer le lemme.

Références

[1] S. Bochner, uber Sturm Liouville *the polynome systeme*. Math (1929).

[2] T.S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordan and Breach, New York, 1978.

[3] P. Joly, S. Kaber, I. Danaila, M. Postel, *Introduction au calcul scientifique par la pratique*. Écoles d'ingénieurs deuxième cycle/Master.

[4] K.H. Kwon, *orthogonal polynomials* , Departement of Mathematics KAIST,(2001).

[5] J.C. Mason and D.C. Handscomb, *Chebychev Polynomials*, CRS Press, 2003.

[6] L. N. Trefethen, "Approximation theory and approximation practice", SIAM 2013.

[7] E. Remes [Remez], "Sur le calcul ef fectif des polynomes d'approximation de Tschebyscheff". 1934 C. R. Acad. Sci., Paris, 199, 337-340.

[8] L. Fox and I. B. Parker. "Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis." Oxford University Press London, 1968.

[9] Press, WH ; Teukolsky, SA ; Vetterling, WT ; Flannery, BP (2007), "Section 5.8. Chebyshev Approximation" , Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing(3rd ed.), New York : Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88068-8