كلية العلوم و التقنيات فاس
ⵜⴰⵖⵉⵡⵏⴰⵏⵜ ⵏ ⵜⵎⵓⵙⵙⵏⵉⵡⵉⵏ ⴷ ⵜⵉⵜⵉⴽⵏⵉⵢⵉⵏ
Faculté des Sciences et Techniques de Fès

جامعة سيدي محمد بن عبد الله
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Licence Mathématiques et Applications

(MA)

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme de Licence Sciences et Techniques (LST)

Initialisation à la théorie des graphes

Réalisé par : ZAHARI Khadija

Encadré par: Pr. HILALI Abdelmajid

Soutenu le 08/06/2018

Devant le jury composé de:

- Pr. EL HILALI ALAOUI Ahmed — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EL KHOUMSSI Mohamed — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. EZZAKI Fatima — Faculté des Sciences et Techniques de Fès
- Pr. HILALI Abdelmajid — Faculté des Sciences et Techniques de Fès

Année Universitaire 2017 / 2018

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES FES – SAISS

B.P. 2202 – Route d'Imouzzer – FES

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciement

Tout d'abord je remercier mon grand seigneur qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Encadrant de mémoire Monsieur **Abdelmadjid HILALI**. *Je le remercie chaleureusement de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Merci au corps professoral de ma formation à la Faculté des Sciences et Techniques de Fès pour la richesse et la qualité de leur enseignement et qui déploient de grands efforts pour assurer à leurs étudiants une formation actualisée.

Je remercie mes très chers parents, mes frères et ma sœur et sans oublier ma tante pour leur encouragement durant la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches de prés ou de loin, qui m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce Travail.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Introduction 4

Historique 5

1 Graphe simple **6**

1.1 Chaîne 9

1.2 Graphe connexe 9

1.3 Représentation matricielle d'un graphe simple 11

2 Quelques classes de graphes **12**

2.1 Arbres 12

2.1.1 Théorème de caractérisation 12

2.2 Graphes bipartis 13

2.2.1 Définitions 13

2.2.2 Théorème de caractérisation 13

2.3 Graphes Eulériens 13

2.3.1 Définitions 13

2.3.2 Algorithme d'Euler 15

2.4 Graphes Hamiltoniens 16

2.4.1 Définition 16

3 Coloration des sommets et arêtes d'un graphe simple **18**

3.1 Coloration des sommets 18

3.2 Coloration des arêtes 21

3.3 Coloration totale (sommets+arêtes) 23

4 Couplage dans un graphe simple 24

4.1 Définition 24

4.2 Couplage parfait 24

4.3 Couplage de taille maximale 25

4.4 Couverture dans un graphe biparti 27

4.5 Application 28

5 Applications 30

5.1 Préliminaires 30

5.2 Problème du plus court chemin 31

5.2.1 Algorithme de FORD 32

5.2.2 Algorithme de DIJKSTRA 33

5.3 Problème central d'ordonnancement 34

5.3.1 Méthode des potentiels -métra (MPM) 35

5.3.2 Méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique) . . . 37

Conclusion générale 39

Introduction

Au milieu du XXème siècle, le célèbre physicien hongrois Eugène Wigner parle de « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature ».
La modélisation mathématique facilite la compréhension d'un problème car elle détermine un seul vocabulaire formel pour différentes situations, et elle permet de trouver une méthode de résolution automatique via un programme informatique. La modélisation mathématique peut atteindre un niveau d'abstraction permettant le développement d'une théorie précise sur le modèle, indépendante de la réalité, tout en gardant de nombreuses applications réelles. Dans ce modeste travail, nous allons aborder un modèle mathématique particulier : les graphes.

On va débuter avec un bref aperçu sur l'histoire de la théorie des graphes.

Dans le premier chapitre nous présentons la notion de graphe simple , chaîne, graphe connexe et la représentation matricielle d'un graphe.

Le deuxième chapitre donne quelques classes des graphes(Arbres ,Graphes bipartis ,Graphes Eulériens, Graphes Hamiltoniens).

Le troisième chapitre traite la coloration basique d'un graphe simple (coloration des sommets et arêtes) .

Le quatrième chapitre concerne le couplage dans un graphe simple (couplage parfait, maximum,couverture ...).

Le dernier chapitre donne quelques applications des graphes à savoir le problème du plus court chemin, le problème central d'ordonnancement.

Historique

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (voir fig1), les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,. . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

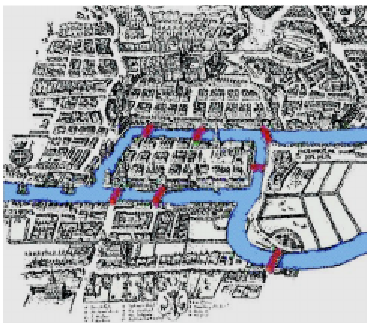


Fig1 : les sept ponts de Königsberg

Chapitre 1

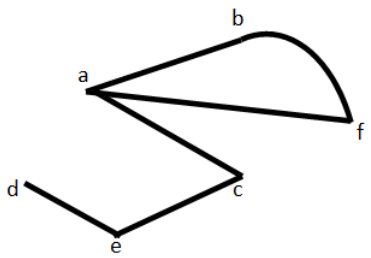
Graphe simple

Soit S un ensemble ,$[S]^2$ désigne l'ensemble de parties de S qui ont exactement deux éléments.

Définition 1.0.1 *On appelle graphe fini tout couple $G = (S, U)$ avec :*
S un ensemble fini et $U \subset [S]^2$.
Les éléments de S sont appelés les sommets du graphe G et les éléments de U sont appelés les arêtes de G.

Le cardinal de S est appelé l'ordre du graphe G, et le cardinal de U est appelé la taille de G.

Exemple :



$G = (S, A)$

$S = \{a, b, c, d, e, f\}$

$U = \{\{a, b\}, \{b, f\}, \{f, a\}, \{a, c\}, \{c, e\}, \{e, d\}\}$

Définition 1.0.2 *Soient x et y deux sommets quelconques du graphe simple $G = (S, A)$, on dit que x est adjacent ou voisin de y s'il existe une arête qui contient x et y.*

Voisins d'un sommet

Soit x un sommet quelconque de G, le voisinage du sommet x dans G est l'ensemble noté $V_G(x)$ de tous les sommets adjacents à x dans G.

Définition 1.0.3 *Soit x un sommet et a une arête de $G = (S, A)$ on dit que l'arête a est incidente au sommet x si x est l'une des extrémités de l'arête a.*

Degré d'un sommet

Soit x un sommet quelconque de G, le degré de x dans G, noté $d_G(x)$ est le nombre d'arêtes incidentes à x.

Si $d_G(x) = 0$, on dit que le sommet x est isolé.

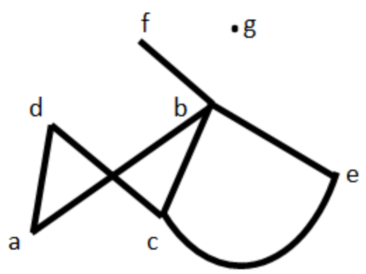
Si $d_G(x) = 1$, le sommet est dit pendant.

Théorème 1.0.1 *Soit $G = (S; A)$ un graphe simple Alors [5] :*

$$\sum_{x \in S} d_G(x) = 2|A|$$

En effet : chaque paire $\{x; y\}$ de A est comptée deux fois, une fois pour $d_G(x)$ et une seconde fois pour $d_G(y)$.

exemple : soit $G = (S, A)$ un graphe simple



-l'ordre du graphe G égale :7

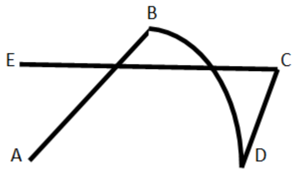
-$V(a) = \{b, d\}$ $\quad V(f) = \{b\}$ $\quad V(b) = \{a, f, c, e\}$ $\quad V(g) = \emptyset$.

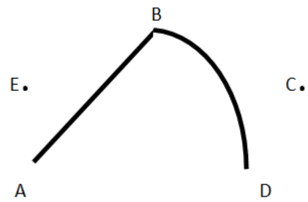
-$d_G(a) = 2$ $\quad d_G(b) = 4$ $\quad d_G(f) = 1$ $\quad d_G(g) = 0$.

Terminologie

Graphe partiel

$H = (Y; B)$ est un graphe partiel de $G = (X; A)$ si $Y = X$ et $B \subseteq A$.



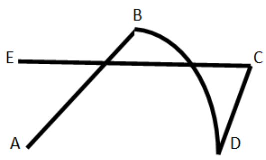


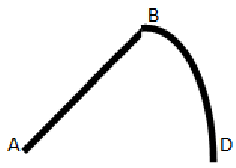
G H

Graphe complet est un graphe dans lequel deux sommets quelconques distincts sont reliés par une arête.

Sous graphe

$H = (Y; B)$ est un sous-graphe de $G = (X; A)$ si $Y \subseteq X$ et $B \subseteq A$.

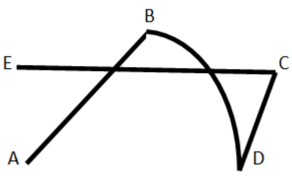


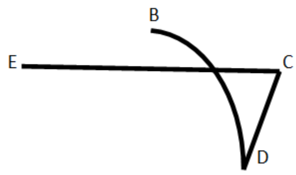


G H

Sous graphe engendré

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple et $S' \subset S$, $(S' \neq \emptyset)$. On appelle sous-graphe de G engendré par S' le graphe $G[S'] = (S', A \cap [S]^2)$. $G[S']$ a comme sommets les éléments de S' et comme arêtes les arêtes de G dont les extrémités appartiennent à S'.





G H

Le graphe $H = (S', A')$ est un sous graphe de $G = (S, A)$ engendré par $S' = \{b, c, d, e\}$.

1.1 Chaîne

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. Une chaîne est une séquence finie de sommets de G, C=$[x_1,\ x_2,\ x_3,\ .\ .\ .x_p]$ telle que x_i et x_{i+1} sont reliés par une arête pour tout $i = 1, ..., p - 1$.

- Le premier et le dernier sommet sont appelés extrémités de la chaîne.
- Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est

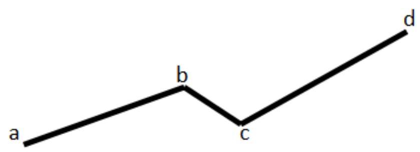
dite chaîne élémentaire.

- Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, la chaîne est dite

chaîne simple.

- La longueur d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- **Un cycle** est une chaîne dont les extrémités coïncident.

Exemple :



C

la chaîne C est de longueur :3

1.2 Graphe connexe

Définition 1.2.1 *Un graphe $G = (S, A)$ est connexe s'il existe au moins une chaîne entre une paire quelconque de sommets de G.*

Remarque :

-la relation définie sur S par :

$$x_i \mathscr{R} x_j \Leftrightarrow \begin{cases} soit \quad x_i = x_j \\ soit\ il\ existe\ une\ \text{chaîne}\ joignant\ x_i\ \text{à}\ x_j \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexivité, symétrie, transitivité).

Les classes d'équivalence $X_1, X_2, ..., X_p$ pour cette relation forment une partition de X. Les X_i pour $i = 1, ...p$ sont appelés composantes connexes, $G[X_i]$ pour $i = 1, ...p$ est un graphe connexe.

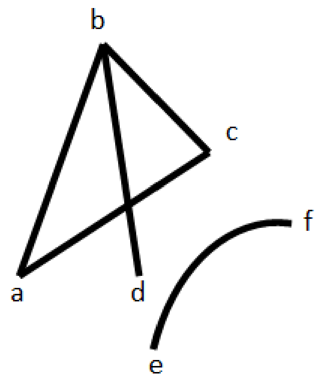
Remarque : Un graphe est dit connexe si et seulement si il contient une seule composante connexe.

Algorithme de recherche d'une composante connexe

Problème : Recherche de la composante connexe qui contient un sommet dans un graphe quelconque.

1. Marquer le sommet $x(+)$.
2. Marquer $(+)$ tout sommets non marqué adjacent à un sommet déjà marqué.
3. Lorsqu'aucun sommet ne peut être marqué l'ensemble des sommets marqués constitue la composante connexe contenant x.

Exemple :



1. On marque c(+)

2. a et b sont adjacents à c, a et b non marqués

   $\Rightarrow$ On marque a et b.

3. d est adjacent à b,d non marqué

   $\Rightarrow$ On marque d

Soit $S = \{a, b, c, d\}$ l'ensemble des sommets marqués $\forall x \in X - S$, x n'est pas adjacent à y, $\forall y \in S$.
l'ensemble $S = \{a, b, c, d\}$ est la composante connexe qui contient c.

1.3 Représentation matricielle d'un graphe simple

Matrice d'adjacence

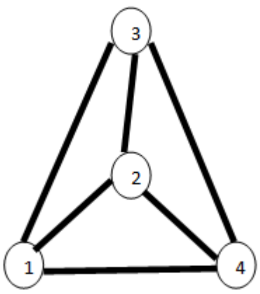
Soit $G = (S, A)$ un graphe simple ayant n sommets numérotés de 1 à n on associe une matrice $n \times n$, $\mathcal{M} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \ \ si \ \ x_i \ \ et \ \ x_j \ \ sont \ \ adjacents \ \ dans \ \ G \\ \\ 0 \ \ sinon \end{cases} \tag{1.1}$$

- $\mathcal{M}$ est appelée la matrice d'adjacence de G.

Exemple

Soit le graphe $G = (S, A)$ et La matrice d'adjacence associée :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice d'adjacence est une matrice symétrique.

Théorème 1.3.1 *Soit $G(S, A)$ un graphe simple de matrice d'adjacence $\mathcal{M}_{(n,n)}$. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice (i,j) de la matrice $\mathcal{M}^n_{(n,n)}$.*

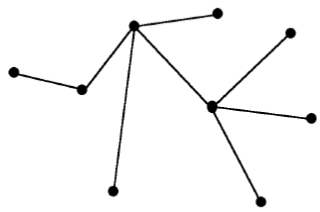
Chapitre 2

Quelques classes de graphes

2.1 Arbres

- Un graphe simple est sans cycle s'il ne contient pas de cycle élémentaire.
- On appelle arbre un graphe connexe sans cycle.

Exemple :



2.1.1 Théorème de caractérisation

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.

Les propriétés suivantes sont équivalentes [2] :

- G est un arbre.
- G est sans cycle comportant $n - 1$ arêtes.
- G est sans cycle, et si l'on rajoute une arête alors on obtient un cycle et un seul.
- G est connexe, si on supprime une arête quelconque il n'est plus connexe.
- Il existe une chaîne et une seule entre toute paire de sommets de G.

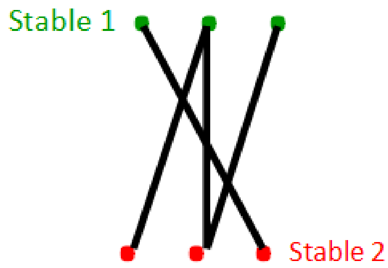
2.2 Graphes bipartis

2.2.1 Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple et $S' \subset S$ on dit que S' est stable ou indépendant si la taille de $G[S']$ est égale à 0.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, G est dite biparti si on peut partitionner V en deux stables.

Exemple



2.2.2 Théorème de caractérisation

Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle élémentaire impaire. [10].

2.3 Graphes Eulériens

2.3.1 Définitions

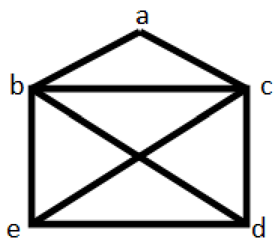
Soit $G = (S, A)$ un graphe simple connexe.

— Une chaîne Eulérienne dans G est une chaîne simple passant par toutes les arêtes du graphe.

Si cette Chaîne est fermée (i.e. il existe une arête reliant le sommet de départ au sommet d'arrivée), on parlera de cycle Eulérien.

— Un graphe simple est dit **Eulérien** s'il possède un cycle Eulérien.

Exemple :



chaîne Eulérienne :e-b-d-e-c-a-b-c-d, mais pas de cycle Eulérien

Théorème 2.3.1 (Euler 1736, [5]) *Un graphe simple connexe $G = (X; A)$ est Eulérien si, et seulement si, pour tout sommet x de X, $d_G(x)$ est pair.*

Démonstration : Supposons $G = (X; A)$ Eulérien, soit alors C un cycle Eulérien et x un sommet de G. Le cycle C contient toutes les arêtes de G, donc toutes les arêtes ayant x comme extrémité. Lors d'un parcourt de C on arrive en x autant de fois qu'on en repart, chaque arête de G étant présente une et seule fois dans C, $d_G(x)$ est nécessairement un nombre pair.
Réciproquement, supposons que tous les sommets de G soient de degré pair. Formons une chaîne simple C_1, aussi longue que possible, à partir d'un sommet arbitraire x_0. Cette chaîne C_1 est en fait un cycle, sinon, son extrémité finale serait de degré impair. Si ce cycle C_1 contient toutes les arêtes du graphe G, C_1 est le cycle Eulérien cherché. Dans le cas contraire, on considère le sous-graphe H obtenu à partir de G en éliminant les arêtes de C_1 et ses sommets qui ne sont pas extrémités à aucune des arêtes restantes. Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle C_1. Soit x_1 un tel sommet. Les sommets de H sont encore de degré pair. Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle C_2 dans H à partir de x_1. Rallongeons le cycle C_1 en insérant à partir du sommet x_1 le cycle C_2 pour former un cycle C_{01} de x_0 à x_0. Si ce cycle C_{01} possède toutes les arêtes de G, C_{01} est le cycle Eulérien cherché. Sinon, on continue ce processus, qui se terminera car les sommets du graphe G sont en nombre fini.

2.3.2 Algorithme d'Euler

Construction d'un cycle Eulérien :

1. Considérer un cycle simple quelconque C du graphe G, supprimer du graphe G toutes les arêtes du cycle C.
2. Tant que G comporte des arêtes faire :

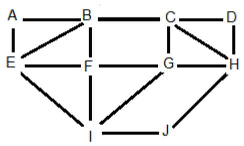
   Dans le cycle C considérer le premier sommet non isolé.

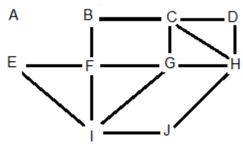
   Lui substituer un cycle simple dans ce sommet est l'origine.

   Supprimer du graphe G toutes les arêtes de ce dernier cycle
3. L'algorithme est fini dès que G n'a plus d'arêtes.

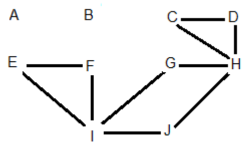
$\Rightarrow$ Le cycle C est alors Eulérien.

Exemple : soit $G = (E, U)$ un graphe simple dans lequel on va construire un cycle Eulérien.

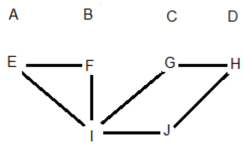




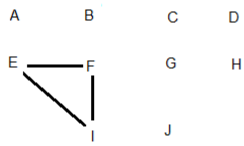
* ABEA



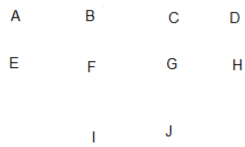
* ABCGFBEA= ABCGFBEA



* ABCDHCGFBEA= ABCDHCGFBEA



* ABCDHJIGHCGFBEA=ABCDHJIGHCGFBEA



* ABCDHJIEFIGHCGFBEA=ABCDHJIEFIGHCGFBEA

la fin de l'algorithme, ABCDHJIEFIGHCGFBEA est bien un cycle Eulérien.

2.4 Graphes Hamiltoniens

2.4.1 Définition

- Une chaîne Hamiltonienne dans un graphe simple est une chaîne simple passant par tous les sommets du graphe une et une seule fois.

Si cette chaîne est fermée, on parlera de cycle Hamiltonien.

-Un graphe est dit **Hamiltonien** s'il possède un cycle Hamiltonien.

Remarque 1 :

-Contrairement au cas des graphes Eulériens : on n'a pas encore trouvé aucune condition nécessaire et suffisante assurant qu'un graphe soit Hamiltonien

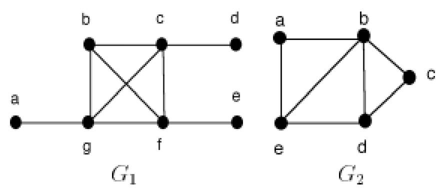
-Il existe, cependant, de nombreux théorèmes donnant des conditions suffisantes.

Théorème 2.4.1 (Ore 1960,[5]) *Soit $G = (X; A)$ un graphe simple d'ordre $n \geqslant 3$: Si pour toute paire $\{x; y\}$ de sommets non adjacents, on a $d_G(x) + d_G(y) \geqslant n$; alors G est Hamiltonien.*

Corollaire : (Dirac 1952) Soit $G = (X; A)$ un graphe simple d'ordre $n \geqslant 3$: Si pour tout sommet x de G ; on a $d_G(x) \geqslant \frac{n}{2}$; alors G est Hamiltonien.

En effet : un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent, si x et y ne sont pas adjacents, on a bien : $d_G(x) + d_G(y) \geqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$

Exemples :



G_1 n'est pas Hamiltonien, car il possède un sommet de degré 1.

G_2 est Hamiltonien :(a ;b ;c ;d ;e ;a) est un cycle Hamiltonien.

Remarque 2 : La condition du corollaire de Dirac n'est pas nécessaire : G_2 est d'ordre 5, et $d_{G_2}(a) = 2 \leqslant \frac{5}{2}$.

Remarque 3 : On a pas d'algorithme efficace et général pour chercher un cycle Hamiltonien dans un graphe quelconque, personne ne sait s'il existe ou pas.

Chapitre 3

Coloration des sommets et arêtes d'un graphe simple

Comme le problème de coloration est un problème très grand on va s'intéressé dans ce chapitre à présenter les colorations "basiques" : la coloration des sommets, la coloration d'arêtes et la coloration totale (sommets et arêtes).

3.1 Coloration des sommets

Définition 3.1.1 *Soit un ensemble fini C appelé l'ensemble des couleurs. Un coloriage d'un graphe* $G = (S, A)$ *est une fonction* $f : S(G) \to C$ *qui affecte une couleur à chaque sommet, telle que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur.*

Remarque :

-Un graphe est k-coloriable s'il peut être colorié au moyen d'un ensemble de k couleurs.

-La coloration est un moyen de donner un contenu intuitif à une notion utile dans des contextes très variés.

-On peut définir aussi une k-coloration comme une partition de l'ensemble des sommets en k parties stables.

Définition 3.1.2 *Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit entier k tel que G est k-coloriable,on le note* $\mathcal{X}(G)$.

Proposition 3.1.1 *Soit $G = (V, A)$ un graphe simple :*

$$\mathcal{X}(G) \leqslant d + 1$$

Où d est le degré maximal des sommets du graphe G.

En effet : soit un graphe simple $G = (V, A)$ Construisons une partition de V en sous-ensembles stables de la manière suivante :

— on considère un sommet v_1 arbitraire de V ; et S_1 est une plus grande partie stable de V contenant v_1.

— s'il existe un sommet v_2 de V qui n'est pas dans S_1, on construit S_2 ; une plus grande partie stable de V contenant v_2 disjointe de S_1.

— s'il existe un sommet v_3 de V qui n'est pas dans $S_1 \cup S_2$; on construit S_3 ; plus grande partie stable de V contenant v_3 telle que S_1, S_2 et S_3 soient deux à deux disjointes.

— V étant un ensemble fini, ce procédé se terminera et nous obtenons une partition $\{S_1, S_2, ..., S_k\}$ de V : En choisissant une couleur par élément de la partition, nous aurons nécessairement : $\mathcal{X}(G) \leqslant k$. Considérons à présent un sommet v de la partie S_k : Le caractère maximal des parties construites assure que ce sommet v est adjacent à au moins un sommet de chaque partie $S_i, i \in \{1, 2, ..., k-1\}$
On en déduit alors que : $d_G(v) \geqslant k - 1$ d'où : $d_G(v) \geqslant k - 1 \geqslant \mathcal{X}(G) - 1$
D'où l'inégalité voulu

Proposition 3.1.2 *Soit $G = (V, A)$ un graphe simple on a :*

$$\mathcal{X}(G') \leqslant \mathcal{X}(G)$$

Pour tout sous-graphe G' de G.

En effet :

Soit $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes simples, une application $f : S \to S'$ qui envoie les sommets de G sur ceux de G' est un morphisme de graphes si :

$$\forall \{u, v\} \in A, \{f(u), f(v)\} \in A'$$

$G' \subseteq G$ s'il existe un morphisme de G vers G' on aura alors $\mathcal{X}(G') \leqslant \mathcal{X}(G)$.

Proposition 3.1.3 *Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.*

$$\mathcal{X}(G) \leq n$$

(**)

Où n est l'ordre du graphe simple G.

Cas particulier :

L'inégalité (**) devient une égalité pour un graphe complet.

En effet : D'après proposition 2 on a :

$$\mathcal{X}(G) \leqslant \mathcal{X}(G')$$

Avec G' est graphe complet associe à G, et on a $\mathcal{X}(G') = ord(G')$. D'où :

$\mathcal{X}(G) \leqslant ord(G') = \mathcal{X}(G')$

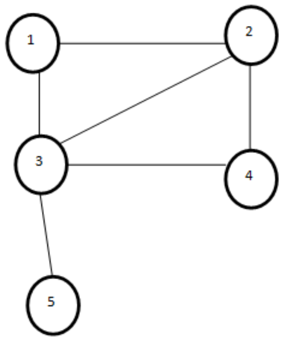
Ainsi : $\mathcal{X}(G) \leqslant n$

Algorithme de welsh-powell pour colorer les sommets d'un graphe simple :

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple :

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants (dans certains cas plusieurs possibilités).
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore coloré de la liste.
8. Répéter les opérations 4 à 7.
9. Continuer jusqu'à avoir coloré tous les sommets

Exemple :



Sommet	Degré	voisins
1	2	$\{2,3\}$
2	3	$\{1,3,4\}$
3	4	$\{1,2,4,5\}$
4	2	$\{2,3\}$
5	1	$\{3\}$

Les sommets ranger suivant leurs degré :

Sommet	Degré	voisins
3	4	$\{1,2,4,5\}$
2	3	$\{1,3,4\}$
1	2	$\{2,3\}$
4	2	$\{2,3\}$
5	1	$\{3\}$

Le tableau représentant les couleurs des sommets

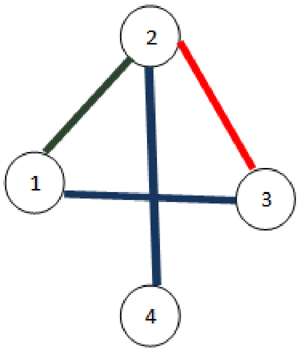
Couleur/Sommet	3	2	1	4	5
B :blue	B	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
R :rouge	$\times$	R	$\times$	$\times$	R
V :vert	$\times$	$\times$	V	V	$\times$

3.2 Coloration des arêtes

Nous détaillons dans la suite un autre paramètre de coloration des graphes qui est la coloration d'arêtes.

Définition 3.2.1 *La coloration des arêtes d'un graphe consiste à attribuer une couleur à chaque arête du graphe telle que deux arêtes ayant un sommet commun n'aient jamais la même couleur.*

Exemple :



Définition 3.2.2 *L'indice chromatique d'un graphe simple G est le nombre minimum nécessaire pour colorier les arêtes d'un graphe donné, on le note $\mathcal{X}'(G)$*

Théorème 3.2.1 :(vizing 1964) *Soit $G = (S, A)$ un graphe simple,et $\mathcal{X}'(G)$ l'indice chromatique on a :*

$$d \leqslant \mathcal{X}'(G) \leqslant d + 1$$

avec d est le degré maximal des sommets de G.

Définition 3.2.3 *Un graphe est de classe 1 si $\mathcal{X}'(G) = d$, de classe 2 si $\mathcal{X}'(G) = d + 1$.*

Théorème 3.2.2 *(Konig-Hall,[11]) Tout graphe biparti est de classe 1.*

Remarque 1 :

— Les graphes complets d'ordre pair sont aussi de classe 1.

— Les graphes complets impairs, les cycles de longueur impaire sont de classe 2.

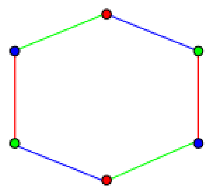
Remarque 2 : Le problème de coloration des arêtes d'un graphe G, peut se ramener à celui des sommets pour un graphe on définissant le graphe adjoint G' ainsi les sommets de G' sont les arêtes de G et deux sommets de G' sont adjacents si dans G ces deux arêtes ont une extrémité commune.

3.3 Coloration totale (sommets+arêtes)

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.

Définition 3.3.1 *Le nombre chromatique total $\mathcal{X}''(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que l'on puisse colorier les sommets et arêtes de G en k couleurs de sorte que deux sommets adjacents, deux arêtes incidentes à un même sommet, un sommet et une arête incidente aient des couleurs différentes.*

Exemple :



Graphe totalement coloré

Conjecture : (Bezhad et Vizing, 1963,[11]) Pour tout graphe G de degré maximum d.

$$d + 1 \leqslant \mathcal{X}''(G) \leqslant d + 2$$

Définition 3.3.2 *Un graphe est de type 1 si $\mathcal{X}''(G) = d + 1$; de type 2 sinon.*

Exemples de graphes de type 1 : les graphes complets d'ordre impair, les complets bipartis $K_{(n,n)}$, les cycles de longueur multiple de trois, ...

Remarque : Pour un graphe donné $G = (S, A)$, les problèmes de déterminer $\mathcal{X}, \mathcal{X}', \mathcal{X}''$ sont tous des problèmes NP-complets, ils ne sont pas traité ici.

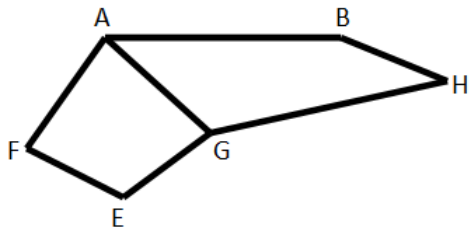
Chapitre 4

Couplage dans un graphe simple

4.1 Définition

Etant donné un graphe simple $G = (X, A)$, un couplage est un sous-ensemble d'arêtes $K \subset A$ tel que deux arêtes quelconques de K ne sont pas adjacentes.

Exemple :



$C_0 = \{\{A, B\}, \{F, E\}, \{G, H\}\}$ est un couplage.

$C_1 = \{\{A, B\}, \{A, G\}, \{F, E\}\}$ n'est pas un couplage.

4.2 Couplage parfait

$G = (X, A)$ un graphe simple

-Un sommet $i \in X$ est dit saturé par le couplage $K \subset A$ s'il existe une arête de K incidente à i.

-Un couplage K qui sature tous les sommets du graphe est appelé **couplage parfait**.

Le couplage C_0 dans l'exemple précédant est bien un couplage parfait.

Remarque : Si un graphe simple G contient un couplage parfait nécessairement le nombre de ces sommets est pair.

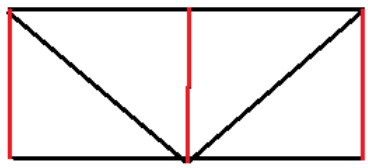
4.3 Couplage de taille maximale

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.

On appelle couplage maximal de G un couplage C tel que :

$C' \subset A$ et si $C \subset C' \Rightarrow$ C' n'est pas un couplage de G.

Exemple

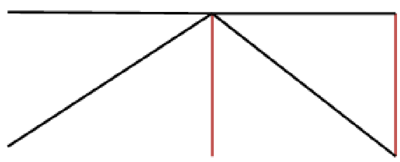


Les arêtes rouges constituent un couplage maximal.

On appelle couplage maximum de G un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes de G. Un graphe simple peut posséder plusieurs couplages maximum.

Remarque : Un couplage parfait est un couplage maximum, la réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple :



les arêtes rouges forme un couplage maximum qui n'est pas parfait.

Algorithme de détermination d'un couplage maximum

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.

On cherche à construire un couplage maximal dans G selon le principe suivant.

- On commence avec un couplage vide C.

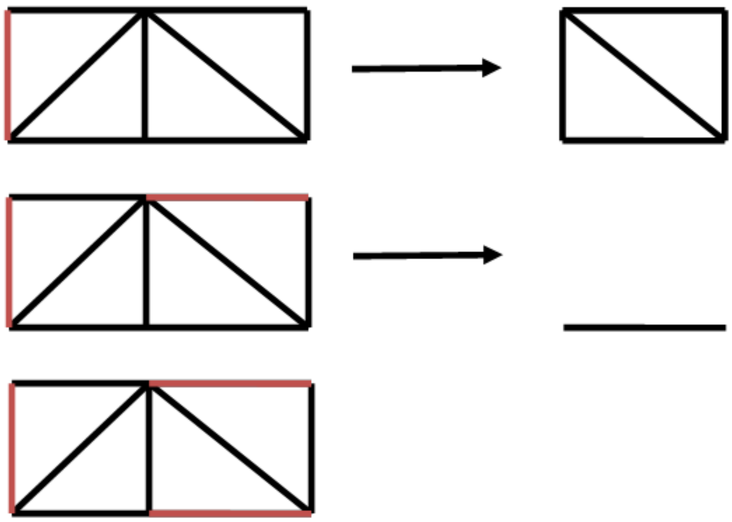
- Tant que G possède au moins une arête :

* On choisit une arête A de G dont la somme des degrés des extrémités soit minimum .

* On ajoute l'arête A au couplage C .

* On retire de G l'arête A et toutes les arêtes adjacentes à A.

Exemple :



Définition 4.3.1 *Soit $G = (S, E)$ un graphe simple et M un couplage :*

$*$*Une chaîne M-alternante dans G est une chaîne dont les arêtes sont alternativement dans $E \backslash M$ et dans M.*

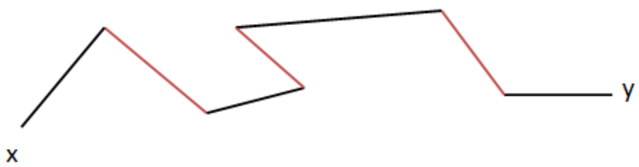
$*$*Une chaîne M-alternante dont la fin et le début sont des sommets exposés (insaturés) est dit M-augmentante.*

Théorème 4.3.1 *(Berge 1957,[12]) Soit M un couplage dans un graphe G ,M est maximum si, et seulement si, il n'existe pas une chaîne M-augmentante.*

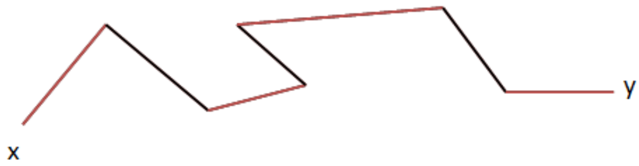
Démonstration : Soit $G = (S, E)$ un graphe simple et M un couplage

Nous venons de montrer qu'il existe une chaîne M-augmentante si, et seulement si, M n'est pas maximum.

$\Rightarrow$) S'il existe une chaîne M-alternée reliant deux sommets insaturés distincts :



En inter-changeant les arêtes dans M et les arêtes dans $E\backslash M$ le long de cette chaîne, on obtient un nouveau couplage M_1 avec $|M_1| = |M| + 1$.



Donc le couplage M n'est pas maximum.

$\Leftarrow$) supposons que le couplage M n'est pas maximum et soit M_1 un couplage maximum quelconque. Définition un sous-graphe $G(F)$ induit par F avec :$F = (M_1\backslash M) \cup (M\backslash M_1)$ dans le graphe $G(F)$ le degré de chaque sommet est soit 1,soit 2 car il est incident au plus à une arête de M et au plus à une arête de M_1.

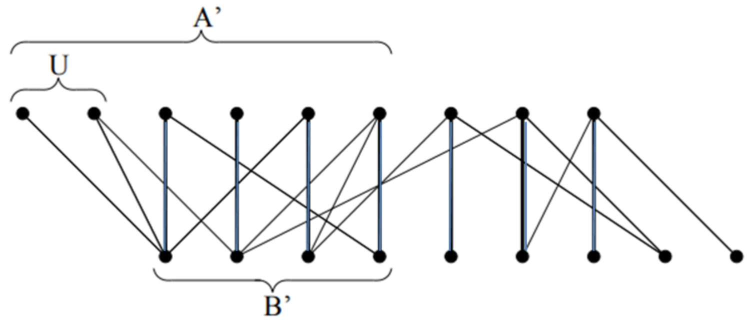
chaque composant connexe est soit un cycle soit un chaîne. Les cycles sont donc de longueur paire et contient tous autant d'arêtes de M que d'arêtes de M_1 comme M_1 à plus d'arêtes que M ,alors une des chaînes P contient plus d'arêtes de M_1 que de M.Ainsi P commence et termine par deux arêtes de M_1 est donc M-augmentante.

4.4 Couverture dans un graphe biparti

Définition 4.4.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe .Un ensemble $K \subseteq V$ est une couverture de E si toute arête de G est incidente à un sommet de K.*

Théorème 4.4.1 *(Konig 1931,[12])Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti .La cardinalité maximum d'un couplage est égale à la cardinalité minimum d'une couverture.*

Démonstration : Soit M un couplage maximum, U l'ensemble des sommets exposés de A et V' l'ensemble des sommets de G reliés à U par des chaînes M-alternantes. Posons $A' = A \cap V'$ et $B' = B \cap V'$,voir figure ci-dessous .



L'ensemble B' est saturé par M. En effet ,si un sommet $b \in B'$ n'est pas couplé alors la chaîne M-alternante qui le relie à un sommet de U est une chaîne M-augmentante et le théorème précédant contredit la maximalité de M. De plus $N(A') = B'$ (avec N(A') est l'ensemble des voisins des sommets de A') par définition de V'.
Soit $K = B' \cup (A \backslash A')$.Alors toute arête de G a une extrémité dans K. Ainsi K est une couverture de G et $|K| = |M|$ car $A \backslash A'$ est l'ensemble des sommets de A qui sont couplés avec des sommets dans $B \backslash B'$.

4.5 Application

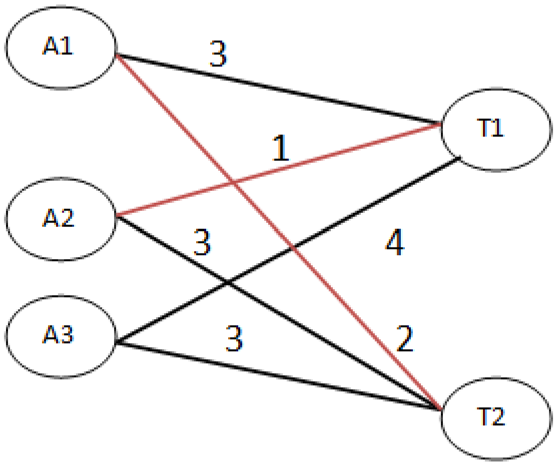
Un couplage peut être utilisé dans les problèmes d'affectation des tâches qui sont une généralisation du problème de couplage maximum dans un graphe biparti, puisqu'il s'agit de trouver, parmi les couplages de cardinal maximal, celui qui a le poids minimum (ou maximum).

L'exemple le plus classique est l'affectation de n tâches à m agents. On suppose qu'on connaît le coût de réalisation c_{ij} d'une tâche i par un agent j (ce coût est infini s'il n'est pas possible d'effectuer cette tâche par l'agent). Le but est d'affecter toutes les tâches de sorte à minimiser le coût total de réalisation (défini comme la somme des coûts). On peut modéliser ce problème par un graphe biparti valué $G = (X \cup Y, E, C)$ dans lequel X est l'ensemble des tâches,Y l'ensemble des agent, et les arêtes $\{i, j\} \in E$ sont pondérées par le coût de réalisation de la tâche i par l'agent j.

Trois agents A_1, A_2, A_3 sont affecter à deux tâches dont les coûts dépendent de la difficulté de la tâche, comme indiqué sur le tableau. Sur quelle tâche doit-il affecter chaque agent pour minimiser le coût total ?

	A_1	A_2	A_3
T_1	3	1	4
T_2	2	3	3

Cela revient à chercher un couplage de taille 2 dans le graphe ci-dessous de telle sorte à minimiser la somme des coûts des arêtes du couplage.

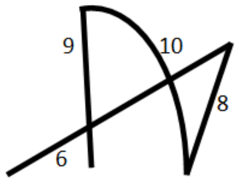


Chapitre 5

Applications

5.1 Préliminaires

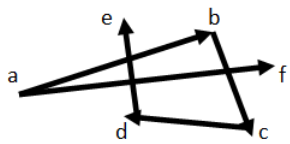
Graphe simple valué : un graphe simple $G = (S, A)$ est dit **valué** si à chaque arête de G est associée une valeur réelle positive.



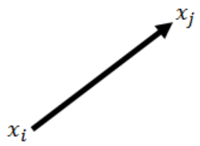
Graphe orienté est la donnée d'un couple $G = (S, A)$ d'ensembles.

Les éléments de S sont appelés les sommets de G.

Les éléments de A sont appelés arcs de G avec :$A \subseteq S \times S$ et $(x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \notin A$.



Soit $u = (x_i, x_j)$ un arc dans un graphe orienté.



-le sommet x_i est un prédécesseur du sommet x_j.

-le sommet x_j est un successeur du sommet x_i.

-u est l'arc sortant de x_i ou arc incident à x_i vers l'extérieur

-u est un arc entrant dans x_j ou arc incident à x_j vers l'intérieur

-Ensemble des arcs sortant de $x_i = \omega^+(x_i)$

-Ensemble des arcs entrant de $x_j = \omega^-(x_j)$

-Ensemble des arcs incidents $\omega(x) = \omega^+(x) \cup \omega^-(x)$

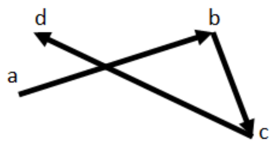
-Ensemble des voisins de x : $\nu(x) = pred(x) \cup succ(x)$

Chemin

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

— Un chemin de G est une séquence finie de sommets de G, C=$\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_p\}$ telle que (x_i, x_{i+1}) est un arc pour tout $i = 1, ..., p-1$,(cela correspond à la notion de chaîne orientée).

Exemple :



C

— Si aucun des sommets composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin élémentaire.

— Si aucune des arêtes composant la séquence n'apparaît plus d'une fois, le chemin est dit chemin simple.

— **Un circuit** est un chemin dont les extrémités coïncident.

5.2 Problème du plus court chemin

Les problèmes de cheminement dans les graphes, en particulier la recherche du plus court chemin, comptent parmi les problèmes les plus anciens de la théorie des graphes et les plus importants par leurs applications : coût de transport, temps de parcours, problème de trafic.... Les algorithmes de recherche de plus court chemin seront différents selon les caractéristiques du graphe.

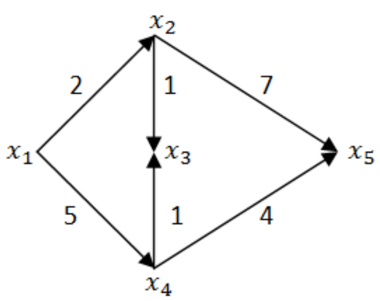
Nous nous contenterons simplement ici de d'écrire les algorithmes les plus classiques (FORD,DANTZIG), sans explorer toutes les situations.

5.2.1 Algorithme de FORD

On suppose que le graphe $G = (X, U)$ ne contient pas de circuit négatif $|X| = n$.

1. Numérotation des sommets dans n'importe quel ordre à l'exception de l'origine et l'extrémité du chemin qui doivent être numérotés respectivement x_1 et x_n.
2. Affectation d'une valeur $x_i = \infty \;\; (2 \leqslant i \leqslant n) \;\; et \;\; x_1 = 0$.
3. Pour chaque arc (x_i, x_j) si $\epsilon_{ij} = x_j - x_i > d_{ij}$ (avec d_{ij} est la valeur de l'arc(x_i, x_j)), on remplace x_j par $x_j = x_i + d_{ij}$ sinon on ne change rien.
4. On réitère la troisième étape jusqu'à ce que aucun arc ne peut diminuer les x_j.

Exemple :



— $x_1 = 0$

$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \infty$

— $i = 1 \qquad j = 2 \qquad x_2 - x_1 = \infty > d_{12} = 2$

$x_2 = x_1 + d_{12} = 2$

$j = 4 \qquad x_4 - x_1 = \infty > d_{14} = 5$

$x_4 = x_1 + d_{14} = 5$

— $i = 2$ $\quad j = 3$ $\quad x_3 - x_2 = \infty > d_{23} = 1$

$x_3 = x_2 + d_{23} = 3$

$j = 5$ $\quad x_5 - x_2 = \infty > d_{25} = 7$

$x_5 = x_2 + d_{25} = 9$

— $i = 4$ $\quad j = 3$ $\quad x_3 - x_4 = 3 - 5 = -2 \not> d_{43} = 1$

x_3 ne va pas changer.

$j = 5$ $\quad x_5 - x_4 = 9 - 5 = 4 \not> d_{45} = 4$

x_5 ne va pas changer.

La valeur du chemin le plus court égale à 9.

On a deux chemins : $x_1 \to x_2 \to x_5$ ou bien $x_1 \to x_4 \to x_5$.

Notons que au cas de recherche du chemin le plus long on initialise tous les sommets du graphe avec la valeur 0 et la condition de changement sera :

$\epsilon_{ij} = x_j - x_i < d_{ij}$ *(avec* d_{ij} *est la valeur de l'arc*(x_i, x_j)*)*

5.2.2 Algorithme de DIJKSTRA

"Initialisation de l'algorithme"

1. On affecte le poids 0 au sommet origine x_1 et on attribue provisoirement un poids ∞ aux autres sommets.

   "Répété les opérations suivantes tant que le sommet de sortie x_n n'est pas affecté d'un poids définitif"

2. Parmi les sommets dont le poids n'est pas définitivement fixé choisir le sommet x de poids $P(x)$ minimal. Marquer définitivement ce sommet x affecté du poids $P(x)$.

3. Pour tous les sommets y qui ne sont pas définitivement marqués, adjacents au dernier sommet fixé x :

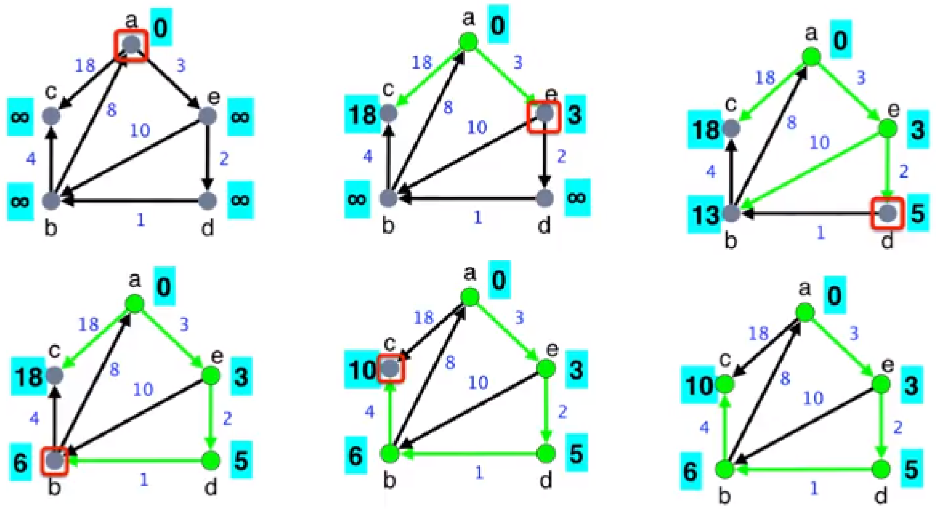
   * Calculer la somme S du poids de x et du poids de l'arête reliant x à y.

   * Si la somme S est inférieure au poids provisoirement affecté au sommet y, affecter provisoirement à y le nouveau poids S et indiquer entre parenthèses le sommet x pour se souvenir de sa provenance.

L'algorithme s'arrête quant le sommet final est marqué.

Exemple :

Soit $G = (E, U)$ un graphe orienté,valué :



La valeur du chemin le plus court égale à 10, le chemin est $a \to e \to d \to b \to c$.

5.3 Problème central d'ordonnancement

La réalisation d'un projet nécessite souvent une succession de tâches auxquelles s'attachent certaines contraintes :

De temps : délais à respecter pour l'exécution des tâches.

D'antérieure :certaines tâches doivent s'exécuter avant d'autres.

De production :temps d'occupation du matériel ou des hommes qui l'utilisent.

les problèmes d'ordonnancement dans le cadre de gestion d'un projet ont pour objectif de répondre au mieux au besoin exprimés par un client, au meilleur coût et dans les meilleurs délais en tenant compte des différents contraintes.

Il existe trois méthodes d'ordonnancement : le diagramme de Gantt ,la méthode MPM (Méthode des potentiels métra), le PERT (Program Evaluation and Review Technique). On s'intéresse ici à la méthode MPM et PERT, ces deux méthodes aux seules contraintes temporelles.

5.3.1 Méthode des potentiels -métra (MPM)

Cette méthode été développée par une équipe française en (1958).

Niveaux des sommet d'un graphe orienté sans circuit

Soit $G = (S, A)$ un graphe sans circuit. Les niveaux des sommets de G est une partition $N_0, \ldots, N_p, (p \geqslant 0)$ de S construite par l'algorithme suivant :

Initialisation : $X = S, k = 0$

Tant que $X \neq \emptyset$ faire :

– N_k = ensemble des sommets X sans précédents dans X

– $X = X \setminus N_k$

– $k = k + 1$

Puisque le graphe est sans circuit, l'algorithme s'arrête en un nombre fini p d'itérations.

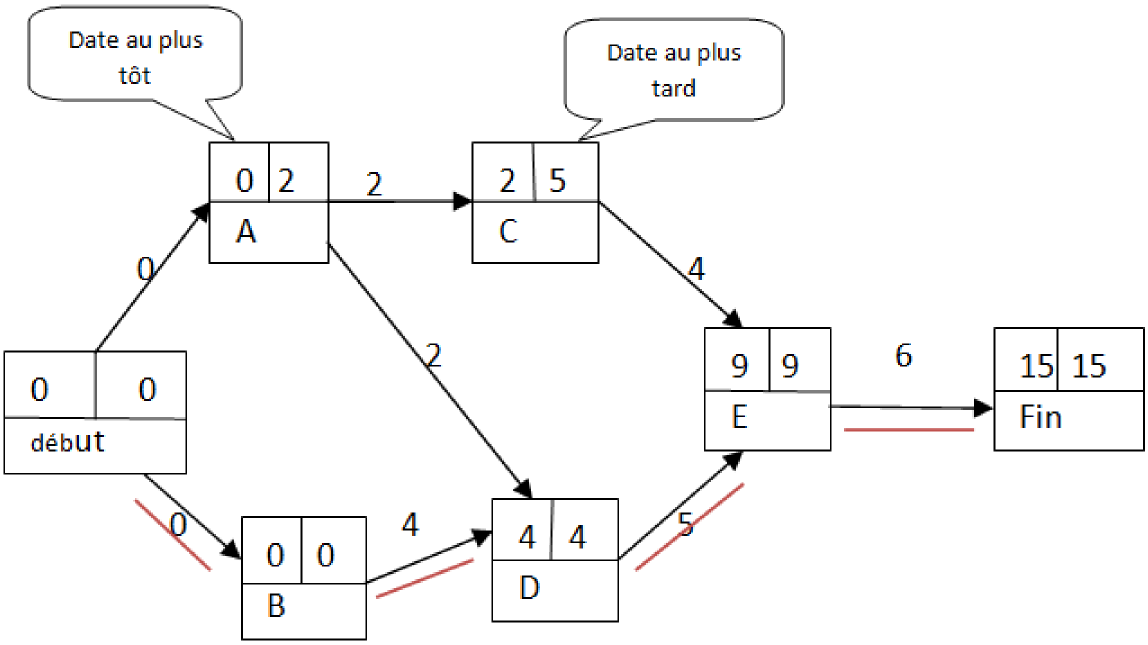
Le niveau (ou le rang) d'un sommet x, noté $N(x)$, est l'entier k tel que $x \in N_k$

principe

- On associe à chaque tâche un sommet du graphe ;
- On définit un arc (a,b) si la tâche a précède la tâche b ;
- On affecte à chaque arc (a,b) une valeur égale à durée d(a) de la tâche a (ou plus généralement un délai pour commencer la tâche b) ;
- On ordonne les sommets par niveau ;
- On ajoute un sommet fictif δ représentant le début du projet et on le relie à toutes les taches du premier niveau par des arcs de valeur 0 ;
- On ajoute un sommet fictif ϕ représentant la fin du projet et on relie chaque tâche x du dernier niveau à ϕ par un arc (x, ϕ) de valeur égale à la durée de la tâche x .

Exemple

Tâche	Durée	Tâches antérieures
A	2	—
B	4	—
C	4	A
D	5	A,B
E	6	C,D



Remarques :

-On initialise le sommet Début avec une date au plus tôt $=0$.

-Date au plus tôt : $t_j = \max_{i \in U^-(j)}[t_i + V_{ij}]$

où V_{ij} est la valuation de l'arc (i,j),en général V_{ij} =durée de la tâche i.

-On initialise le sommet Final avec une date au plus tard =date au plus tôt.

-Date au plus tard : $t_i^* = \min_{j \in U^+(i)}[t_j^* - V_{ij}]$.

Date à laquelle doivent être exécutées les tâches sans remettre en cause la durée optimale de fin du projet.

-On peut déterminer **le chemin critique :**succession de tâches sur le chemin le plus long au sens des durées.

Pour toutes les tâches du chemin critique les dates au plus tôt et au plus tard coïncide.

$B \to D \to E$ est le chemin critique de l'exemple précédant.

Marges de réalisation :

-Marge totale : elle correspond au retard maximum que l'on peut apporter au démarrage d'une tâche sans retarder la fin du projet.

$$M_i = [\min_{j \in U^+(i)}(t_j^* - t_i - V_{ij})] = t_i^* - t_i$$

-Marge libre : elle correspond au retard maximum que l'on peut attribuer au démarrage d'une tâche sans changer les dates de début au plus tôt des tâches suivantes.

$$M_i = [\min_{j \in U^+(i)}(t_j - V_{ij})] - t_i$$

5.3.2 Méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique)

C'est une méthode américaine datée de 1958.

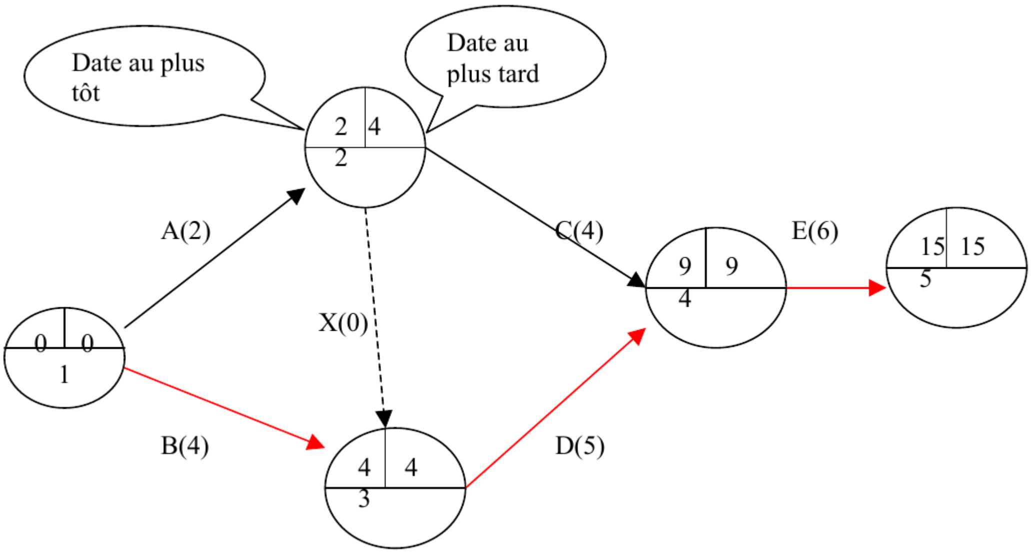
Principe

- Un arc correspond à une tâche du projet ;
- La valeur d'un arc u représente la durée d'une tâche d(u) ;
- Un sommet est un événement signifiant le début ou la fin d'une ou plusieurs tâches ;
- On ordonne les tâches par niveau comme pour la méthode MPM ;
- On ajoute un sommet fictif représentant l'étape du début du projet à partir duquel partent les arc correspondants aux tâches du premier niveau ;
- On ajoute un sommet fictif représentant l'étape de la fin du projet auquel arrivent les arcs correspondants aux tâches du dernier niveau

Exemple

Considérons le tableau des tâches de l'exemple précédant :

Le graphe PERT est donné comme suit :



Remarques :

- Il a été d'introduire une tâche fictive de durée égale à 0,pour marquer la relation l'antériorité ente la tâche A et D.

- Le chemin critique est :$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$.

- Les tâches critiques sont B,D et E.

- Les marges s'obtiennent de la même façon que pour la méthode MPM.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'est porté sur l'histoire de la théorie des graphes. Dans un premier nous avons commencé par des notions de bases de la théorie des graphes et plus précisément les graphes simples. Dans un second temps nous avons présenté quelques classes de graphes, leurs théorèmes caractéristiques et quelques algorithmes quand ils existent.Concernant Le troisième chapitre on a évoqué le problème de coloration des sommets et des arêtes dans un graphe simple, des propriétés et des algorithmes de coloration. Avant de finir notre modeste travail nous avons parlé du couplage dans un graphe simple et son application dans la réalité.Finalement nous avons traité deux problèmes d'application des graphes dans le monde réel.

Bibliographie

[1] Ahmed EL HILALIALAOUI , Ghizlane BENCHEIKH, Fatima ELKHOUKHI Initialisation à la recherche opérationnelle 1ére Édition 2009.

[2] Christophe Clavier 1 2 1 Institut d'Ingénierie Informatique de Limoges (3iL) 2 Université de Limoges – XLIM Juin 2010 Introduction a la théorie des graphes.

[3] Courcelle Bruno Introduction à la théorie des graphes : Définitions, applications et techniques de preuves Université Bordeaux 1, LaBRI (CNRS UMR 5800) April 20, 2004.

[4] Didier Maquin Version provisoire du 3 mai 2003 Éléments de Théorie des Graphes INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE École Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique.

[5] Eric Sigward Introduction à la théorie des graphes Mars 2002.

[6] G.Bavier Les techniques d'ordonnancement.

[7] Gregory Morel. Stabilité et coloration des graphes sans P5. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2011. Français.

[8] Luminy Pierre Arnoux Fernand Didier Catherine Dufossé Nicolas Lichiardopol Christian Mauduit Dominique Proudhon Christiane Rambaud, Pour la Terminale ES Groupe IREM , 18 octobre 2002

[9] Mohammed Tamali. Théorie des graphes. Doctoral. Algeria. 2013.

[10] N.Brauner Nadia.Brauner@imag.fr université crenoble alpes.

[11] Olivier Togni, IEM/LE2I L3 : cours Graphes I6S3 olivier.togni@u-bourgogne.fr

[12] http ://deptinfo.unice.fr